A STUDY ON SIXTH GRADE STUDENTS' UNDERSTANDING OF MULTIPLICATION OF FRACTIONS USING PIRIE AND KIEREN MODEL

A THESIS SUBMITTED TO
THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
OF
THE MIDDLE EAST TECHNICAL UNIVERSITY

BY

NURGÜL DÜZENLİ GÖKALP

IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS
FOR
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN
SECONDARY SCIENCE AND MATHEMATICS EDUCATION

DECEMBER 2012

Approval of the thesis:

A STUDY ON SIXTH GRADE STUDENTS' UNDERSTANDING OF MULTIPLICATION OF FRACTIONS USING PIRIE AND KIEREN MODEL

submitted by **NURGÜL DÜZENLİ GÖKALP** in partial fulfillment of the requirements for the degree of **Doctor of Philosophy in Secondary Science and Mathematics Education Department, Middle East Technical University** by,

Prof. Dr. Canan Özgen ________
Dean, Graduate School of **Natural and Applied Sciences**

Prof. Dr. Ömer Geban ________
Head of Department, **Secondary Science and Mathematics Education**

Prof. Dr. Safure Bulut ________
Supervisor, **Secondary Science and Mathematics Edu. Dept., METU**

Examining Committee Members:

Prof. Dr. Ziya Argün ________
Secondary Science and Mathematics Education Dept., Gazi University

Prof. Dr. Safure Bulut ________
Secondary Science and Mathematics Education Dept., METU

Prof. Dr. Ömer Geban ________
Secondary Science and Mathematics Education Dept., METU

Assoc. Prof. Dr. Ayhan Kürşat Erbaş ________
Secondary Science and Mathematics Education Dept., METU

Assoc. Prof. Dr. Erdinç Çakıroğlu ________
Elementary Education Dept., METU

Date: 31.12.2012

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Name, Last name: Nurgül Düzenli Gökalp

Signature:

ABSTRACT

A STUDY ON SIXTH GRADE STUDENTS' UNDERSTANDING OF MULTIPLICATION OF FRACTIONS USING PIRIE AND KIEREN MODEL

Düzenli Gökalp, Nurgül
Ph.D., Department of Secondary Science and Mathematics Education
Supervisor: Prof. Dr. Safure Bulut

December 2012, 162 pages

The purposes of this study were to investigate sixth grade students' understanding of multiplication of fractions in terms of the Pirie–Kieren Model of Understanding in the light of use of multiple representations and to improve mapping feature of the current theory to increase depicting power of the maps produced. One of the qualitative research methods, case study design was used. This study was conducted with two sixth grade students at a public school in Etimesgut, Ankara in the spring semester of 2009-2010. Students learnt fractions. They completed activity sheets during the lessons. They completed self-evaluation forms and wrote journals just after the instruction. After that semi- structured interviews were conducted with two students in order to analyze their understanding about multiplication of fractions. The data collected from interviews were used to reveal understanding maps of each student. Moreover, the data from activity sheets, student journals, observations, and self-evaluation forms were used to strengthen the findings from the interviews. This study showed that there was a relationship between students' preference on the use of different type of representations and attained understanding level of multiplication of fractions. It was also found that establishing connection between multiplication of fraction concept and real life usage of these concepts and extending whole number multiplication to the multiplication with the fractions were acted as an obstacle for understanding the multiplication of fractions. In the current study, it was seen that there was a relationship between question type and students use of representations. Moreover, teachers should use different type of representations in their classrooms more frequently in order to help students to reach higher level of understandings. Teachers should also connect new ideas to what the students have already learned for deeper understanding of them.

Keywords: Mathematics Education, Growth of Understanding, Multiplication of Fractions, Multiple Representations, Pirie and Kieren Theory of Understanding

ÖZ

ALTINCI SINIF ÖĞRENCİLERİNİN KESİRLERDE ÇARPMA ANLAMALARI ÜZERİNE PIRIE VE KIEREN MODELİNİN KULLANILDIĞI BİR ÇALIŞMA

Düzenli Gökalp, Nurgül
Doktora, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü
Tez danışmanı: Prof. Dr. Safure Bulut

Aralık 2012, 162 sayfa

Bu çalışmanın amaçları altıncı sınıf öğrencilerinin kesirlerde çarpma anlamalarını çoklu gösterim kullanımının ışığında ve Pirie ve Kieren'in anlama teorisi doğrultusunda araştırmak ve mevcut teorinin haritalama özelliğini üretilen haritaların gösterim gücünü arttıracak doğrultuda geliştirmektir. Nitel araştırma yöntemlerinden biri olan durum çalışması deseni kullanılmıştır. Bu çalışma 2009 2010 öğretim yılının bahar döneminde Ankara ili Etimesgut ilçesinde bulunan bir devlet ilköğretim okulundaki iki 6. sınıf öğrencisiyle yapılmıştır. Öğrenciler kesirleri öğrenmişler ve ders boyunca aktivite kâğıtlarını tamamlamışlardır. Ayrıca, öğretimden hemen sonra, öğrenciler öz değerlendirme formlarını doldurmuşlar ve günlük yazmışlardır. İki öğrenciyle yarı yapılandırılmış mülakatlar onların kesirlerde çarpma işlemini anlamalarını analiz etmek üzere yapılmıştır. Mülakatlardan toplanan veriler her bir öğrencinin anlama haritalarını oluşturmak için kullanılmıştır. Ayrıca, aktivite kâğıtları, öğrenci günlükleri, gözlemler ve öz değerlendirme formları mülakatlardan bulunanları güçlendirmek amacıyla kullanılmıştır. Bu çalışma öğrencilerin farklı tipteki gösterim kullanma tercihleri ile kesirlerde çarpma konusunda ulaştıkları anlama seviyeleri arasında ilişki olduğunu göstermiştir. Ayrıca kesirlerde çarpma kavramı ve bu kavramların gerçek hayatta kullanımları ve tam sayılarla çarpmanın kesirlerde çarpmaya genişletilmesi gibi durumların kesirlerde çarpmanın temellerini anlama sürecinde engel oluşturabileceği bulunmuştur. Bu çalışmada, soru tipiyle öğrencilerin gösterimleri kullanmaları arasında bir ilişki olduğu görüldü. Ayrıca, öğretmenler öğrencilerin yüksek anlama seviyelerine çıkmalarına yardım etmek için sınıfta farklı gösterimleri daha sık kullanmalıdır. Öğretmenler öğrencilerinin daha iyi anlamalarını sağlamak için de yeni konuları öğrencilerin öğrendikleriyle birleştirmelidirler.

Anahtar kelimeler: Matematik Eğitimi, Kavramanın Gelişimi, Kesirlerde Çarpma, Çoklu Gösterimler, Pirie ve Kieren Anlama Teorisi

To my husband and my parents

ACKNOWLEDGMENTS

I take immense pleasure in thanking my supervisor, Prof. Dr. Safure Bulut for the valuable guidance and advice. She inspired me greatly to work in this thesis.

I would like to show my great appreciation to the committee members, Prof. Dr. Ziya Argün, Prof. Dr. Ömer Geban, Assoc. Prof. Dr. Ayhan Kürşat Erbaş, and Assoc. Prof. Dr. Erdinç Çakıroğlu. I am grateful for their support and help.

I am grateful to Assoc. Prof. Dr. Manjula Sharma from The Sydney University Physics Education Research (SUPER) Group for the valuable guidance at the early stages of this thesis.

I would like to thank to Zübeyde Demet Kırbulut and Ayla Çetin Dindar, who supported and encouraged me during the implementation and thesis writing process.

Lastly, an honorable mention goes to my parents and sisters for their understandings and supports on me in completing this thesis. Without their encouragement and guidance this thesis would not have completed. I would like to express my heartfelt thanks to my husband, Muhammed Sait Gökalp, whose patient love and valuable information and guidance enabled me to complete this thesis.

TABLE OF CONTENTS

LIST OF TABLES

TABLES

LIST OF FIGURES

FIGURES

LIST OF ABBREVIATIONS

P	Primitive knowing
IM	Image making
IH	Image having
PN	Property noticing
F	Formalizing
O	Observing
S	Structuring
I	Inventising
IMtoP	Folding back from image making to primitive knowing
IHtoP	Folding back from image having to primitive knowing
IHtoIM	Folding back from image having to image making
PNtoIM	Folding back from property noticing to image making
PNtoIH	Folding back from property noticing to image having
PNtoP	Folding back from property noticing to primitive knowing
FtoIH	Folding back from formalizing to image having
FtoIM	Folding back from formalizing to image making
FtoP	Folding back from property noticing to primitive knowing
RV	Using visuals (drawing, diagrams) as representations
RW	Using spoken or written words as representations
RC	Using concrete materials as representations
RS	Using symbols as representations
TIMSS	Trends in International Mathematics and Science Study
PISA	The Programme for International Student Assessment
NAEP	National Assessment of Educational Progress

CHAPTER 1

INTRODUCTION

The words “I just don’t like math”, “I’m just no good at mathematics,” “I hate mathematics in school”, “I don’t understand mathematics” are heard throughout the schools corridors many times. I can infer from my personal experiences as a mathematics teacher at a public elementary school that most of the students hate mathematics since they only do routine procedures and memorize formula. These students see mathematics as fiction. They do not understand the concepts in mathematics and they are far away from actual meaning of those mathematical concepts. Because mathematical concepts and procedures are all constructed in minds (Steffe, 2001, 2004; Thompson, 2003; von Glasersfeld, 1983), sometimes, even we cannot know if the students understand the related concepts or not. In order to have effective mathematics teaching and help students to understand mathematical concepts, the teachers should know more about students’ understanding of a concept. Besides knowing the current state of students’ understanding at a specific topic, knowing how to understand would be a good start for teaching.

Understanding mathematics is always an important issue and most of the time it is a big concern to assess students’ understanding of mathematical concepts (Pirie & Kieren, 1989; Skemp, 1976). The assessment of students’ understanding of mathematical concepts is not an easy task and thus, only limited part of students’ understanding could be assessed (Sierpinska, 1994). Even it can be said that sometimes we think that we assess students’ understanding of mathematical concepts, but in fact we really assess something else but not the understanding. Therefore we need to clarify what we mean by understanding at first. On the other hand, in the literature, especially in the field of education, although understanding is a commonly used word, there is no clear definition of it. We use this term in our daily life for many times for various reasons. Similarly, many definitions could be found in dictionaries for the meaning of the term “understanding”. For example, dictionary of Meriam-Webster (2010) turns eight definition of understanding. Three of them are close to the meaning that we use in education. However, these are still too broad to be referenced. For example the first definition is “a mental grasp”. If one says that “It is clear that I understand the multiplication of fractions”, the meaning of the understanding here is the mental grasp. Moreover, the second and third definitions are “the power of comprehending; especially, the capacity to apprehend general relations of particulars” and “the power to make experience intelligible by applying concepts and categories”, respectively. These two definitions also point out the meaning of understanding in education. Yet, these three are still too broad to be referenced for the meaning of the understanding of students at a specific concept. It is not easy task to determine if a student grasps a concept or have a power to comprehend it. Therefore, researchers have had many works on this subject to see what understanding is and how we can see if a person understands a concept or not. No doubt, Bruner (1960) was the one who came up with a distinct and clear definition of understanding which described understanding as a product of thinking. However, his description of understanding was still too broad and was for education in general, not for mathematical understanding specifically.

Through the years, researchers have proposed several theories to describe learners’ understanding of mathematical concepts. Skemp (1976) was the one of the researchers who theorized mathematical understanding. He categorized understanding similar to Bruner (1960). According to Skemp, understanding includes two categories which are relational and instrumental understanding. However, researchers argued about Skemp’s approach to understanding. These arguments were mainly focused on how well that theory really explains understanding (e.g. Byers & Herscovics, 1977; Tall, 1978). This resulted in a revised version of Skemp’s understanding theory. The revised theory had two additional understanding categories: logical (Skemp, 1979) and symbolic (Skemp, 1982) understanding. Later, several other researchers followed the ideas of Skemp and proposed several understanding theories but with different categories (Bergeron & Herscovics, 1988; Byers & Herscovics, 1977; Schroeder, 1987).

Pirie (1988) had doubts about categorizing students' understanding of mathematical concepts. Instead, she put emphasis on processes. In her study, she discussed the idea of having several levels at the process of growth of understanding. A year later, Pirie and her colleague Kieren published the description of their theory (Pirie & Kieren, 1989). Pirie and Kieren (1994) described this theory of the growth of mathematical understanding as "a whole, dynamic, leveled but non-linear transcendently recursive process" (p. 166). This theory has two important features: "folding back" and "don't need boundaries" (Kieren & Pirie, 1991; Pirie & Kieren, 1994). The first one helps students to go back to their prior knowledge to extend their understanding to new contents. Moreover, it occurs when students go to inner level of understanding to work more on that level to go outer level of understanding. The second feature "don't need boundaries" specifies three critical boundaries where learners do not need to attend inner level of understanding to perform understanding activities beyond those boundaries. These "don't need boundaries" areas firstly occur between image having and image making. The second boundary occurs between formalizing and property noticing levels. And, the last one occurs between observing and structuring levels.

The Pirie–Kieren Theory of Understanding has several advantages compared with the other understanding theories. First of all, this theory is not a general theory for understanding; rather, it is a theory for the growth of mathematical understanding of a specific mathematical topic. The Pirie–Kieren Theory of Understanding acts as a powerful lens to observe the growth of understanding in a learning activity (Manu, 2005; Meel, 2003; Pirie & Kieren, 1989). Second, it allows observing growth of understanding of a specific person or a specific group (Pirie & Kieren, 1994). Third, understanding theory of Pirie and Kieren does not take a photo of instance, rather it allows depicting growth of understanding over period of time such as minutes, hours, days, weeks, or even years (Manu, 2005; Pirie & Kieren, 1989). As stated before in this chapter, it is hard to see if a student understands the given concept or not. The understanding theories given above except the Pirie–Kieren Theory of Understanding do not give sufficient information about how to analyze learners' understanding. Therefore, the researcher used this theory as a theoretical lens to analyze students' understanding of multiplication of fractions in the current study.

After clarifying what is meant by understanding and which theory of understanding is used in the current study, now the main focus of this thesis can be stated. That is to find an effective and accurate way in which we can assess understanding of multiplication of fractions. With that focus, the researcher discussed the idea of tracking and depicting the use of representations of the students at the process of understanding. As can be seen in the literature, the use of representations makes mathematical communication possible (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). Therefore, in order to accurately analyze the learners' understandings, learners' use of multiple representations should be carefully examined (Cramer, Wyberg, & Leavitt, 2008; Goldin, 2003; Taber, 2001). This also gives opportunity to see which representations should be used to convey necessary information to the students to have understanding of mathematical concepts.

Hiebert and Carpenter (1992) stated that understanding is resulted from the interaction between mental and external representations. According to them, better connections between these two types of representations meant better understanding. However, students' mental representations could not easily be observed without analyzing their use of external representations (Goldin, 1998). Therefore, in order to analyze understanding we need to concentrate on the student's use of external representations. There is a common view that strongly supports and suggest on the use of representations in mathematics courses (Behr, Harel, Post, & Lesh, 1993; Kieren, 1993; NCTM, 2000,TTKB, 2009). Researches on the use of representations in mathematics are mainly limited to the studies which attempt to see how effective to use representations to teach a specific topic (Akkuş-Çıkla, 2004; Gagatsis & Elia, 2004; Orhun, 2007), to investigate their role in learning (Cramer et al., 2008), and teachers' preference on using representations (Cai, 2004). However, questions regarding which representations should be used for a specific topic and how representations should be used such that students gain a deep understanding of that topic and a deep understanding of the representations remained largely unanswered.

After having the clear idea of what understanding is and which framework was used in the current study, we can now talk about what is done with the understanding in this study. In this study, the researcher examined how we can further improve the Pirie–Kieren Theory of Understanding with the use of representations and tested effectiveness of this modified version.

In the current study, students' understanding of multiplication of fractions was explored. Fractions are one of the basic concepts in mathematics. They can be seen in daily life in various ways. However, students have difficulty in learning fractions in some respects especially while learning abstract operations such as multiplication of fractions. Results of research studies showed that fractions are one of the most difficult concepts in elementary mathematics curriculum (Cramer, Behr, Post, & Lesh, 2009; Ersoy & Ardahan, 2003). The studies showed that elementary school students have difficulty with fractions at all grade levels (Behr, Wachsmuth, & Post, 1985; G. E. Davis, 2003; Ersoy & Ardahan, 2003; Haser & Ubuz, 2005; Mack, 2000). It seems that students do not try to understand the logic behind the fractional operations; instead, they memorize the rules, formulas, algorithms, and terms (Ersoy & Ardahan, 2003; Newstead & Murray, 1998). They have some deficiencies in adding, multiplying, dividing and comparing fractions (Ersoy & Ardahan, 2003; Graeber & Tirosh, 1990). For example, students believe that multiplication always increases numbers (Harel & Behr, 1995).

Though fractions are one of the most investigated concepts in mathematics, and there are many studies and efforts to have effective teaching of these concepts for better understanding, there are still many difficulties and problems about concepts of fractions, especially operations of fractions, as can be seen in the literature (Ersoy & Ardahan, 2003; Newstead & Murray, 1998). Studies on understanding of fractions and operations of fractions have revealed the common obstacles in front of students' understanding of fractions. However, there is still a need to study on how we will see if the students understand given concept, or how we will ensure mathematical communication in order to help our students to understand that concept.

Therefore, in the current study, the researcher explored sixth grade students' understanding of multiplication of fractions by revealing actions which students perform to indicate their understanding. Moreover, their uses of representations were analyzed to have clear picture of their understanding process. Thus, the purposes of this study were to investigate sixth grade students' understanding of multiplication of fractions in terms of the Pirie–Kieren Theory of Understanding in the light of use of multiple representations and to improve mapping feature of the current theory to increase depicting power of the maps produced.

In this study, students' understanding of multiplication of fractions was examined deeply. The fractions are one of the basic concepts that are pre-requisite for many concepts like ratio, percentages, rational numbers, and decimal numbers etc. (Booker, 1996). They play an important role in the elementary school curricula and many students experience difficulty while learning the concept of fractions (Aksu, 1997; Haser & Ubuz, 2005). Especially, due to abstract nature of the operations with fractions, many of the students appear not to have fully developed an understanding of these concepts (Cramer et al., 2009). Based on these reasons, multiplication of fractions was chosen for the current study. Moreover, students' use of representations at the understanding process and actions performed by them at each level of understanding were explored deeply. This can help teachers to plan their lessons (Cai, 2004; Goldin, 2003; Wilson & Stein, 2007). Furthermore, it may allow teachers and researchers to examine their students' understanding of fractions easily. Findings of this study can also be used to revise curriculum (Hunter, 2006) and textbooks (Son & Senk, 2010).

Fractions are one of the main topics in the elementary mathematics curriculum of Turkey. At grade 6, comparing and ordering fractions, adding and subtracting fractions, multiplying and dividing fractions, and problem solving related with fraction operations are the subtopics of fractions. In the mathematics curriculum, meaningful learning, connection within math, connection among math and other disciplines, students' motivation and academic level were highlighted for the multiplication of fractions. Moreover, the curriculum suggests the use of multiple representations in the instructional process of this topic (TTKB, 2009).

Most of the studies found in the literature analyzed understanding of the students by using one of the theories which takes understanding as a category not a process. Even, some studies did not apply any understanding model while analyzing student's understandings (Burns, 1999). As mentioned before, the Pirie–Kieren Theory of Understanding has some advantages while analyzing understanding in mathematics. This theory allows depicting the growth of understanding unlike Bruner (1960), Skemp (1976, 1979, 1982) and others stated at the beginning of this chapter. So, as an understanding model to examine students' understanding of multiplication of fractions, the Pirie–Kieren Theory of Understanding was used in this study.

Most of the studies using the Pirie–Kieren Theory of Understanding as a theoretical framework did not use the mapping feature of this model (Grinevitch, 2004; Slaten, 2006; Warner, 2005, 2008). It may be because the current form of the mapping feature does not offer detailed summary for the understanding itself. It is simple but far from giving details. Therefore in the current study, attention was also given to improve the mapping feature of this theory (See Section 2.3.2.3 for more about mapping and the Pirie–Kieren Theory of Understanding). As stated before, use of multiple representations were depicted in the maps too. Therefore, this study extends the current body of literature using the Pirie–Kieren Theory of Understanding by applying the theory to analyze students' uses of multiple representations.

This study investigated the sixth grade students' understanding of multiplication of fractions by analyzing their use of representations as a mathematical communication tool and depicted this process. It is believed that exploration of students' understanding in fractions gives precious implications to mathematics educationalists and education policy makers in designing elementary mathematics curriculum, since the results of the current study enrich our knowledge on how students' understanding of multiplication takes place. The results of this study also inform mathematics teachers about students' understanding of multiplication of fractions and their difficulties in this topic. Therefore, this helps teachers to organize their class activities while teaching multiplication of fractions.

1.1 Research Question

The research questions of this study are;

- What are the sixth grade students' understandings of multiplication of fractions using the Pirie and Kieren model?
- What representations do sixth grade students use to express their multiplication of fraction ideas at each understanding level in terms of Pirie and Kieren's model?

1.2 Definition of Important Terms

Main terms included in the research questions of the study are defined as follows:

Understanding - is a dynamic process, which is demonstrated to be continuing and consistent organization of knowledge structures (Pirie & Kieren, 1994).

Level of understanding - There are eight level of understanding: primitive knowing, image making, image having, property noticing, formalizing, observing, structuring, and inventising.

Primitive knowing: This is the first level of the process of understanding. This level does not imply low mathematical understanding. It is defined as starting point of understanding by Pirie and Kieren (1994).

Image making: The second level of the Pirie–Kieren Theory of Understanding is image making level. At this level, the learners are expected to make distinctions between prior knowing and use it in new situations (Pirie & Kieren, 1994).

Image having: This is the third level of the Pirie-Kieren Theory of Understanding. At this level, single-activity images are replaced with mental images. That means learners do not need to perform physical activities when they deal with mathematics (Pirie & Kieren, 1992, 1994).

Property noticing: At the fourth level, the properties of the constructed image are identified. At this level, learner can manipulate or combine properties of one's image to have context specific relevant properties (Pirie & Kieren, 1994).

Formalizing: At this level, a method, rule, or property is generalized from the properties. Learners are expected to draw a method or common quality from the properties of previously hold images (Pirie & Kieren, 1994).

Observing: The learner verbalizes and expresses about the formalized concept in observing level. At this level, learners can reflect on formal activities and express them as theorems (Pirie & Kieren, 1994).

Structuring: At the level of structuring, the learner organizes his/her formal observations and deals with them as a theory (Pirie & Kieren, 1994).

Inventising: The outermost level of the understanding is inventising. At this level, learner is expected to invent a new concept (Pirie & Kieren, 1994).

Representations - are characters, concrete objects or images representing something else than their actual meaning (DeWindt-King & Goldin, 2003; Goldin & Kaput, 1996).

CHAPTER 2

REVIEW OF THE LITERATURE

Previous studies related to the current study were reviewed in this chapter. Firstly, the review started students' with difficulties in the multiplication of fractions. Secondly, general information on understanding in education was given. Thirdly, understanding in mathematics education was reviewed. Furthermore, The Pirie–Kieren theory of understanding was reviewed in the next section. Later, multiple representations and their relationship with understanding were reviewed. Finally national elementary mathematics curriculum and fractions were reviewed. The review was completed by giving the summary of the literature review.

2.1 Studies about Multiplication of Fractions Understanding

Many students have difficulties in learning fractions and operations with fractions. Especially abstract nature of the operations of fractions makes this subject challenging to students. As one of the operations with fractions, multiplication of fractions is one of the complex and complicated domains in mathematics (Taber, 2001). If a student does not fully understand the fractions at elementary level, this leads difficulties in mastering fractions at higher levels (Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992; Hart, 1981). In the literature, there are many studies which show that elementary school students have difficulties with fractions (Aksu, 1997; Behr et al., 1985; Cramer et al., 2009; G. E. Davis, 2003; Haser & Ubuz, 2005; Mack, 2000; Newstead & Murray, 1998). The main reason for these difficulties is that students do not understand the logic behind the operations instead they just memorize the rules and formulas (Newstead & Murray, 1998). With the use of calculators and computers, students tend to use decimals instead of fractions in their daily life. This cause students to be unfamiliar with multiplication of fractions and to use algorithm heavily (Son & Senk, 2010). Similarly, Cramer and Bezuk (1991) emphasize that the students can perform multiplication with fraction, but that does not necessarily mean that they have a conceptual understanding of what the answer of that multiplication means. Cramer and Bezuk (1991) suggested asking questions that involve estimation of the answer and estimation the size of the product. Moreover, it may be good to have background information before having students to do calculation with fractions (Aksu, 1997; Mack, 1990).

Having problems with understanding basic concepts result in having deficiencies with operation with fractions such as adding, dividing, multiplying, and comparing fractions (Cramer et al., 2009; Ersoy & Ardahan, 2003; Graeber & Tirosh, 1990; Thompson, 2003). For example, some of the studies show that students think multiplication always results in bigger numbers than both numerator and denominator (Harel & Behr, 1995). Students think that the symbol for a fraction represents two different numbers. For example when students see 2/4 they do not get the idea of representing a single entity (Cramer et al., 2009). Cramer et al. (2009) stated that many errors with fractions can show students' lack of mental images for the respective symbol.

Azim (1995) investigated pre-service teachers' understanding of multiplication of fractions. In that study, Azim explored the answers of following questions: how pre-service teachers' reason multiplication of fractions, what common dimensions of understanding are evidenced by them, how they construct understanding, and what forms of reasoning play role to influence or support their reconstruction of understanding. Fifty pre-service teachers from two method courses participated in the study. The data were collected with interviews. Azim (1995) reported the results of the study at following dimensions. Firstly, it was seen that 48 of the 50 participants could discuss the numerical results of multiplication of fractions with less than and more than one. The other two participants were confused about the results. However, almost half of the participants could not interpret the fraction multiplication expressions in terms of effects of each factor in the expression on the other factor. As a second dimension, it was seen that some of the students had some difficulty in conceptualizing a fractional part of a quantity. Unlike expressing 1/6 of a cup, it was hard to explain 2/3 of 3/4. The researcher stated that this kind of operations, where the operator is less than 1, is an important benchmark for people's development of understanding of fraction multiplication. Moreover, the methods used to conceptualize the multiplication of fractions where the operator is less and more than 1 were different. At the third dimension, the results showed that almost 30% of the students had difficulty in expressing the meaning of the results. Most of the participants who had difficulty in the meaning of the results tried to interpret results with referring the original quantity being reduced or enlarged. For example, in the case of 3/4 x 1/2 = 3/8, the result were interpreted as 3/8 of 1/2. As the last dimension, it was stated that almost 30% of the participants described multiplication as process which is not possible to change. That means the multiplication could be modeled as the same for both whole numbers and fractions. Beside these dimensions, Azim (1995) categorized participants' reasoning and understanding as following: students reconstructing process, students constructing concepts for the first time during the interview, and students building more complex constructions on their own. It was found that two forms of reasoning support participants' construction of understanding. These are multiplication sense (for example multiplication with whole numbers) and fraction sense (for example size relationships between fractions) of participants. It was concluded that the one with better reasoning at both of them had better construction of understanding.

One other study with pre-service teachers was carried out by Işıksal (2006). In her study, Işıksal investigated the relationship between pre-service mathematics teachers' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge on multiplication and division of fractions. She did a case study with 17 pre-service teachers. Results of the study showed that the pre-service teachers had no problem with solving and symbolizing the questions related with multiplication and division of fractions. Moreover, it was seen that they had strong beliefs to teach these topics to students conceptually. However, it was seen that there is problem about their own conceptual knowledge and meaning of multiplication and division of fractions.

Similar to Azim (1995), Mack (2000) investigated development of understanding of multiplication of fractions. But, she explored the long-term effects of building on students' informal knowledge of partitioning with respect to understanding of fifth and sixth grade elementary school students. Four sixth and fifth grade students participated in that study. All of the students had average mathematics ability. At the first year of the study, the students received three months instruction on multiplication and division of fractions. All of the students had informal knowledge about partitioning when they entered the courses. However, they just could refer one whole as a unit. For example, they knew to demonstrate one third of the whole pizza. With this informal knowledge, they were able to solve some multiplication of fraction problems like finding part of a whole. At the end of the first year, all of the students could find part of part of a whole. They did this by constructing on their informal knowledge as concluded by the researcher. Moreover, it was found that weak connections to the symbolic representations were quickly disappeared.

There are several studies referring to the difficulties in learning fractions when fractional operations and fractions are not connected with the real-life experiences (Orhun, 2007). Moreover students have difficulties in understanding fraction equivalence. Some of the students are unable to note equivalences from the pictures. Taber (2001) worked with 22 fifth grade students to trace their understanding in finding a fractional part of a fraction and use of representations in her study. The students were involved in 13 days of instruction and the data were collected from them with fraction test, observations, classroom discussions, and interviews. The results of her study showed that the understanding the connections between different representation systems are so important in understanding process. Moreover, it was found that if a student articulates his/her understanding in different representation type, he/she will have better communication and development of mathematical understanding.

A fraction can have different meaning to students. Some of these meanings are operator, part of a whole, single number which has specific value, and division (Mack, 2000). Meaning of fractions and operations with fractions are transmitted to learners by using fractional models while they perform productive thinking in the meantime. Learners participate in interactive mathematical communication and use a particular kind of fractional scheme while they are having those meanings (Steffe, 2004). Burns (2003, p. 13) states multiplication with whole numbers is as the same as repeated additions when one add the same number together. However, it is not the same for fractions. Students transfer their prior knowledge on operations with natural numbers to fractions. However, they have difficulties in transferring. For example, in natural numbers, multiplication can be seen as repeated addition, e.g. 4 x 3 = 3 + 3 + 3 + 3, but when one multiplies a fraction with another fraction it is not a repeated addition. Similarly, part of part meaning of multiplication of fractions (a part of a part of a whole, e.g. 3/4 x 1/7 has no meaning with natural numbers (Mack, 2000). Reasoning about multiplication with whole numbers can result in difficulties in multiplication of fractions (Son & Senk, 2010). On the other hand there are other views to support that the students prior understandings on whole numbers do not interfere with their fractional understanding (Steffe, 2002). Moreover, multiplication with numbers can mean scaling up but with fractions this can have meaning of scaling down as well as scaling up. Furthermore, Burns (2003) states that a multiplication problem can be represented as a rectangle. Most of the time, teaching multiplication of fractions is a challenging task to have students to understand that topic. Van de Walle (1990) suggested starting by finding a fractional part of a whole number while teaching multiplication of fractions. Therefore they can extend the ideas concerned with natural numbers, which requires students to work hard (Olive, 1999), to the fractions more easily. One other reason why students have problem with understanding the multiplication of fractions comes from visualization nature of the fractions. Unlike the whole numbers, visualization of fractions is not unique as natural numbers. This makes hard to understand fractions and operations with them (Ni & Zhou, 2005; Steiner & Stoecklin, 1997).

2.2 Understanding in Education

In the world, especially in the field of the education, understanding is one of the commonly used words. However, there is no clear definition of it in education. Dictionary of Meriam-Webster (2010) turns eight definition of understanding. The first definition is “a mental grasp”, which is the one we use in the education in general. For example, if a teacher says that “It is clear that my students understand the fractions”, the meaning of the understanding here is that mental grasp. Moreover, the second and third definitions are “the power of comprehending; especially, the capacity to apprehend general relations of particulars” and “the power to make experience intelligible by applying concepts and categories”, respectively. These two definitions also point out the meaning of understanding in education. Yet, these three are still too broad to be referenced to define the understanding of students at a specific concept. It is not easy task to determine if a student grasp a concept or have a power to comprehend it. The other five definitions of understanding are not the ones we use in education. For example one of them is “sympathy”. When we say “the teacher treats the students with kindness and understanding”, we refer that definition of the understanding.

The first distinct definition of the understanding in education was made by Bruner (1960). He defined understanding as the image and the product of thinking. Furthermore, he stated that understanding is all about getting a grasp of how human beings think. Bruner also distinguished analytic thinking from intuitive thinking. He stated, “Analytic thinking characteristically proceeds a step at a time. Steps are explicit and usually can be adequately reported by the thinker to another individual… In contrast to analytic thinking, intuitive thinking characteristically does not advance in careful, well defined steps.” (pp. 57-58). However, his explanations were in general not for mathematical understanding specifically.

As cited in Mack (2000), understanding depends on relationships between pieces of persons’ knowledge. This relationship can be between newly acquired knowledge and existing knowledge as well as between pieces of existing knowledge (R. B. Davis, 1984; Greeno, 1978; Hatano, 1996). Moreover, understanding can be developed and influenced by building on persons’ informal knowledge (Mack, 2000). Similarly, according to Ball (1993), making connections between informal and formal mathematical ideas is the key for understanding. Moreover, Hiebert (1984) expressed that understanding is related with making connections between symbols/notations and ideas represented with them. Similarly, according to Lesh, Landau, and Hamilton (1983), students understand when they recognize the ideas given with different representations, when they manipulate the ideas given in a representation system, and when they are able to transfer an idea from one representation to the other.

2.3 Understanding in Mathematics

As stated in Section 2.2, understanding can be used for several things besides its actual meaning we use in education. This is also valid for mathematics education. For example, some teachers may say that “my students understand the concept of multiplication”. This may mean that students can perform multiplication of fractions with the algorithm of multiplying both numerators and denominators. In that situation, “concept” actually means “topic” and “understand” actually means “computational fluency” (Lobato, 2008). So what is understanding in mathematics? How will we know that if the students understand the concepts or not? In order to answer these questions, it will be beneficial to present several understanding theories in the literature. Next sections include most discussed theories in the literature.

2.3.1 Theories of Mathematical Understanding

Mathematical understanding is widely researched by researchers over the time. Skemp (1976) was the first person to define mathematical understanding distinctly. He followed the idea of Bruner and categorized the understanding. He defined two types of understanding for mathematics: relational and instrumental understanding. He further stated that teaching processes based on these two different understandings yield different kind of mathematics. Instrumental understanding results from teaching rules and formulas without knowing “how” and “why”. For example, in most cases, teaching how to divide fractions is solely about stating the fact that is inversing second fraction and multiplying with the first one. In this way, one does not have any idea about why to inverse and multiply, and what it means actually. In fact, Skemp’s instrumental understanding is not a new thing different from memorizing as also implied by him. On the contrary, relational understanding is far beyond than the instrumental understanding and involves knowing how and why. Relational understanding includes building up a conceptual framework. Furthermore, he stated that he believe this is true understanding.

One can perceive from Skemp (1976) that it was mainly about what understanding is and is not. Actually, understanding is too complex to be defined as instrumental and relational. Skemp detailed his arguments on understanding in mathematics in his subsequent articles. Skemp (1979) and Skemp (1982) added two more understanding type: logical and symbolic, respectively. Logical understanding includes proofs. One with logical understanding of a mathematical concept can explain that concept mathematically and it can be understood by the others. On the other hand, symbolic understanding is defined as a mutual assimilation between a symbol system and a conceptual structure.

One other understanding theory for mathematics was proposed by Sierpinska (1994). She defined understanding as “cognitive activity that takes place over longer periods of time” (p. 2). In her theory, Sierpinska (1994) deals with “act of understanding”. Moreover, another phrase is also pointed out by her: “object of understanding”. She explains these two phrases in an example as follows: “my object of understanding can be a mathematical word problem, and in the act of understanding I may recognize the problem as following a certain well known pattern.” (p. 29). Here, this pattern was named as basis of understanding by Sierpinska (1994). There are four basic components of an act of understanding. These are (1) the understanding subject, (2) the object of understanding, (3) the basis of understanding, and (4) the operation of the mind that links the object of understanding with its basis.

Hiebert and Carpenter (1992) see understanding as a developing or emerging fact. Similar to Sierpinska (1994), they describe understanding in terms of mental activity which helps the development of understanding. According to them, mathematical understanding strengthens with the connection between mental and external representations. Moreover, understanding is the structure of mathematical ideas and representations.

One other understanding model was proposed by Bergeron and Herscovics (1981). In their model of understanding, there are four levels of understanding: intuitive understanding, initial conceptualization, abstraction, and formalization. Unfortunately, distinction between these levels and ways to characterize these levels were not clearly defined by Bergeron and Herscovics (1981). Therefore, it is hard to analyze the formation of mathematical concepts with this theory of understanding. Bergeron and Herscovics (1988) further discussed the construction of mathematical concepts. They proposed a two-tiered model to stem construction of mathematical concepts from actions performed on objects in the real world. The first tier of the model deals with the three different levels of understanding of the preliminary physical concepts. The second tier aims to identify basic parts of the comprehension of mathematical concepts.

2.3.2 The Pirie–Kieren Theory of Understanding

Pirie (1988) discussed the idea of having several categories at the process of growth of understanding. A year after, Pirie and Kieren (1989) published their theory. They followed the ideas of Pirie (1988) and suggested that understanding is not a single acquisition or categorized. Pirie and Kieren (1994) describes this theory as “a whole, dynamic, levelled but non-linear transcendently recursive process” (p. 166). The Pirie-Kieren theory of mathematical understanding takes growths of the understanding into account. In this theory, understanding is viewed as a process (Kieren & Pirie, 1991; Pirie & Kieren, 1989, 1994). Therefore, understanding is not seen as acquiring several categories of knowing. It is a dynamic process, which is demonstrated to be continuing and consistent organization of knowledge structures (Pirie & Kieren, 1994). As stated in Pirie and Kieren (1994), this is based on the constructivist definition of understanding detailed by von Glasersfeld (1983). von Glasersfeld (1983) states that “What determines the value of the conceptual structures is their experiential adequacy, their goodness of fit with experience, their viability as means for the solving of problems, among which is, of course, the never-ending problem of consistent organization that we call understanding” (p. 6).

Pirie and Kieren (1994) state that they used this theory in various learning environments as a tool to observe students’ mathematical actions when they worked on a single mathematical task. This theory allowed them to see how students build and organize mathematical knowledge structures over time. It is important to know that an idea can continue to grow over time with several other real-life experiences (Warner, 2008). This theory is a theory about the growth of understanding not for a static situation (Borgen & Manu, 2002).

As stated before, the Pirie–Kieren Theory of Understanding describes understanding as leveled. These levels are embedded and illustrated with eight rings (see Figure 2.1). Each of these rings represents different levels of understanding which can be achieved by any person at any topic (Pirie & Kieren, 1994). These levels go from person’s prior knowledge to their inventising capabilities. From the inner most level to the outer most level, we can list the levels of understanding as follows: primitive knowing, image making, image having, property noticing, formalising, observing, structuring, and inventising. The description of each level can be seen in details in Section 2.3.2.1.

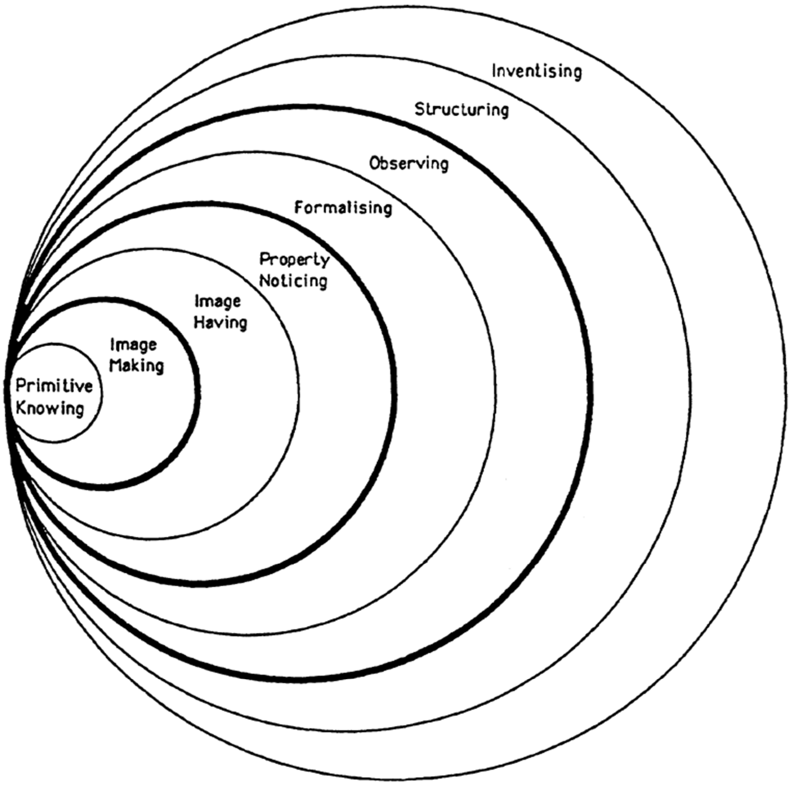


Figure 2.1 The Pirie–Kieren layers *Note*. from (Pirie & Kieren, 1994) p. 167

This theory provides a framework: (1) to assess and describe understanding of individuals or groups as it exists (Thom & Pirie, 2006) and (2) to analyze students' growth of understanding (Pirie & Kieren, 1994). The structure of this theory is not linear or hierarchical. The realms of mathematical knowing are embedded and unbounded circles in this model. Moreover, they are recursive and self-similar to each other (Thom & Pirie, 2006).

The Pirie–Kieren Theory of Understanding allows researchers to look and interpret each understanding levels at which different students realize their mathematical thoughts and activities (Kieren & Pirie, 1991; Pirie & Kieren, 1994). This gives the opportunity to plan mathematics lessons. Moreover, it provides a frame to make observations about curriculum development (Pirie & Kieren, 1994). Similarly, Grunow (2001, p. 40) states that the Pirie–Kieren Theory of Understanding is greatly appropriate for curriculum development. This theory allows us to explain understanding and different layers of understanding with a common vocabulary (Warner, 2008).

2.3.2.1 Levels of Understanding Process

As stated before in this chapter, there are eight embedded levels of understanding in the Pirie–Kieren Theory of Understanding. This theory provides a framework to analyze people's growth of understanding by examining people's move forward or backward from one level to another (Warner, 2008). These levels start with prior understanding of the learners, which they bring with them, and end with inventising level of understanding. However, outer level understanding does not mean higher level mathematics every time. Similarly lower level of understanding also does not mean lower level mathematics. Even at high level mathematics one needs to work on lower level of understandings to have correct formalization or structure (Pirie & Kieren, 1994). Each of these levels is as follows.

Primitive knowing: This is the first level of the process of understanding. This level does not imply low mathematical understanding. It is defined as starting point of understanding by Pirie and

Kieren (1994). This level indicates persons' prior understandings. For example, in the current study, students' understandings in multiplication of fractions were explored. In this case, fractions, rational numbers, and addition of fractions were some of the prior knowledge that could be possessed by the students.

Image making: The second level of the Pirie–Kieren Theory of Understanding is image making level. At this level, the learners are expected to make distinctions between prior knowing and use of it in new situations (Pirie & Kieren, 1994). The images do not need to be pictorial representations. They can be something which conveys the meaning of any kind of mental images. At this level of understanding, learners do something mentally or physically to gain an idea about a concept. For example, the learner can do cutting or folding activities and see that fractions can be gained through cutting something to smaller pieces (Meel, 2003). Moreover, Meel (2003) states that actions performed at this level includes development of connections between referents and symbols (see Section 2.5 for more details on multiple representations).

Image having: If a learner constructs an image about a topic in the mind, we can say that the learner is at image having level (Pirie & Kieren, 1994). At this level, single-activity images are replaced with mental images. That means learners do not need to perform physical activities when they deal with mathematics (Pirie & Kieren, 1992, 1994). Meel (2003) states that other researchers called these mental images by different names such as "knowledge representation structures" (R. B. Davis, 1984) and "concept image" (R. B. Davis & Vinner, 1986).

Property noticing: At the fourth level, the properties of the constructed image are identified. This level is called as property noticing. At this level, learner can manipulate or combine properties of one's image to have context specific relevant properties (Pirie & Kieren, 1994). Besides determining properties of a mental image, the learner notices the differences, connections, and combinations among multiple mental images. The difference between actions performed at property noticing level and actions performed at image having level is the capability to notice equivalencies (Meel, 2003).

Formalizing: At this level, a method, rule, or property is generalized from the properties. Learners are expected to draw a method or common quality from the properties of previously hold images (Pirie & Kieren, 1994). At this level, class-like objects are developed from noticed properties. Descriptions of these class-like objects are mainly full mathematical definitions. However, the language used to describe the concepts does not have to be formal mathematical language. The language used by the student should be equivalent to the appropriate mathematical definition (Meel, 2003). For example, students can state fractions as a/b without connecting them to any specific value at this level.

Observing: The learner verbalizes and expresses about the formalized concept in observing level. In this level, learners can reflect on formal activities and express these as theorems (Pirie & Kieren, 1994). As an example for fraction, the learner can say "there can be no smallest half fraction" at this level (Pirie & Kieren, 1992, p. 247)

Structuring: At the level of structuring, the learner organizes his/her formal observations and deals with them as a theory (Pirie & Kieren, 1994). This is the level for formulating theories.

Inventising: The outermost level of the understanding is inventising. At this level, learner is expected to invent a new concept. The learner has a full understanding and he/she may create new questions which lead him/her to a new concept (Pirie & Kieren, 1994).

2.3.2.2 Features of the Pirie–Kieren Theory of Understanding

There are several specific features of the Pirie–Kieren Theory of Understanding. The first feature that is described by Pirie and Kieren (1994) is "don't need boundaries". They stated that the one of the strengths of the mathematics is ability to work with symbolic expressions without having reference to basic concepts. This feature is one of the critical elements of the Pirie–Kieren Theory (Pirie & Kieren, 1994). When the learners are beyond the specified boundaries, they no longer need to work on previous form of understanding and they can perform new tasks without working on them (Pirie & Kieren, 1994). These boundaries are shown with bolder rings as can be seen in Figure 2.1. Pirie and Kieren (1994) emphasize "don't need" phrase to convey the idea that if one is at that level, they don’t need previous levels of understanding to have a rise to upper level. Further, they explain this by referencing following idea: “One can work at a level or abstraction without the need to mentally or physically reference specific images. This does not, of course, imply that one cannot return to the specific background understanding if necessary.” (p. 173).

The first “don’t need boundaries” occurs between image having and image making levels (see the inner most bold ring in Figure 2.1). This means that if one has an image of a mathematical idea, he/she doesn’t need to create other images (work on image making level) to perform understanding tasks related with image having level (Pirie & Kieren, 1994). For example, in the current study, when a student has image of multiplication of fractions, he/she can perform multiplication tasks without working with physical objects.

The second “don’t need boundaries” place is between property noticing and formalizing. According to Pirie and Kieren (1994), those who already can perform formalizing activities, do not need an image.

The last “don’t need boundaries” occurs between structuring and observing levels of understanding. A person with a mathematical structure does not need to have any meaning from inner level of understanding (Pirie & Kieren, 1994).

One other feature of the Pirie–Kieren Theory of Understanding is “folding back”. When a learner faces with a different situation that he/she does not have an idea about, then, the learner needs to go to inner levels (fold back) to extend his/her understanding. Folding back activities are essential for growth of understanding. Furthermore, they show that the nature of coming to understand mathematics is not unidirectional (Pirie & Kieren, 1994). These inner level activities are shaped with outer level needs. Each time the learner visits the inner levels, he/she brings the understanding acquired from the outer level. Moreover, when one fold back to inner level and return to outer level, he/she can have thicker understanding at outer level (Kieren & Pirie, 1991). This process is different for different students. Different students can spend different times and can move in different ways (Pirie & Kieren, 1994). Fold back feature of the theory fits well with the constructivist foundation of it (von Glasersfeld, 1983) addressed by Pirie and Kieren (1994).

2.3.2.3 Mapping Mathematical Understanding

One of the characteristics of the Pirie–Kieren Theory of Understanding is to map the process of understanding. Pirie and Kieren (1989) created a technique to depict persons’ growth of understanding. They called this technique as “mapping”. Pirie and Kieren offered mapping as a presentation method for understanding. Pirie and Kieren (1994) stated their purpose of having this method as: “using the layered pictorial representation of the model, we aim to produce in diagrammatic form a 'map' of the growth of students' understanding as it is observed. This last phrase, 'as it is observed', is important because we make no claims as to what might have gone on 'in the students' heads'” (p. 182). An example of the understanding map taken from Pirie and Kieren (1994) can be seen in Figure 2.2. Even though this map seems to be static, it aims to present changes in one’s understanding over the time (Pirie & Kieren, 1989). It represents understanding process of students.

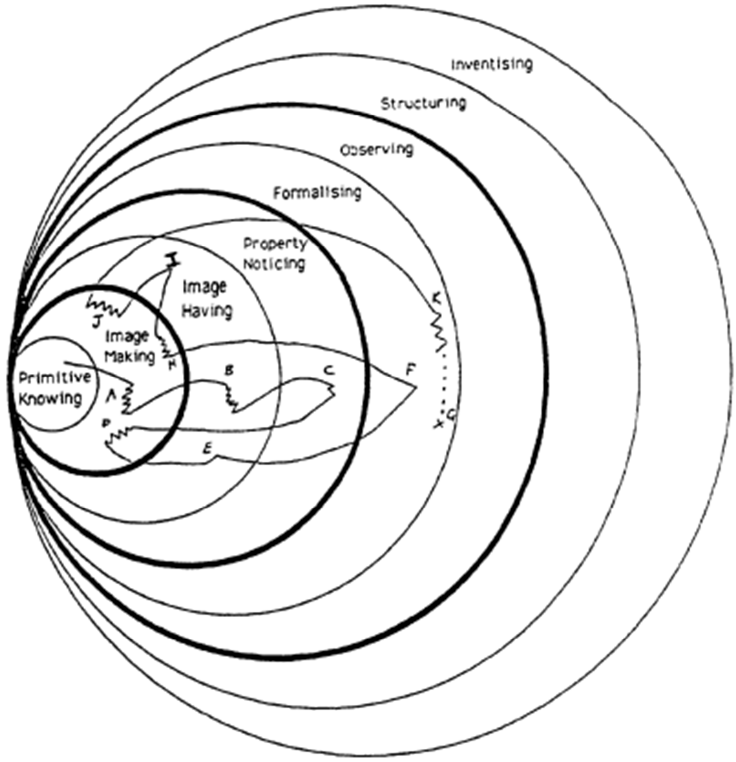


Figure 2.2 Mapping example *Note*. From (Pirie & Kieren, 1994) p. 186.

However, the mapping feature of the theory was not used widely among the researchers. It may be because the current status of the mapping is not so informative and usable. Therefore, the ones who decided to use this feature slightly changed it (Borgen, 2006; Borgen & Manu, 2002; Manu, 2005; Meagher, 2005; Pirie & Martin, 2000; Towers, 1998). Borgen (2006) stated that the mapping feature of the Pirie–Kieren Theory of Understanding is limited to simple set of eight rings. However, Pirie and Martin (2000) used a more complicated map which consists of a number of maps on different topics to depict understanding (see Figure 2.3).

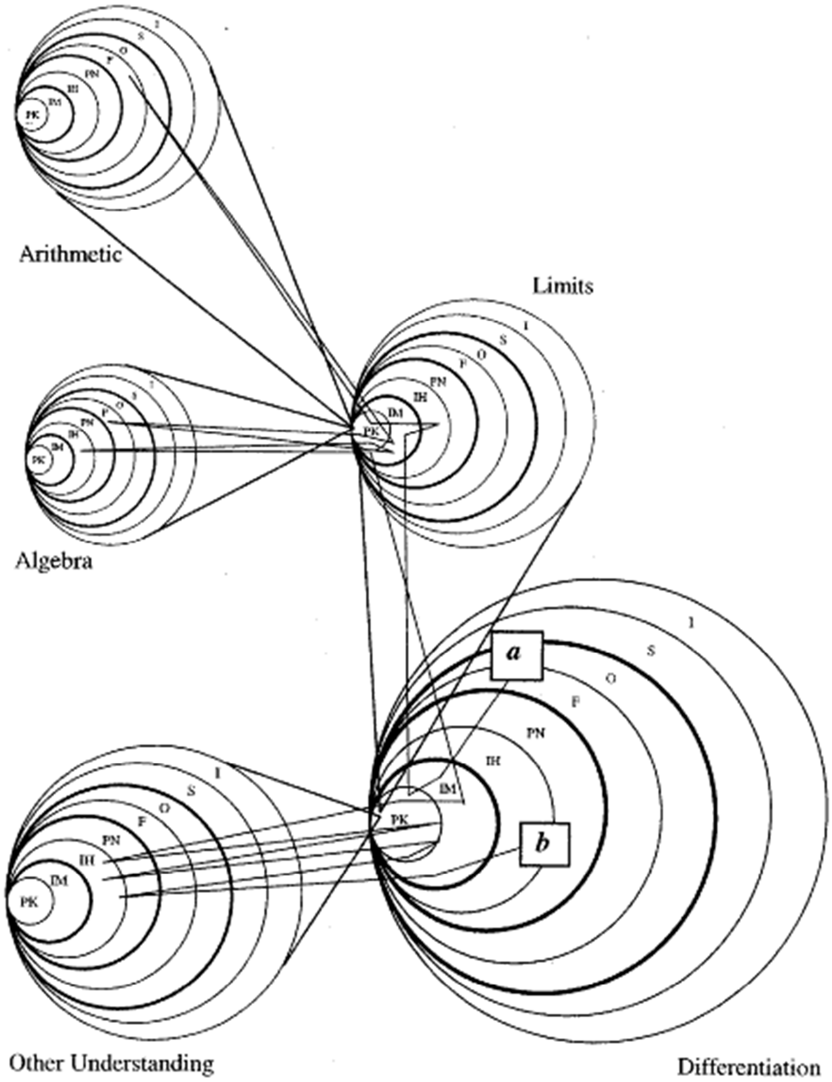


Figure 2.3 Set of maps modified by Pirie and Martin (2000, p. 141)

On the other hand, Meagher (2005) used the same original layout but he simplified the drawings with simple arrows and he counted subsequently each activity point at the same level. That map can be seen in Figure 2.4.

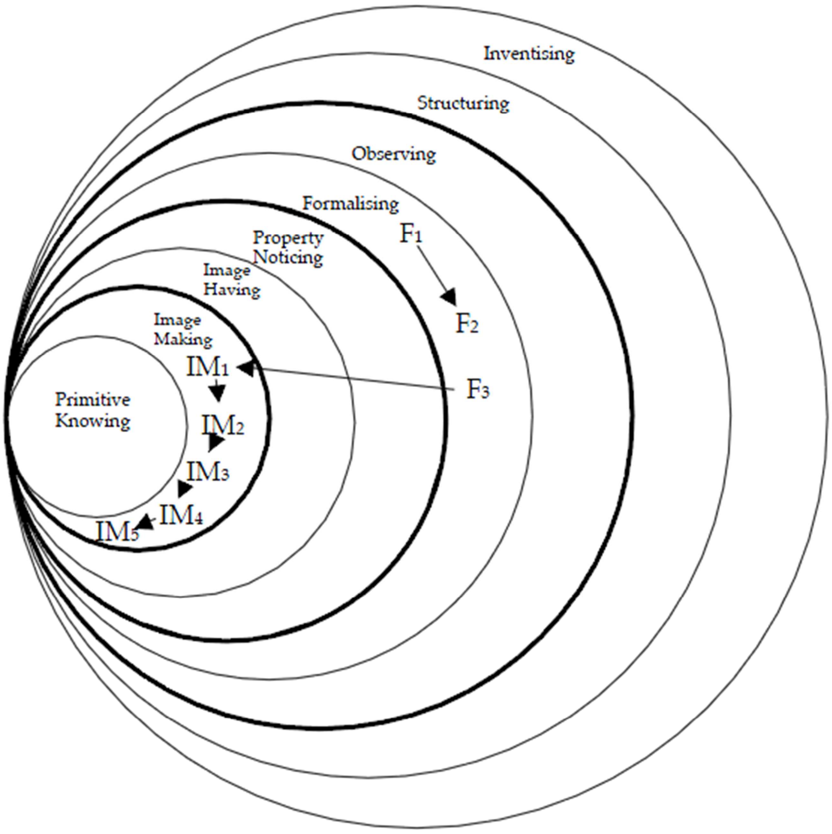


Figure 2.4 Simplified map from Meagher (2005, p. 151)

The most radical modification was made by Towers (1998). She changed the overall appearance of the map and used parallel layers instead of having embedded circles (see Figure 2.6).

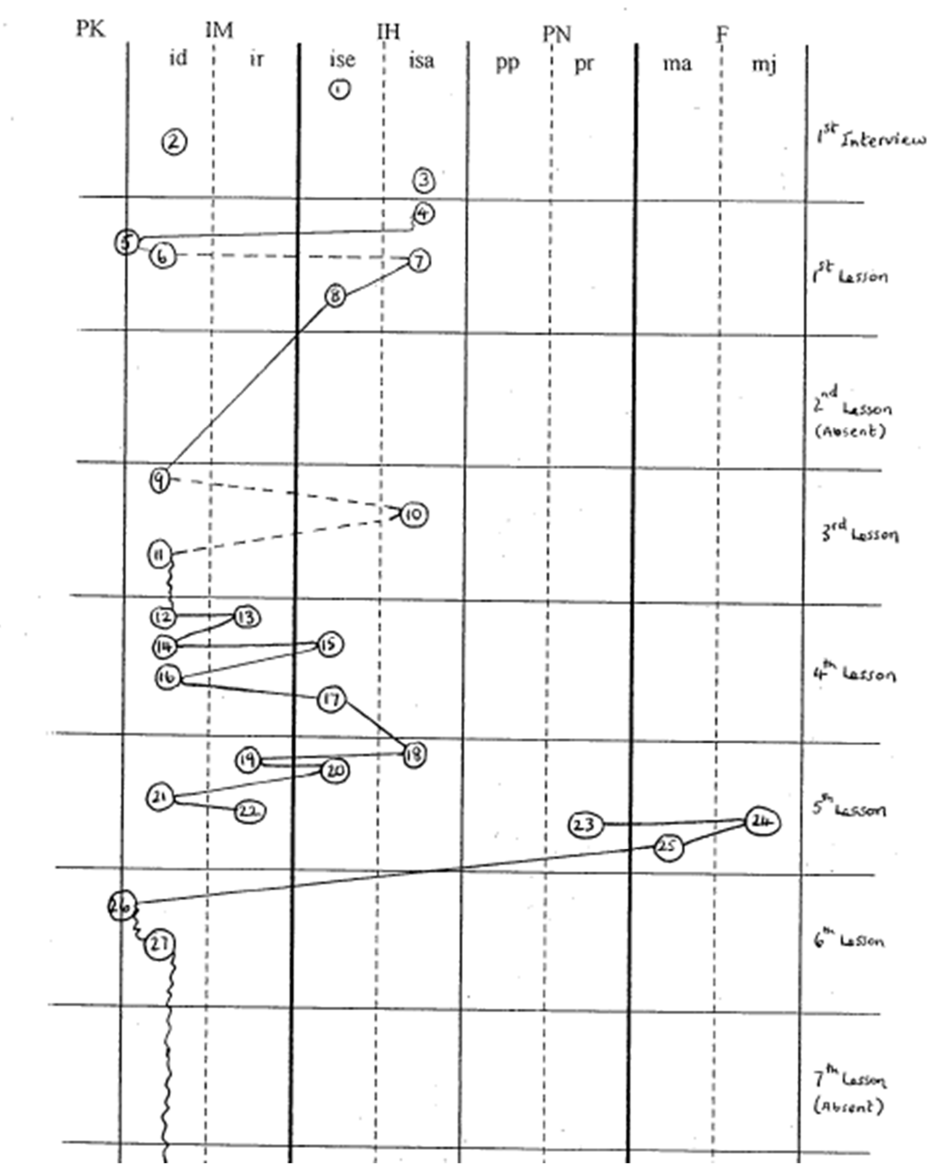


Figure 2.5 Parallel layered map from Towers (1998, p. 127)

This allowed her to depict most complex and longer understanding process; however, the map still functioned in a similar way with the one developed by Pirie and Kieren (1989).

2.4 Studies Using Pirie–Kieren Theory of Understanding as Theoretical Framework

There are several studies that employed the Pirie–Kieren Theory of Understanding as theoretical framework to their studies. As one of them, Manu (2005) studied the relationship between students' language switching and their growth of mathematical understanding in bilingual context. He explored this relationship in a case study with the use of the Pirie-Kieren Understanding Theory as a theoretical tool for examining students' understanding in pattern finding tasks. Though the purpose of the study is not directly related with the current study, it is worth mentioning that the study shows the applicability and usability of the Pirie and Kieren theory of mathematical understanding in a different context. Moreover, Manu (2005) stated that the Pirie and Kieren theory of mathematical understanding has the ability of explaining one's understanding in this theory's own language. In addition, it was stated that this language is irrespective of students' cultural background. This feature of the theory was explored in his study and validated. Similarly Borgen and Manu (2002) reported similar results that support the effectiveness of the Pirie and Kieren theory in assessing mathematical understanding.

Slaten (2006) compared a novice secondary mathematics teacher and an experienced mathematics teacher with respect to their use of instructional representations in the contents of secondary geometry. In that study, the researcher conducted a case study and collected the data with semi-structured interviews and classroom observations. As the theoretical background of the study, Slaten applied the Pirie-Kieren theory to explore students' growth of mathematical understanding and describe how the participants' uses of representations allowed and fostered opportunities for students to engage in those levels of mathematical understanding.

Warner (2005) analyzed students' behaviors, which indicates their flexible mathematical thoughts and contribution of those behaviors to growth of understandings of the students. She carried out a qualitative study and collected the data with video recordings in a case study setting. Warner (2005) worked with middle school students. In the study, group of students were challenged to explain their thinking to each other, ask questions, and defend their solutions. The results of the study showed that while understanding of students grows, a shift occurs from their questioning each other, using and explaining their ideas toward the linking of representations, connecting contexts, and setting up hypothetical situations.

Meel (1995) explored the understanding of the students who used Mathematica as a computer assisted learning tool. He compared understanding of these students with the ones who received traditional mathematics instruction. In order to assess students' understandings, the Pirie-Kieren Dynamical Theory for the Growth of Mathematical Understanding was employed as a theoretical lens. Similarly Droujkova (2004) used Pirie–Kieren Theory of Understanding as a theoretical lens to investigate the roles of metaphor in the growth of mathematical understanding of students in the topic of proportionality with a qualitative study.

In the study of Grinevitch (2004), students understanding of fundamental group theory concepts were investigated. Additionally, effectiveness of the Pirie-Kieren Theory of Understanding with respect to advanced mathematics concepts at undergraduate level was examined. Grinevitch (2004) carried out a case study with six abstract algebra students. She collected the data with classroom observations, written assignments, exams, and audiotaped interviews. The results of the study showed that the Pirie-Kieren understanding theory is an effective tool for assessing students understanding of advanced mathematics concepts. This result extends the results of the study of Manu (2005). Beside the validity of the theory at different cultures, it is also valid in advanced mathematics concepts.

Borgen (2006), as different from other studies, used the Pirie–Kieren Theory of Understanding as a model to enhance teaching strategies. She carried out a case study in order to see if using this model enhanced the growth of pre-service teachers' understanding of teaching and learning mathematics. Moreover, efficacy of using this theory for analyzing growth of understanding was also investigated in her study. The data were collected from four pre-service secondary mathematics teachers. The results showed that the Pirie-Kieren theory provided an effective structure for discussing pre-service teachers' growth of understandings of teaching and learning mathematics. Furthermore, it was found that one's growth of understanding of teaching and learning mathematics was based on his/her primitive knowing. Borgen (2006) defines primitive knowing as one's personal background. It is concluded that the development of understanding is a dynamic process which includes folding backs to examine new concepts with respect to previously held concepts.

Tsay (2005) investigated understanding of pre-service teachers on two-factor multiplication with integers and positive fractions. Furthermore, implications of pre-service teachers' understandings for their pedagogical content knowledge development were explored. Unlike the other studies, Tsay (2005) benefited from three different theories to analyze understandings of participants. These theories were relational understanding of Skemp (1976), APOS: Action-Process-Object-Schema theory of Dubinsky, Dautermann, Leron, and Zazkis (1994), and the Pirie-Kieren Dynamical Theory for the Growth of Mathematical Understanding of Pirie and Kieren (1994).

C. E. Davis (2004) is another who studied the subject matter knowledge of pre-service teachers. He used the Pirie–Kieren Theory of Understanding to analyze growth of understandings of pre-service teachers. The results of the study supported that the growth of understanding is related with prior knowledge.

Cavey (2002) examined a pre-service teacher growth of understanding in right triangle trigonometry. The participant of the study attended to “Lesson Plan Study” (LPS) program as a part of secondary mathematics method course. In the LPS, the pre-service teachers dealt with planning how to teach right angle trigonometry to students. The results of the study showed that “image having” level was the most critical level in the Pirie-Kieren Dynamical Theory (Pirie & Kieren, 1994). Moreover, the results of the study showed that growth in understanding what to teach (content knowledge) resulted growth in how to teach (teaching strategies).

Cave (2008) is one of the researchers who applied the Pirie–Kieren Theory of Understanding to test the effects of an intervention of community service learning on students’ understanding of mathematics. In her study, Cave (2008) focused on African and Latino Americans’ growth of understanding of geometric transformations. Results of her study showed that the Pirie–Kieren Theory of Understanding is an effective theory to probe students’ understanding in different contexts such as comparing two ethnically different groups.

Duzenli-Gokalp and Sharma (2010) examined students’ understanding of addition and subtraction of fractions. They used Pirie and Kieren Model as a framework in their study. The study was conducted with twelve sixth grade and twelve eighth grade students in a private college in Australia. The results showed that questions that require symbolic explanation were completed more successfully by students when compared with the questions that require verbal explanation. Similarly, Duzenli-Gokalp, Bulut, and Sharma (2010), in their study, worked with 20 sixth-grade students and 26 fifth-grade students in Turkey. They found similar results to those in Australian students.

2.5 Multiple Representations

Researchers define representations as characters, concrete objects or images representing something else than their actual meaning (Ball, 1993; DeWindt-King & Goldin, 2003; Goldin & Kaput, 1996). These are useful things to express mathematical thoughts which enable mathematical communication and to support reasoning process (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). NCTM (2000), TTKB (2009), and Behr et al. (1993) also emphasized that representations should be used as essential elements in communicating mathematical approaches and arguments.

In mathematics, students mainly use the representations while solving problems or learning mathematical concepts to support their mathematical understanding. According to Goldin (2003) representations of an individual generate a representational system which includes rules, practices, characters or signs such as letters, words, real-life objects, and numbers. These systems can be internal and external. While internal ones exist within the mind of the person, external ones can be seen by others and can be shared with them. Furthermore, internal representations consist of constructs to describe process of human learning and problem solving in mathematics (Goldin, 1998). External representations include formal language, number lines, symbolic notations, mathematical equations, geometric figures, and diagrams (Goldin & Shteingold, 2001). Unlike Goldin (2003), Bruner (1966) talked only about external representations. According to him, there are three different ways to represent the world. These can be achieved by actions, visual images, and words and language. These representations were named as enactive, iconic, and symbolic respectively by Bruner (1966). This classification was agreed by some researchers to be important in human understanding, however, there are some other classifications made by other researchers. Clark and Paivio (1991) stated that there are two types of representations, verbal and visual, which allow information to be processed and stored in the mind. According to NCTM (2000), representations can be both product and process. It is the act of representing. Lesh et al. (1983) concentrated on mathematical understanding through representations. They stated five types of representations which can be useful for that purpose. These are real life experiences, pictures or diagrams, manipulative models, spoken words, and written symbols. When a learner engages in a mathematical activity, he/she is involved in manipulating one of these representations (Haylock & Cockburn, 2008). External representations make the mathematical communication possible. Furthermore, any mathematical communication can only be conducted with these types of representations. Therefore, in the current study, the external representations used by the students were taken into account in order to analyze students' understandings. Moreover, the classification of the representations proposed by Lesh et al. (1983) was adapted for this study.

According to NCTM (2000) and TTKB (2009), abstract concepts can become more concrete when students use representations. They play an important role in the process of learning fractions (Cramer et al., 2008). If one uses multiple representations to demonstrate a concept, this can help him/her to develop better understanding and strengthens his/her ability to solve problems (Gagatsis & Elia, 2004). Use of representations (such as area models, discrete sets, and number lines) has a significant importance while working on operations with fractions in order to make sense of concepts such as order, unit, and equivalence (Brar, 2010). Moreover, several researchers express that students' learning are enhanced when different representations are used together and students make connections among these representations (Clark & Paivio, 1991; Clements, 1999; Goldin & Shteingold, 2001). Lamon (2001) states that there is a difference between the representations used by students to show their understanding and the representations used by the teacher to explain mathematical concepts. She further claims that if students use different representations than their teacher used, we can say that they understand that topic. Therefore, one can see if the students understand a mathematical concept or not by looking the representations they chose to use. Students who used the exact representation used by the teacher might not understand that concept. Moreover, a teacher can look the students' experience with the external representations, i.e. how they use it and which of them they choose to use, in order to have an idea about students' internal representations. By doing this, teachers can examine students' conceptions of the mathematical concepts being instructed (Goldin, 2002).

In the current study, the researcher paid attention to students' use of representations to examine their understanding in multiplication of fractions. Cai (2004) claims that studies about representation usages bring important ideas about what representations should be used in a mathematics course. Moreover, they found that teachers' use of representations differ from culture to culture. Specifically, teachers from United States and China use different kind of representations to teach mathematical concepts. Teachers from China use symbolic representations and teachers from United States use verbal explanations and pictorial representations. This is also valid for students. According to von Glasersfeld (1983), use of representations differs for each learner. Similar results were found in different studies too (Cai, 2000a; Cai & Hwang, 2002). The students from US mainly used visual or pictorial representations while the students from China used symbolic representations. It was also found that the students who used symbolic representations had greater achievement scores than those who used verbal and pictorial representations (Cai, 2000b). Moreover, this is also the case with textbooks and the representations used in them (Son & Senk, 2010). However, it should be noted that none of the representations is superior to the one other. A particular representation can be more suitable than the others for a specific mathematical concept (Ball, 1993).

There are also several studies that investigated the multiple representations with the light of Pirie-Kieren theory. Study of Droujkova (2004) showed that using symbols or abstract descriptions can support learning indirectly. Moreover, folding back to image making level to support learning requires use of more tangible representations. Property noticing and formalizing levels corresponded to more abstract representations. Similarly, Wilson and Stein (2007) found that the students' use of more abstract representations becomes more frequent toward the outer level of understanding (see Table 2.1).

Table 2.1 Frequency of use of representations at different levels of understanding. *Note*. from Wilson and Stein (2007, p. 675)

	Visual	Numeric	Symbolic
Image Making & Image Having	100%	40%	
Property Noticing	90%	100%	
Formalizing	10%	50%	100%
Structuring		20%	60%

2.6 National Elementary Mathematics Curriculum and Fractions

The elementary mathematics curriculum puts emphasis on students centered learning in lessons. That is the major differences between this curriculum and the previous curricula. In the previous curricula (1983, 1990 and 1998) there were no activities that give opportunities to students to become part of the lesson. However, students work to explore problems and become active learner rather than passive knowledge receivers while learning in the recent mathematics curriculum. Activities and learning environment are carefully planned to give opportunities students to discover new concepts and use abstract and mental models while learning some concepts (TTKB, 2009). Alternative assessment methods are preferred beside the traditional assessment methods. Moreover, there are some skills defined in the curriculum as problem solving, reasoning, communication, connection. Students are expected to acquire these skills and some other inter-disciplinary skills. The developments of these skills are important (TTKB, 2009).

Some objectives of problem solving skills are explained in the mathematics curriculum as students will use problem solving skills in mathematics , other disciplines, and real life situations; use problem solving skills for learning mathematics; solve problems and also state their own problems with the same topic. Some objectives of reasoning skill are explained in the mathematics curriculum as students will use inductive and deductive thinking while learning mathematics; use logical reasoning skills in mathematics, other disciplines, and real life situations; make generalizations and defend their validation. Some objectives of communication skills are explained in the mathematics curriculum as students will use mathematical symbols and terms correctly and effectively; use mathematical language in other disciplines and real life situations. Some objectives of connection skills are explained in the mathematics curriculum as students will make connections within mathematics, among mathematics and other disciplines and real life situations; connect mathematical concepts and operations in different situations; benefit from connections while learning mathematical concepts.

Furthermore, meaningful learning is aimed for students which mean that students use their knowledge in different situations, and make connections among concepts. Students should use their mathematical knowledge in real life situations and the other disciplines. This is one of the requirements of the mathematics curriculum. Concrete experiences are also very important for developing mathematical knowledge and providing meaningful learning. Learning objectives should be planned by taking into consideration of connections within mathematics skills, connections among math and other disciplines and inter-disciplines. In addition, students' motivation is an important necessity for the mathematics achievement. The learning activities should be planned according to students' level, class environment, and the environmental conditions. Real life situations should also be considered while planning the learning activities. Appropriate materials should be used in class activities for acquiring the learning objectives.

Fractions are one of the main topics in the elementary mathematics curriculum. This topic is instructed from grade 1 to 6 in some extent. In this study, the researcher focused on sixth graders. Comparing and ordering fractions, adding and subtracting fractions, multiplying and dividing fractions, and problem solving related with fraction operations are the subtopics of fractions at sixth grade curriculum. The researcher investigated understanding multiplication of fractions in this study. In the mathematics curriculum, meaningful learning, connection within math, connection among math and other disciplines, students' motivation and academic level were highlighted for the multiplication of fractions. Moreover, the curriculum suggests the use of multiple representations in the instructional process of this topic.

2.7 Summary of the Literature Review

- There are many definitions of the understanding around. However, it is hard to see if students understand any concept by referring to these definitions. We need more specific and detailed information on understanding. Understanding theories fulfill that need. Bruner (1960) was the first person to define understanding in education.
- There are several understanding theories for mathematics proposed by researchers (Bergeron & Herscovics, 1981, 1988; Hiebert & Carpenter, 1992; Pirie & Kieren, 1989; Sierpinska, 1994; Skemp, 1976). These theories, except the Pirie–Kieren Theory of Understanding, do

not provide sufficient information to analyze learners' understanding. On the contrary, the Pirie–Kieren Theory of Understanding can act as a powerful framework to analyze learners' understanding at any topic.

- There are eight embedded levels of understanding process (Pirie & Kieren, 1989). These levels are as follow: primitive knowing, image making, image having, property noticing, formalizing, observing, structuring, and inventising. This theory has two features: folding back and don't need boundaries (Kieren & Pirie, 1991; Pirie & Kieren, 1989).
- There are several research studies which applied the Pirie–Kieren Theory of Understanding as a theoretical framework to analyze learners' understanding (Borgen, 2006; Cavey, 2002; C. E. Davis, 2004; Grinevitch, 2004; Manu, 2005; Meel, 1995; Slaten, 2006; Tsay, 2005; Warner, 2005). However, most of these studies did not apply mapping feature of the theory to their study. That may be because of current state of the mapping. Mapping feature proposed by Pirie and Kieren is not much useful. It does not say anything more than progress of understanding of students. Moreover, as pointed out by Pirie and Kieren (1994), these maps can vary from person to person.
- Fractions are one of the most studied topics in mathematics. These studies showed that students have many difficulties in them including multiplication of fractions (Aksu, 1997; Azim, 1995; Behr et al., 1985; Cramer et al., 2009; G. E. Davis, 2003; Haser & Ubuz, 2005; Mack, 2000; Newstead & Murray, 1998; Orhun, 2007). These studies suggest that we should be careful about teaching these concepts. In order to teach these concepts effectively, we should analyze understanding the process of students carefully.
- Representations allow us to have mathematical communication (Kilpatrick et al., 2001; NCTM, 2000; TTKB, 2009). Researchers emphasize the importance of using representations in the teaching and learning process (Clark & Paivio, 1991; Clements, 1999; Gagatsis & Elia, 2004; Goldin, 1998, 2003; Haylock & Cockburn, 2008). As can be seen in the results of the studies, representations are highly related with the understanding of mathematical concepts. Moreover, they enable us to communicate mathematically. Therefore we can use these to analyze understanding of students. Furthermore, integrating these to mapping feature of the Pirie–Kieren Theory of Understanding makes these maps more informative about the process of understanding. Because, with this add-on, the map depicts process of understanding much more meaningfully.
- There are several researches investigating relationships between use of representations and understanding level in the Pirie–Kieren Theory of Understanding (Droujkova, 2004; Wilson & Stein, 2007). It was seen that symbolic representations tend to be used at outer level of understandings. Moreover, results of the studies showed that use of representations are different from culture to culture (Cai, 2000a, 2000b, 2004; Cai & Hwang, 2002; Son & Senk, 2010).
- As can been from the summary of the literature given above, fractions and operations with fractions are studied by several researchers over time. Moreover, it was seen in the literature that the Pirie–Kieren Theory of Understanding is an effective framework to assess student's understanding. However, there is no study focusing on multiplication of fractions with the use of that theory. Moreover, similar studies applied that this theory did not use the mapping feature of the theory. Furthermore, the importance of using representations at the process of mathematical communications was seen in the literature. Therefore, the researcher decided to modify current theory by enriching it with the use of multiple representations.

CHAPTER 3

METHOD OF THE STUDY

This chapter includes design, setting and participants, data collection, validity and reliability of the study, methods used to analyze the data, procedure, and assumptions and limitations.

3.1 Design of the Study

The case study design, one of the methods in qualitative research, was used in this study (Merriam, 1998; Patton, 2002, p. 447). The case was the process of students' efforts towards understanding concepts related with multiplication of fractions. In the case that was investigated in the current study, the researcher did not intervene directly to this process. However, in order to have more control on the process, the activity sheet was prepared according to the mathematics curriculum by the researcher.

There are several characteristics of qualitative researches. These characteristics underlie the rationale to apply case study design to the current study.

- Deal with process: In the current study, the researcher investigated the process of understanding in the lights of Pirie and Kieren model (1994). Process is main concern of qualitative research (Merriam, 1998). Due to the nature of research problems of the current study, the study focuses on process rather than products or outcomes.
- In the current study, the researcher collected data herself with the help of observations, interviews, and field notes so on. Moreover, the collected data were analyzed by the researcher. Similarly, the primary data collection and analysis instrument in qualitative researches is the researcher (Merriam, 1998).
- Description: In the current study, understanding of the students derived from interviews, observations, and field notes was described qualitatively. Qualitative research emphasizes on qualitative descriptions with words rather than numbers (Merriam, 1998).
- Fieldwork: In the current study, the data were collected from the students with interviews when they tried to answer questions and from the observations of their behavior in the classroom. Similarly, in qualitative researches, there are fieldworks. Researchers observe and collect data from participants in their natural settings (Merriam, 1998).
- Induction: In the current study, as stated in the Chapter 1, the researcher aim to improve mapping feature of the current theory of Pirie and Kieren (1994). In the same way, qualitative researches aim to build concepts, hypotheses, and theories rather than testing existing theory or methods (Merriam, 1998).

3.2 Setting and Participants

The study was conducted at a small size public elementary school in Etimesgut district of Ankara. The school had two floors and a garden. There were 10 classrooms, a kindergarten, a computer laboratory, and science laboratory in school. Each classroom had a projector, and a PC. There were also five laptops for teachers' use. In addition, concrete materials were available for mathematics lessons. National elementary mathematics curriculum is followed by the teachers; and, sixth grade students attend mathematics courses four hours per week. There were two mathematics teachers in the school. Moreover, the socio-economic status of the students in the school was different. Some students' family had low income and only fathers were working, some families had medium income and both parents were working. Many of the students walked to the school since their houses were near the school. However, students who came from the long distances went to school with school service.

Purposive sampling was used to choose the participants in the current study. Similarly, Merriam (1998) states that "sample selection in qualitative research is usually (but not always) non-random, purposeful and small" (p. 8). Two male students were selected for this study. The selection of the students was based on two criteria: (1) researcher's impression of the student's willingness to respond to questions and (2) the student's mathematical ability. The first criterion was about to maximize responsiveness during the interviews. The second criterion was decided according to previous grades of students. The participants were 12 years old. The names Volkan and Ahmet were given as pseudonyms. Volkan was one of the best students in his class. He was asking questions about the topics during the lessons and telling his ideas about the related topic. But, he was excited sometimes and he could not say what he wanted to say He had elder sisters and brothers. His father was a civil servant, while his mother was a house wife. He had his own room in his house.. Ahmet was in the other class. He was the best student in his class. He had no sisters and brothers. His father was also a civil servant, his mother was a house wife. He had his own room in his house. He was very active at lessons. He had always asked many questions about the new topic during the lessons.

There were two sixth grade classes. The researcher was the mathematics teacher of both classes. She had been teaching them for about six months, so, she knew the students well. Therefore, it was easy to access the students and get feedbacks from the students. The students were informed about the purpose of the study before conducting the study. They were willingness to participate in the study. The researcher's role was just teaching the fractions and fraction operations as a mathematics teacher according to objectives, mathematics skills, connections among math and other disciplines and inter-disciplines and teaching approach of national elementary mathematics curriculum and then conducting the interviews to find out students' understanding of multiplication of fractions.

Later, the lesson plans and activity sheets were prepared according to objectives of the national elementary mathematics curriculum. They included the same activities and questions. Lesson plans were prepared for the teacher, activity sheets were prepared for the students. Also, the skills such as problem solving, reasoning, communication, connection were considered while developing lesson plans and activity sheets. These skills were also related with using multiple representations. For example, a problem, " a child ate 3/4of 12 nuts. How many nuts did he eat?" was asked. It was related with the objectives of the fractions such as "do multiplication operation with fractions" and "solving problems which require operations with fractions" and "estimate the result of the operations with fractions by using some strategies". When the students solved it by using concrete material, concrete material representation and communication and reasoning skills were used. If the students could try to solve it, then they could use verbal and symbolic representations and it was related with problem solving, reasoning and association skills of the elementary mathematics curriculum. Later, students' self-evaluation forms and students' journals were developed. Their purpose was to find out students' understanding about the topic instructed during the lessons. After that, fraction interview was developed in order to find out students' understanding of multiplication of fractions. The questions in the interview were prepared according to the objectives of elementary mathematic curriculum by thinking the understanding levels of Pirie and Kieren model.

Next, the study was conducted with two sixth grade classes in the school. All of the students in two classes learnt the fractions and operations with fractions during three weeks. Students completed the activity sheets during the lessons. They did activities by using concrete materials and solved problems, estimated the result of some of the questions in the activity sheets. The activity sheets were collected at the end of the each section. The students were video-taped during the lessons. After that students were given journals and self-evaluation forms and they were collected. The students learnt fractions and fraction operations during three weeks. Then, two students were selected for the interviews which was the main data source for the current study. Both students knew what a fraction and how they can show fractions with a different method such as folding and cutting paper, drawing figures. They learnt addition and subtraction of fractions with common and uncommon denominators before learning multiplication of fractions. Moreover, they had learnt fraction multiplication as finding a fraction of a fraction at fifth grade. Then, at sixth grade they learnt multiplication of fractions, mixed numbers and the relationship between addition and multiplication when a fraction and a whole number multiplied. They learnt how to model the multiplication of fractions by using concrete materials and drawings. They also solved word problems related with multiplication of fractions. Each interview was conducted approximately 90 minutes. There were some breaks during interviews and interviews were video-taped.

3.3 Data Collection

Various data collection methods were used in order to obtain understanding levels of participants. The data were collected with interviews, students' journals, activity sheets, observations, and field notes. Table 3.1 gives the time line of the data collection process. In addition to the information given in the table, the class was observed throughout multiplication topics.

Table 3.1 Data collection time line

Week	Measure
1	Consent forms received
1-3	Instruction done/Activity sheets given/ Students' self-evaluation forms received
1-4	Students' journals received
5	Interviews conducted

Four instruments were developed by the researcher in order to collect data to analyze students' understanding of multiplication of fractions. These instruments were fraction interview instrument, activity sheet, students' journal, and students' self-evaluation form. Following sections give details about these instruments.

3.3.1 Fraction Interview Protocol

Interview is a data-collection technique among the interviewer and the interviewees involving oral questioning of respondents, either individually or as a group (Bogdan & Biklen, 1998). This technique is often main source of the data to be collected in qualitative researches (Merriam, 1998). In the current study, semi-structured interviews were carried out with two students. Each of the interviews took about one and a half hours to be completed. The interviews were carried out after the school hours in the technology and design class, science laboratory, library, or empty class. There were only the researcher and the student being interviewed at each interview sessions. Paper and pens were provided to them with concrete materials related to fractions like fraction strips, transparent fraction cards, small cubes, beans and chickpeas. The interviews were videotaped by the researcher and students' notes were kept. Later, these video records were transcribed. Therefore, it became possible to analyze the interviews in details. The students were informed that their answers were not judged as being correct or incorrect and that answers were not affect their course grades. They were also informed that there was no defined duration in order to answer each question. Therefore, they answered each interview questions freely without having stress. Follow-up questions were asked according to the answers of the students. Some of the follow-up questions were as follows: "Can you explain this in details?", "Why did you think like that?", "Can you give one more example to this situation?", "How did you come up with this idea?" so on. The purpose of these follow-up questions was to probe student answers to the questions to see why they gave that answer.

A fraction interview instrument was designed by the researcher by thinking what questions to ask, how to sequence the questions, how much detail is necessary, how long the interview last, and how to word actual questions (Patton, 2002). It is the main instrument for the current study. There are 14 questions in the fraction interview instrument (see Appendix A). Some questions are about the relationship of multiplication and addition (2,1,4) one is about the modeling of multiplication operation (7), another one is about drawing figures according to given concept (5), some are about finding the result of multiplication operation according to given figures (13,14), some are about interpretation of the multiplication operation in fractions (6,12,9,7), some are word problems and questions about multiplication of fractions (3,4,11,10), one is about estimation of the result of multiplication operation (8). Some of the items were developed by the researcher (2,3,1,6,12,10,8,7); some of the items were modified from different sources such as the Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS), the Programme for International Student Assessment (PISA), National Assessment of Educational Progress (NAEP), and national high school exam, connected mathematics textbook, and previous studies (4,11,5,13,14). The questions were divided into two groups: (a) questions related with multiplying a whole number by a fraction and emphasizing the relationship between repeated addition and multiplication operations, (b) questions related with multiplying two fractions. The questions were developed and selected by taking into account the levels of Pirie-Kieren's model and type of representations. Students may reach to any level depending on his/her solution strategy (See Table 3.2 for expected maximum levels of understanding). All type of representations (symbolic, visual, concrete, and verbal) could be used during the questions. For example, there was a question in which ingredients to make a cake for five people were given and the proportion of each ingredient was asked in order to make a cake for fifteen people. All of the ingredients should be multiplied by 3 in order to solve this question. The question required to multiply a whole number by a fraction and a whole number by a mixed number. It was related with noticing the relationship between repeated addition and multiplication. Another question was a word problem related with finding the number of apples in two multiplication operations by taking into account 3 apples equaled to ¼ of the all apples in a basket. This question was related with multiplying a fraction by a fraction and finding the quantity represented by this multiplication.

In order to analyze students' understanding levels, several actions at each question specified for each level of understanding corresponding to the Pirie and Kieren's theory of understanding. These actions can be seen in Table 3.3 with respect to level of understandings. These actions were derived and modified from some of Pirie and Kieren's studies about fractions (Kieren, 1988, 1999; Kieren & Nelson, 1978; Kieren & Pirie, 1991; Pirie & Kieren, 1992) and some of the studies which applied the Pirie–Kieren Theory of Understanding as theoretical lens to their studies (Meel, 1995; Tsay, 2005). There was no question that could help us to trace students' understanding toward structuring and inventising levels since these levels required more sophisticated questions which were not suitable for the objectives of multiplication of fractions at sixth grade mathematics curriculum. Even the students from Pirie and Kieren's study did not achieve higher levels such as structuring and inventising (Pirie & Kieren, 1994). Students can use any type of representation-verbal, concrete, visual and symbolic- through each question.

Table 3.2 Expected maximum understanding levels in interview questions

Questions	Expected Maximum Understanding Levels
Part 1	
1	Formalizing
2	Formalizing
3	Formalizing
4	Formalizing
5	Observing
Part 2	
1	Formalizing
2	Formalizing
3	Observing
4	Property Noticing
5	Formalizing
6	Observing
7	Observing
8	Observing
9	Observing
10	Observing

The expert opinions were taken from four mathematics education experts to ensure validity. The fraction interview instrument and the table of actions were provided to these experts to get their opinion (see Table 3.3). Following questions were asked to experts: "Is there any scientific error in the questions?”, “Is this question suitable to the levels of students?”, “Is there any grammatical error in the question?”, “Are the context and figures of the question suitable to the levels of students?”, “Is this question suitable to track understanding process of the students according to the given table”, and “Does this question allow students to use different type of representations?”. After having experts’ opinions, some of the questions were slightly modified. These modifications were just about grammatical errors.

Table 3.3Levels of understanding and corresponding actions

Level of understanding	Action associated with fractions
Primitive Knowing	The student is assumed to know how to do multiplication operation with natural numbers what is the meaning of multiplication operation with natural numbers? multiplication is a form of repeated addition in natural numbers.
Image Making	The student is able to model multiplication of two fractions by using transparent fractions cards, chick beans, beans, fraction sticks etc. draw figures of multiplication of two fractions, whole number by a fraction. do paper folding activities for multiplication of fractions.
Image Having	The student is able to explain his/her modeling/drawing of multiplication of two fractions, whole number by a fraction.
Property Noticing	The student is capable of multiplying a whole number by a fraction multiplying a fraction by a fraction (proper and improper fractions) multiplying mixed numbers noticing commutative and associative property of multiplication of fractions.
Formalizing	The student is capable of recognizing that multiplying a whole number by a fraction means taking fractional part of this whole number multiplying a whole number by a fraction can be explained with multiplication is a form of repeated addition. multiplying a fraction by a fraction means taking fractional part of this fraction which means taking a part of a part.
Observing	The student is able to connect that multiplication of fractions are used in different mathematic topics such as proportion, percentages, time measures etc. and give examples for them.
Structuring*	The student is capable of recognizing the relationship between fractions and rational numbers. developing theories with multiplication of fractions.
Inventising*	The student is capable of creating new concepts as a result of fully understanding multiplication of fractions.

* The participants of the current study were not expected to reach these levels

Moreover, the pilot study was conducted in order to see functioning of the interview questions. These questions were asked to two seventh grade students who were already taught the topic of fractions. The interviews were video-taped. The focus of this pilot study was on actions performed by the students. This pilot study was useful for determining the relevance of the interview questions, time appropriateness, and the clearness of the questions. After piloting the interviews, the outcomes of the pilot study were evaluated and some changes and modifications were done.

3.3.2 Activity Sheet

The activity sheet was used as a supplementary instrument for the triangulation of the data in the current study. The activity sheet about multiplication of fractions was developed by the researcher according to the objectives, problem solving, reasoning, communication, connection skills, some other inter-disciplinary skills and teaching approach required by elementary mathematics curriculum. It was modified from several mathematics textbooks by taking the purpose of this study into account (See Appendix B). There were 14 questions in the activity sheet related with modeling of multiplication of fractions, real life word problems, and symbolic questions about multiplication of fractions. A pilot study was done with two seventh grade students in order to understand whether the questions in the activity sheet were related with purpose of the current study. Then, final revision was made after pilot study.

The activity sheet was completed by the students during the lessons related with multiplication of fractions. Students used concrete materials such as fraction strips, transparent fraction cards, small cubes, beans, chickpea etc. while answering some of the questions in the activity sheet. These activity sheets were collected at the end of the related lesson in order to validate the collected data with interviews.

3.3.3 Student Journals

Student journals were used as a supplementary document for the triangulation of the data in the current study. The purpose of students' journal writing was to provide opportunities for the researcher to gain insight about the students' understanding of multiplication of fractions. Journal writing could also help students expressing themselves what they had learnt about multiplication of fractions. There were eight questions requiring detailed explanation of multiplication of fractions in the students' journal (see Appendix C). One of the questions required telling how to multiply two fractions, a fraction and a whole number, and two mixed numbers to a friend, other question was related with how to estimate the result of multiplication operation, another question was related with modeling of multiplication of fractions and the other one was related with writing a problem and solving it. These questions were modified from some mathematics textbooks and some studies related with fractions. The questions were edited according to suggestions from four experts in order to assess students' understanding of multiplying fractions specifically. A pilot study was done with two seventh grade students in order to test the functionality of the questions in the student journals. After the pilot study, some of the questions were edited and final versions of the questions were obtained in student journal.

The students answered the questions at the end of the mathematics lessons related with multiplication of fractions and they were collected just after students completed them. Students' journals were used to validate the results obtained from fraction interview instrument for students' understanding of multiplication of fractions.

3.3.4 Students' Self-Evaluation Form

Students' Self-Evaluation Forms were used as a supplementary instrument for the triangulation of the data in the current study. The purpose of these forms was to allow students to evaluate themselves and see their deficiency about the multiplication of fractions. There were five open ended items and eleven 3-point likert type items in student self-evaluation forms (see Appendix D). Some of the items were taken from several textbooks and previous studies, and, some of the items were developed by the researcher. "What did I learn easily/hardly in the fraction multiplication?" and "Which concepts did I like while learning multiplication of fractions?" were some of the open-ended questions in this form. Students also self-assessed themselves by marking 3-point likert type items. “I am able to do multiplication operations with fractions” and “I know the meaning of multiplication when two fractions are multiplied” were some examples of the likert type items in this form. The students filled self-evaluation forms at the end of the lessons related with multiplication of fractions. They were collected after students completed them in order to validate the results obtained from fraction interview instrument about students’ understanding of multiplication of fractions.

3.3.5 Observations

Observation is a technique that is used for systematically selecting, watching and recording behavior and characteristics of living beings, objects or phenomena (Bogdan & Biklen, 2007). The lessons and interviews were recorded with a video in order to understand the whole procedure deeply (see Powell, Francisco, & Maher, 2003 for more details on the use of videorecording in research on mathematics). The video tapes were used as an observation tool in this study. The purpose of observations during the lessons related with multiplication of fractions was to validate the data collected from the interviews.

3.3.6 Field Notes

Field notes refer to written notes derived from data collected during observations and interviews. The field notes collected during the study were used for the triangulation of the data collected from interviews. The researcher video-taped the lessons and interviews and took notes during lessons and interviews. Keywords, abbreviations were used while writing field notes. The researcher also reflected her ideas, thoughts based on the observations and interviews in her field notes. The teacher’s reflections about the students joined interviews were also noted. The students’ previous grades at mathematics lesson were also noted.

3.4 Validity and Reliability of the Study

Validity and reliability issues play important role in both quantitative and qualitative researches. All researches should produce valid and reliable results. This section deals with these issues and explains how the researcher overcame them in this qualitative case study.

3.4.1 Credibility of the Study

The internal validity or credibility of qualitative researches concerns with the question of how the findings of the study match with the reality (Merriam, 1998). In the current study, the followings were done to ensure credibility of the study. The data analyzed in the study were collected with multiple ways. It was collected through fraction interview instrument, students’ activity sheets, students’ journals, students’ self-evaluation forms, observations and field notes. The findings from the interviews were validated from the results of the other data resources mentioned before. Moreover, the participants were asked to see if the interpretations were made by the researcher were what they really thought during the interviews. According to Merriam (1998), checking interpretations with the participants is much more important than the ones made with outsiders. Furthermore, a second coder also analyzed the data. The use of representations and understanding levels was determined by him too. The rate of agreement and disagreement was calculated with the overall results. The rate of agreement was found to be 94%, which was acceptable value to support the credibility of the study.

3.4.2 Transferability of the Study

External validity, also known as transferability in qualitative research, deals with extending the results of a study to the other settings. In order to ensure external validity, data collection and analysis procedure and description of setting and participants were given in details.

3.4.3 Dependability of the Study

The reliability which means consistency is based on the assumption of replicability or repeatability in quantitative research. But, replicability or repeatability of a study is difficult to do in qualitative research because of the changes in the setting, behaviors etc. So, reliability is expressed as dependability in qualitative research in order to deal with the changes in the setting and their effects in the research process (Trochim, 2000). Multiple observers were used in this study to provide the dependability of the data. Furthermore, the interviews were videotaped. The researcher and an independent observer reviewed the video records in order to decide the actions done in each understanding level of Pirie-Kieren model and representations used by students and the drawing of maps of each student according to their understanding level and use of representations.

3.5 Data Analysis

Data analysis is a systematical process for searching and adjusting the findings of the study. Pattern finding, data coding and synthesizing are the parts of data analysis (Bogdan & Biklen, 2007). Holistic and coding analyses are the two ways of interpreting the data in qualitative studies. Holistic analysis includes looking at whole process not specific parts of the studied case whereas coding analysis includes identifying and categorizing specific observable actions or characteristics (Becker et al., 2005). The aim of data coding analysis was to find patterns among the collected data for drawing conclusions. Dey (1993) suggests four ways for categorizing the data that “relevant literature review, focus of the research and research questions, interference from the data, imagination and previous knowledge”.

Data coding analysis was used in this study. Semi-structured interviews were done with two sixth grade students. Students answered the questions in the fraction interview instrument. The interviews were videotaped to see each student’s answers deeply. Later, interviews were transcribed by the researcher and then data coding was started (Merriam, 2009). The coding was done according to levels of understanding and corresponding actions in Table 3.3 and also according to students’ use of multiple representations. The representation type was coded according to students’ use of them during each question. Moreover, the representation type and the level of understanding presented by a student for each question were numbered in order to draw understanding map of that student. So, there could be more than one number in a question depending on students’ answer. The abbreviations were used for showing the levels and representation types. Two maps were drawn for each student. One was the first part of the interview, the other one was for the second part of the interview. There were also supplementary data sources such as activity sheets used during the lessons, students’ journals, and self-evaluation forms, field notes and classroom observations were used for validating the data collected through fraction interview instrument. Some of the answers of the students in the activity sheet, students’ journal, student’ self- evaluation forms were used to support the coded data in the interviews. Students had learnt the multiplication of fractions according to the objectives of sixth grade mathematics curriculum. The activity sheet was completed by students during the lessons and it was collected at the end of the lesson. Students’ journal and self-evaluation forms were given just after finishing the topic. The lessons were also videotaped. The observation notes from videos and field notes taken by the researcher after the lessons related with multiplication of fractions and after the interview were also used to triangulating of the data collected by interviews. Moreover, the initial map of students’ understanding levels of Pirie and Kieren model and the frequency of their use of representations types were produced from overall observations of student’s activities in the lessons related with multiplication of fractions. The researcher had her first impression of the relation of understanding levels and the use of representation types with these initial maps.

A sample analysis was done to show data analysis and how to figure out the understanding maps of students.

A word problem, “a teacher has 45 books and a doctor has also 45 books. $\frac{4}{5}$ of doctor’s books and $\frac{2}{3}$ of teacher’s books are novel. Find the number of novels of them” was asked. It was related with finding a part of a whole number. One of the participants were answered the questions as in the following excerpts.

> “$\frac{4}{5}$ of teacher’s book means multiplying $\frac{4}{5}$ by 45. I give 1 to the denominator of 45 in order to do this multiplication since a whole number can be considered to be a fraction with a denominator of 1. I can simplify 45 and 5 by dividing them with 5. Then, I find the product

by multiplying the numerators together and denominators together and find the product 36. So, the teacher has 36 novels."

The abbreviations were used to show the understanding levels and representation types. The numbers were given to show the parts of the cases on the maps. The participant solved this problem by using symbolic representations (RS) [1]. He verified his knowledge of multiplying a fraction by a whole number which pointed at his ability to operate at property noticing level (PN). He did the same operations for finding $\frac{2}{3}$ of 45 and found 30 for the doctor's novels. When the number 1 was seen in the map, it was understood that property noticing level reached and symbolic representations were used by the participant during that part of the case. Later, the participant was asked the reason why he used multiplication here, he said that "I found $\frac{4}{5}$ of 45. I can divide 45 by 5 and multiply the result by 4. It is the same as multiplying the $\frac{4}{5}$ by 45. It means adding 45 times $\frac{4}{5}$ together." So, he knew the meaning of multiplication of fractions and he was aware of multiplication was a form of repeated addition. He also knew that multiplying a whole number by a fraction means finding a part of a whole. These evidences pointed that he was at formalizing level (F). He used verbal representations (RW) for these explanations [2]. When the number 2 was seen on the map, it showed that the participant positioned at formalizing level and used verbal representations for the explanation of the result. The activity points for the representation types were also drawn on the map in order to make easier to interpret the results. After analyzing these results of this question in the interview, more evidence were collected from the students' activity sheets, journals and self-evaluation forms for validating the data obtained from the interviews. For example, for this question more evidence related with the meaning of multiplication of fraction and the relation between multiplication and addition was provided from the activity sheet of that student.

3.6 Procedure

The research problem of the study and related key words were decided firstly. The key words "Mathematics Education", "Growth of Understanding", "Multiplication of Fractions", "Multiple Representations", and "Pirie and Kieren Theory of Understanding" were searched from the databases. The keywords were searched from the sources such as Educational Resources Information Center (ERIC), Dissertation Abstracts International (DAI), Social Science Citation Index (SSCI), and Google Scholar. The studies related with the current study in Turkey were also searched from National Theses Center and some local journals such as Hacettepe University Journal of Education, Education and Science, and Elementary Online, Journal of National Education, and proceedings of national conferences. The review of related literature had been updated during the study.

Secondly, the interview protocol was developed. Some of the questions were modified from different sources such as Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS), the Programme for International Student Assessment (PISA), National Assessment of Educational Progress (NAEP), and national high school exam, connected mathematics textbook and previous studies and translated into Turkish. Some of the questions were developed by the researcher by thinking the levels of Pirie-Kieren's model. Expert opinions were taken and the questions were revised. The pilot study was conducted with two seventh grade students and the questions were revised finally and then the interview protocol was copied. Later, lesson plans were prepared for the teacher and activity sheets were prepared for the students. They were prepared according to elementary mathematics curriculum. Next, students' journals and students' self-evaluation forms were developed. The activity sheet, students' journals and students' self-evaluation forms were piloted with the same students and their final revisions were made and they were copied.

Thirdly, the study was conducted at a public school in Etimesgut district of Ankara since its convenience. The fraction unit was taught to two sixth grade classes in this school during three weeks at April,2010. They did the activity sheets during the lessons. They also completed self-evaluation forms and journals at the end of each section. The activity sheets and self-evaluation forms and students' journals were collected at the end of each section. Moreover, each section was video-taped. Later, two students were chosen for the interviews. The interviews were conducted during nearly 90 minutes at the beginning of the May, 2010 and they were video-taped. An informed consent form was prepared and the participants were informed about the study. The pseudonyms were used for two participants in order to not to deceive them.

Finally, the data analysis was done. Students' interviews were transcribed and coded according to students' understanding levels at Pirie and Kieren model and their use of multiple representations. Students' answers were ensured by asking them. Students' activity sheets, journals and self-evaluation forms and video records were used to triangulate the data collected from the interviews. Two coders were coded the obtained data.

3.7 Assumptions and Limitations

3.7.1 Assumptions

The assumptions of the study are given below.

1. Both of the students answered the questions in the way showing their actual understanding process in the interviews.
2. The participants of the study did not interact with each other.

3.7.2 Limitations

The researcher's role may be a limitation of the study. The researcher was the mathematics teacher of the students. So, the students may feel nervous and stressed while answering the interview questions. However, it may be an advantage since the researcher and the students know each other well. Moreover, there were no questions to track students' understanding at structuring and inventising levels.

CHAPTER 4

RESULTS

The primary intention of this thesis was to investigate sixth grade students' understanding of multiplication of fractions. Additionally, this study sought to improve mapping feature of the Pirie and Kieren theory of mathematical understanding and examine the effectiveness of this improved version. With respect to these purposes, there were two research questions: "What are the sixth grade students' understandings of multiplication of fractions using the Pirie and Kieren model?" and "What representations do sixth grade students use to express their multiplication of fraction ideas at each understanding level in terms of Pirie and Kieren's model?". In order to answer the research questions of the study, the data was collected and analyzed. The results of the analysis were presented in this chapter.

The data from the interviews, observations, and other sources (activity sheets, students' journals, students' self-evaluations) were used to analyze each participant's understanding and uses of representations at each level of understanding in order to find emergent themes concerning types of representations and understanding levels in which representations were used. Additionally, understanding maps were generated for all participants. Each map demonstrates the associations between the types of representations used by the participants and the levels of understanding.

This chapter includes two sections as follows: the case of Ahmet's understanding and use of representations and the case of Volkan's understanding and use of representations. Each of the section first describes the types of representations used by each student and the understanding levels in which each student used those representations. Their growth of understanding of multiplication of fractions and maps of their understanding process are then discussed at these sections. Detailed analysis of each case included multiple view and re-view of the interview videos, transcripts, and supplementary data. The role of supplementary data were ensuring trustworthiness of the interpretations and clarifying students' actions. The interview videos were the primary data source.

While analyzing the data, the researcher took the following type of representations in consideration:

- Concrete materials
- Spoken or written words
- Visuals
- Symbolic formulas

These representation types, understanding levels, and movement from each of the levels were coded as it can be seen in Table 4.1 to analyze the data.

Table 4.1 Coding scheme used in analyses

Code	Description
P	Primitive knowing
IM	Image making
IH	Image having
PN	Property noticing
F	Formalizing
O	Observing
S	Structuring
I	Inventising
IMtoP	Folding back from image making to primitive knowing
IHtoP	Folding back from image having to primitive knowing
IHtoIM	Folding back from image having to image making
PNtoIM	Folding back from property noticing to image making
PNtoIH	Folding back from property noticing to image having
PNtoP	Folding back from property noticing to primitive knowing
FtoIH	Folding back from formalizing to image having
FtoIM	Folding back from formalizing to image making
FtoP	Folding back from property noticing to primitive knowing
RV	Using visuals (drawing, diagrams) as representations
RW	Using spoken or written words as representations
RC	Using concrete materials as representations
RS	Using symbols as representations

4.1 The Case of Ahmet's Understanding and Use of Representations

As detailed in Section 3.2, Ahmet is the best student in his class. Moreover, he is an active participant of the mathematics lessons. He shows his interest in the related topic with asking many questions and expressing his willingness to solve the questions asked by the teacher. Throughout the study, the lessons in Ahmet's class were video-taped as well as the field notes taken during the observations. Furthermore, the activity sheet was also filled by Ahmet. Preliminary analyses of these supplementary data showed that Ahmet used symbolic representations almost at every stage of the lesson. He tried to explain his answers with symbols too. Therefore we can say that, in the instructional sequence Ahmet mainly used symbols and he used drawings as well as verbal language less than symbolic representations in the activity sheets given. This trend of using symbols continued throughout the observation (see Figure 4.1).

For the classroom activities, the researcher created initial maps that consist each understanding level and frequencies of the representations used. The layout for this map taken from Slaten (2006) and modified to include numbers of observations as well as connections between understanding level and type of representations. These initial maps do not show the process of understanding; however, it is still informative and useful to see the relationship between understanding and representation types.

The initial mapping was produced from overall observations of Ahmet's activities in the lessons and these maps showed connections between understanding levels and the types of representations he used (see Figure 4.1). The initial map outlined Ahmet's use of the representation types related with his understanding levels. The numbers of arrows from understanding levels to representation types were given representatively. The numbers at the right corner of the map showed the frequency of representation types he used at each understanding levels. The first letters of representations and understanding levels were given as abbreviations. So, Ahmet's initial map showed that he used four concrete material and two visual representations at image making level; four symbolic and verbal representations at image having level; two symbolic and one visual representation at property noticing level; two symbolic representations at formalizing level; and 1 symbolic representation at observing level. It seemed that Ahmet mostly used symbolic and verbal representations at outer levels; concrete materials and visual representations at inner levels.

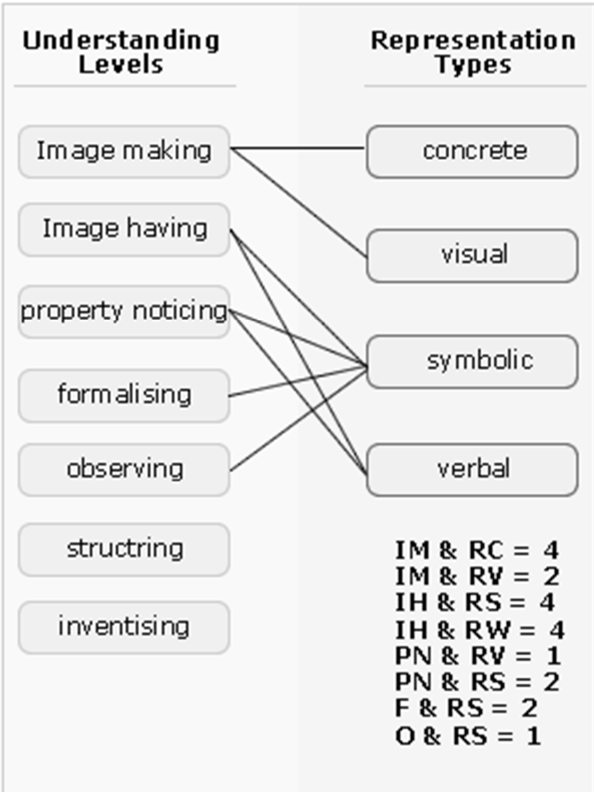


Figure 4.1Activity levels vs. type of representations from Ahmet's first observation

As stated before, primary data source for the analyzing students' understanding was the data gathered from the semi-structured interviews. First part was related with multiplying a fraction by a whole number, multiplying a mixed number by a whole number. 5 questions were asked in this part. They emphasized the relationship between multiplication and repeated addition. The first question was related with trying to find out what comes to one's mind about the fractions. The purpose of this question was to find out the relationship between multiplication and repeated addition while obtaining the fraction. Ahmet was asked to find out how he could obtain the fraction $\frac{4}{5}$. He showed his awareness to figure out a fraction by drawing a figure and using a concrete material as in the following excerpts. At this stage, Ahmet demonstrated his ability to operate at image making level (IM) when he deals with the fraction concept. He used visual representations (IM) (RV) [1] and concrete representations (IM) (RC) [2] to represent the fraction $\frac{4}{5}$.

AHMET: "The fraction $\frac{4}{5}$ means dividing a whole into 5 equal parts and taking 4 parts of it (He was drawing a rectangle at the same time, see Figure 4.2) (IM) (RV) [1] I can also show it with fraction tiles (IM) (RC) [2] ……I can also show it with chick peas (RC). If one chick pea is taken $\frac{1}{5}$, then I take 4 chick peas in order to show the fraction $\frac{4}{5}$,"

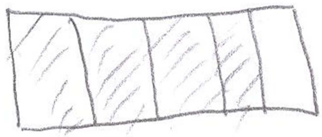


Figure 4.2Ahmet's visual representation of $\frac{4}{5}$

While Ahmet was further explaining the fraction, he demonstrated the fraction $\frac{4}{5}$ with mathematical expressions. At that stage, he explained the fraction as operations. He started with addition of the fractions and concluded that the multiplication is a form of repeated addition which showed he operated at the formalizing level (F). He used symbolic representations (RS) as seen the following excerpts [3]. (F) (RS) [3]

AHMET: "It equals to $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$. If I make it in a shorter way, I can use multiplication $\frac{1}{5}\times\frac{4}{1}=\frac{4}{5}$ (RS) [3]. The addition of four $\frac{1}{5}$ equals to multiplying four times $\frac{1}{5}$ (see Figure 4.3)." (F) (RS) [3]

Figure 4.3Ahmet's logic about addition and multiplication of fractions

More evidences for this was also seen in the activity sheet of him. He tried to explain the relationship between multiplication and repeated addition (see Figure 4.4).

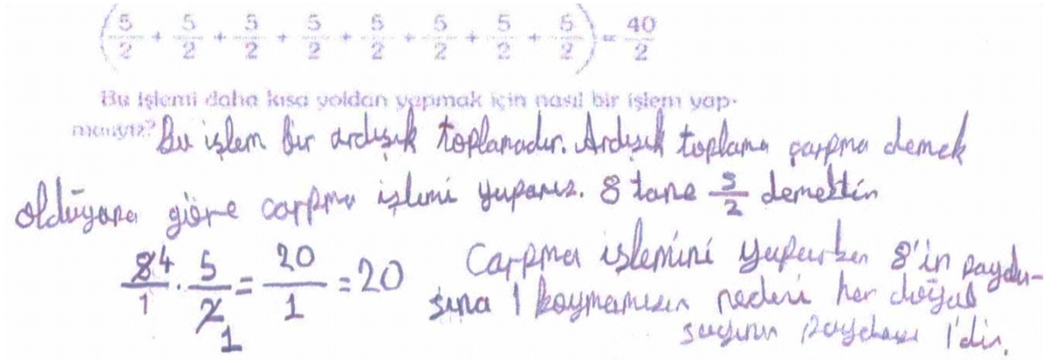


Figure 4.4Ahmet’s logic about addition and multiplication of fractions in the activity sheet

In the second question, ingredients to make a cake for five people were given and the proportion of each ingredient was asked in order to make a cake for fifteen people. It was related with finding the multiplication of a whole number by a proper fraction, an improper fraction and by a mixed number. It also emphasized the relationship of multiplication and repeated addition. Ahmet showed an understanding of multiplication of a fraction by a whole number and also multiplication of a mixed number by a whole number. He multiplied the numerators of the fractions and multiplied the denominators of the fractions and placed the product of the numerators over the product of the denominators. All aforementioned evidences proved that he positioned at property noticing level (PN) since he examined his knowledge about multiplication of fractions for relevant properties. He used symbolic representations (RS) in order to demonstrate these properties as seen in the following excerpts. [4]

> AHMET: “It is for five people, it’ll be multiplied by three for the cake prepared for 15 people. I will find the amount of vegetable oil by multiplying $\frac{1}{2}$ with 3. An integer can be considered to be a fraction with a denominator of 1. There is no cancelling for this operation…I multiply the numerators, it is 3 and multiply the denominators, it is 2. Then the product is $\frac{3}{2}$ which equals to $1\frac{1}{2}$ cup of vegetable oil” (see Figure 4.5) (PN) (RS) [4]”

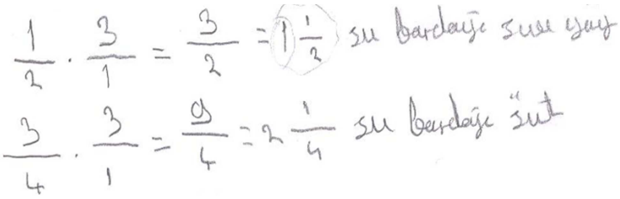


Figure 4.5Symbolic representation used by Ahmet to show multiplication of a fraction by a whole number

As can be seen in Figure 4.5, Ahmet did the other multiplication ($\frac{3}{4} \times 3$) the way as in the previous excerpts in order to find the amount of milk used. He also multiplied a mixed number by a whole number to find amount of the sugar and flour being used in the cake. He converted each mixed number to an improper fraction and then did multiplication as in the following excerpts. He positioned at property noticing level (PN) and used symbolic representations (see Figure 4.6) (RS) [4]

AHMET: "$2\frac{1}{2}$ equals to $\frac{5}{2}$ which is necessary for multiplication. Then I multiply it by 3. The result is $\frac{15}{2}$ which equals to $7\frac{1}{2}$ cup sugar ….I find 7 cup flour." (see Figure 4.6) (PN) (RS) [4]

$2\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{1} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$ su bardaga seker

$2\frac{1}{3} = \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{1} = \frac{21}{3} = 7$ su bardaga un

Figure 4.6 Symbolic representation used by Ahmet to show multiplication of a mixed number by a whole number

Ahmet finally found the proportion of eggs and baking powder by just multiplying them by 3 (See Figure 4.7).He had primitive knowledge (PK) about fractions [5] and he used symbolic representations (RS). For instance, he was asked what he understood from $2\frac{1}{3}$ cup flour, he told that "2 cup flour and a cup with an amount nearly filled $\frac{1}{3}$ of it". He drew the figure to illustrate his explanation and used visual representation (See Figure 4.9) (RV)

$2 \cdot 3 = 6$ yumurta

$10 \cdot 3 = 30$ g kabartma tozu

Figure 4.7 Symbolic representation used by Ahmet to show multiplication of a whole number by a whole number

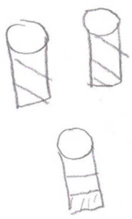


Figure 4.8 Visual representation used by Ahmet to show a fraction

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

Figure 4.9 Symbolic representation used by Ahmet to show addition of proper fractions with the same denominator

Ahmet talked about the half cup or $\frac{1}{3}$ cup. He knew the meaning of denominator and the numerator of a fraction. He also identified an integer can be considered to be a fraction with a denominator of 1 and he defined improper fractions and mixed numbers and he was able to convert them to each other. Ahmet also talked about the connection between addition and multiplication when a fraction was multiplied by a whole number. He demonstrated his ability to verify multiplication was a form of repeated addition which showed he positioned at formalizing level (F). He used symbolic representations (RS) for this verification as seen in the following excerpts [6]. (See Figure 4.9)

> AHMET: "Multiplication equals to repetitive addition. For example, when $\frac{1}{2}$ is multiplied by 3, we are adding three $\frac{1}{2}$ together and finding $\frac{3}{2}$ which equals to $1\frac{1}{2}$ (Figure 4.9). But, We multiply $\frac{1}{2}$ by 3 a short way of adding three $\frac{1}{2}$ consecutively since this multiplication means three times $\frac{1}{2}$. So, we are multiplying $\frac{1}{2}$ by 3 as a short way of repeated addition." (F) (RS) [6] (See Figure 4.9)

More evidence can be found in Ahmet's journal (see Figure 4.10) and activity sheet (see Figure 4.11).

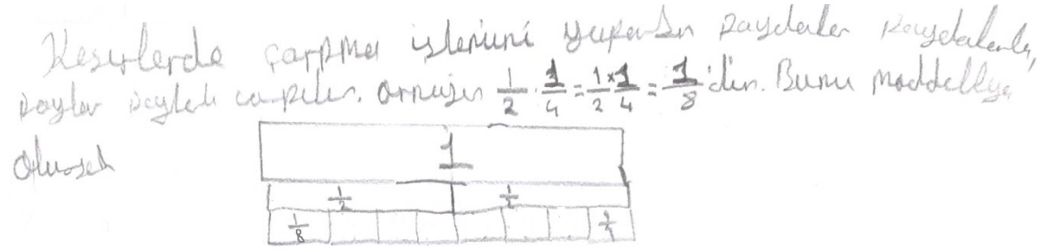


Figure 4.10 Symbolic and visual representations used by Ahmet to show multiplication of a fraction by fraction in the journal

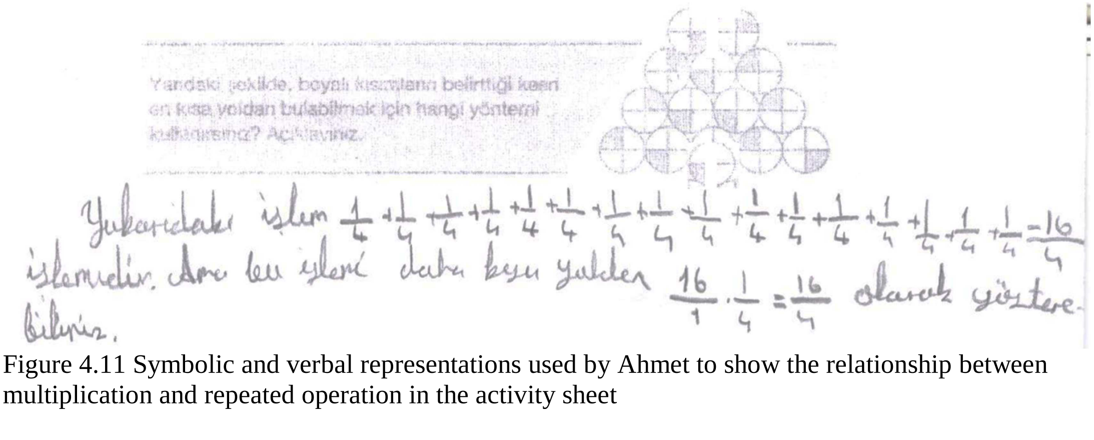


Figure 4.11 Symbolic and verbal representations used by Ahmet to show the relationship between multiplication and repeated operation in the activity sheet

The third question was a word problem related with finding a part of a whole number. Ahmet was asked to find $\frac{4}{5}$ and $\frac{2}{3}$ of 45.Ahmet verified his knowledge of multiplying a fraction by a whole number in different settings which pointed at his ability to operate at property noticing level (PN). He used symbolic representations (RS). See the following excerpts.

AHMET: “$\frac{4}{5}$ of teacher’s book means multiplying $\frac{4}{5}$ by 45. I give 1 to the denominator of 45 in order to do this multiplication since a whole number can be considered to be a fraction with a denominator of 1. I can simplify 45 and 5 by dividing them with 5. Then, I find the product by multiplying the numerators together and denominators together and find the product 36. So, the teacher has 36 novels.” (see Figure 4.11.) (PN) (RS). [7]
RESEARCHER: “Why did you do multiplication here?”
AHMET: “I found $\frac{4}{5}$ of 45. I can divide 45 by 5 and multiply the result by 4. It is the same as multiplying the $\frac{4}{5}$ by 45. It means adding 45 times $\frac{4}{5}$ together (PN) (RW) [8].

Ahmet knew the meaning of multiplication and he was aware of multiplication was a form of repeated addition. He also knew that multiplying a whole number by a fraction meant finding a part of a whole. More evidence can also be seen in his activity sheet (see Figure 4.14.) and his journal. These evidences pointed that he was at formalizing level (F). He used verbal representations (RW) for these explanations [8]. He did the same operations for finding $\frac{2}{3}$ of 45 and found 30 for the doctor’s novels. (see Figure 4.12.) He also modeled $\frac{4}{5}$ of 45 books (see Figure 4.13.). He verified his knowledge of multiplying a fraction by a whole number. See the following excerpts.

AHMET: “I draw a square and divide it into 5 equal pieces and take 4 parts of it. I divide 45 by 5, I find each part has 9 books inside. I take 4 parts which means 4 times 9 equal to 36 books. (see Figure 4.13.) (RW).”

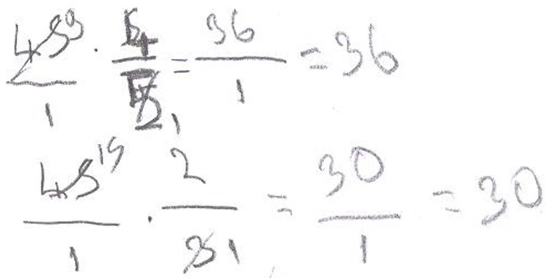


Figure 4.12 Symbolic representations used by Ahmet to show multiplication of a whole number by a fraction.

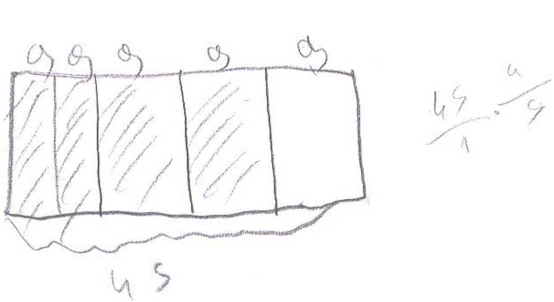


Figure 4.13 Visual representation used by Ahmet to show a part of a whole

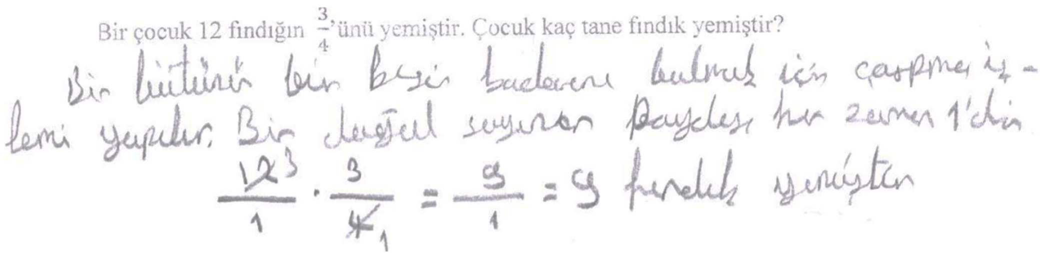


Figure 4.14 Symbolic and verbal representations used by Ahmet to show a part of a whole in the activity sheet

The fourth question was a word problem related with multiplication of a mixed number by a whole number. It was related with finding a part (a mixed number) of a whole number. The number of egg cartoons in a grocer and the number of eggs inside each egg cartoons were given. How many eggs there were in these egg cartoons were asked to Ahmet. He demonstrated his knowledge of connecting fractions with natural numbers. He knew what a half fraction means and used this knowledge by connecting the multiplication of fractions with natural numbers. He used symbolic representations (RS) while solving this question. He positioned at formalizing level (F) since he was aware of the connection between natural numbers and fractions [9]. He knew what a half fraction meant. He had an idea about the fractions of quantities. Let's see the following excerpts.

> AHMET: "I multiply 13 by 12 since there are 13 packages except fractional part and each package has 12 eggs inside. I find the result 156. I add 156 with 6 since there is also a half package and the half of 12 is 6. Then, I find 162 eggs in all egg cartoons (see Figure 4.15). (RS)"

Ahmet was asked if he can solve this question in different way, he used fraction multiplication. He converted the mixed number to improper fraction and then did multiplication and found the same result. He used symbolic representations (RS) as in the following excerpts. Moreover, he did similar operations in his activity sheet during the lesson and his journal. He positioned at property noticing level (PN) since he just did multiplication [10]. He also expressed what an improper fraction and a mixed number.

> AHMET: "$\frac{27}{2}$ is multiplied by $\frac{12}{1}$. I simplify 12 and 2. I find the result 162, the same as the first result… This multiplication means adding 12 times $\frac{27}{2}$. There are 12 eggs in each package and we should use multiplication in order to find the number of eggs in 13 and a half package (see Figure 4.16). (RS)"

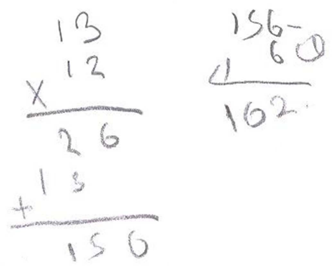


Figure 4.15 Symbolic representations used by Ahmet to find a mixed number of a whole

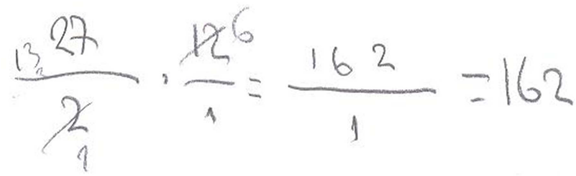


Figure 4.16 Symbolic representations used by Ahmet to find a mixed number of a whole

The fifth question was related with the modeling of multiplication operation with a whole number and a fraction. It was related with modeling times of fractions. A shape was given as a whole in rectangular units and Ahmet was asked to model a multiplication operation in rectangular units by thinking this whole. Ahmet tried to model the multiplication operation. He first tried to model it by using cubic blocks and then tried to draw and express it on the given shape (see Figure 4.17). It initially seemed he modeled correctly. He positioned at image having level (IH). More evidence can also be seen in his journal, and activity sheet for modeling and knowing the meaning of multiplication of a whole number by a fraction (see Figure 4.19). He used concrete materials as representation (RC) while modeling [11]. But, while drawing it in rectangular units (see Figure 4.18), he seemed that he could not notice he modeled it correctly as in the following excerpts (RV).

> AHMET: "This equals to $\frac{1}{6}$ (he divided 3 rectangular units into 6 equal pieces and hatched a piece in order to show $\frac{1}{6}$). If 4 of them are put side to side, the result of this operation (he is counting) 1,2,3,4,…..24. ooo wait a minute 24. We should not find 24 since the result of this multiplication is $\frac{4}{6}$. 4 times $\frac{1}{6}$ are added together. I found the result $\frac{4}{24}$ from the model which means 24 times $\frac{1}{6}$ come together. But, this does not give the same result (see Figure 4.17) (RV)."

Although he initially modeled the operation correctly, he could not notice this. He made several attempts but, he was unsuccessful since he thought 4 wholes instead of one whole and divided 4 wholes into 6 equal pieces. He knew multiplication is a short way of repeated addition but, he could not connect this knowledge with modeling. So, he had difficulty in finding the correct modeling. All the aforementioned evidence pointed at his ability to operate at image making level (IM). He folded back to image making level (IHtoIM). He used symbolic representations (RS) for expressing his model [12].

> AHMET: "I divided the whole shape into 6 equal pieces…. The denominator should not be added….the denominator must be the same. So, it equals to $\frac{4}{6}$ which means 4 times $\frac{1}{6}$ added together. It is the short way of repeated addition (see Figure 4.18) (RS and RV)"

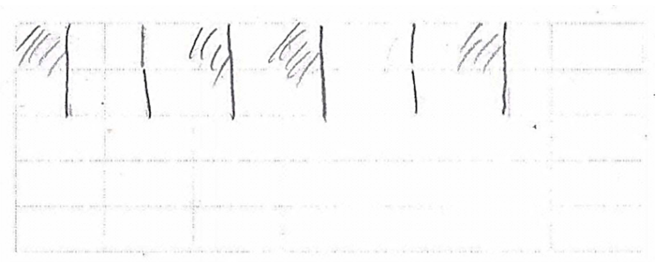


Figure 4.17 Modeling of the operation 4 times of $\frac{1}{6}$ in rectangular units

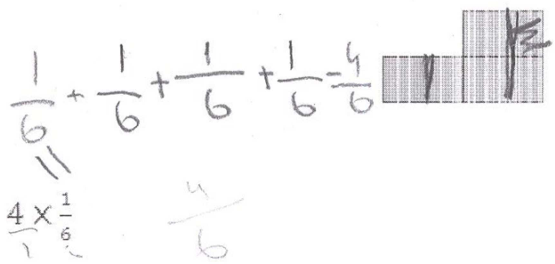


Figure 4.18 Symbolic and visual representations used by Ahmet to find 4 times of $\frac{1}{6}$

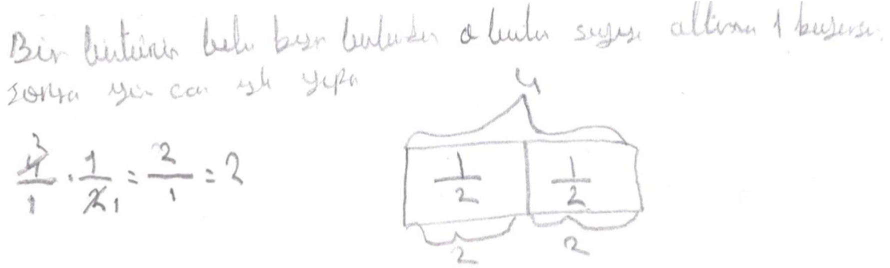


Figure 4.19 Symbolic and visual and verbal representations used by Ahmet to show multiplication of a whole number by a fraction in Ahmet's journal

The second part of the interview consisted of questions related with multiplication of two proper fractions, two improper fractions and two mixed numbers. The first question of this part simply asked multiplication of two fractions. Ahmet was asked to find $\frac{2}{3}$ of $\frac{4}{5}$. It emphasized the meaning of multiplication operation with two fractions. Ahmet showed an awareness of multiplication of a fraction by a fraction meant finding a part of a part as in the following excerpts. He used symbolic representation (RS) for finding the result. He positioned at formalizing level (F). [1].

> AHMET: "The operation we can do while finding a fraction of a fraction is multiplication. I can multiply $\frac{2}{3}$ by $\frac{4}{5}$ and find the result $\frac{8}{15}$ (see Figure 4.20)."

After that he decided to use transparent fraction cards to model this multiplication. But, the following dialogue showed that he had some difficulty in modeling and explaining the meaning of multiplication of two fractions on this model. So, he was not prepared to operate at formalizing level. He folded back from formalizing to image making level (FtoIM). He used concrete material as representations (RC) for modeling [2].

> AHMET: "I put this card over the other in opposite direction (he is putting transparent fraction cards one is over the other in a position that one is vertical and the other is horizontal). I count in order to find how many pieces it is divided equally. It is divided 15 pieces and then I can count the darker area- the intersection area of them. The darker area has 8 pieces, and then the result of the multiplication is $\frac{8}{15}$ (RC)."

The researcher asked Ahmet why he took the intersection area. But, he confused the meaning of multiplication with division of two fractions. He just memorized how to model multiplication operation by using transparent fraction cards. He intersected the transparent fraction cards horizontally and vertically for getting equal pieces and he took intersection area for the result of multiplication. However, he had some problems while drawing the model of multiplication of two fractions as seen in the following excerpts. He divided the numerator of the fraction $\frac{4}{5}$ into 3 parts in order to show the intersection area while drawing a shape without using fraction cards (see Figure 4.20). Although he showed an understanding of multiplication of two fractions means finding a part of a part, he did not constantly show his awareness of modeling multiplication of two fractions and interpreting the result of this multiplication from the model. He positioned again image making level (IM) and used visual representation (RV) for modeling [3].

> AHMET: "$\frac{4}{5}$ is divided by $\frac{2}{3}$ which means $\frac{2}{3}$ is put over $\frac{4}{5}$…. It is something like finding how many $\frac{2}{3}$ is there in $\frac{4}{5}$. but, it is different operation…..I can show it by drawing a model (see Figure 4.21). I divide this shape into 5 equal pieces and hatched 4 pieces and I divide these 4 pieces into 3 parts and I can find $\frac{2}{3}$ inside $\frac{4}{5}$ (RV)."

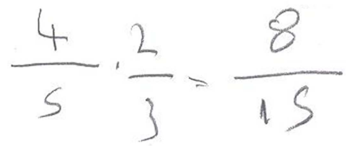


Figure 4.20 Symbolic representations used by Ahmet to show a fraction of a fraction

Figure 4.21 Visual representation used by Ahmet to model multiplication of two fractions

The second question was related with modeling and finding the meaning of the multiplication operation with two proper fractions. It asked to model two multiplication operations with two unit fractions changing the orders and then asked about the meaning of these multiplications. While answering this question, Ahmet showed an understanding of the commutative property of multiplication operation. So, he positioned at property noticing level (PN). But, he misinterpreted the meaning of two multiplication operations. He used symbolic representations (RS) for doing this multiplication [4]. He modeled the multiplication operation correctly (see Figure 4.22), but, he could not connect his knowledge for modeling it with transparent fraction cards as seen in the following excerpts. He used visual representations (RV) for modeling the multiplication [5].

> AHMET: "A half is multiplied by a fourth and it equals to $\frac{1}{8}$. The result of this operation means an half of a fourth. I can show it immediately. (He divided a rectangular shape into four parts and then divided each part into two parts obtained eight parts as in figure 4.22). This equals to $\frac{1}{8}$. (RV)"
> RESEARCHER: "How about the other one?"
> AHMET: "A fourth is multiplied by an half and it equals to $\frac{1}{8}$. We can say a fourth of an half. We can say that multiplication has commutative property. The product does not change when the order of the multiplicands are changed (see Figure 4.24). I can show this operation by dividing a whole into two parts and then divide each part into four equal parts (see Figure 4.23). (RV)

Researcher: Are these two models the same or not? Ahmet: No. We are modeling $\frac{1}{2}$ of $\frac{1}{4}$ and $\frac{1}{4}$ of $\frac{1}{2}$."

After that he tried to show these operations with transparent fraction cards. He put the transparent cards on each other; one is on vertical and the other on horizontal position. He counted the parts in order to find the denominator and found eight parts. He counted the overlapped part to find numerator. He finally found he result $\frac{1}{8}$. He did this as a routine procedure. He did not know the reason why he put them in vertical and horizontal position. He said "it is meaningful if we put them crossing over each other in multiplication operation." He puzzled for a while and he put the transparent fraction cards on each other and he found the result $\frac{1}{4}$. He also tired other fractions with the fraction cards and saw that putting the cards both horizontally or vertically was not meaningful for these fractions, non-equal parts were obtained. He was unaware of the meaning of the multiplication with modeling it by using transparent fraction cards. He had just memorized how to model multiplication operation with transparent fraction cards. So, he folded back to image making level (PNtoIM). He used concrete material as representations (RC) [6]. He had some effort, but he could not connect his knowledge of modeling with the meaning of multiplication operation. More evidence can be seen in the activity sheet and video records and field notes. He wrote he had some difficulty while learning modeling of multiplication of fractions in self-evaluation form.

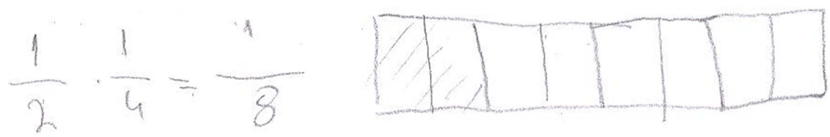


Figure 4.22 Symbolic representation used by Ahmet to show multiplication of two unit fractions and modeling of that multiplication

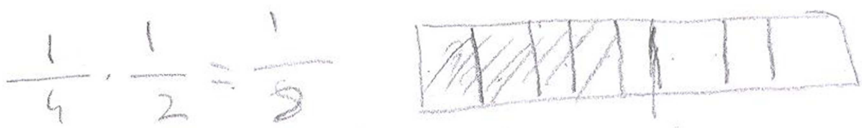


Figure 4.23 Symbolic representation used by Ahmet to show multiplication of two unit fractions and modeling of that multiplication

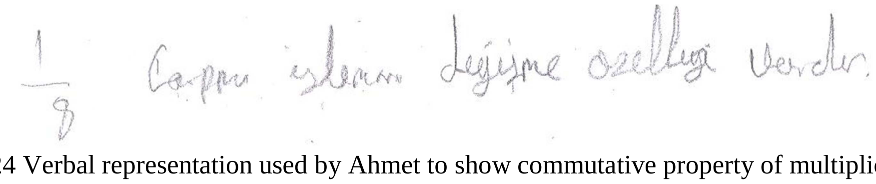


Figure 4.24 Verbal representation used by Ahmet to show commutative property of multiplication of fractions

In the third question, a multiplication operation with two mixed numbers was given; estimating the product and then comparing the product and the estimation result with each other was asked in this question. Ahmet constantly showed his awareness of multiplication of two mixed numbers. He converted them to the improper fractions in order to do the multiplication (see Figure 4.25). He used symbolic representation (RS) while doing this multiplication. He operated at property noticing level (PN) [7]. Ahmet also showed an understanding of how to estimate the result of the multiplication of two fractions. He estimated the factors and the product by using number line strategy (see Figure 4.26). He used visual representations (RV) and verbal representations (RW) [8]. He also rounded some fractions by using the strategy that how close they are to the number zero. Ahmet also compared the result of this multiplication operation with the estimation result and he found the same results in both operations as seen in the following excerpts. more evidence can be seen in the activity sheet and journal he did before. He did similar things (see Figure 4.27). This discussion suggests that he positioned at formalizing level (F) [8]..

> AHMET: "We convert them to improper fractions to obtain the correct result. Two times nine plus one equals 19, it is $\frac{19}{9}$ and three times eight plus seven equals 31, it is $\frac{31}{8}$. I will do this multiplication. They are not simplified, then I multiply 19 with 31 and find 589, I multiply nine with eight and find 72. The result equals to $\frac{589}{72}$. I convert it to a mixed number by dividing 589 to 72, I find $8\frac{13}{72}$. (Figure 4.26) (RS)"
> RESEARCHER: "Why did you convert mixed numbers to improper fractions?"
> AHMET: "It is the correct solution to convert them to improper fractions, there is no other way to solve it."
> AHMET: "$2\frac{1}{9}$ is close to 2 since $\frac{1}{9}$ is close to zero and we have already 2 whole in hand. If I show it on the number line, we can see that it is closer to 2. $3\frac{7}{8}$ is close to 4. When I draw a number line, I divided 7 parts between 3 and 4, $\frac{7}{8}$ is close to 3 (Figure 4.27). Then, 4 is multiplied by 2 and the result is 8. (RV) Anyway, the result $8\frac{13}{72}$ is close to 8 since $\frac{13}{72}$ is close to 8. We can show $\frac{13}{72}$ by dividing 72 parts between 8 and 9 on the number line. It is closer to 8. In another way, I can say $\frac{13}{72}$ is close to zero, we have also 8 whole. When we add 8 whole with zero, we obtain 8. So, it is close to 8. (RW)"

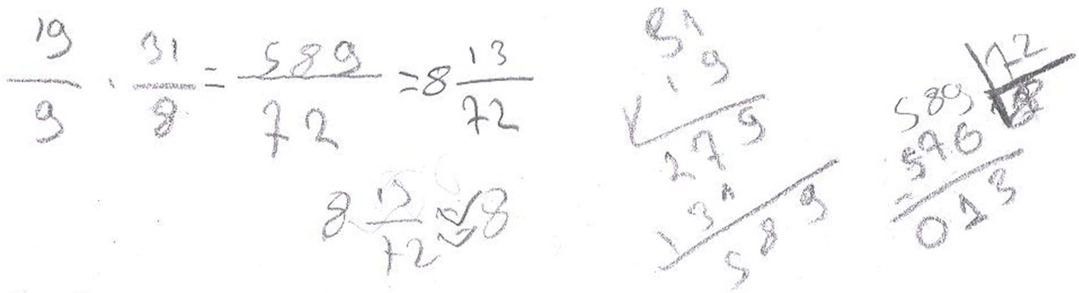


Figure 4.25 Symbolic representations used by Ahmet to show multiplication of two mixed numbers by converting them to improper fractions

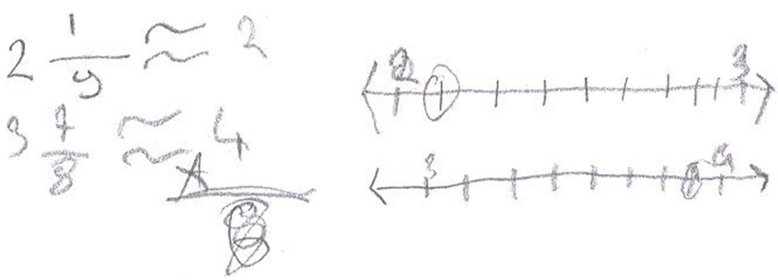


Figure 4.26 Symbolic and visual representations used by Ahmet to estimate the result of multiplication of two mixed numbers

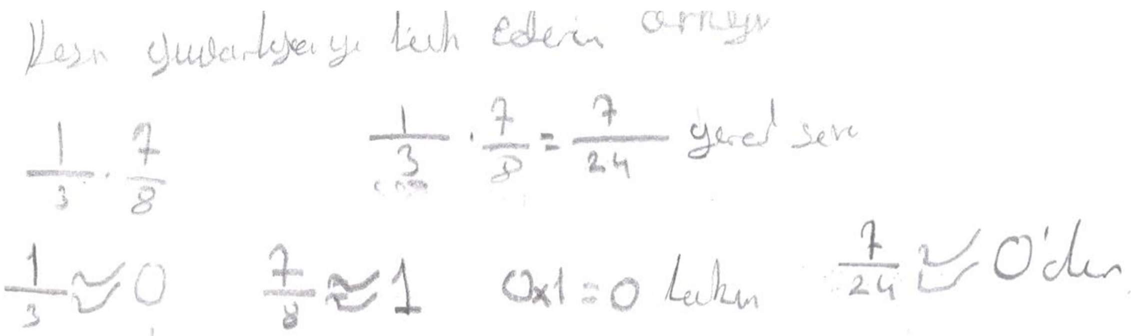


Figure 4.27 Symbolic representation used by Ahmet to estimate the result of multiplication of two mixed numbers in his journal

The fourth question dealt with equivalent fractions. If the result of $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$ operation equaled to $\frac{5}{8}$ or not was asked in this question. Ahmet did the given multiplication operation in order to see its result equal to $\frac{5}{8}$ or not. He knows how to multiply two fractions. He multiplied the numerators and then denominators of the fractions and placed the product of the numerators over the product of the denominators. He demonstrated his ability of simplifying the fractions. He said "it is quicker first simplify the fractions and then multiply the fractions". He showed his awareness of using greatest common factor while simplifying two fractions (see Figure 4.28. and Figure 4.29.). He said "simplification is to find the smallest fraction equivalent to the given fraction by dividing the both the numerator and denominator by the common factor of them". He knows that simplification means obtaining smaller fractions equivalent to the given fraction at the beginning. So, he has an idea about equivalence fractions. All aforementioned evidence pointed that Ahmet showed his ability to operate at property noticing level (PN). He used symbolic representations (RS) while dealing with this question [9]. Let's see the following excerpts.

> AHMET: "I can simplify the factors before doing multiplication. The common factor of 3 and 6 is 3. Then, I simplify the denominator of the first factor with the numerator of the second factor by their common factor 3. The result of the multiplication is $\frac{5}{8}$ (see Figure 4.27.). (RS)"
>
> RESEARCHER: "How did you do this simplification?"
>
> AHMET: "While doing multiplication, the numerator and denominator of a fraction can be simplified by a common factor of them or the denominator of the first factor with the numerator of the second can be cancelled by the same factor. The common factor can be found by the Greatest Common Factor of these numbers. The simplification is finished, we can do multiplication. We can first multiply the fractions and then simplify the result. I found the result of the multiplication $\frac{15}{24}$ and simplified it by 3 and found the result again $\frac{5}{8}$ (see Figure 4.28.). (RS)"

Figure 4.28 Symbolic representation used by Ahmet to show multiplication of two proper fractions

Figure 4.29 Symbolic representation used by Ahmet to show multiplication of two proper fractions

The fifth question was related with finding the product with 3 multiplicands. The result of the multiplication $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{3}{4}$ was asked to Ahmet. He showed his ability to do this multiplication. While dealing with this question, he first multiplied first two factors and then multiplied the product of them with the third factor (see Figure 4.30.). He implied the associative property of multiplication in the following excerpts.. He showed his understanding of how to multiply fractions and how to simplify them. Later, he did multiplication with 3 multiplicands and found the same result as in the first operation (see Figure 4.31.). More evidence can be seen in Ahmet's activity sheet, journal. All aforementioned evidence showed that he operated at property noticing level (PN). He used symbolic representations (RS) [10].

> AHMET: "First, I can do $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$ and then multiply the result with $\frac{3}{4}$. The order of the factors does not matter in multiplication operation. So, we can multiply the second and third factors and then multiply the product of them with the first factor and so on. The multiplication of $\frac{2}{3}$ with $\frac{1}{5}$ equals to $\frac{2}{15}$. Then, I multiply $\frac{2}{15}$ with $\frac{3}{4}$. I can simplify 2 and 4 by 2. The result equals to $\frac{3}{30}$ (see Figure 4.30.).(RS)"
> RESEARCHER: "Can you multiply three of factors together and find the same result?"
> AHMET: "Yes, I can. The product equals to $\frac{6}{60}$. I multiplied the numerators and wrote the result as the numerator of the product and multiplied the denominators and wrote the denominator of the product. I cancel the numerator and the denominator with 6 and find $\frac{1}{10}$. The result of the first operation also equals to same result when I simplify it (see Figure 4.30.)."

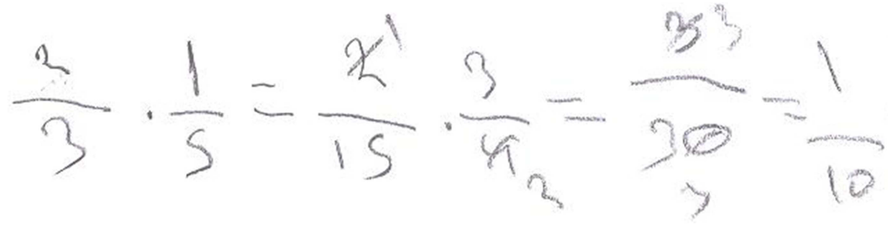


Figure 4.30 Symbolic representation used by Ahmet to show multiplication of two proper fractions

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{60}\ 1 = \frac{1}{10}$$

Figure 4.31 Symbolic representation used by Ahmet to show multiplication of three proper fractions

The sixth question was related with comparing the result of multiplication operations with the multiplicands in proper and improper fractions. Ahmet was asked to do a multiplication operation with two proper fractions and then comment that the product was less or greater than each of the two fractions he multiplied. He was also asked to do the same things with multiplication of two improper fractions. Ahmet showed his understanding of multiplying the improper and proper fractions during this question. He positioned at property noticing level (PN) and he used symbolic representations (RS) for this multiplication [11]. (see Figure 4.32 and Figure 4.33).

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Figure 4.32 Symbolic representations used by Ahmet to show multiplication of two proper fractions

$$\frac{14}{12}\quad \underset{(2)}{\frac{7}{6}} \cdot \overset{\frac{30}{12}}{\underset{(6)}{\frac{5}{2}}} = \frac{35}{12}$$

Figure 4.33 Symbolic representations used by Ahmet to show multiplication of two improper fractions

Ahmet also showed his awareness of how to compare the proper and improper fractions. He used a strategy that how close the fractions are to their wholes, halves and the number zero in the number lines (see Figure 4.34). Moreover, as an alternative strategy, he found the least common multiple of the denominators and expanded the fractions according to that number and then compared the fractions with the same denominators (see Figure 4.35 and Figure 4.36). All aforementioned evidence suggested Ahmet's ability to operate formalizing level (F). He used symbolic and visual representations (RS and RV) for comparing the fractions [[12].
See the following excerpts.

> AHMET: "The result of $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$ equals to $\frac{3}{8}$. There is no cancellation (see Figure 4.31)."
> RESEARCHER: "Can you compare this product with the factors?"
> AHMET: "Yes, I can compare. The product is less than the other two factors. Shortly, the fraction $\frac{3}{8}$ is close to zero less than a half, $\frac{3}{4}$ is close to a whole and $\frac{1}{2}$ equals to a half. (He showed these fractions on number lines to show their closeness to a whole, a half or zero) (see Figure 4.34)…. I can also show these fractions by mathematical sentences by expanding

the denominators of them to 8. $\frac{3}{4}$ equals to $\frac{6}{8}$ when expanded by 2 and $\frac{1}{2}$ equals to $\frac{4}{8}$ when expanded by 4 (see Figure 4.35). Then, we can see $\frac{3}{8}$ is the smallest one among these fractions. If the fractions have common denominators, than the fraction with the bigger numerator is greater than the others. Because, you divide a whole 8 pieces and take 6, 4 and 3 pieces. Then, of course 6 taken-pieces are bigger than the other pieces. (he drew figures to compare the fractions) (see Figure 4.36). The result of the other multiplication equals to $\frac{35}{12}$. It is bigger than the factors. I can expand the denominators to 12 (see Figure 4.33). Then, we can see that the product is bigger than the factors when improper fractions are multiplied; it is smaller when proper fractions are multiplied."

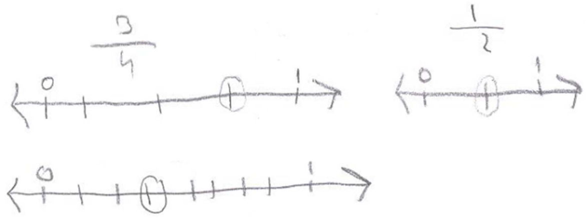


Figure 4.34 Visual representations used by Ahmet to compare fractions

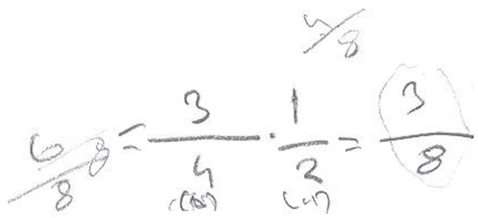


Figure 4.35 Symbolic representations used by Ahmet to show multiplication of two proper fractions and compare them

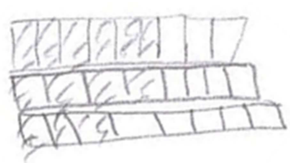


Figure 4.36 Visual representations used by Ahmet to compare three fractions

When Ahmet was asked what he would say about the comparison of these fractions, he demonstrated his awareness of the comparison of the product with the multiplicands in the multiplication of proper and improper fractions. He tried to prove his conclusion by giving different examples (see Figure 4.37). He also used symbolic representations (RS) for this proof. Then, he generalized that the product is less than the multiplicands when proper fractions were multiplied; the product is greater than the multiplicands when improper fractions were multiplied. As a result he positioned at observing level (O).See the following excerpts [13].

Figure 4.37 Symbolic representations given as an example by Ahmet to show multiplication of proper and improper fractions in different settings

The seventh question was a word problem requiring the time conversion related with finding a part of a part. How many minutes there were in $\frac{2}{3}$ of $\frac{4}{5}$ hours was asked. It was expected to find $\frac{2}{3}$ of $\frac{4}{5}$ hours and then to convert the result into minutes in this question. It was a daily life question. Ahmet demonstrated his understanding of finding how many minutes there were in $\frac{2}{3}$ of $\frac{4}{5}$ hours and he showed his ability to verify it in a different strategy. He first found $\frac{4}{5}$ of 60 minutes and then found $\frac{2}{3}$ of the obtained result in order to solve this question (see Figure 4.37.). After that he tried a different way that he found $\frac{2}{3}$ of $\frac{4}{5}$ by multiplying them and then multiplied the result with 60 minutes (see Figure 4.40.). He knows how to multiply two fractions, or a whole number by a fraction. He knows how to simplify the fractions while multiplying them. All aforementioned evidence showed that he positioned at property noticing level (PN). He used symbolic representations (RS) for these solutions [14]. In addition, he explained why he used multiplication operation in this question and he drew a rectangular shape in order to explain his reasons. He implied that multiplying a whole number by a fraction means "finding a part of that number" multiplying two fractions means "finding a part of a part" which demonstrated his ability to operate at formalizing level (F). He used visual representation (RV) for this explanation (see Figure 4.39.) as in the following excerpts [15] More evidence can be seen in his journal that he wrote a problem from daily life and solved the question by multiplying a whole number by a fraction in order to find a part of that number (see Figure 4.40).

> AHMET: "The question is required to convert hours into minutes. An hour equals to 60 minutes. So, I multiply $\frac{4}{5}$ with 60. I can simplify 60 and 5 with 5. It equals to 48. $\frac{4}{5}$ of an hour equals to 48 minutes. Then, it is asked $\frac{2}{3}$ of 48 minutes. I multiply them. I can simplify 48 and 3 with 3. I find the result 32 minutes (see Figure 4.38)."
> RESEARCHER: "Why did you use multiplication in this question? What do you understand from the first multiplication you did?"
> AHMET: "A whole is divided into 5 equal pieces and each pieces equals to 12. 4 pieces is taken in order to find $\frac{4}{5}$ of 60. It is the same as multiplying 12 with 48 (see Figure 4.39.)."
> RESEARCHER: "Can you solve this question in a different way?"
> AHMET: "I may try but I am not sure it is true or not. I multiply $\frac{2}{3}$ by $\frac{4}{5}$ in order to find $\frac{2}{3}$ of $\frac{4}{5}$ and find $\frac{8}{15}$. Later, I multiply it with 60 and I find 32, the same result as the first try (see Figure 4.40.)."

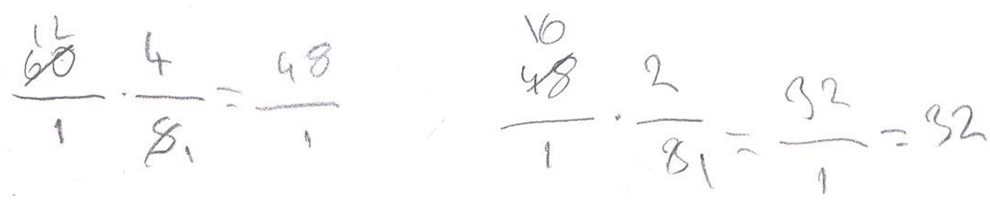


Figure 4.38 Symbolic representations used by Ahmet to show fraction of 60 minutes

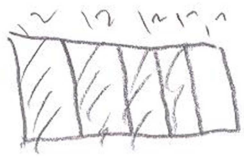


Figure 4.39 Visual representation used by Ahmet to show a fraction of 60 minutes

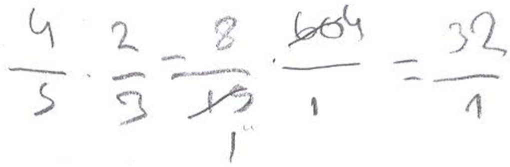


Figure 4.40 Symbolic representations used by Ahmet to show a fraction of a fraction

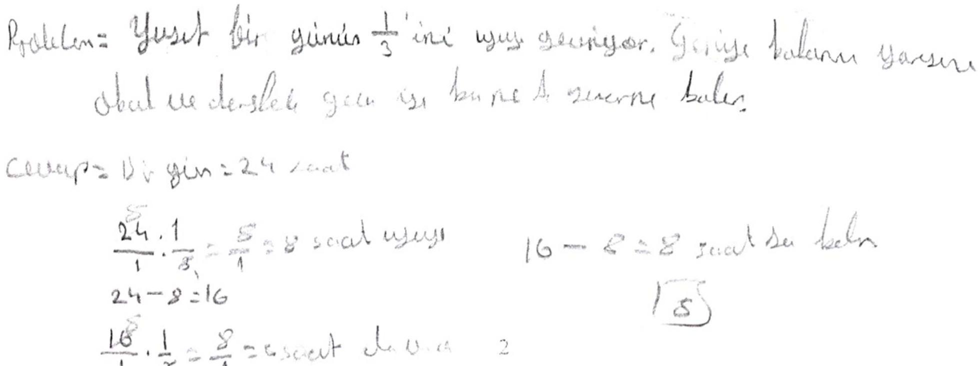


Figure 4.41 Symbolic representations used by Ahmet to show a part of a whole

The eighth question was a problem related with finding the number of apples in two multiplication operations by taking into account 3 apples equaled to $\frac{1}{4}$ of the all apples in a basket. It required finding the whole of a given quantity and finding a part of that quantity. It was a daily life question. Ahmet did the first multiplication and he puzzled since he could not a whole number (see Figure 4.42) (RS). Then, he tried to find the number of apples in the basket (see Figure 4.43) (RS). After that he multiplied the result of the first multiplication with the number of the apples in the basket (see Figure 4.44) (RS). But, he could not find again a whole number. He did the same operations in the second multiplication (see Figure 4.45) (RS). All of his attempts showed that he positioned at property noticing level (PN) and used symbolic representations (RS) [16]. He also used visual representation (RV) while finding the number of apples in the basket by using chickpeas [17]. But, he puzzled again with these results. He thought he did wrong by using multiplication. Then, he tried to find the results $5\frac{3}{9}$ and $3\frac{3}{4}$ equal how many apples. He found correct answer after a few try (see Figure 4.46) (RS). He showed his awareness of operating at formalizing level (F). He also used symbolic representations (RS) [18]. Later, he was asked to find $\frac{2}{3}$ of 12 apples and $\frac{4}{6}$ of 12 apples. He found by multiplying them (see Figure 4.47) (RS). He multiplied the results and found the same result with the previous one. He noticed that $\frac{2}{3}$ and $\frac{4}{6}$ of 12 apples have the same value since they were multiple of each other. So, he demonstrated his knowledge of equivalent fractions and multiplying a whole number by a fraction means a part of that number. He demonstrated his knowledge to operate at observing level (O) and used symbolic representations (RS) as seen in the following excerpts [19]

More evidence can be found from Ahmet's activity sheet and journal about multiplying a whole number by a fraction and knowing the meaning of this multiplication and also finding a fraction of a given quantity (see Figure 4.48)

> AHMET: "I can simplify these fractions. I find $\frac{4}{9}$ ….I can find the number of the apples in the basket. $\frac{1}{4}$ of the apples equal to 3 apples, then there are 6 apples and then 9 and then 12 apples in the basket (He first showed them with chickpeas and then showed as in the Figure 4.43). But, 12 is not divided by 9. Then, I multiply 12 and $\frac{4}{9}$ and find $\frac{48}{9}$ which equals to $5\frac{3}{9}$ apples (see Figure 4.44). I find the second $\frac{5}{16}$ by cancelling 12 with 3. Then as I did in the previous one, I multiply $\frac{5}{16}$ by 12. I simplify 12 and 16 with 4 and find the result $\frac{15}{4}$ which equals to $3\frac{3}{4}$ (see Figure 4.45)…… $5\frac{3}{9}$ equal to 64 apples since 5 whole equal 60 apples (multiplying 12 with 5) and $\frac{3}{9}$ equals to 4 apples (multiplying 12 by 3 and divide 36 to 9). I add 60 with 4. I find 64 apples. $3\frac{3}{4}$ equal to 45 apples since 3 whole equal to 36 apples and $\frac{3}{4}$ equals to 9 apples, adding them together. The result is 45 apples."
> RESEARCHER: "Can you solve this question in different way?"
> AHMET: "I may not."
> RESEARCHER: "Can you find $\frac{2}{3}$ of 12 apples and $\frac{4}{6}$ of 12 apples?"
> AHMET: "Yes, $\frac{2}{3}$ of 12 equals to $\frac{24}{3}$ or 8 apples. $\frac{4}{6}$ of 12 apples also equals to 8 apples. They have the same value, so, they are equivalent fractions. They are simplified or expanded by a number. When they are multiplied, 64 apples are found as in the previous operation."

Figure 4.42 Symbolic representations used by Ahmet to show multiplication of two fractions

Figure 4.43 Symbolic representations used by Ahmet to find the number of all apples in the basket

Figure 4.44 Symbolic representations used by Ahmet to show a fraction of all apples in the basket

Figure 4.45 Symbolic representations used by Ahmet to show multiplication of two fractions and show this fraction of all apples in the basket

Figure 4.46 Symbolic representations used by Ahmet to show the number of apples in both of the multiplication operations

Figure 4.47 Symbolic representations used by Ahmet to show equivalent fractions

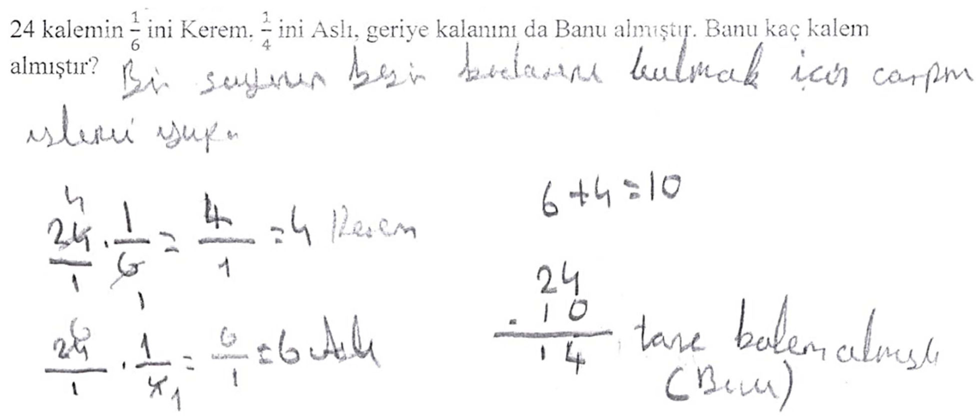


Figure 4.48 Symbolic representations used by Ahmet to find a fraction of a given quantity in a word problem from Ahmet's activity sheet

The ninth question was related with finding the fractions modeled as square units. 3 squares representing $\frac{1}{3}$ of a whole was given and it was asked to find the value of two fractions modeled with square units by thinking the whole they found at the beginning. It was related with the relation between multiplication and repeated addition while trying to find the modeled fractions. Ahmet showed an understanding of finding the fractions modeled with squares in the next question. In the first art of the question, he tried to find the modeled fraction. He marked 3 squares as $\frac{1}{3}$ and counted them. He counted 4 times $\frac{1}{3}$ and he added them. He also multiplied 4 and $\frac{1}{3}$ as a short way of this addition (see Figure 4.49.). He linked his knowledge of multiplying and adding fractions with the given model during the question. He showed his understanding of how to multiply and add fraction. He knows multiplication is a short way of repeated addition. All aforementioned evidence showed that he operated at formalizing level (F). He used both visual (RV) and symbolic representations (RS) in this question as seen in the following excerpts [20]

> AHMET: "In (a), 3 boxes equals to $\frac{1}{3}$. Then, these squares equals to (counting the squares) $\frac{1}{3}$ plus $\frac{1}{3}$ plus $\frac{1}{3}$ plus $\frac{1}{3}$ which means 4 times $\frac{1}{3}$ (see Figure 4.49). The result is $\frac{4}{3}$ which equals to $1\frac{1}{3}$."

In the second part of the question, he again tried to find the modeled fraction. He marked and counted the squares as he did in the first part. There was a square remained. He tried to find what fraction this square represents. He drew 2 more squares to complete it to 3 squares (RV). He noticed that a square represents $\frac{1}{3}$ of $\frac{1}{3}$. He found this result mistakenly $\frac{1}{6}$. He did addition and then found the fraction as $\frac{5}{6}$. He noticed his mistake as a result of researcher' question and he found the fraction by using multiplication (RS)(see Figure 4.50). He also completed the figure given at the beginning to its whole and showed the fraction of a square as $\frac{1}{9}$ (see Figure 4.51). He demonstrated his ability to verify them in different settings and he showed his understanding of operating at –observing level (O). He used both visual (RV) and symbolic (RS) representations as seen in the following excerpts [21]

> AHMET: "In (b), $\frac{1}{3}$ plus $\frac{1}{3}$ (counting the squares) and the last one equals to $\frac{1}{6}$. I add 2 squares to the last square. Then, a square equals to $\frac{1}{3}$ of $\frac{1}{3}$, that is $\frac{1}{6}$."
> RESEARCHER: "How did you find $\frac{1}{6}$?"
> AHMET: "I multiplied $\frac{1}{3}$ with $\frac{1}{3}$. I multiplied numerators together and multiplied denominator together. Then, $\frac{1}{3}$ plus $\frac{1}{3}$ plus $\frac{1}{6}$ equals to…..expand $\frac{1}{3}$ by 2 and …it equals to $\frac{5}{6}$."

RESEARCHER: A square in this question shows how many parts of its whole?

AHMET: “A square shows $\frac{1}{6}$ of its whole as I did before. I equals $\frac{1}{3}$ of $\frac{1}{3}$. I can find the same result by adding each square together…(he is counting). Oh, no I cannot do it in that way. It gives different result. There are 7 squares and it is found $\frac{7}{6}$ when multiplying 7 and $\frac{1}{6}$.”

RESEARCHER: “Why did you find different results?”

AHMET: “They should be the same. The logic behind one of the solutions should be wrong, then… yes, I did an error while multiplying $\frac{1}{3}$ with $\frac{1}{3}$. It equals to $\frac{1}{9}$. Then, the result of the question equals to $\frac{7}{9}$. I edited the first solution and found the same result also (see Figure 4.50).”

RESEARCHER: “Can you draw the whole of the piece given at the beginning of the question?”

AHMET: “This piece equals to $\frac{1}{3}$ and the other equals to $\frac{1}{3}$ and the other equals to $\frac{1}{3}$. We have 9 squares totally. Then, each square equals to $\frac{1}{9}$ (see Figure 4.51).”

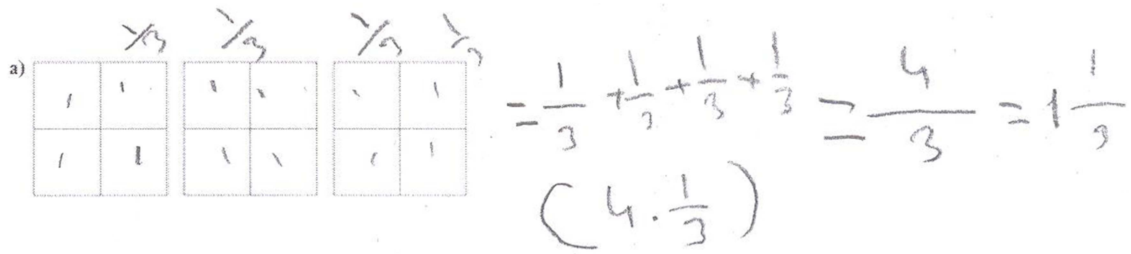


Figure 4.49 Symbolic and visual representations used by Ahmet to find the modeled fraction

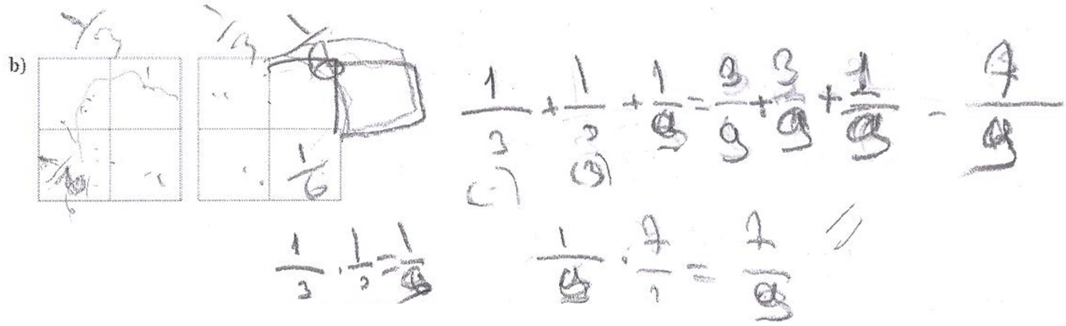


Figure 4.50 Symbolic and visual representations used by Ahmet to find the modeled fraction

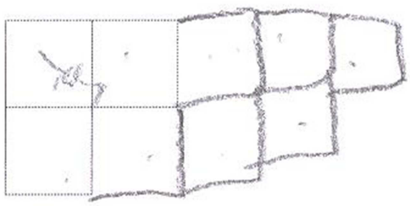


Figure 4.51 Visual representation used by Ahmet to find the whole of the modeled fraction

According to the results from the interview, the understanding maps for the first and second part of the interview were generated. You can see the first part in Figure 4.52. As you can see, seven activity points over 12 were at symbolic region and most of these activities were at property noticing and outer than that level. Moreover, this map confirms the initial analysis that shows the trends on using symbolic representations by Ahmet.

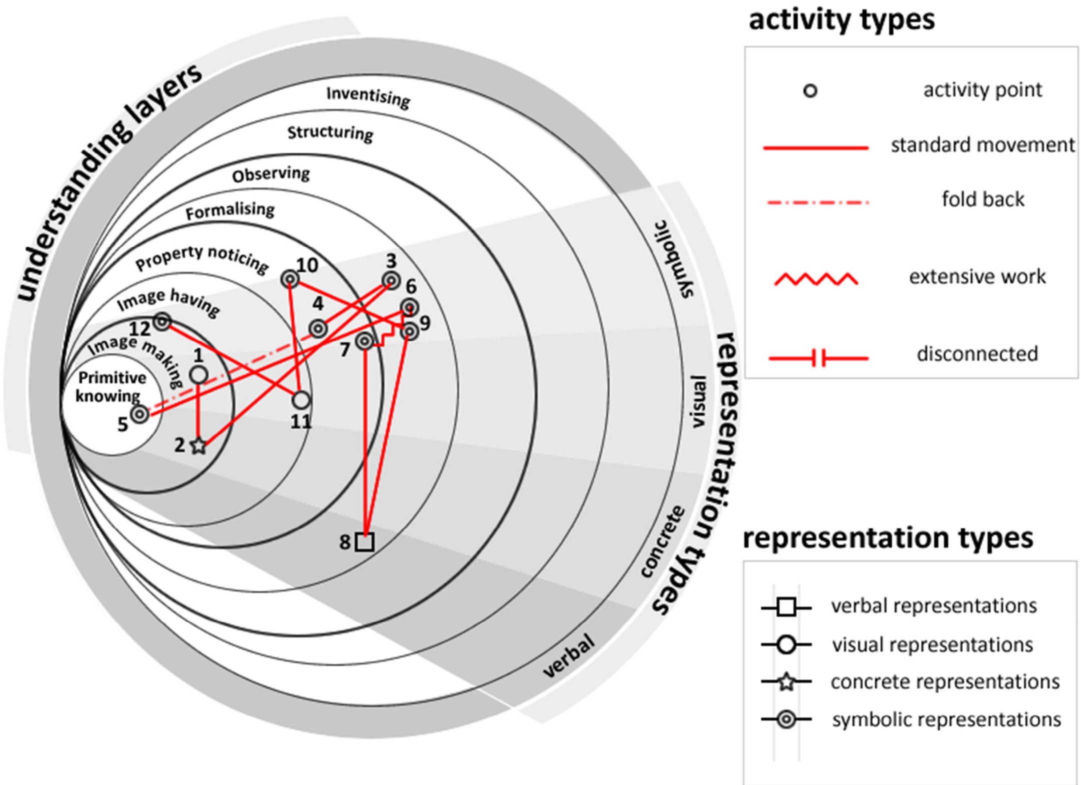


Figure 4.52 Understanding map of Ahmet for the first part

Understanding process of the second part can be seen in Figure 4.53. At this part, we can see that Ahmet performed higher level understanding activities and reached the observing level. Moreover, the trend on using symbolic representations is still valid here. However, at this second part, the visual representations are also dominant.

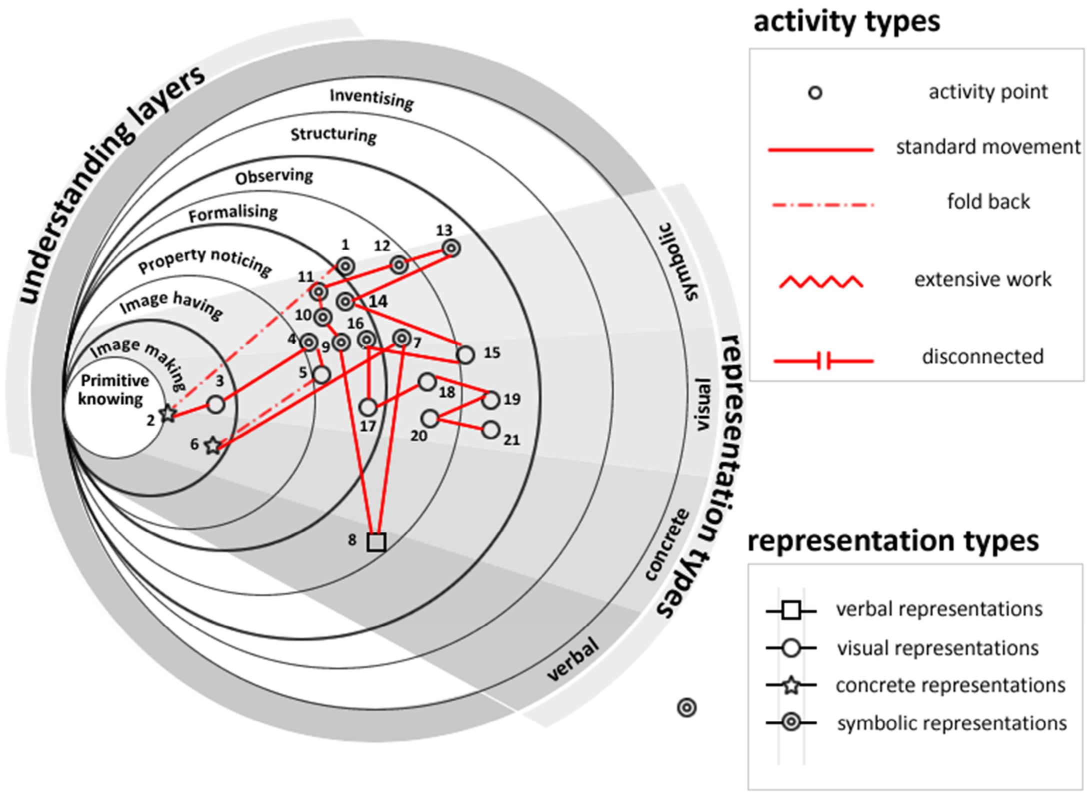


Figure 4.53 Understanding map of Ahmet for the second part

4.2 The Case of Volkan's Understanding and Use of Representations

As detailed in Section 3.2, Volkan was one of the best students in his class. He participated the lessons actively and told his ideas about the related topic. He sometimes got excited while solving the questions and solved the questions incorrectly during the lessons. The mathematics lessons were video-taped during the fractions unit. In addition, Volkan was observed during these lessons and field notes were taken during the observations. The activity sheet was also filled by Volkan in the lessons. Moreover, student journal and self-evaluation form were filled by Volkan just after finishing the related topic. In this instructional sequence Volkan used symbols, drawings as well as verbal language for the majority of his answers to the questions in the activity sheets and the journal. The observational data during the lessons revealed that Volkan mostly used symbolic representations. He also used concrete materials and diagrams as other representation types (see Figure 4.54).

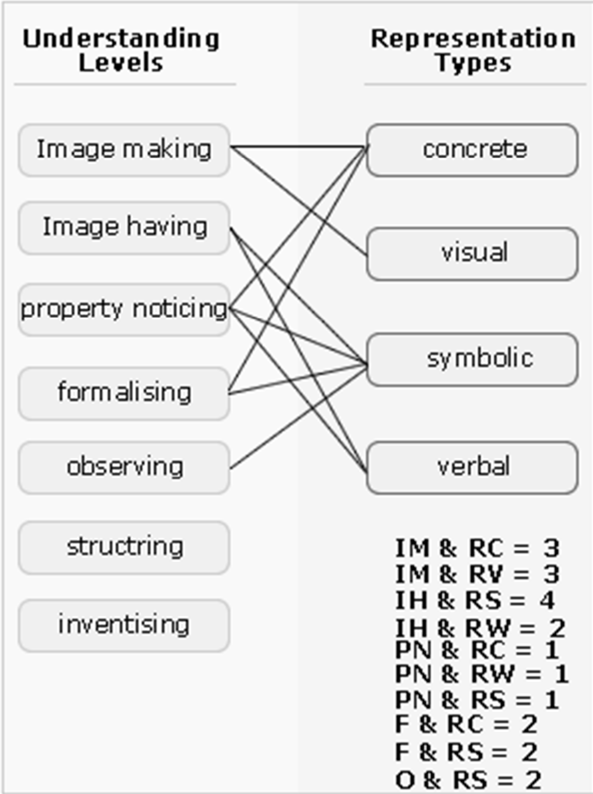


Figure 4.54 Activity levels vs. type of representations from Volkan's first observation

As stated before, primary data source for the analyzing students' understanding was the data gathered from the semi-structured interviews. The questions in the interview were divided into 2 parts. First part was related with multiplying a fraction by a whole number, multiplying a mixed number by a whole number. 5 questions were asked in this part. They emphasized the relationship between multiplication and repeated addition. The first question was related with trying to find out what comes to one's mind about the fractions. The purpose of this question was to find out the relationship between multiplication and repeated addition while obtaining the fraction. Volkan was asked to find out how he could obtain the fraction $\frac{4}{5}$. Volkan showed an awareness of obtaining a fraction in different settings. He used chickpeas as concrete materials to show the fraction $\frac{4}{5}$ as in the following excerpts. He used concrete representation (RC). He demonstrated his ability to operate at image making level (IM). [1]

> VOLKAN: "I divide (chickpeas) into 5 pieces. Each of them represents one piece. Then, 4 of them show the fraction $\frac{4}{5}$, taking 4 pieces.(he showed this by using chickpeas.) (RC)"

While Volkan was further explaining the fraction, he demonstrated the fraction $\frac{4}{5}$ with mathematical expressions. At that stage, he explained the fraction as operations. He used addition, multiplication and subtraction operations to obtain the fraction $\frac{4}{5}$ (see Figure 4.55., Figure 4.56, Figure 4.57.). He used symbolic representations (RS). He tried to explain that multiplication is a form of repeated addition in fractions. But, he could not show this explanation in his operations. He used verbal representation (RW) for this. He demonstrated his ability to operate at image having level (IH). [2]

> RESEARCHER: "How can you obtain the fraction $\frac{4}{5}$?"

VOLKAN: "I can use addition. I can add $\frac{3}{5}$ with $\frac{1}{5}$ and find $\frac{4}{5}$. I can find by multiplication. If I multiply $\frac{2}{5}$ with 2 whole, I will find $\frac{4}{5}$. I can also use subtraction. I subtract $\frac{7}{5}$ by $\frac{3}{5}$ to find $\frac{4}{5}$. (RS)"
RESEARCHER: "Why did you multiply $\frac{2}{5}$ with 2 whole?"
VOLKAN: "I wrote 2 whole as a fraction by giving the denominator 1. This multiplication means 2 times $\frac{2}{5}$ since multiplication is a form of repeated addition. (RW)"

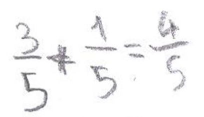


Figure 4.55 Symbolic representations used by Volkan to show a fraction with addition

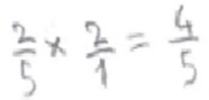


Figure 4.56 Symbolic representations used by Volkan to show a fraction with multplication

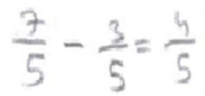


Figure 4.57 Symbolic representations used by Volkan to show a fraction with subtraction

In the second question, ingredients to make a cake for five people were given and the proportion of each ingredient was asked in order to make a cake for fifteen people. It was related with finding the multiplication of multiplication of a whole number by a proper fraction, an improper fraction and by a mixed number. It also emphasized the relationship of multiplication and repeated addition. Volkan started with finding appropriate multiplier to find the ingredients for fifteen people. He showed an awareness of multiplying a fraction by a whole number and multiplying a mixed number by a whole number. He multiplied the numerators of the fractions and multiplied the denominators of the fractions and placed the product of the numerators over the product of the denominators (see Figure 4.58., Figure 4.59.). Indeed he used rules that can be easily memorized and applied to all multiplication operations. However, the field notes, Volkan's activity sheet and journal validated that he did this operation consciously (see Figure 4.62). He also demonstrated his knowledge of converting improper fractions to mixed numbers and converting mixed numbers to improper fractions. He converted mixed numbers to improper fractions before multiplying them (see Figure 4.59.). He converted whole number to fractions by giving 1 to their denominators. He surprisingly gave the denominators 1 while multiplying two whole numbers (see Figure 4.60.). He was also successful for multiplying a mixed number with a whole number without converting the mixed number to improper fraction (see Figure 4.61). All aforementioned evidence proved that he positioned at property noticing level (PN) since he examined his multiplication image of fractions for relevant properties. He used symbolic representations (RS). [3]

RESEARCHER: "How did you convert $\frac{3}{2}$ to $1\frac{1}{2}$?"

VOLKAN: “I divided 3 to 2. There was only one 2 inside 3, it was the whole part of the mixed number. 1 remained, it was written as the numerator. The denominator remained the same.”

VOLKAN: “I multiply $\frac{3}{4}$ with 3 and find $2\frac{1}{4}$ cup milk is needed for 15 people.”

VOLKAN: “I convert $2\frac{1}{2}$ to improper fraction and find $\frac{5}{2}$. Then I multiply it with 3 and find $7\frac{1}{2}$ cup sugar for 15 people”

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$
$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{1} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

Figure 4.58 Symbolic representations used by Volkan to show multiplication of a fraction by a whole number

$$2\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{1} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$
$$2\frac{1}{3} = \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{1} = \frac{21}{3} = 7$$

Figure 4.59 Symbolic representations used by Volkan to show multiplication of a mixed number by a whole number

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{1} = \frac{6}{1} = 6$$
$$\frac{10}{1} \cdot \frac{3}{1} = \frac{30}{1} = 30$$

Figure 4.60 Symbolic representations used by Volkan to show multiplication of a whole number by a whole number

$$2\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} = 6\frac{3}{2}$$

Figure 4.61 Symbolic representations used by Volkan to show multiplication of a mixed number by a whole number

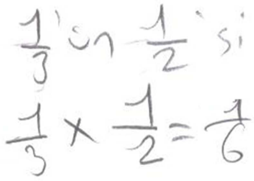


Figure 4.62 Symbolic representations used by Volkan in his activity sheet to show multiplication of fractions and the meaning of this multiplication

Volkan also showed his awareness of that multiplication is a form of repeated addition. He illustrated this knowledge as seen in the following excerpts. He positioned at formalizing level (F) and he used symbolic representations (RS) (see Figure 4.63). [4]
More evidence about the relation between multiplication and addition can be seen in Volkan's activity sheet (see Figure 4.64)

> RESEARCHER: "Can you do the multiplication of $\frac{1}{2}$ by 3 with different way?"
> VOLKAN: "Yes, I can add 3 times the same fraction since multiplication is a form repeated addition. It is a short way of addition. Both results will be the same."

Figure 4.63 Symbolic representations used by Volkan to show addition of fractions

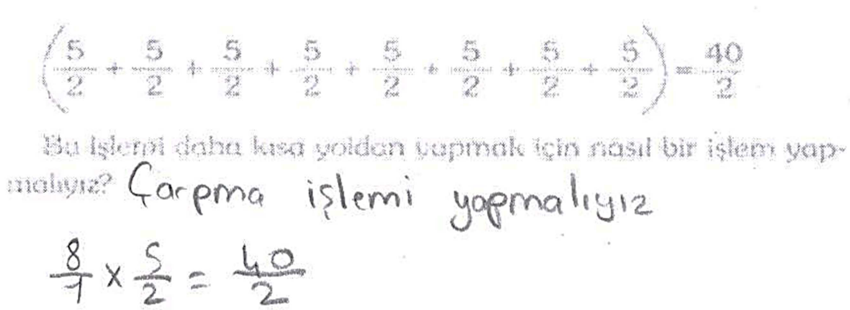


Figure 4.64 Volkan's logic about addition and multiplication of fractions in the activity sheet

Volkan also had a primitive knowledge about fractions. He defined what the numerator and the denominator of a fraction mean. He also expressed $2\frac{1}{3}$ cup and a half cup when he was asked as seen in the following excerpts. He used verbal representations (RW) [5]

> Volkan: The denominator shows the divided parts, pieces or groups for a whole or a quantity. The numerator shows the taken parts, groups.
> Researcher: What do you understand from $2\frac{1}{3}$ cup flour?

Volkan: 2 cup flour and $\frac{1}{3}$ of a cup.

The third question was a word problem related with finding a part of a whole number. Volkan was asked to find $\frac{4}{5}$ and $\frac{2}{3}$ of 45. He demonstrated his knowledge of finding a part of a whole number (see Figure 4.65., see Figure 4.66.). He first found $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{5}$ of the books and then found $\frac{4}{5}$ and $\frac{2}{3}$ of the books by using division and multiplication with whole numbers. More evidence can also be seen in the activity sheet (see Figure 4.67.). He positioned at property noticing level (PN). He used symbolic representations (RS). See the following excerpts. [6]

> VOLKAN: "I divide 45 to 5 in order to find $\frac{1}{5}$ of teacher's book. It is 9 books. Then, I multiply 9 with 4 since $\frac{4}{5}$ of the books are novel. I find the result 36. So, the teacher has 36 novels. I also divide 45 to 3 in order to find $\frac{1}{3}$ of doctor's book. It equals to 15. After that I multiply 15 in order to find $\frac{2}{3}$ of the books. I find 30 novels. (RS)"

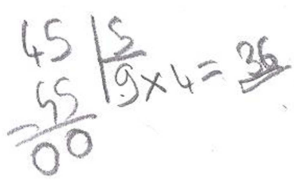


Figure 4.65 Symbolic representations used by Volkan to find a part of a whole number

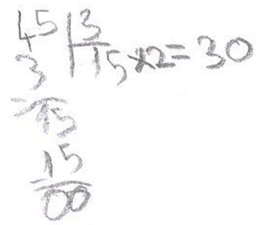


Figure 4.66 Symbolic representations used by Volkan to find a part of a whole number

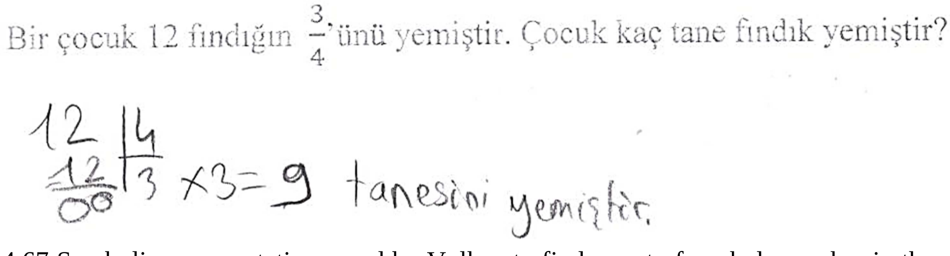


Figure 4.67 Symbolic representations used by Volkan to find a part of a whole number in the activity sheet

Later, Volkan was asked to if he could solve this question by using fraction operations. His answer was surprisingly the same as the previous ones. He only gave 1 to the denominators and did the same things (see Figure 4.68.). He used symbolic representations (RS). He knows how to find $\frac{2}{3}$ and $\frac{4}{5}$ of 45. But, he could not link his knowledge with multiplication operation in fractions. He folded back to image having level (PNtoIH). See the following excerpts. [7]

> RESEARCHER: "Can you solve this question by using fraction operations?"
> VOLKAN: "Yes. I write 1 to the denominator of 5 and divide 45 to $\frac{5}{1}$. While doing division operation with fractions, the second fraction is reversed and multiplied by the first fraction. Then, I find the result $\frac{45}{5}$ which equals to 9. After that I give 1 to the denominator of 4 and multiply it with 9. The result is 36. (RS)"

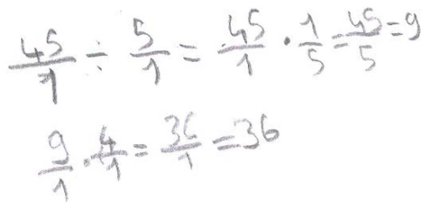


Figure 4.68 Symbolic representations used by Volkan to find a part of a whole number by giving the denominators 1

The fourth question was a word problem related with multiplication of a mixed number by a whole number. It was related with finding a part (a mixed number) of a whole number. The number of egg cartoons in a grocer and the number of eggs inside each egg cartoons were given. How many eggs there were in these egg cartoons were asked to Volkan. He tried to solve this question by using operations with natural numbers. He showed his ability to operate at property noticing level (PN). He used symbolic representations (RS) [8] (see Figure 4.69). He knew what a half fraction means. He had an idea about the fractions of quantities. Let's see the following excerpts.

> VOLKAN: "There are 13 packages and a half package. First, I multiply 13 by 12 and find 146 eggs. Second, I divide 12 by 2 and find 6 eggs. Finally, I add 146 and 6 and find 152 eggs in all egg cartoons. (RS)"

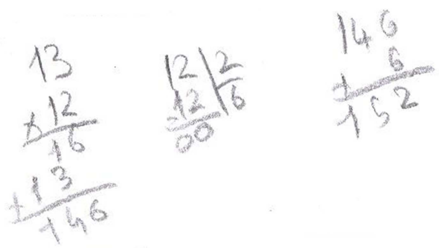


Figure 4.69 Symbolic representations used by Volkan to find a mixed number of a whole

When Volkan was asked if he can find the same result with a different way, he showed his unawareness of multiplication of a mixed number by a whole number. For example, in the following excerpts Volkan considered that when you multiplied mixed number and a whole number, you were doing the same operations as in the natural numbers by giving 1 to the denominator and converting the whole numbers to the fractions as seen in the following excerpts (see Figure 4.70). He knew what a mixed number means. He had primitive knowledge about fractions and mixed numbers. He solved the problem correctly by using this knowledge. But, he could not relate it with fraction multiplication. More evidence can be seen in the field notes, and the activity sheet. He was unaware that he was finding a part of a whole number. So, Volkan folded back to image having level (PNtoIH). He used symbolic representations (RS). [9]

> VOLKAN: "I could convert 13 whole and 12 into a fraction by giving the denominators 1 and multiply them. The result was $\frac{146}{1}$ which equaled to 146. Later, I could convert 12 into a fraction and multiplied it with a half and found 6 eggs. I could add 146 and 6 eggs. I found the result 152 eggs."

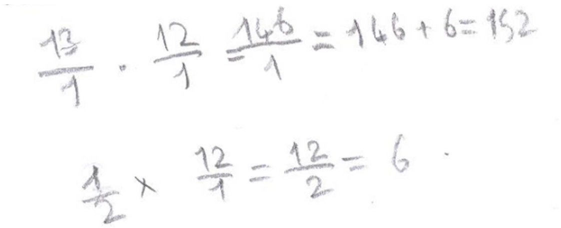


Figure 4.70 Symbolic representations used by Volkan to find a mixed number of a whole by giving the denominators 1

The fifth question was related with the modeling of multiplication operation with a whole number and a fraction. It was related with modeling times of fractions. A shape was given as a whole in rectangular units and Volkan was asked to model a multiplication operation in rectangular units by thinking this whole. While modeling the question Volkan did not care the whole part in rectangular unit as given in the question, instead he tried to model the question by himself (see Figure 4.71). He randomly took a whole and divided the whole into the 6 parts and then took one piece in order to show $\frac{1}{6}$. He found the result $\frac{1}{6}$ at the beginning. The researcher asked him if the result of this multiplication operation and the result he found in the modeling were the same or not to make him notice his fault. The following excerpts showed that he was unaware of this fault. He used visual representations (RV) while modeling. He positioned at image making level (IM). [10]

> RESEARCHER: "What is the result of this multiplication operation?"
> VOLKAN: "$\frac{4}{6}$"
> RESEARCHER: "But, the result you found from modeling ($\frac{1}{6}$) is different from $\frac{4}{6}$. Why they are different from each other?"
> VOLKAN: "I do not know."

Volkan knew the meaning of the multiplication operation $4 \times \frac{1}{6}$. When the researcher asked him to the meaning of this operation, he said " $4 \times \frac{1}{6}$ means 4 times $\frac{1}{6}$". More evidence can be seen in the activity sheet, field notes taking during the observations. But, he was not aware of this meaning while modeling of this multiplication operation (see Figure 4.71). Later, he was asked to model $\frac{1}{6}$ and then model "4 times $\frac{1}{6}$" instead of asking to model $4 \times \frac{1}{6}$. He modeled correctly (see Figure 4.72). He used visual representations (RV) while modeling. He demonstrated his ability to operate at formalizing level (F). See the followings excerpts. [11]

RESEARCHER: “How can you show $\frac{1}{6}$ of the whole part given in rectangular units in the question?”
VOLKAN: “I can show them by dividing each part into two pieces. It has 6 pieces and one piece shows $\frac{1}{6}$.”
RESEARCHER: “Then, how can you model 4 times $\frac{1}{6}$?”
VOLKAN: “I divide the whole part into 6 pieces and each part shows $\frac{1}{6}$ and I take 4 parts in order to model $\frac{4}{6}$.”

Volkan seemed to model the multiplication given in the question. But, he could not notice his first model was wrong. He thought he modeled correctly in both models. He failed to recognize the whole part given in the question in rectangular units and he focused the result $\frac{4}{6}$ as seen in the following excerpts. He used verbal representations (RW). He folded back to image making level (FtoIM). [12]

RESEARCHER: “You modeled $\frac{4}{6}$ different in both models.”
VOLKAN: “No, they are the same. I divided both of them into six equal parts and took 4 parts for showing $\frac{4}{6}$ of the whole part.”
RESEARCHER: “Do $\frac{1}{6}$ in both figures show the same whole?”
VOLKAN: “Yes, I divided both of them into six equal parts and took 4 parts”

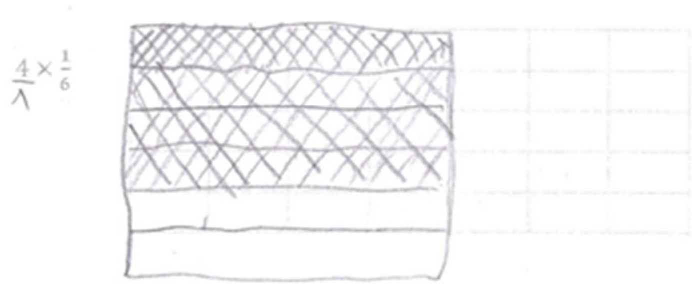


Figure 4.71 Modeling of multiplying 4 with $\frac{1}{6}$ in rectangular units

Figure 4.72 Visual representation used by Volkan to find 4 times of $\frac{1}{6}$

The second part of the interview consisted of questions related with multiplication of two proper fractions, two improper fractions and two mixed numbers. The first question of this part simply asked multiplication of two fractions. It emphasized the meaning of multiplication operation with two fractions. Volkan was asked to find $\frac{2}{3}$ of $\frac{4}{5}$. He showed his awareness of multiplication of two proper fractions and considered that multiplying a fraction by a fraction means finding a part of a part. He multiplied the numerators and multiplied the denominators and then wrote the new numerator over the new denominator. More evidence can be seen in previous examples, in activity sheet and in field notes taken during the observations. He used symbolic representations (RS) for finding the result. He positioned at property noticing level (PN) (see Figure 4.73). Let's see the following excerpts. [13]

> VOLKAN: "I do multiplication since it is asked a form of fraction of a fraction. I get $\frac{8}{15}$, I multiplied the numerators of the fractions to get the new numerator, and multiplied the denominators of the fractions to get the new denominator."

The researcher asked Volkan what was the meaning of finding a part of apart. He tried to demonstrate his knowledge by using transparent fraction cards. He modeled and expressed the model correctly. He proved that multiplying a fraction by a fraction means finding a part of a part. More evidence can be seen in his journal (see Figure 4.76). He showed his ability to operate at formalizing level (F). He used concrete representations (RC). See the following excerpts. [14]

> RESEARCHER: "You said "fraction of a fraction". What did you mean?"
> VOLKAN: ""Fraction of a fraction" means for example $\frac{2}{3}$ of $\frac{4}{5}$. I divide $\frac{4}{5}$ into 3 parts. There are 1,2,3,4…..15 parts totally and I take 2 parts which mean 8 pieces (he is using transparent fraction cards). It is $\frac{8}{15}$."

Volkan was asked to multiply $\frac{4}{5}$ with $\frac{8}{12}$ which was a multiple of $\frac{2}{3}$. He simplified the 12 and 4 and found the result of multiplication $\frac{8}{15}$ (see Figure 4.74). He told that he found the same result since $\frac{2}{3}$ and $\frac{8}{15}$ were equivalent fractions. He said "equivalent fractions are fractions that have the same value". He also did cross-multiplication in order to understand $\frac{2}{3}$ and $\frac{8}{15}$ were equivalent fractions and found the results of both multiplication 24 (see Figure 4.75). He knew how to simplify the fractions. He had also knowledge about equivalent fractions. He used symbolic representations (RS) and he confirmed his knowledge at property noticing level (PN). [15]

Figure 4.73 Symbolic representations used by Volkan to show a fraction of a fraction

Figure 4.74 Symbolic representations used by Volkan to show the equivalent fractions

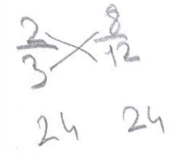


Figure 4.75 Symbolic representations used by Volkan to cross-multiplication of fractions

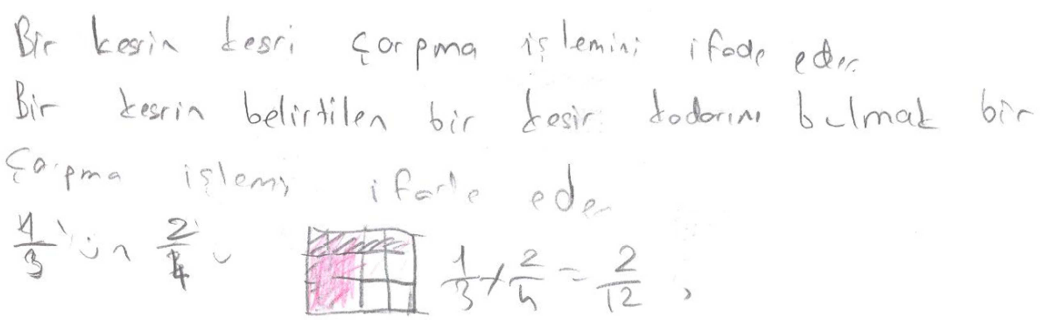


Figure 4.76 Symbolic, verbal and visual representations used by Volkan to show fraction multiplication

The second question was related with modeling and finding the meaning of the multiplication operation with two proper fractions. It asked to model two multiplication operations with two unit fractions changing the orders and then asked about the meaning of these multiplications. Volkan modeled these operations and said "the product was the same regardless of the order of the multiplicands". He stated about the commutative property of multiplication. He also told about the meaning of these operations. He positioned at property noticing level (PN) in which he was aware of the consequences of his thoughts. He used verbal representations (RW). [16] He said for the first product "it means $\frac{1}{2}$ of $\frac{1}{4}$ or a fourth of an half" (see Figure 4.77). He modeled this operation by using transparent fraction cards. He used concrete representation (RC). [17] After that he modeled it onto the paper with the request of the researcher. He said "I divide the whole part into two pieces and then took one part for the half. I divide the half into four parts and then take one part of it for showing the fourth of it. It equals to $\frac{1}{8}$"(see Figure 4.77). He did similar things for the second product. He said it means "an half of a fourth" and then he modeled it by using transparent fraction cards and then modeled (see Figure 4.78). He knows the commutative property of multiplication operation in fractions. He said "changing the order of factors does not change the product" which showed he was in the property noticing level (PN). He used verbal representations (RW) [18] for explaining and visual representations (RV) [19]for modeling. He knows how to model the multiplication operation in fractions and explains its meaning. He also confirmed these conclusions by doing another multiplication with the transparent fraction cards. More evidence can also be seen in his journal (see Figure 4.79). He confirmed his knowledge in different settings and positioned at formalizing level (F). He used concrete representation (RC). [20]

Figure 4.77 Symbolic representation used by Volkan to show multiplication of two unit fractions and modeling of that multiplication

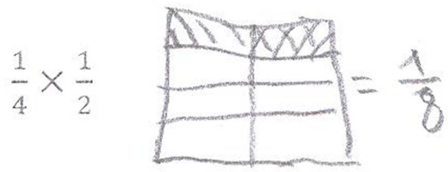


Figure 4.78 Symbolic representation used by Volkan to show multiplication of two unit fractions and modeling of that multiplication

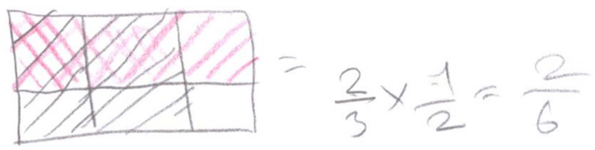


Figure 4.79 Symbolic representation used by Volkan to show multiplication of two fractions and modeling of that multiplication in the activity sheet

In the third question, a multiplication operation with two mixed numbers was given; estimating the product and then comparing the product and the estimation result with each other was asked in this question. Volkan estimated the product 8 (see Figure 4.80). He showed an understanding of how to estimate the factors and the product. He rounded the factors to the nearest whole number while doing this he used a strategy that the factors were how close to zero, their half and their whole in order to estimate the nearest value of fractions. He thought about the properties of fractions and abstracting them which suggested his ability to operate at formalizing level (F). He used symbolic representations (RS). [21] See the following excerpts.

> VOLKAN: “$2\frac{1}{9}$ is close to 2 whole since $\frac{1}{9}$ is close to zero and we have 2 whole. $3\frac{7}{8}$ is close to 4 whole since $\frac{7}{8}$ is close to one whole and we have also 3 whole. 4 whole was obtained by adding them together. Then, the product is close to 8 whole.”

Volkan also compared the result of this multiplication operation with the estimation result. Firstly, he did this multiplication operation without converting each mixed number to an improper fraction. He multiplied the whole number parts and wrote as whole number part of the product and he also multiplied fraction parts and wrote as fraction part of the product (see Figure 4.81). He said “this product is close to 7”. He could not do the correct solution for the multiplication. This discussion suggested that he was not prepared to operate at property noticing level. Suddenly he changed his mind and he said “I can do it by converting them to improper fractions. The product may perhaps be closer to the estimation result. I may do it in a wrong way.” This evidence pointed at his ability to operate at property noticing level (PN). He used symbolic representations (RS). [22] Then, he did the multiplication operation by converting each mixed number to an improper fraction. He multiplied the two numerators together and multiplied the two denominators together. He found the result $\frac{589}{72}$ (see Figure 4.82). He converted the first result to an improper fraction and found $\frac{439}{72}$ (see Figure 4.81) and compared the first and second product. He realized that they were different and he realized that the first solution was wrong. He said "I think we multiply the whole parts together and also multiply whole parts with fraction parts". As in the previous dialog he had an idea about how to do this operation, but; he could not do it. In addition, he was in trouble about the division operation and he could not convert the improper fraction $\frac{589}{72}$ to a mixed number. The researcher asked him different divisions, but; he could not do this division. This may because he got worried since in previous works and previous questions he had no problem about division. As a result he could not compare the estimation result and the product. This discussion suggested that he had primitive knowledge about fractions but had some problems about dividing big numbers to each other. This discussion suggested that he was not prepared to operate at property noticing level. He folded back to image having level (PNtoIH). He used symbolic representations (RS). [23]

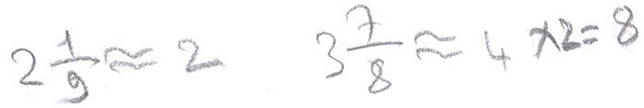


Figure 4.80 Symbolic representations used by Volkan to estimate the result of multiplication of two mixed numbers

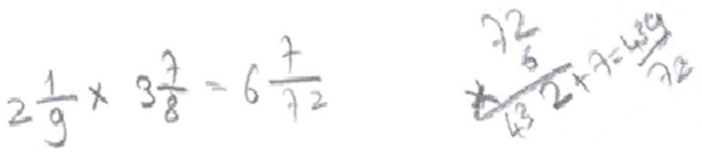


Figure 4.81 Symbolic representations used by Volkan to show multiplication of two mixed numbers together

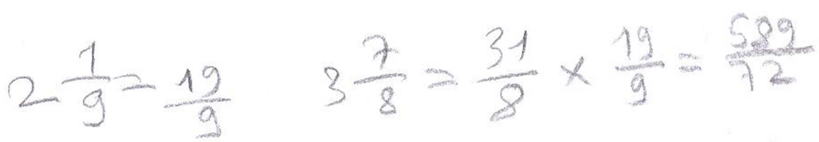


Figure 4.82 Symbolic representations used by Volkan to show multiplication of two mixed numbers by converting them to improper fractions

The fourth question dealt with equivalent fractions. If the result of $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$ operation equaled to $\frac{5}{8}$ or not was asked in this question. Firstly, Volkan did this multiplication and found the result $\frac{15}{24}$ and then said "I can use cross products in order to understand if the result $\frac{15}{24}$ equals to $\frac{5}{8}$ or not. I can multiply 15 by 8 and 24 by 5. Both results are 120, so the cross-products are equal. It can be said the fractions are equivalent" (see Figure 4.83). He knew how to multiply two fractions. He multiplied the numerators and then denominators of the fractions and placed the product of the numerators over the product of the denominators. He knew the proportion and cross multiplication. He preferred cross multiplication instead of simplifying the result of the multiplication and he demonstrated his ability to verify the fractions $\frac{15}{24}$ and $\frac{5}{8}$ were equivalent. But, he could not notice that $\frac{15}{24}$ was a multiple of $\frac{5}{8}$. Although he could not think to simplify the fraction $\frac{15}{24}$, his responses showed his ability to operate at property noticing level (PN) and he used symbolic representations (RS). [24]

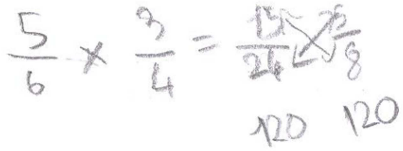


Figure 4.83 Symbolic representations used by Volkan to show multiplication of two proper fractions and equivalence fractions

The fifth question was related with finding the product with 3 multiplicands. The result of the multiplication $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{3}{4}$ was asked to Volkan. He was capable of doing this product. He knew how to multiply and simplify fractions as in the following excerpts. He used symbolic representations (RS). He demonstrated his ability to operate at property noticing level (PN) [25] (see Figure 4.84).

> VOLKAN: "I can group the first and second factors together and multiply them. I multiply the numerators and multiply the denominators and place the product of the numerators over the product of the denominators. I multiply this product with $\frac{3}{4}$ and find the result $\frac{12}{60}$."
> RESEARCHER: "Can you simplify the result?"
> VOLKAN: "Yes. I divide both the numerator and denominator by the common factor 6 and then 2. I find the result $\frac{1}{5}$."

Volkan had an error at the end of his solution. But, he could not notice this. When he was asked why he grouped the factors, he said " I can also group the other two factors firstly since it is a multiplication operation". He implied the associative property of multiplication. More evidence can be seen in the field notes taken during observations. He demonstrated his ability to operate property noticing level (PN). He used verbal representations (RW). [26]

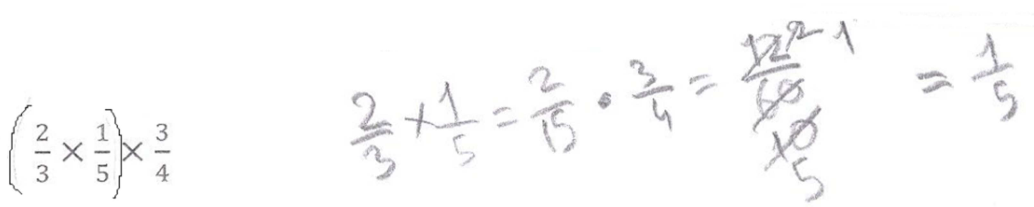


Figure 4.84 Symbolic representations used by Volkan to show multiplication of three proper fractions

The sixth question was related with comparing the result of multiplication operations with the multiplicands in proper and improper fractions. Volkan was asked to do a multiplication operation with two proper fractions and then comment that the product was less or greater than each of the two fractions he multiplied. He was also asked to do the same things with multiplication of two improper fractions. Volkan showed his understanding of multiplying two improper and two proper fractions. More evidence can be found from activity sheet and field notes. He demonstrated his ability to operate at property noticing level (PN) and he used symbolic representations (RS) [27] (see Figure 4.85 and Figure 4.86). See the following excerpts.

> VOLKAN: "I find the first product $\frac{3}{8}$ by multiplying numerators with numerators and denominators with denominators. I also find the second product $\frac{35}{12}$ in the same way."

In addition, Volkan demonstrated his awareness of comparing proper and improper fractions. He first compared the fractions by equating the denominators with least common multiple of denominators (see Figure 4.85 and Figure 4.86). He used symbolic representations (RS) [28] for these comparisons. He also compared them by thinking their closeness to their halves, wholes and the number zero (see Figure 4.87 and Figure 4.88). He used fraction strips for these comparisons. He used concrete representations (RC) [29]. He noticed that the product is greater than the multiplicands in improper fractions and smaller than the multiplicands in proper fractions. He positioned at formalizing level (F). See the following excerpts.

> VOLKAN: " $\frac{3}{8}$ is less than the other two factors. The product $\frac{35}{12}$ is greater than the two factors."
> RESEARCHER: "Then, what can you say about the result of the multiplication operation in fractions?"
> VOLKAN: "I multiplied proper fractions in the first operation and improper fractions in the second operation so that the product was less than either factors in the first operation and the product was greater than either factors in the second operation."
> RESEARCHER: "Could you compare each product with each of the fractions you multiplied?"
> VOLKAN: "Yes, I can. I could compare them by equating the denominators with least common multiple of denominators. The least common multiple was 8 for the first product and 12 for the second product. I equated the denominators with 8 for the first product and 12 for the second product. I expanded $\frac{3}{4}$ with 2 and $\frac{1}{2}$ with 4. So, $\frac{3}{4}$ was greatest and then $\frac{1}{2}$ came and $\frac{3}{8}$ was the smallest one."
> RESEARCHER: "How did you compare these fractions?"
> VOLKAN: "If the fractions have common denominators, than the fraction with the bigger numerator is greater than the others".
> RESEARCHER: "Can you compare them without equating the denominators?"
> VOLKAN: "Yes, I can think about how close the fractions to their half and the whole fractions…. $\frac{3}{4}$ is close to a whole since its whole is $\frac{4}{4}$. $\frac{1}{2}$ is a half of a whole since a whole is cut into two pieces and a piece of it is taken (by using fraction strips). The product $\frac{3}{8}$ is close to a half since its half is product $\frac{4}{8}$. When I compare them $\frac{3}{8}$ is less than a half and $\frac{3}{4}$ is greater than the others."
> RESEARCHER: "How about the other multiplication operation?"
> VOLKAN: " $\frac{7}{6}$ is close to a whole since its whole is $\frac{6}{6}$ and 7 is close to 6. $\frac{5}{2}$ is close to 2. Because, 2 whole equal to $\frac{4}{2}$. $\frac{35}{12}$ is close to 3 since 3 whole equal to $\frac{36}{12}$. Then, the biggest one is $\frac{36}{12}$ since it is close to 3 whole."

$\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$\frac{3}{4}$ (2) $\quad \frac{1}{2}$ (4) $\quad \frac{3}{8}$ (1)

$\frac{6}{8} > \frac{4}{8} > \frac{3}{8}$

Figure 4.85 Symbolic representations used by Volkan to show multiplication of two proper fractions and comparison of these fractions

$\frac{7}{6} \times \frac{5}{2} = \frac{35}{12}$

$\frac{7}{6}$ (2) $\quad \frac{5}{2}$ (6) $\quad \frac{35}{12}$

$\frac{14}{12} < \frac{30}{12} < \frac{35}{12}$

Figure 4.86 Symbolic representations used by Volkan to show multiplication of two improper fractions and comparison of these fractions

$\frac{3}{4} \approx 1 \quad \frac{1}{2} \approx 0{,}5$

$\frac{3}{8} \approx 0{,}5$

Figure 4.87 Symbolic representations used by Volkan to estimate the fractions

$\frac{7}{6} \approx 1 \quad \frac{5}{2} \approx 2$

$\frac{36}{12} \approx \frac{35}{12}$ 3

Figure 4.88 Symbolic representations used by Volkan to estimate the fractions

The seventh question was a word problem requiring the time conversion related with finding a part of a part. How many minutes there were in $\frac{2}{3}$ of $\frac{4}{5}$ hours was asked. It was expected to find $\frac{2}{3}$ of $\frac{4}{5}$ hours and then to convert the result into minutes in this question. It was a daily life question. Volkan demonstrated his awareness of finding a fraction of a fraction. He multiplied $\frac{2}{3}$ and $\frac{4}{5}$ (see Figure 4.89). Then, he tried to convert this product into minutes. He used unit fraction for solving the question as seen in the following excerpts, then he multiplied the result with 8 in order to find the result (see Figure 4.89). He preferred to join the operations with natural numbers and fractions. He demonstrated his ability to operate at property noticing level (PN). He used symbolic representations (RS). [30]

> VOLKAN: " $\frac{2}{3}$ of $\frac{4}{5}$ hours was asked. It was a fraction of a fraction so; I multiplied them with each other I found the result $\frac{8}{15}$. I divided an hour which equals to 60 minutes by 15 in order to find $\frac{1}{15}$ of it. I multiplied the result by 8 and found 32 minutes".

Later, the researcher asked Volkan if he can find $\frac{8}{15}$ of 60 minutes a different way or not. He did the same operations as he did before by giving 1 to the denominators of the numbers (see Figure 4.90). He thought he used fraction operations. He could not notice that his first and second solutions were the same. Although he knew how to product a proper fraction with a whole number, he did not multiply $\frac{8}{15}$ by 60 in order to find $\frac{8}{15}$ of 60. He had primitive knowledge about fractions, but; he could not link it with fraction operations. An example from the activity sheet also proved that he preferred operations with natural numbers while finding a part of a whole (see Figure 4.91). He folded back to image having level (PNtoIH). He used symbolic representations (RS). [31]

> RESEARCHER: "Could you find $\frac{8}{15}$ of 60 minutes with a different way?"
> VOLKAN: "I could do it with converting them into fractions. I gave 1 to the denominators of 60 and 15 and did division. I multiplied the multiplicative inverse of the second fraction with the first one and found the result 4. Then, I multiplied 4 by 8 giving 1 to the denominators. The result was $\frac{32}{1}$ which equaled to 32. I found the same result again…I did division and multiplication in order to find $\frac{8}{15}$ of 60."

Figure 4.89 Symbolic representations used by Volkan to show a fraction of 60 minutes

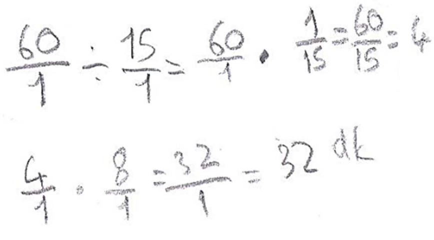


Figure 4.90 Symbolic representations used by Volkan to show a fraction of 60 minutes

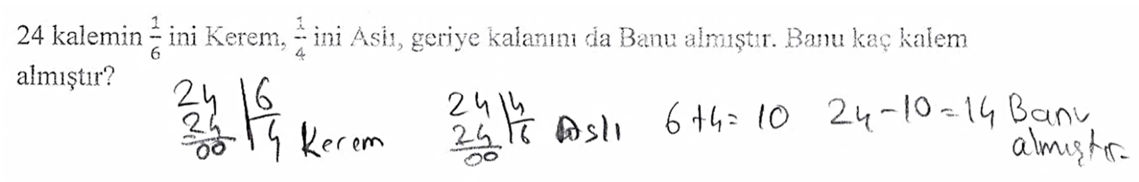


Figure 4.91 Symbolic representations used by Volkan to find a part of a whole by using operations with natural numbers in a word problem in his activity sheet

The eighth question was a problem related with finding the number of apples in two multiplication operations by taking into account 3 apples equaled to $\frac{1}{4}$ of the all apples in a basket. It required finding the whole of a given quantity and finding a part of that quantity. It was a daily life question. Volkan found the least common multiple of denominators and equaled the denominators in both of the operations and did addition instead of doing multiplication. Volkan's solution strategy was a good strategy except adding the given fractions. He equated the denominators with the least common multiple of them and found correctly the number of apples demonstrated by these fractions by thinking $\frac{1}{12}$ of the apples equals to 1 apple as a main point (see Figure 4.92). He found the number of all the apples in the basket as 12. He showed his awareness of finding the whole of a given quantity and finding the value of a quantity when it is given in fraction format. So, he positioned at formalizing level (F) and he used symbolic representations (RS). [32] He tried to find the number of apples in both of the operations. His strategy seemed to be correct during addition; but, he could not use this strategy while doing multiplication. He just did multiplication with the expanded fractions in the second operation. But, he could not find the number of apples in the basket by doing this multiplication (see Figure 4.93). See the following excerpts.

> VOLKAN: "I can find the least common multiple of them to make the first operation simple. I expand them with 12. $\frac{2}{3}$ equals to $\frac{8}{12}$, $\frac{4}{6}$ equals to $\frac{8}{12}$ and $\frac{1}{4}$ equals to $\frac{3}{12}$. If $\frac{1}{4}$ of the all apples equals to 3 apples, $\frac{3}{12}$ of the apples equals to 3 apples. Then, $\frac{1}{12}$ of the apples equals to 1 apple. Then, I add all of them and find $\frac{19}{12}$ which equals to 19 apples. If $\frac{1}{12}$ of the apples equals to 1 apple, then, $\frac{8}{12}$ apples equals to 8 apples…. $\frac{3}{12}$ should not be added, it is not asked in this question. I find 16 apples since both $\frac{8}{12}$ apples equal to 8 apples."
> RESEARCHER: "Why did you add them?"
> VOLKAN: "I can also multiply them… In the second operation, $\frac{5}{12}$ of the apples equals to 5 apples because $\frac{1}{12}$ of the apples equals to 1 apple. $\frac{3}{4}$ of the apples equals to $\frac{9}{12}$. Then, I add them and find $\frac{14}{12}$ which means 14 apples."

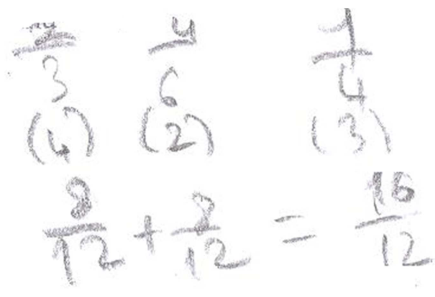


Figure 4.92 Symbolic representations used by Volkan to show multiplication of two fractions and show this fraction of all apples in the basket

$$\frac{5}{12}\times\frac{9}{12}=\frac{45}{144}$$

Figure 4.93 Symbolic representations used by Volkan to show multiplication of fractions and show this fraction of all apples in the basket

Volkan tried to multiply the given fractions without equating the denominators. He was again unsuccessful for finding the correct answer as in the following excerpts (see Figure 4.94). He folded back to the property noticing level (FtoPN) and used symbolic representations (RS) [33] in order to do the multiplication operations. Although he knew how to find a part of a given quantity as seen in his previous questions, activity sheet, and journal, he could not demonstrate his knowledge in this question. In addition, Volkan showed his awareness of equivalent fractions (see Figure 4.96). He simplified $\frac{4}{6}$ with 2 in order to find $\frac{2}{3}$. He knew how to simplify and expand the fractions. He did multiplications given in the question but he was unaware of the number of apples represented in these multiplication operations. So, he folded back to the image making level (PNtoIM) and he drew the figure in order to show the whole number of the apples in the basket and tried to solve the question (see Figure 4.95). He used visual representation (RV). [34]

RESEARCHER: “It is a multiplication. But, you added them. Why?

VOLKAN: “oh yes, I can multiply them quickly….the result equals to $\frac{45}{144}$.

RESEARCHER: “How many apples it equal to?”

VOLKAN: “It cannot be simplified. I may multiply the fractions without expanding them. I find the result $\frac{15}{48}$ when multiplying $\frac{5}{12}$ and $\frac{3}{4}$. The denominator of the result equals to 4 times 12. It equals to a quarter of an apple. 15 equals to $3\frac{3}{4}$ apples, that is 3 apples and $\frac{3}{4}$ of an apple…”

RESEARCHER: “How many apples are there in the basket if $\frac{1}{4}$ of apples equal to 3 apples?”

VOLKAN: “If $\frac{1}{12}$ of the apples equal to one apple, then the whole of this equals to $\frac{12}{12}$, so there are 12 apples in the basket…. I can draw a shape like that.”

RESEARCHER: “You found $\frac{2}{3}$ and $\frac{4}{6}$ of the apples equal to 8 apples. Is it true?”

VOLKAN: “Yes, they are equivalent fractions. When we simplify $\frac{4}{6}$ with 2, we find $\frac{2}{3}$.”

$$\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{4}=\frac{15}{48} \qquad \frac{15}{1}\times\frac{1}{4}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$$

Figure 4.94 Symbolic representations used by Volkan to find a fraction of all apples in the basket

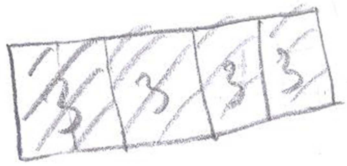


Figure 4.95 Visual representation used by Volkan to show the number of all apples in the basket

Figure 4.96 Symbolic representations used by Volkan to show the equivalent fractions by simplifying them

The ninth question was related with finding the fractions modeled as square units. 3 squares representing $\frac{1}{3}$ of a whole was given and it was asked to find the value of two fractions modeled with square units by thinking the whole they found at the beginning. It was related with the relation between multiplication and repeated addition while trying to find the modeled fractions. Volkan showed his awareness of finding the whole of the fraction modeled at the beginning of the question and he demonstrated his knowledge of finding the fractions modeled in this question. In the first part of the question, he hatched 3 squares as $\frac{1}{3}$ and counted 4 times $\frac{1}{3}$. He used visual representation (RV). He first added them and then multiplied 4 by $\frac{1}{3}$ as a short way of addition (see Figure 4.97). He used symbolic representations (RS). Volkan demonstrated his knowledge of multiplication is a form of repeated addition that can also be seen from his activity sheet, previous questions. He was also able to find the modeled fraction. He linked his knowledge of adding and multiplying fractions with the given model. All the aforementioned evidence pointed at his ability to operate at image formalizing level (F). [35] Let's see the following excerpts.

> VOLKAN: "I am hatching 3 and then the other 3 squares …the addition of them equal to $\frac{4}{3}$."
> RESEARCHER: "Can you do it with a different method?"
> VOLKAN: "Yes, I can do it by using multiplication. I can multiply 4 by $\frac{1}{3}$ and find the same result since multiplication is a form repeated addition. I do several operations while doing addition, but, I do a single operation while doing multiplication."

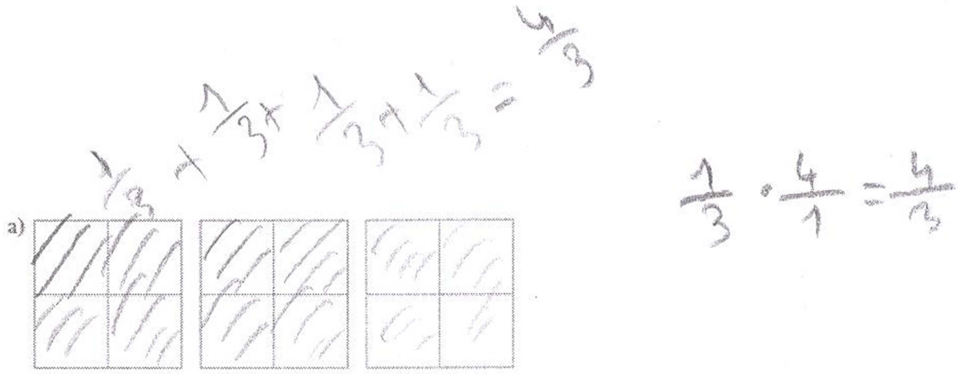


Figure 4.97 Symbolic and visual representations used by Volkan to find the modeled fraction

Later, Volkan tried to find the fraction modeled in the second part of the question. He hatched the squares and he noticed that a square remained (see Figure 4.98). He used visual representation (RV) while doing this. He used proportion in order to find the value of the remaining square. He cross multiplied them and divided the fractions. He found the value of the remaining square $\frac{1}{9}$. He added the fractions represented by the hatched squares. He equaled the denominators and found the result $\frac{7}{9}$ (see Figure 4.98). All aforementioned evidence showed that he operated at formalizing level (F). He used symbolic representations (RS) [36]. He also found 9 squares as the whole of the given shape at the beginning of the question and he noticed that each square showed $\frac{1}{9}$ of this whole. Then, he solved this question by using repeated addition and also using multiplication as a result of researcher's question. So, he showed his awareness of multiplication was a form of repeated addition. As a result, he demonstrated his ability to verify them in different settings and he showed his understanding of operating at observing level (O). He used both verbal representations (RW) and symbolic representations (RS) [37]. Let's see the following excerpts.

> VOLKAN: "In (b), 3 squares equal to $\frac{1}{3}$, the other 3 squares equal to $\frac{1}{3}$ and a square is remaining. I can find the value of it by using proportion."
> RESEARCHER: "How?"
> VOLKAN: "If 3 squares equal to $\frac{1}{3}$, 1 square equals which number? I do cross multiplication… I find the result to $\frac{1}{9}$. Then, a square equals to $\frac{1}{9}$. I can add $\frac{1}{9}$ with two $\frac{1}{3}$s. I expand the denominators of them with 9 and find $\frac{3}{9}$. If I add all of them, I find $\frac{7}{9}$."
> RESEARCHER: "Can you find the same result by using another way?
> V: No, I can do like this."
> RESEARCHER: "Ok. If 3 squares equal to $\frac{1}{3}$ as given at the beginning of the question, then, its whole includes how many squares?"
> VOLKAN: "I multiply 3 squares with 3 and find 9 squares. Then, each square represents $\frac{1}{9}$ of the whole."
> RESEARCHER: "Can you find another way for the question in (b) by thinking $\frac{1}{9}$ for each square."
> VOLKAN: "There are 7 squares, so it equals to $\frac{7}{9}$."
> RESEARCHER: "Can you show it by using an operation?"
> VOLKAN: "I can use addition. I can add 7 times $\frac{1}{9}$ and also multiply 7 by $\frac{1}{9}$ and find $\frac{7}{9}$."

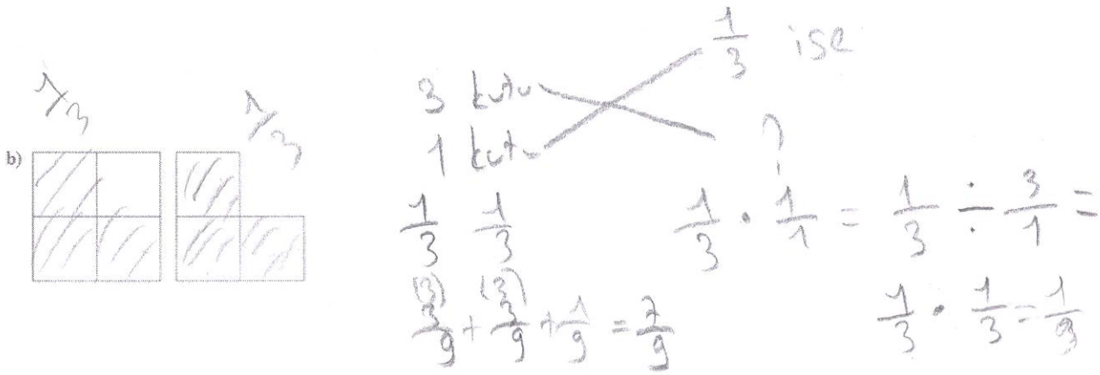


Figure 4.98 Symbolic and visual representations used by Volkan to find the modeled fraction

Mapping is a technique offered by Pirie and Kieren (1989) in order to visually trace learners' understanding. Here, Volkan's growth of understanding depicted with these technique. Additionally, as stated before, use of representations was included to this technique. Each number on the maps shows significant points at the growth of students' understanding on multiplication of fractions. Volkan's growth of understanding was depicted with two parts. The first part can be seen in Figure 4.99.

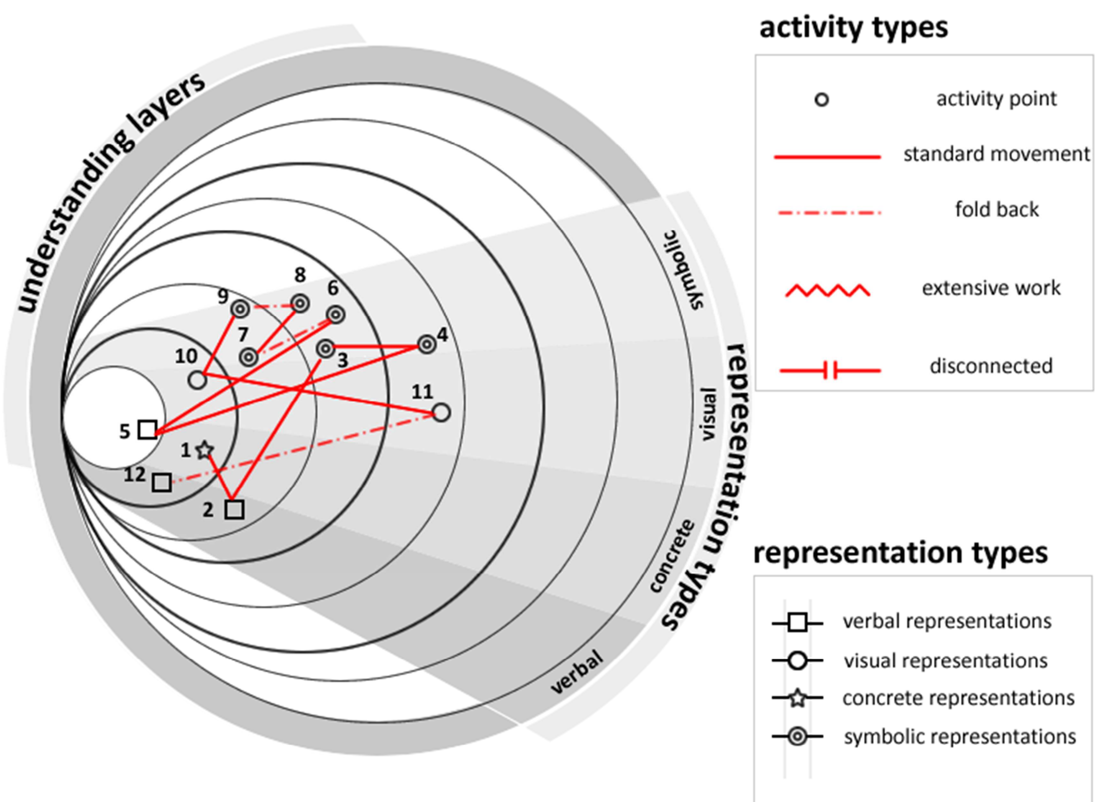


Figure 4.99 Understanding map of Volkan for the first part

The second part of Volkan's understanding can be seen in Figure 4.100. In general, it can be said that Volkan tended to use concrete materials more than Ahmet. However, Volkan preferred to use symbolic representations as much as Ahmet did.

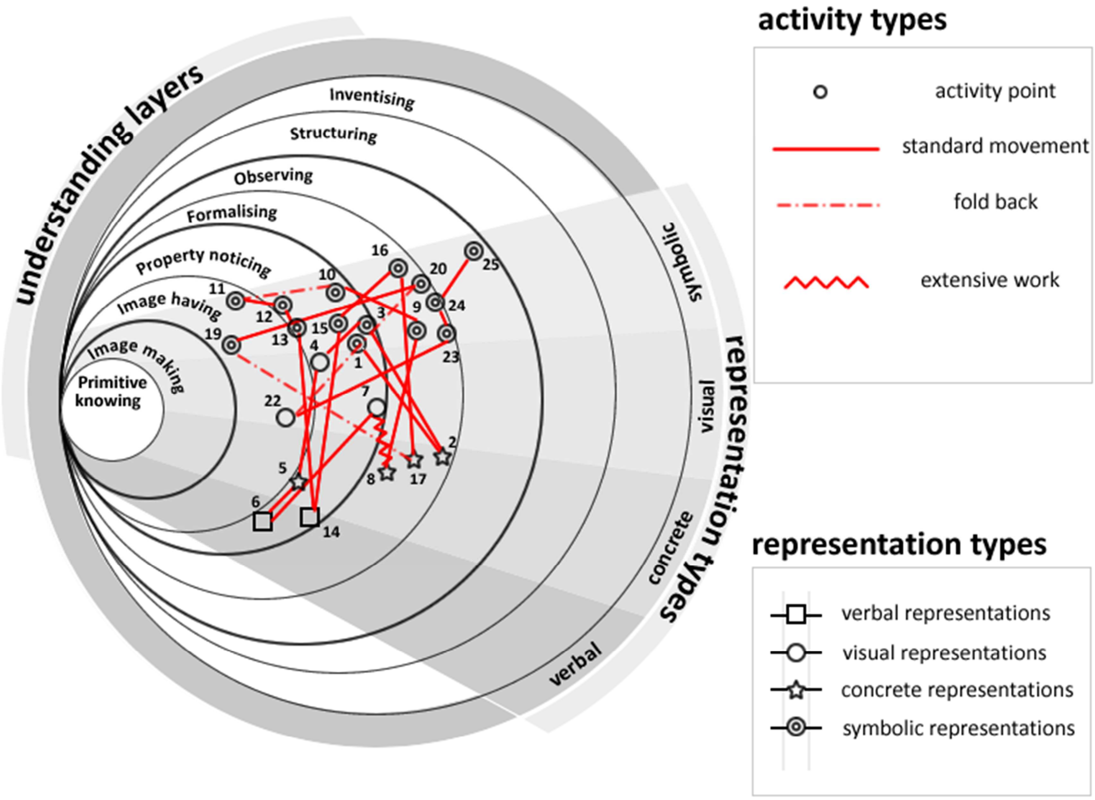


Figure 4.100 Understanding map of Volkan for the second part

CHAPTER 5

DISCUSSION, CONCLUSIONS, AND IMPLICATIONS

This chapter includes discussion of the results, conclusions, implications, and recommendations for further researches.

The current study was conducted to investigate sixth grade students' understanding of multiplication of fractions in terms of Pirie and Kieren's model of the growth of mathematical understanding with the focus on its effectiveness on assessing mathematical understanding in Turkish context and propose a multi-dimensional mapping technique to substitute and improve current mapping feature of the theory. In this section, the results of the study was discussed around several dimensions such as students' understanding of multiplication of fraction, effective use of Pirie and Kieren model of understanding, mapping feature of this theory, and representation usage and understanding.

5.1 Discussion of the Results

In this study, the researcher reviewed the related literature to find a working theory for mathematical understanding in order to assess sixth grade students' understanding of multiplication of fractions. In the end, it was decided to apply the Pirie–Kieren Theory of Understanding, also known as Pirie and Kieren's model of the growth of mathematical understanding, (Pirie & Kieren, 1989) as the theoretical lens of the study. Almost for 20 years, several researchers used Pirie and Kieren's model of the growth of mathematical understanding as a theoretical framework in their studies (e.g. Borgen, 2006; Cavey, 2002; Grinevitch, 2004; Manu, 2005; Martin & LaCroix, 2008; Meel, 1995; Tsay, 2005) and some others used this model for curriculum development (Allan, 2006; Hunter, 2006). These researches proved effectiveness of this framework to analyze learners understanding on different subjects in mathematics such as trigonometry (Cavey, 2002), abstract algebra (Grinevitch, 2004), patterns and relations (Manu, 2005), mathematics for work (Martin & LaCroix, 2008), basic calculus concepts (Meel, 1995), and multiplication of whole numbers (Tsay, 2005). However, there is no comprehensive study on multiplication of fractions found by the researcher. Therefore, the results of this study will be discussed in the light of the studies conducted on other topics.

In the current study, it was found that the students struggled with several issues which acted as an obstacle at the process of understanding the basic foundations of multiplication of fractions. These were (1) establishing connection between multiplication of fraction concept and real life usage of these concepts, (2) visual problems vs. written symbolic problems/word problems, (3) extending whole-number multiplication to the multiplication with the fractions. For example, when students were asked to find the number of apples in a multiplication operation by taking into account 3 apples equaled to $\frac{1}{4}$ of the all apples in a basket, they had difficulty in finding the number of apples in this multiplication. They did multiplication and then tried to find the number of apples. But, they puzzled to find the number of apples from the result of multiplication. So, they had difficulty in establishing connection between multiplication of fractions and real life usage of fraction multiplication. Moreover, although students solved a symbolic question related with multiplication of two unit fractions correctly, they had some problems while solving a question which was related with finding the fractions modeled in square units when three squares representing $\frac{1}{3}$ of a whole was given.

Students think that fractions act as an operator that can change the size of a physical quantity (Behr et al., 1993; Lamon, 2011; Streefland, 1991). This was also seen at the results of the current study pointed out at (1). The results of the current study related with the question type which is mentioned at (2) confirm the results of the study of Taber (2001). In the current study it was found that the presentation of the question was a significant factor to affect students' understanding. For example, a shape with three rectangular units was given as a whole and students were asked to model multiplication operation $4 \times \frac{1}{6}$ in rectangular units by thinking this whole. Then, students had difficulty in modeling this multiplication at a first glance. When the students were asked to model $\frac{1}{6}$ of that whole, and to model the multiplication by thinking meaning of it, they were able to model this multiplication accurately. So, the presentation of the question was important in this question. Furthermore, the problems worded to reflect real-life events helped students' to move from inner layers to outer layers more easily. For instance, when students were asked a real life problem related with finding the number of eggs in the egg cartoons, they were able to find the answer easily by connecting it with their daily life. This also can be seen in the maps in Section 4.1 and 4.2. Moreover, it was found that at the process of understanding multiplication of fractions, the students were required to re-conceptualize their understanding on whole-number operations (3), this result is also confirm the conclusion of the study of Hiebert and Behr (1988). Kieren (1988) states that the operation with the fractions is not just extended version of whole-number operations. Indeed, they are built up with the experiences involving fractional quantities and operations with them. Moreover, in the current study, it was found that some of the students used division and multiplication operations with whole numbers to find a fraction of a whole number. For example, when those students were asked to find $\frac{4}{5}$ of 45, they divided 45 with 5 and multiplied the value with 4. This result also confirms the results of Taber (2001) and Taber (2007). In the current study, it was seen that the students need to understand multiplication with whole numbers to understand multiplication fractions. However, extending their understanding on whole numbers also can act as an obstacle to understand the multiplication of fractions. Because they just try to apply repeated addition to the fractional concepts. On the contrary Mack (2001) found that the students had no trouble to state a fraction of a fraction as multiplication of fractions. This can also be seen in the current study. Students were asked to find $\frac{4}{5}$ of $\frac{2}{3}$ and they multiplied the fractions in order to find $\frac{4}{5}$ of $\frac{2}{3}$. Moreover, it was seen that students tend to use algorithms without showing any evident of understanding at the interviews. For example, students were asked to multiply three fractions together, they just used the algorithm and find the result of that multiplication operation. This was not in the case when they try to solve questions in the class before teaching algorithms to them. Therefore, we can conclude that teaching algorithms can be an obstacle to develop understanding of multiplication of fractions. The one who want to teach multiplication of the fraction with understanding should not teach algorithms before asking real life questions and visualizing it with visual representations. If the teacher uses different representations to teach the multiplication of fractions, the students can get it more easily. Similarly, when the students work on the problems with the use of multiple representations, they can go from inner level to outer level much more easily. For example, in some questions students were used transparent fraction cards or drew figures to model multiplication of fractions. So, they could use concrete and visual representation together during question and could go image making level to formalizing level more easily.

The next point that should be discussed the results of the current study around the use of Pirie and Kieren theory of understanding. The review of the literature (See Section 2.3) showed that the studies in which they utilize the Pirie and Kieren theory of understanding can be categorized as follows: probing understanding (e.g. Cavey, 2002), checking validity of the theory in different contexts (Cave, 2008; Manu, 2005; Meagher, 2005), employing it as a comparison method (Cave, 2008; Meel, 1995), and checking efficiency of the theory (Warner, 2005). In the current study, sixth grade students' understanding of multiplication of fractions was explored. However, Cavey (2002) and similar other studies reviewed in Section 2.3 mostly probed understandings of participants from higher education levels or teachers. Moreover, generally they explored understanding of advanced topics rather than fundamental topics of mathematics. Therefore, results of the current study can't be discussed in terms of findings on understanding of multiplication of fractions with respect to the studies mentioned above. However, it can be mentioned that the current study employed Pirie and Kieren theory of understanding in the way the other similar studies did. Manu (2005) checked the validity of the Pirie and Kieren theory of understanding by comparing different language usages. It was seen from the study that this theory is valid at different languages. In the current study, the researcher worked with native Turkish learners; and, the theory worked as expected.

The other point that should be discussed is the results of the improvement efforts on the mapping feature of the theory. The Pirie–Kieren Theory of Understanding has an important claim to depict students' understanding process over the time with the help of the mapping feature proposed by Pirie and Kieren (1989). However, except Towers (1998), Borgen (2006), and Manu (2005), the other researchers, who employed the Pirie–Kieren Theory of Understanding to analyze learners' understanding, did not depict it with the maps utilized by Pirie and Kieren (1989). Moreover, Towers (1998) and Manu (2005) slightly changed the mapping feature when they apply it to their study. They just worked on the shape of the map and used a table-like layout for the maps. This usage makes easier to depict learner's understanding process with map; however, it is difficult to interpret it because it takes much space and it is hard to follow the stream. Moreover, as pointed out by Borgen (2006), this change criticized in the way that it diminishes the embedded structure of the understanding proposed by Pirie and Kieren (1989). In the current study, the researcher just applied some new icons and design elements to make the maps more interpretable. Moreover, one more dimension, representation types, was added to existing map. The new version of the maps preserved its original embedded rings shape. The improved version of the maps can be seen in Chapter 4. Pirie and Kieren (1994) emphasize the power of mapping and states that the drawing understanding maps allows to depict the growth of understanding clearly. In the current study, the researcher tried to find why the other researchers did not apply this feature. Some of the studies showed that attending to representations is crucial for communication and development of mathematical understanding (Behr et al., 1993; Kilpatrick et al., 2001; Taber, 2001). Furthermore, Pirie and Kieren also emphasize the importance use of representations at their studies (Droujkova, 2004; Wilson & Stein, 2007). Therefore use of representations was added as a second dimension to the current mapping feature. Several other researchers were also modified the mapping feature of the theory. The most significant change was made by Towers (1998). In the current study, understanding maps of Ahmet were also depicted with the map suggested by Towers (1998) (see Figure 5.1 and 5.2).

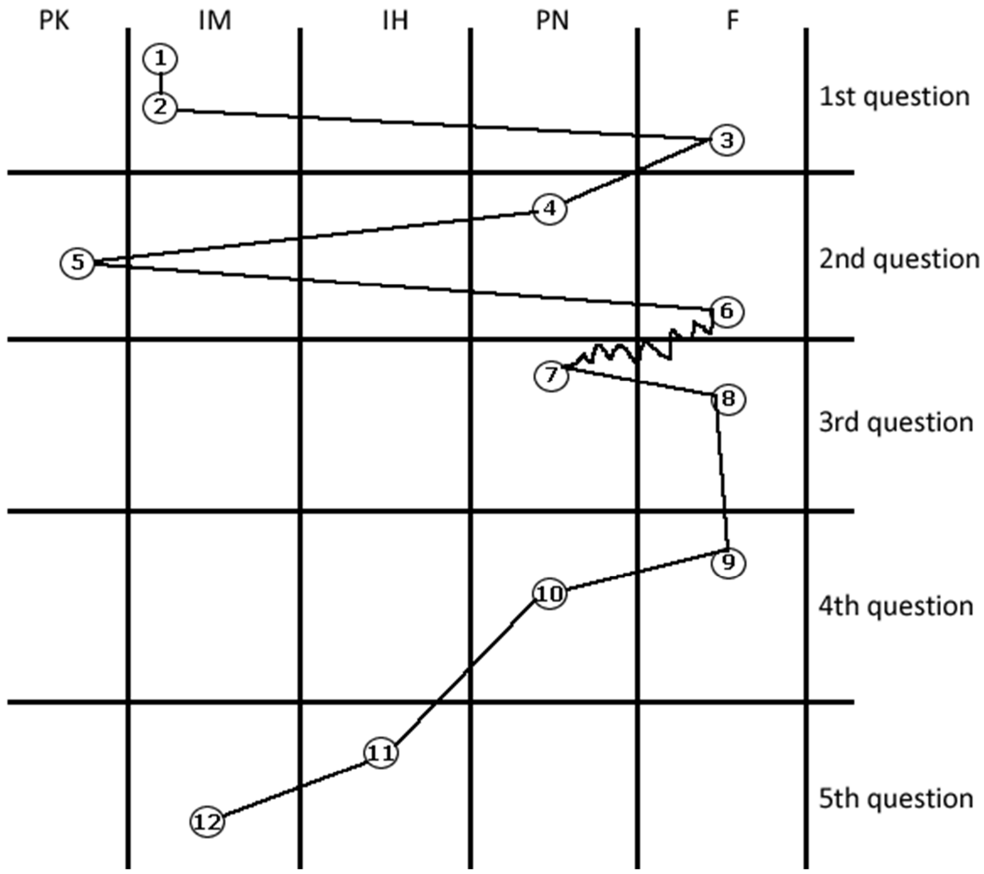


Figure 5.1 Tabulated growth of understanding of Ahmet at the first part of the interview

As you can see from Figure 5.1, it increases the readability of the map if we compare it with the original map layout published by Pirie and Kieren (1989). You can see the growth of Ahmet's understanding depicted as with original layout in Figure 5.3 and 5.4. Mapping style proposed by Towers enables to check details question by question. This is surely gives a handy report to work with; however, when these questions increases, these table like map also increases in length. That makes hard to follow the stream through the observed sessions.

When we check the Figure 5.1 and 5.2 we can see that Ahmet engaged higher level understanding activities at the second part of the interview. Moreover, at the second part he constantly goes inner and then outer levels. However, Towers did not suggest a separate notation for folding back activities; therefore, the current shape of the map does not give any information on whether that activity is folding back or not. Moreover, as pointed out by Borgen (2006), this layout does not represents the nature of the Pirie–Kieren Theory of Understanding which claims embedded eight levels of understanding.

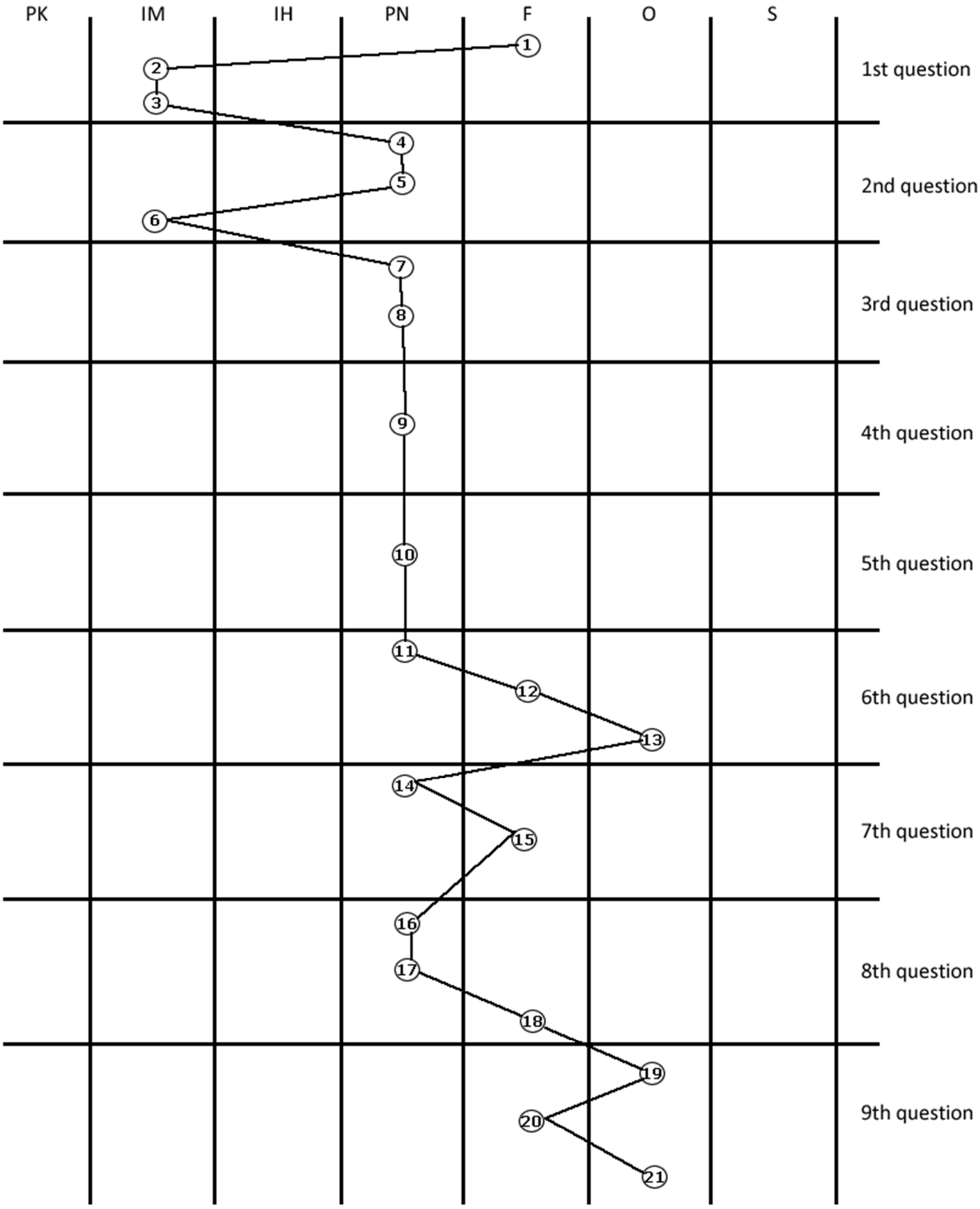


Figure 5.2 Tabulated growth of understanding of Ahmet at the second part of the interview

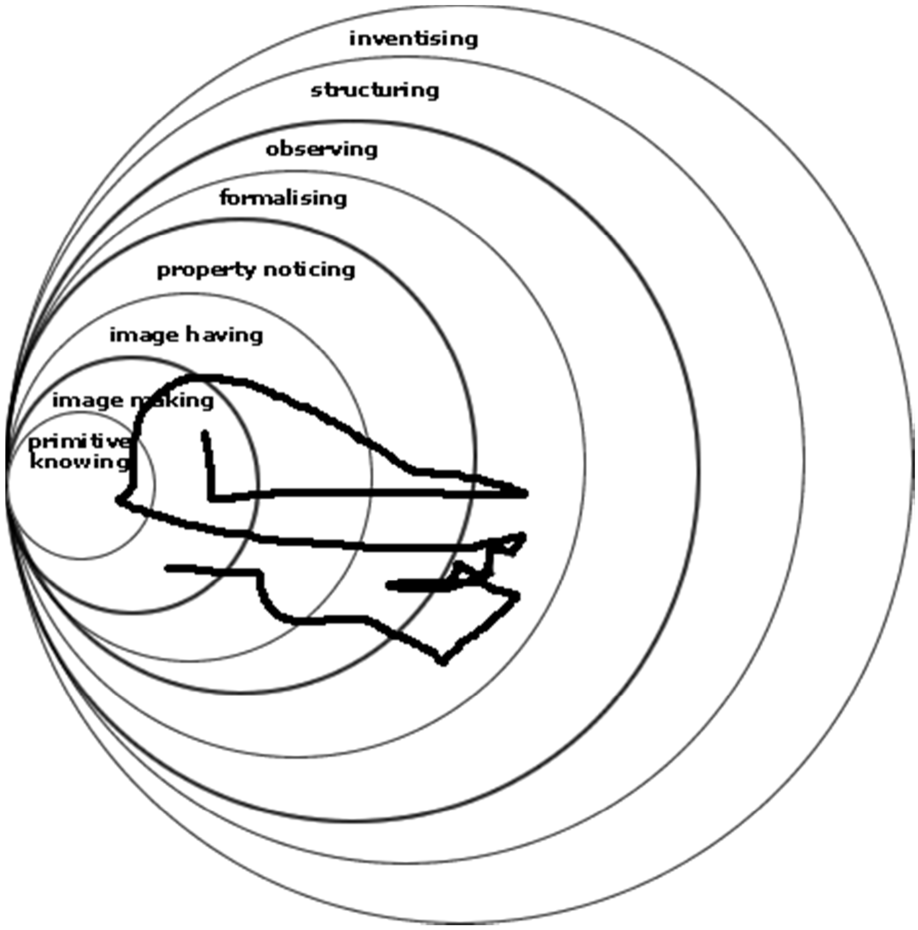


Figure 5.3 Original map of Ahmet's growth of understanding at the first part of the interview

Furthermore, the maps in Figure 5.1 and 5.2 do not offer more details than the maps in Figure 5.3 and 5.4. Nonetheless, it is much more easily interpretable than the mapping technique offered by Pirie and Kieren (1989).

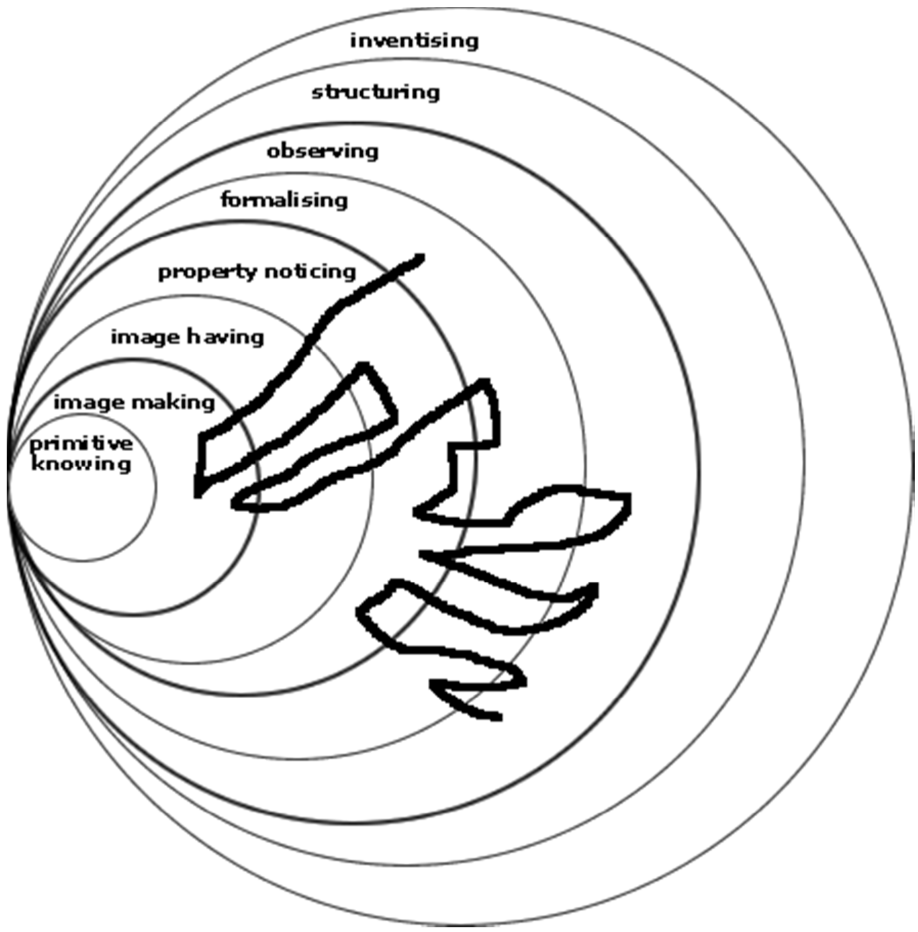


Figure 5.4 Original map of Ahmet's growth of understanding at the second part of the interview

We can say that the maps produced in this study (e.g. Figure 4.99 and 4.100) give more insight about understanding process than the original and previously suggested other modes of maps. Incorporating the representation types to the maps, we transferred the power of communicating with representations to this depiction (Behr et al., 1993; Kilpatrick et al., 2001).

In addition, the results of the current study showed that students can solve the questions even without understanding. Therefore, it is not enough to follow just their responses to say something about their understanding in multiplication. This is also emphasized by Hiebert and Carpenter (1992, p. 89). However, tracking their use of representations, allowed the researcher to track the understanding as well. This issue also pointed out by several other researchers (Lesh et al., 1983; Taber, 2001). Moreover, as pointed out by Lamon (2001) if a student uses a representation different than the teacher used, than we can say that the student understand that topic. Therefore, tracking the students' use of representations with respect to their understanding level provides us valuable information on their understanding process.

5.2 Conclusion

The conclusions made in this section can only be generalized to the similar settings described in Section 3.2.

- The data support that the use of the Pirie–Kieren Theory of Understanding is an effective way to probe students' understandings of multiplication of fractions.

- The data support that there is a relationship between students' preference on the use of different type of representations and attained understanding level. The specific actions related with the use of representations can be seen in Table 5.1.
- Context used in the questions affects students' preference on the use of different type of representations.
- Previous activities those includes the use of different type of representations positively effects maximum understanding level reached by the students.
- Folding back occurs when a student need to collect information from inner level to support his/her understanding at outer levels. Moreover, one can work on different topic (previous related topics) than the one being studied when he/she fold back.

Table 5.1 Understanding levels using representations adapted for the Pirie-Kieren model for growth of mathematical understanding

Level of understanding	Activities & use of representations
Primitive knowing	Can use any representations to recall prior knowledge
Image making / image having	Can connect the representations to the problem being studied
Property noticing	Can connect the representations to mathematical meanings and can compare representation properties
Formalizing	Can describe mathematical meanings with the use of representations to generate patterns and algorithms. Mostly uses symbolic and verbal representations.
Observing	Can connect representations to a theorem. Mostly uses symbolic and verbal representations.

5.3 Implications

The following suggestions can be made based of the findings of the current study.

- Both of the results of interviews and activity sheets showed that the ones who were able to use variety of representations to convey their ideas, reached upper level of understandings much more easily. Therefore, in order to help students to reach higher level of understandings, teachers should use different type of representations in their classrooms more frequently.
- It was seen that the representations used in the questions affects students' preference on the use of representations. Therefore, in order to allow students to use different type of representations at the process of solving a problem, the problem context should be prepared with the use of different type of representations.
- As it was seen from the literature and the results of the study, we can track students' understanding with observing their use of representations. However, as stated in the discussion section, if a student uses a different representation that the teacher used in the class, this can be an evidence for understanding. Therefore, while analyzing students' understandings, we can also check the teacher's use of representations and compare the both.
- The results show that the students need for a deep understanding of multiplication of whole numbers. Therefore, the teacher should connect new ideas to what the students have already learned.
- The teacher should direct students' to use different representations to explain an idea in mathematics.
- The one who want to teach multiplication of the fraction should not teach algorithms before asking real life questions and visualizing it with visual representations.
- Use of "times" can confuse students while they need to solve a question related with multiplication of fractions. Therefore, the teacher should use alternative language and representations such as number lines in order to familiarize the students with the different way of saying "times". This can help overall understanding of multiplication of fractions.

- Since each student in a class is at different level of understanding, multiple representations are important. Appropriate representations are needed to improve understanding.

5.4 Recommendations for Further Researches

The following suggestion can be made for future studies.

- In the current study it was seen that there is a relationship between question type and students' use of representations. This should be further investigated with experimental studies at different grade levels and different topics.
- This study concentrated at the topic of multiplication of fractions. The improvements of the understanding map should be tested at different topics.
- The current study offered a new technique to depict students' growth of understanding. This technique was tested with multiplication of fractions. Since different concepts can require different type of representations, this map should be tested on different topics too.
- In the current study, the understanding of students who are at higher level of achievement was investigated. Understandings of students at different level of achievements should be investigated.

REFERENCES

Akkuş-Çıkla, O. (2004). *The effects of multiple representations-based instruction on seventh grade students' algebra performance, attitude toward mathematics, and representation preference.* (Unpublished PhD Thesis), Middle East Technical University, Ankara.

Aksu, M. (1997). Student performance in dealing with fractions. *The Journal of Educational Research, 90*(6), 375-380.

Allan, P. (2006). Technology use and changes in teaching mathematics. *ACE Papers, 17*.

Azim, D. S. (1995, October 21-24). *Preservice Elementary Teachers' Understanding of Multiplication Involving Fractions.* Paper presented at the the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Columbus, OH, US.

Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and twoths: Constructing representational contexts in teaching fractions. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research.Studies in mathematical thinking and learning* (pp. 157-195). Hillsdale, NJ, England: Lawrence Erlbaum Associates.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. NY: Macmillan Publishing.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational numbers: toward a semantic analysis -- emphasis on the operator construct. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: an integration of research*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., & Post, T. R. (1985). Construct a Sum: A Measure of Children's Understanding of Fraction Size. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(2), 120-131.

Bergeron, J. C., & Herscovics, N. (1981). Problems Related to the Application of a Model of Understanding to Elementary School Mathematics. In T. Post (Ed.), *Proceedings of the Third Annual Conference of PME-NA* (pp. 24-29). Minneapolis: PME.

Bergeron, J. C., & Herscovics, N. (1988). The kindergartners' understanding of discrete sets. In A. Borbas (Ed.), *Proceedings of the Twelfth Annual Meeting of PME* (pp. 162-169). Hungary: PME.

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (2007). *Qualitative research for education: an introduction to theory and methods*. New York: Pearson.

Booker, G. (1996). Constructing mathematical conventions formed by the abstraction and generalization of earlier ideas: The development of initial fraction ideas. In L. P. Steffe & P. Nesher (Eds.), *Theories of Mathematics Learning* (pp. 381-395). Hillsdale, NJ: Earlbaum.

Borgen, K. L. (2006). *From Mathematics Learner to Mathematics Teacher: Preservice Teachers' Growth of Understanding of Teaching and Learning Mathematics.* University of British Columbia.

Borgen, K. L., & Manu, S. S. (2002). What do students really understand? *Journal of Mathematical Behavior, 21*(2), 151-165.

Brar, R. (2010). *The design and study of a learning environment to support growth and change in students' knowledge of fraction multiplication.* (Unpublished PhD Thesis), University of California, Berkeley, California.

Bruner, J. S. (1960). *The Process of Education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Burns, M. (1999). Building Understanding of Multiplication of Fractions.

Burns, M. (2003). *Lessons for multiplying and dividing fractions: grades 5-6 (teaching arithmetic).* California: Math Solutions.

Byers, V., & Herscovics, N. (1977). Understanding school mathematics. *Mathematics Teaching, 81*, 24-27.

Cai, J. (2000a). Mathematical thinking involved in U.S. and Chinese students' solving process-constrained and process-open problems. *Mathematical Thinking and Learning, 2*, 309-340.

Cai, J. (2000b). Understanding and representing the arithmetic averaging algorithm: an analysis and comparison of U.S. and Chinese students' responses. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(6), 839-855.

Cai, J. (2004). Why do U.S. and Chinese students think differently in mathematical problem solving? Impact of early algebra learning and teachers' beliefs. *Journal of Mathematical Behavior, 23*(2), 135-167.

Cai, J., & Hwang, S. (2002). U.S. and Chinese students' generalized and generative thinking in mathematical problem solving and problem posing. *Journal of Mathematical Behavior, 21*, 401-421.

Cave, M. D. (2008). *Impact of Community Service Learning on Middle School African and Latino Americans' Understanding of Mathematics.* (Unpublished PhD Thesis), North Carolina State University, Raleigh, North Carolina, US.

Cavey, L. O. (2002). *Growth in mathematical understanding while learning to teach right triangle trigonometry: patterns of growth and connection building through lesson plan study.* (Unpublished PhD Thesis), North Carolina State University, Raleigh, NC, US.

Clark, J. M., & Paivio, A. (1991). Dual coding theory and education. *Educational Psychology Review, 3*(3), 149-210.

Clements, D. H. (1999). 'Concrete' Manipulatives, Concrete Ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood, 1*(1), 45-60.

Cramer, K., Behr, M. J., Post, T., & Lesh, R. (2009). Rational Number Project: Initial Fraction Ideas Retrieved May 9, 2012, from http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/rnp1-09.html

Cramer, K., & Bezuk, N. (1991). Multiplication of fractions: teaching for understanding. *Arithmetic Teacher, 39*(3), 34-37.

Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2008). The Role of Representations in Fraction Addition and Subtraction. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 490-496.

Davis, C. E. (2004). *Prospective Teachers' Subject Matter Knowledge of Similarity.* (Unpublished PhD Thesis), North Carolina State University, Raleigh, NC, US.

Davis, G. E. (2003). Teaching and classroom experiments dealing with fractions and proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 107-111.

Davis, R. B. (1984). *Learning mathematics: the cognitive science approach to mathematics education*. London: Croom Helm.

Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior, 5*, 281-303.

DeWindt-King, A., & Goldin, G. A. (2003). Children's visual imagery: Aspects of cognitive representation in solving problems with fractions. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 2*(1), 1-42.

Droujkova, M. A. (2004). *Roles of Metaphor in the Growth of Mathematical Understanding.* (Unpublished PhD Thesis), North Carolina State University, Raleigh, NC, US. Retrieved from http://repository.lib.ncsu.edu/ir/handle/1840.16/4260

Duzenli-Gokalp, N., & Sharma, M. D. (2010). A study on addition and subtraction of fractions: The use of Pirie and Kieren model and hands-on activities. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 2*, 5168–5171

Duzenli-Gokalp, N., Bulut, S., & Sharma, M. D. (2010). An assessment of students' understanding of addition and subtraction of fractions. Paper presented at the ECER 2010, Helsinki, Finland.

Ersoy, Y., & Ardahan, H. (2003). İlköğretim okullarında kesirlerin öğretimi-II: tanıya yönelik etkinlikler düzenleme, 20 May 2012

Gagatsis, A., & Elia, I. (2004). The effects of different modes of representation on mathematical problem solving. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *The 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 2* (pp. 447-454). Bergen: PME.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 137-165.

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197-218). New Jersey: Lawrence.

Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 275-285). Reston, Virginia: NCTM.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin & B. Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning*. New Jersey: LEA.

Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23). Reston, Virgina: NTCM.

Graeber, A. O., & Tirosh, D. (1990). Insights Fourth and Fifth Graders Bring to Multiplication and Division with Decimals. *Educational Studies in Mathematics, 21*(6), 565-588

Greeno, J. G. (1978). Understanding and procedural knowledge in mathematics instruction. *Educational Psychologist, 1*(2), 262-283.

Grinevitch, O. A. (2004). *Student understanding of abstract algebra: a theoritical examination*. (Unpublished PhD Thesis), Bowling Green State University.

Grunow, J. E. (2001). *Planning Curriculum in Mathematics*. Madison, Wisconsin: Wisconsin Department of Public Instruction.

Harel, G., & Behr, M. J. (1995). Teachers' solutions for multiplicative problems. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 3*, 31-51.

Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: Murray.

Haser, Ç., & Ubuz, B. (2005). Students' conception of fractions: A study of 5th grade students. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24*, 64-69.

Hatano, G. (1996). A Conception of Knowledge Acquisition and Its Implications for Mathematics Education. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin & B. Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning*. New Jersey: LEA.

Haylock, D., & Cockburn, A. (2008). *Understanding mathematics for young children: A guide for foundation stage and lower primary teachers*. London: Sage Publications.

Hiebert, J. (1984). Children's mathematics learning: The struggle to link form and understanding. *The Elementary School Journal, 84*(5), 497-513.

Hiebert, J., & Behr, M. J. (1988). Introduction: Capturing the major themes. In J. Hiebert & M. J. Behr (Eds.), *Research agenda in mathematics education: Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 1-18). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 65-97). New York: Macmillan Publishing.

Hunter, J. (2006). The numeracy project: Foundations and development. *ACE Papers, 17*.

Işıksal, M. (2006). *A study on pre-service elementary mathematics teachers' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge regarding the multiplication and division of fractions.* (Unpublished PhD Thesis), Middle East Technical University, Ankara.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle-grades* (pp. 53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieren, T. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research. Studies in mathematical thinking and learning* (pp. 49-84). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieren, T. (1999). *Language use in embodied action and interaction in knowing fractions*. Paper presented at the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mexico.

Kieren, T., & Nelson, D. (1978). The operator construct of rational numbers in childhood and adolescence -- a exploratory study. *Alberta Journal of Educational Research, 24*(1), 22-30.

Kieren, T., & Pirie, S. (1991). Folding back: In the growth of mathematical understanding. In F. Furinghetti (Ed.), *Fifteenth Psychology of Mathematics Education Conference* (Vol. 3, pp. 169-176). Assisi: PME.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics* (pp. 146-165). Reston, Virginia: NCTM.

Lamon, S. J. (2011). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers* New York: Routledge.

Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models in applied mathematical problem solving research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts & Processes* (pp. 263-343). NY: Academic Press.

Lobato, J. (2008). On Learning Processes and the National Mathematics Advisory Panel Report. *Educational Researcher, 37*(9), 595-601.

Mack, N. K. (1990). Learning fraction with understanding, building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 16-32.

Mack, N. K. (2000). *Long-Term Effects of Building on Informal Knowledge in a Complex Content Domain: The Case of Multiplication of Fractions*. Paper presented at the the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA, USA.

Mack, N. K. (2001). Building on Informal Knowledge through Instruction in a Complex Content Domain: Partitioning, Units, and Understanding Multiplication of Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(3), 267-295.

Manu, S. S. (2005). *Mathematical understanding and Tongan bilingual students' language switching : is there a relationship?* (Unpublished PhD Thesis), The University of British Columbia, Vancouver, B.C. Canada. Retrieved from https://circle.ubc.ca/handle/2429/16985

Martin, L. C., & LaCroix, L. N. (2008). Images and the Growth of Understanding of Mathematics-for-Working. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 8*(1), 121-139.

Meagher, M. (2005). *The processes of learning in a computer algebra system (CAS) environment for college students learning calculus.* (Unpublished PhD Thesis), The Ohio State University, Ohio, US. Retrieved from http://proquest.umi.com/pqdlink?FMT=7&DID=932380211&RQT=309

Meel, D. E. (1995). *A comparative study of honor students' understandings of central calculus concepts as a result of completing a calculus & mathematica or a traditional calculus curriculum.* (Unpublished PhD Thesis), University of Pittsburgh, Pittsburgh, US.

Meel, D. E. (2003). Models and theories of mathematical understanding: Comparing Pirie and Kieren's model of the growth of mathematical understanding and APOS theory. In A. Selden, E. Dubinsky, G. Harel & F. Hitt (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education* (Vol. 12, pp. 132-181).

Meriam-Webster. (2010). Undertsanding Retrieved October 20, 2010, from http://www.merriam-webster.com/dictionary/understanding

Merriam, S. B. (1998). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Newstead, K., & Murray, H. (1998). *Young students' constructions of fractions*. Stellenbosch, South Africa: PME.

Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: the origins and implications of whole numbers bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27-52.

Olive, J. (1999). From fractions to rational numbers of arithmetic:a reorganization hypothesis. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(4), 279-314.

Orhun, N. (2007). *A Cognitive Gap Between Formal Arithmetic And Visual Representation In Fractional Operations*. Paper presented at the The Mathematics Education into the 21st Century Project, The 9th International Conference on Mathematics Education in a Global Community, The University of North Carolina Charlotte, USA.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods*. London: Sage Publications.

Pirie, S. (1988). Understanding Instrumental, relational, formal, intuitive..., How can we know. *For the Learning of Mathematics, 8*(3), 2-6.

Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics, 9*(3), 7-11.

Pirie, S., & Kieren, T. (1992). Watching Sandy's understanding grow. *Journal of Mathematical Behavior, 11*, 243-257.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics, 26*(2/3), 165-190.

Pirie, S., & Martin, L. C. (2000). The role of collecting in the growth of mathematical understanding. *Mathematics Education Research Journal, 12*(2), 127-146.

Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 405-435.

Schroeder, T. L. (1987). Student's understanding of mathematics: A review and synthesis of some research. In J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the International Conference on the Psychology of Mathematics Education (PME) 11th* (Vol. 3, pp. 332-338). Montreal: PME.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Skemp, R. R. (1979). Goals of Learning and Qualities of Understanding. *Mathematics Teaching, 88*, 44-49.

Skemp, R. R. (1982). Symbolic understanding. *Mathematics Teaching, 99*, 59-61.

Slaten, K. M. (2006). *Effective Teaching and Uses of Instructional Representations in Secondary Geometry: A Comparison of a Novice and an Experienced Mathematics Teacher.* (Unpublished PhD Thesis), North Carolina State University, Raleigh, NC, US. Retrieved from http://repository.lib.ncsu.edu/ir/handle/1840.16/5481

Son, J.-W., & Senk, S. L. (2010). How reform curricula in the USA and Korea present multiplication and division of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 74*(2), 117-142.

Steffe, L. P. (2001). On Mathematical Learning and Understanding: A Constructivist's Perspective

Steffe, L. P. (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 267-307.

Steffe, L. P. (2004). On the Construction of Learning Trajectories of Children: The Case of Commensurate Fractions. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 129-162.

Steiner, F. G., & Stoecklin, M. (1997). Fraction calculation adidactic approach to constructing mathematical networks. *Learning and Instruction, 7*(3), 211-233.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: a paradigm of developmental research*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Taber, S. B. (2001, April 10-14). *Making Connections among Different Representations: The Case of Multiplication of Fractions.* Paper presented at the the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Seattle, WA, US.

Taber, S. B. (2007). Using to teach multiplication of fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12*(5), 244-250.

Tall, D. (1978). The Dynamics of Understanding Mathematics. *Mathematics Teaching, 81*, 50-52.

Thom, J. S., & Pirie, S. E. B. (2006). Looking at the complexity of two young children's understanding of number. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 185-195.

Thompson, P. W. (2003). Radical Constructivism: Reflections and Directions. In L. P.Steffe & P. W.Thompson (Eds.), *Radical Constructivism in Action Building on the Pioneering Work of Ernst von Glasersfeld* (pp. 291-315). New York: Taylor & Francis.

Towers, J. M. (1998). *Teachers' interventions and the growth of students' mathematical understanding.* (Unpublished PhD Thesis), The University of British Columbia, Vancouver, B.C.

Tsay, J.-J. (2005). *Pedagogical content knowledge in prospective elementary teachers: The schema of multiplication* (Unpublished PhD Thesis), University of Northern Colorado, Greeley, Colorado, US.

TTKB. (2009). Öğretim Programları. Retrieved December 9, 2012, from http://ttkb.meb.gov.tr/www/ogretim-programlari/icerik/72

Van de Walle, J. (1990). *Elementary and middle school mathematics*. New York: Longman.

von Glasersfeld, E. (1983). Learning as constructive activity. In J. C. Bergeron & N. Herscovics (Eds.), *Proceedings of the 5th Annual Meeting of the North American Group of Psychology in Mathematics Education* (Vol. 1). Montreal: PME-NA.

Warner, L. B. (2005). *Behaviors that indicate mathematical flexible thought.* (Unpublished PhD Thesis), Rutgers, The State University of New Jersey, New Brunswick, New Jersey, US.

Warner, L. B. (2008). How do students' behaviors relate to the growth of their mathematical ideas? *Journal of Mathematical Behavior*, *27*, 206-227.

Wilson, P. H., & Stein, C. C. (2007, September 7-12). *The Role of Representations in Growth of Understanding in Pattern-Finding Tasks.* Paper presented at the Ninth International Conference Mathematics Education in a Global Community, Charlotte, NC.

APPENDIX A

FRACTION INTERVIEW INSTRUMENT

MÜLAKAT SORULARI

1.BÖLÜM

1) $\frac{4}{5}$ kesrini nasıl elde edebilirsin?

2) Aşağıda 5 kişilik bir kek yapmak için kullanılması gereken malzeme miktarları verilmiştir. Bu keki 15 kişilik hazırlamak isteseydik, kullandığımız malzeme miktarları ne kadar olurdu?

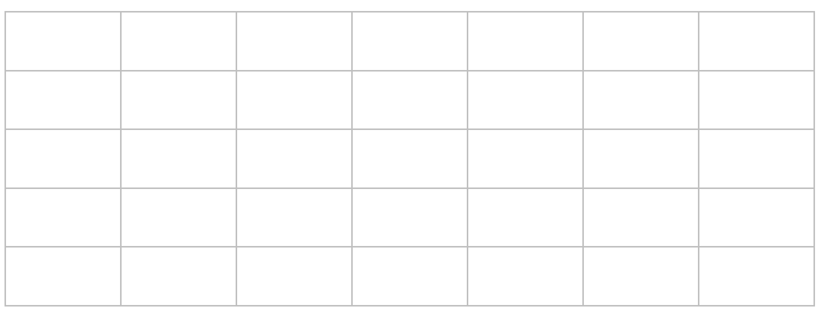
$\frac{1}{2}$ su bardağı sıvı yağ
$\frac{3}{4}$ su bardağı süt
$2\frac{1}{2}$ su bardağı şeker
$2\frac{1}{3}$ su bardağı un
2 yumurta
10 g kabartma tozu

3) Bir öğretmenin 45 tane kitabı ve bir doktorun da 45 tane kitabı vardır. Öğretmenin kitaplarının $\frac{4}{5}$ ü ve doktorun kitaplarının $\frac{2}{3}$ si roman ise öğretmen ve doktorun roman sayılarını ayrı ayrı bulunuz.

4) Bir bakkalda $13\frac{1}{2}$ yumurta kolisi vardır. Bir kolide 12 yumurta olduğuna göre bu bakkalda toplam kaç yumurta vardır?

5) Aşağıdaki şekil bir bütünü göstermektedir. Aynı bütünü düşünerek aşağıda verilen işlemleri dikdörtgensel kâğıt üzerinde modelleyerek yapınız.

$4 \times \frac{1}{6}$



2. BÖLÜM

1) $\frac{4}{5}$'in $\frac{2}{3}$ ü kaçtır?

2) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ işleminin sonucu ne anlama gelir? İşlemi aşağıda modelleyerek gösteriniz.

$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$ işleminin sonucu ne anlama gelir? İşlemi aşağıda modelleyerek gösteriniz.
Bu iki işlemin sonucunu karşılaştırabilir misin? Bu konuda ne söylersin?

3) $2\frac{1}{9} \times 3\frac{7}{8}$ işleminin sonucunu tahmin ediniz.

4) $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$ işleminin sonucu $\frac{5}{8}$ e eşit midir?

5) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{3}{4}$ işlemini yapınız.

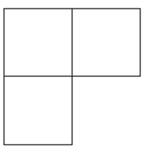
6) $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$, $\frac{7}{6} \times \frac{5}{2}$ yandaki çarpma işlemlerini yapınız. Çarpımı çarpanların her birinden büyük mü yoksa küçük mü? Buna göre kesirlerle çarpma işleminin sonucu hakkında ne söyleyebilirsin?

7) $\frac{4}{5}$ saatin $\frac{2}{3}$ ü kaç dakikadır?

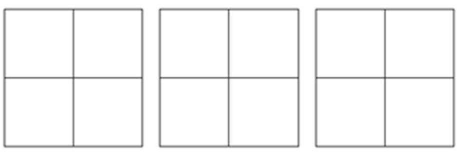
8) Ayşe Hanım pazardan elma almış ve elindeki sepete koymuştur. Sepetteki elmaların $\frac{1}{4}$ i 3 elma olduğuna göre $\frac{2}{3} \times \frac{4}{6}$ ve $\frac{5}{12} \times \frac{3}{4}$ işlemlerinde kaç tane elma vardır? Cevabınızı açıklayınız. Gerekirse şekil çiziniz.

 = sepetteki elmaların $\frac{1}{4}$ i

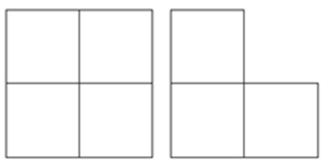
9) Aşağıdaki şekil bir bütünün $\frac{1}{3}$ ini göstermektedir. Aynı bütünü düşünerek aşağıda modellenen kesirleri bulunuz.



a)



b)



APPENDIX B

ACTIVITY SHEET

KESİRLERLE ÇARPMA İŞLEMİ

1)

Müzik parçalarında dik çizgi ile ayrılan bölümlerdeki (dolap) notaların vuruşları toplamı eşittir. Yukarıdaki parçada gerekli hesaplamaları yaparak bu bilginin doğru olup olmadığını kontrol ediniz.

Sadece bir dolaptaki notaların vuruş sayılarını kullanarak tüm parçanın toplam ölçüsünü nasıl bulabiliriz? Hangi işlemleri yaparız? Tartışalım. Yukarıdaki parça için bu işlemi yapalım.

$2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ vuruşluk

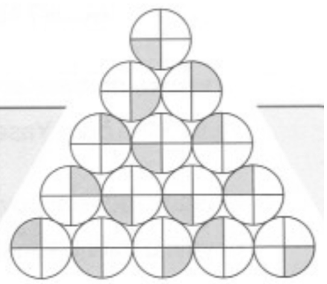
8 aralık olduğuna göre:

$$\left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\right) = \frac{40}{2}$$

Bu işlemi daha kısa yoldan yapmak için nasıl bir işlem yapmalıyız?

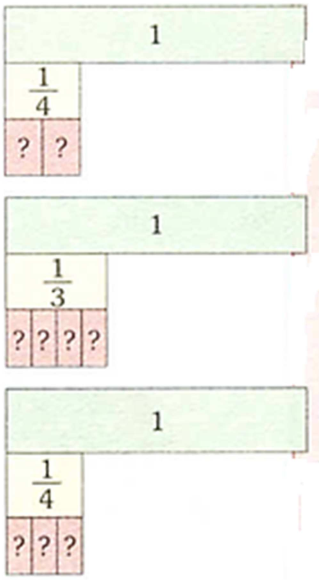
2)

Yandaki şekilde, boyalı kısımların belirttiği kesri en kısa yoldan bulabilmek için hangi yöntemi kullanırsınız? Açıklayınız.



3) Etkinlik: Kesir takımı kullanarak çarpma işlemi yapma

Araç ve gereç: Kesir takımı



a) $\frac{1}{4}$ lik kesir parçasının $\frac{1}{2}$ ini nasıl bulabiliriz?

b) Bu işlemi yapmak için 1 lik ve $\frac{1}{4}$ lik parçaları şekildeki gibi alt alta yerleştirelim. Diğer parçaları deneyerek hangisinin $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{2}$ i kadarı olduğunu bulunuz.

c) Yaptığınız işlemi matematiksel olarak nasıl ifade edebilirsiniz?

d) $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{4}$ ini ve $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{3}$ ini aynı yöntem ile bulup, sonuçları karşılaştırınız.

4) Etkinlik: Kâğıt katlama ile çarpma işlemi yapma
Araç ve gereç: Kâğıt

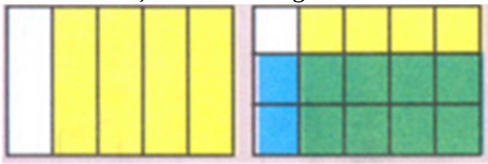
a) Kâğıt ince bir şerit haline getirilir.
b) $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{2}$ ini bulmak için önce kağıdı 3 eş parçaya katlayınız.
c) 3 parçaya katlanmış kâğıt tam ortadan ikiye katlayınız.
d) Katlanmış kâğıt açılarak en küçük bölümü kesir olarak ifade ediniz. Oluşan şekli çiziniz.

e) İşlemi matematiksel olarak ifade ediniz.

5) Etkinlik: Şeffaf kesir kartları ile çarpma işlemi yapma
Araç ve gereç: Şeffaf kesir kartları

a) $\frac{4}{5}$ lük şeffaf kesir kartının üzerine $\frac{2}{3}$ lik şeffaf kesir kartını yerleştiriniz. Oluşan şekil kaç eş parçadır?

b) İki rengin çakıştığı yer tüm şeklin kaçta kaçıdır? Verilen şekil üzerinde gösteriniz.



c) $\frac{4}{5}$ ün $\frac{2}{3}$ si kaçtır? İşlemi matematiksel olarak ifade ediniz.

6) Ayşe üç arkadaşı ile doğum gününü kutladı. Ayşe pastayı önce ikiye böldü, yarısını anne, baba ve kardeşine ayırdı. Diğer yarısını da üç arkadaşı ile paylaştı.

a) Ayşe'nin arkadaşlarından biri pastanın ne kadarını yedi?

b) Ayşe'nin annesi pastanın ne kadarını yedi?

7) Bir çocuk 12 fındığın $\frac{3}{4}$'ünü yemiştir. Çocuk kaç tane fındık yemiştir?

8) Aşağıdaki çarpma işlemlerini yapınız ve çarpımları en sade biçimde yazınız.

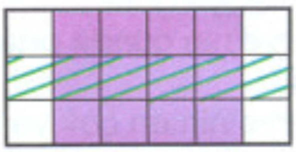
a) $12 \times \frac{5}{6}$

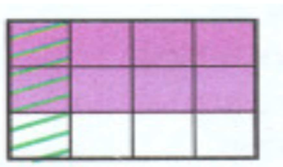
c) $1\frac{3}{5} \times \frac{5}{9}$

b) $\frac{5}{8} \times \frac{6}{15}$

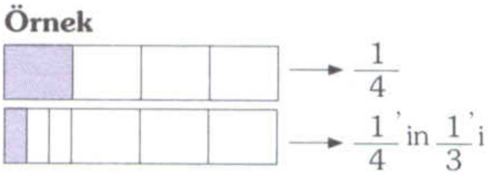
d) $2\frac{1}{4} \times 3\frac{2}{5}$

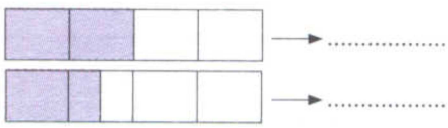
9) Aşağıdaki modellerde gösterilen çarpma işlemlerini ve sonuçlarını yazınız.





10) Aşağıdaki örneğe inceleyiniz. Diğer soruları da örneğe uygun olarak tamamlayınız ve sonuçlarını yazınız.





11) Aşağıdaki ifadelerde verilen işlemleri yapınız. Doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.

☐ $\frac{1}{2}$x$\frac{1}{3}$ işleminin sonucu $\frac{1}{6}$'dır.

☐ $\frac{5}{8}$ x $\frac{1}{3}$ kesirinin 2 katı $\frac{10}{16}$'dır.

☐ $\frac{4}{3}$x1 $\frac{1}{6}$ işleminin sonucu $\frac{44}{18}$, dir.

☐ $\frac{6}{13}$ x $\frac{13}{2}$ = a ise a = 1'dir.

12) 24 kalemin $\frac{1}{6}$ ini Kerem, $\frac{1}{4}$ ini Aslı, geriye kalanını da Banu almıştır. Banu kaç kalem almıştır?

13) Mehmet, İsmail ve Mustafa ortak olarak aldıkları arsayı müteahhide vermek istiyorlar. Arsanın $\frac{1}{3}$ i Mehmet'in, $\frac{1}{6}$ i İsmail'in, $\frac{1}{2}$ i Mustafa'nındır. Arsa sahipleri müteahhidle anlaştılar. Buna göre arsanın yarısı müteahhide verilecektir. Daireler ise ortaklar arasında paylaşılacaktır. Arsaya her katında 3 daire olan 8 katlı bir bina yapılacaktır.

a) Ortakların paylarını gösteren bir şema çiziniz.

b) Bina yapıldıktan sonra arsa sahiplerinin her birinin kaç dairesi olacağını bulunuz.

14) 240 kapasiteli yolcu uçağı, İstanbul aktarmalı olarak Ankara'dan Frankfurt'a gidecektir. Ankara'da uçaktaki koltukların $\frac{2}{3}$ si satıldı. İstanbul'da ise kalan koltukların $\frac{1}{2}$ i satıldı. Buna göre;

a) Problemdeki verileri şema çizerek gösteriniz.

b) Uçakta ne kadar boş yer kaldığını bulunuz.

APPENDIX C

STUDENT JOURNAL

MATEMATİK GÜNLÜĞÜM

Kesirlerle çarpma işlemini yapmayı öğrendiniz. Bu konuyla ilgili aşağıda verilen soruları açıklayarak cevaplayınız.

1) Kesirlerde çarpma işlemi sana ne ifade ediyor?

2) Günlük hayatta kesirlerle çarpma işlemi nerelerde karşımıza çıkar?

3) Kesirlerle çarpma konusunun işlendiği gün, hastalanıp okula gelemeyen bir arkadaşın bu konuyu anlamak için senden yardım istiyor. Sen de bu konuda arkadaşına yardımcı olmaya karar veriyorsun. Bu arkadaşına kesirlerde çarpma işlemini nasıl anlatırsın? Örnek verip, modelleyerek gösterebilir misin?

4) Aynı arkadaşına tam sayılı kesirlerle çarpma işlemini nasıl anlatırsın? Bu konuda söyleyeceğin en önemli şey ne olur? Örnek vererek açıklayıp, gerekiyorsa şekil çizebilirsin.

5) Aynı arkadaşına bir bütünün belirtilen kesir kadarını bulmayı nasıl anlatırsın? Örnek verip, modelleyerek gösterebilir misin?

6) Kesirlerle çarpma işlemi ve toplama işlemi arasındaki ilişkiyi nasıl açıklarsın?

7) Kesirlerle çarpma işleminin sonucunu strateji kullanarak nasıl tahmin edersin? Örnek vererek açıklayabilir misin?

8) Kesirlerle çarpma işlemini kullandığın bir problem yazıp, çözebilir misin?

APPENDIX D

STUDENTS’ SELF-EVALUATION FORM

Öz Değerlendirme

1) Kesirlerle çarpma işlemiyle ilgili neleri biliyorum?

2) Kesirlerle çarpma işleminde neleri kolayca öğrendim?

3) Kesirlerle çarpma işleminde neleri öğrenirken ve yaparken zorlandım? Bu zorlukları nasıl aştım?

4) Kesirlerle çarpma işleminde neleri severek yaptım ve öğrendim?

5) Kesirlerle çarpma işleminde başka neleri de yapabilmeyi isterdim?

Öz Değerlendirme Formu
Bu form kendinizi değerlendirmek amacıyla hazırlanmıştır. Her bir ifade için sizi en iyi tanımlayan seçeneği (X) ile işaretleyiniz.

Kesirlerle Çarpma İşlemi	**Evet**	**Emin Değilim**	**Hayır**
Bir bütünün belirtilen kesir kadarını bulabiliyorum.			
Bir kesrin belirtilen bir kesir kadarını bulabiliyorum.			
Kesirlerle çarpma işleminin anlamını biliyorum.			
Kesirlerle çarpma işlemini yapabiliyorum.			
Tam sayılı kesirlerle çarpma işlemi yapabiliyorum.			
Bir bütünün belirtilen kesir kadarını modelleyerek gösterebiliyorum.			
İki kesrin çarpımını modelleyerek gösterebiliyorum.			
Kesirlerle çarpma işlemi ve toplama işlemi arasındaki ilişkiyi açıklayabiliyorum.			
Kesirlerle çarpma işleminin sonucunu strateji kullanarak tahmin edebiliyorum.			
Kesirlerle çarpma işleminin değişme özelliğini açıklayabiliyorum.			
Kesirlerde çarpma işlemi gerektiren problemler çözüp, kurabiliyorum.			

APPENDIX E

TRANSCRIPT OF INTERVIEW WITH AHMET

Ö: (soruyu okuyor)Dört bölü beş kesri hani bir bütünü yani bu şekilde de tanımlanabilir. Bir bütünün şöyle bir bütün diyelim biz buna. Bir, iki, üç, dört ve beş. Bunların her biri eşit. Bir, iki, üç, dört, beş parçaya bölüp dördünü almak demektir. Ee şimdi bunu eğer şekil olarak gösterecek olursak, şu her iki taneyi bir olarak kabul ederim. Çünkü … Bir olarak kabul edersek şu bir bölü beştir. İki bölü beş, üç bölü beş ve dört bölü… dört bölü beştir. Yani eğer şuraları saymazsak bir, iki, üç dört, beş. Bir bütünü beş parçaya bölünmüş bunun dördü alınmış. Hani elde edilmiş. Ayrıca hani dört bölü beş sudur da.. Hemen yine bu sefer şunlarla birlikte gösterelim. Şöyle.. Her bir nohuta bir bölü beş dersek ne oluyor. Bir bölü beş, iki bölü beş, üç bölü beş ve dört bölü beş. Hani yani bunu işlem olarak da bir bölü beş artı bir bölü beş artı bir bölü beş artı bir bölü beş eşittir, dört bölü beş ya da bunun daha kısa yoluyla parantez içinde bir bölü beş çarpı dört. Onu da paydasına ekleyelim. Bu da eşittir yine dört bölü beştir. Yani dört bölü beş kesrini bu şekilde de şey yapabiliriz. Bir bütünü beşe bölüp dört kısmını almak. Beş eşit parçaya bölüp..(materyal kullandı)
A:Hım. Peki orda şey gene şu çarpmadan ne anladın? Bir bölü beşle dört bölü biri çarptın ya?
Ö:Dört bölü bir zaten dörde eşittir. Hani şurda da gösterdiğim gibi yine dört tane bir bölü beş kesrinin yani toplanmasıdır. Bir bölü beş artı bir bölü beş artı bir bölü beş..
A:Dört tane bir böle beş.
Ö:Evet.
A:Peki devam edelim diğer sorudan.
Ö: (soruyu okuyor)Burda beş kişilik, bunu on beş kişilik yapmak için üç katı olacak. O yüzden şimdi başta sıvı yağı ne kadar kullanacağımızı bir bölü ikiyi üçle çarparak görelim. Bir bölü iki çarpı ee üç diyelim. Her zaman bir doğal kesrin ee şey doğal sayının ki paydası birdir. Çarpma işlemini yapraken sadeleşecek sayılarımızı olmadığı için sadeleştirmiyoruz. Üç bölü iki oluyor. Bu da eşittir, bir tam bir bölü iki ee şey sıvı yağ, su bardağı sıvı yağ. Gelelim ikinci kısma şimdi üç bölü dört su bardağı süt bunu bizim üçle çarpmamız gerek yine bulmamız için çünkü üç katını yapcaz. Ee üç bölü dört çarpı üç bölü bir o da eşittir. Şimdi bakcağımızda yine sadeleşecek bir şey olmadığı için böyle yazıyoruz. Üç kere üç dokuz, şöyle dokuz bölü dört bu da eşittir iki tam bir bölü dörttür. İki tam bir bölü dörtte su bardağı süt. Gelelim ikinci soruya iki tam bir bölü iki su bardağı şekeri başta hani biz bunu sağlama almak için zaten çarpma işleminde bu gerekiyor. İki tam bir bölü iki eşittir, beş bölü ikidir. Onu da yine üçle çarpalım. On beş bölü iki. O da eşittir, yedi tam bir bölü iki ee ney, su bardağı şeker. Hemen una bakalım. İki tam bir bölü üç ee iki tam bir bölü üç eşittir, yedi bölü üçtür. O da eşittir bir dakika pardon eşittir diyorum. Çarpı üç bölü bir diyelim. Üç kere yedi yirmi bir, üç bu da eşittir bize yedi sayısını verir. Yedi su bardağı, bardağı un. İki çarpı zaten iki çarpı üç o da eşittir, ee altıdır. Altı yumurta. Ve on gram çarpı ee şey üç eşittir, otuz gram da kabartma tozu.(işlem yaptı)
A:Peki bu çarpma sana ne ifade ediyor? Şu mesela bir bölü iki çarpı üç.
Ö:Üç. Şimdi üç tane bir bölü iki. Yani üç tane bir bölü ikinin toplanmışı. Yani şu şekilde bir bölü iki artı bir bölü iki artı bir bölü iki bu da eşittir zaten bir tam bir bölü iki ya da bunlar eşittir bir bölü çarpı üç bölü birdir.
A:Hım. Neden böyle?
Ö:Çünkü hani bizim nolmalde de normal çarpma işlemimizde de iki çarpı üç dediğimizde iki kere üç yani iki tane üç burda da üç tane bir bölü iki o yüzden.
A:Hım. Yani bu bunun kısa yolu mu?
Ö:Evet öyle oluyor.
A:Peki orda çarparken ee üç bölü bir dedin ya hepsinin paydasına bir veririz dedin.
Ö:Hıhı evet.
A:Niye öyle yaptın?
Ö:Çünkü üçü hangi sayıya bölersem bir sayıyı bir kesiri ee nasıl desem.. Şimdi üç doğal sayısını bire böldüğümüzde üç çıkıyor. Üç hani biz hani bizim kesri bulmamız için payı paydaya bölüyorduk ya.
A:Hımm.
Ö:Bu yüzden üçü bire bölünce üç çıktığı için hani o yüzden bütün doğal sayıların paydaları birdir.

A:Peki o çarpma işlemini nasıl yapıyorsun?
Ö:Bu çarpma işlemini hani buraya bir ekledikten sonra zaten hani buraya yazıyoruz üç bölü bir. Ee yukardakilerle payları çarpıyoruz üç, paydaları çarpıyoruz iki. Bu da üç bölü ikiyi veriyor bize.
A:Neden böyle oluyor peki çarpmada paylar paya paydalar paydaya yazılır?
Ö:Ee paylar paya paydalar… Ee nedeni çünkü ımm biz zaten toplamada da payları payla topluyorduk, şeyleri onla topluyorduk. Hani her şey elmayla armut nasıl toplanmazsa biz paydaları toplamıyoruz o yüzden.
A:Hıhı. Burda payda neden eşitlemiyoruz? Paydaları neden eşitlemiyoruz?
Ö:Çünkü aslında bu kesrin kesrini bulmadır. Hani kesrin kesrini bulmak için de payda eşitlemeye gerek yoktur. Çünkü bir kesrin içinde bir şeyi ayırıyoruz. Yani bir şeyi içinde ne kadar bir şey olduğunu arıyoruz. O yüzden eşitlersek zaten sonuç yanlış çıkar.
A:Hım. Peki orda ımm üç bölü iki su bardağı sıvı yağ buldun ya. Ne anlıyorsun bundan?
Ö:Hıhı. Üç bölü iki nerde yazıyor du?
A:Burda.
Ö:Heh. Üç bölü iki yani bir daha doğrusu onu hani tam olarak bir bölü bir tam bir bölü iki. Dierk ben size şunu açıklayayım. Hani bir su bardağı var. Yanında birde bir su bardağı daha var ama o su bardağının tamamı değil yarısı yarısı, hani bir tam su bardağı ile bir yarım su bardağı ee şey ee sıvı yağdan bahsediyor.
A:Peki şurda ee iki tam bir bölü ikiyle üçü çarparken.
Ö:Hıhı.
A:Beş bölü iki dedin. Sonra üçle çarptın. Niye böyle yaptın?
Ö:Bu bu beş bölü iki dememin nedeni; hani iki tam şey iki tam bir bölü ikinin hani beş bölü ikinin tam sayılı kesri olması. Hani bu buna eşittir zaten. Sadece tam sayılı kesir halidir. O yüzden öyle yaptım. Kesirlerde bu şekilde hani yapılmıyor.
A:Hım.
Ö:Ee şeye çevirerek çarpıyoruz.
A:İki tam bir bölü ikiyle üçü çarpamaz mıydık normalde? Beş bölü iki çarpı üç zaman yazmadan?
Ö:Ee hayır çarpamazdık.
A:Hım. Peki o çarpmadan ne anlıyorsun? İki tam bir bölü iki çarpı üçten?
Ö:Hı? Yani iki tam bir bölü yine iki tam bir bölü iki artı iki tam bir bölü iki artı iki tam bir bölü iki.
A:Hımm. Tamam. Peki burdan yani çarpma ve toplama arasındaki ilişki hakkında o zaman ne söyleyebilirsin?
Ö:Çarpma aslında eşittir ardışık toplamadır. Hani mesela ardışık toplama hani sürekli aynı sayıyla toplama zaten burdan hani görüyoruz bir bölü iki çarpı üç = bir bölü iki artı bir bölü iki artı bir bölü iki. Zaten bir tam bir bölü ikiye eşittir. Hani bu bunun ardışığıdır. Hani bir sürü bir bölü ikiyi böyle uzun uzun yazmaktansa direk üçle çarpıyoruz sonuç çıkıyor.
A:Hımm. Peki ee şurda mesela eee on beş bölü iki su bardağı şeker buldun sonucu.
Ö:Hıhı.
A: Burdan ne anlıyorsun?
Ö:On beş bölü iki o da eşittir, zaten yedi tam bir bölü iki. Bir bölü ikiyi biz hani normalde yarım olarak nitelendiririz. Yedi tane tam su bardağı varmış. Bir de yarım su bardağı şeker varmış. Yani yedi buçuk su bardağı şeker.
A:Hım. Peki iki tam bir bölü üç su bardağı undan ne anlıyorsun?
Ö:İki tam bir bölü üç su bardağı un. İki tane tam su bardağı un var. Bi de üstüne üstlük yine yanında bir bardak var ama o bardağın hani tahminen üçe bölünmüş. Üç kısımdan biri doldurulmuş unla.
A:Onu çizebilir misin o bardağı şuraya mesela?
Ö:Hıhı. Şuraya.. O iki bardağı da çizeyim mi?
A:Hıhı. İki tam bir bölü üçü çizebilir misin su bardağı olarak.
Ö:Hıhı. (şekil çiziyor)Şöyle bu bizim iki tane tamımız. İçini hemen karalayalım. Bu iki tane tamımız. Ötekine geldiğimizde hani şu bir bölü üçlük kısma. Şöyle tahminen bunların hepsi eşittir. Hani şeydir. Burayı şu kısmını alınmış. Geriye kalan ama doldurulmamış. O manada.
A:Hıhı. Ee peki şurda mesela iki çarpı üç altı diye yumurta buldun ya.
Ö:Evet. Evet.
A:Orda mesela onların paydasına bir vermeden çarptın niye öyle yaptın?

Ö:Çünkü ikisi de zaten tam sayıdır. Hani versekte sonuç yine değişmeyecektir. Yani o şekilde de yaptığımızda hani sonuç değişmeyecek. Altı bölü bir olcak. Altı bölü bir de zaten altıya eşittir. Hani bunların ikisi de doğal sayı olduğu için böyle yaptık. Eğer kesir olsaydı hani yine öyle bir verecektik.
A:Tamam. Diğer soruyla devam edelim.
Ö:Hıhı. (soruyu okuyor)Şimdi biz burda başta öğretmenin kitaplarının roman sayılarını bulalım. Sonra ee bir dakika ee sonra doktorun bulalım. Bir dakika, bir saniye heh tamam ikisinin de kırk beş kitabı olduğuna göre hani burda böyle dediğine göre toplam elde doksan kitap var. Hani kırk beş, kırk beş bölünmüş. Neyse öğretmenin kitaplarının beşte dördü kırk beşin beşte dördü demek; krık beş çarpı beş bölü dört demek. Çarpı beş bölü dört bu da kırk beşin söylediğim pardon şurası dört şöyle olacaktı. Dört bölü beş zaten burası. Heh bu böyledir. Bu işlemi yapmadan önce bunu direk kısa bir yol yapalım. Kırk beşi beşe bölelim ve bunları sadeleştirelim. Kırk beşi beşe bölersek dokuz, beşi beşe bölersek bir. Ee şimdi hemen buraya işlemimizi yapalım. Dokuz kere dört otuz altı, zaten burası bir olduğu için bu da eşittir, otuz altı bölü bir de zaten eşittir, otuz altı. Ee bu öğretmenin ee şey romanları. Doktorun romanlarına baktığımızda ise; kırk beş bölü bir çarpı iki bölü üç. Şimdi hemen bunu da bir yapalım. Ee kırk beşi üçe böldüğümüzde on beş çıkar. Hemen kırk beşi üçe bölelim on beş, bunu da üçe böldüğümüzde bir on beş kere iki otuz bölü bir olur bir kere birden. Ee bu da eşittir, otuzdur. Doktorun kitaplarıdır. Bu da öğretmenin romanlarıdır. Daha doğrusu kitapları demeyeyim ee şey doktorun romanları, öğretmenin romanları.
A:Hım. Peki burda ımm kırk beş kitabın beşte dördünü çarpma yaparak buldun.
Ö:Evet.
A:Neden çarpma yaptın?
Ö:Ee çünkü bir dakika.. Ee kırk beşin beşte dördü çünkü kırk beşin içinde ne kadar dört bölü beş olduğunu bulmaya çalıştık.
A:Hım. Eee peki bu mesela şu çarpmadan ne anlıyorsun? Kırk beş çarpı iki bölü üçten?
Ö:İşte kırk beş tane iki bölü üçün üst üste toplanmasıdır. Hani iki bölü üç artı iki bölü üç artı iki bölü bundan böyle kırk beş tane iki bölü üç aralarına artı koyarak toplanmasıdır. Hani bu kırk beş çarpı..
A:He kırk beş tane iki bölü üç.
Ö:Evet.
A:Oda otuz kitaptır diyorsun. Hımm.
Ö:Evet.
A:Ee peki mesela bu kırk beş kitabın dört bölü beşini orda modelleyebilir misin?
Ö:Ee kaçın kırk beş kitabın..
A:Dört bölü beşini.
Ö:Dört bölü beşini.. hemen modelleyelim. Şimdi buna biz tamamı kırk beş diyoruz. Altına da zaten yazalım kırk beş diye. Dört bölü beşini modellerken bunu beş eşit parçaya bölcez. Çok eşit olmadı bir tane daha olucak. Aslında bunların hepsi eşit. Yani ben şuan böylece yaptım. Bunun dört bölü hemen şey yapalım. Boyayalım. Ee bu şey dört bölü beştir. Hani şimdi kırk beşi şey de yapabiliriz. Beş bölüp dörtle de çarpabilirdik.
A:Hımm.
Ö:Hani kırk beşi beşe bölüp dörtle de çarpabilirdik. Ama aslında yaptığımız işlem yine öyle. Kırk beş çarpı dört bölü beş; kırk beş yine beşe böldük dörtle çarpmış gibi olduk. Yine aynı şey oldu sadeleştirince de. Ya da dörtle çarpıp beşe de bölebilirdik. Aynı şeyi yapmış olucaz yine. Hani hiç sadeleştirmesek bile kırk beş çarpı dört bölü beş yapacaktık sonucu bulmak için. O yüzden hani yine aynı işlem modellemesi de budur.
A:Peki onun otuz altı kitap olduğunu o modellemeden nasıl görücez?
Ö:Hemen şöyle şimdi kırk beş bölcez. Bir tanesinin ne kadar olduğunu bulucaz. Kırk beşi o yüzden beşe bölücez. O da bize kırk beş şey vercek; dokuzu vercek. Dokuz, dokuz, dokuz, dokuz ve dokuz. Bunun biz bu kadarını almıştık. Bu kadarı romansa dört tane dokuz, dört kere dokuz yani o da eşittir otuz altıdır.
A:Hımm. Peki devam edelim diğer sorudan.
Ö:(soruyu okuyor)Şimdi direk bu işlemi on üç çarpı on iki diyelim çünkü hani on üç tane kolimiz var. Böyle on üç tane böyle koli gidiyor. Bunların her birinde on iki tane varsa başta ne kadar olcağını bulcaz bu kesir kısmı hariç. Hemen çarpalım on üç kere on iki yirmi altı ee bir üç bunu da toplarsak zaten yüz elli altı. Yüz elli altı artı şimdi bir de yarım koli vardı bir bölü iki. On ikiyi şey on ikinin de yarısı altı olduğuna göre çünkü bir bölü iki altı olduğuna göre yüz elli altı artı altı o da eşittir, yüz altmış iki. Yüz altmış iki koli ee yumurta vardır bakkalda.

A:Hımm. Peki bunu başka türlü yapabilir miydin?
Ö:Bunu başka türlü yapabilir miydim. Hani şey yapacağım yine deneyeceğim. Ee yirmi altı, yirmi yedi bölü iki çarpı on iki bölü birden deneyelim bunu. Şimdi direk başta bir altı olsun burası bu şekilde bunları bi sadeleştirelim. Altı kere yedi bir dakika altı kere yedi bir saniye kafam durdu. Heh şöyle iki dört altı kere iki on iki. Dört daha on altı ee burası da zaten bir olduğu için yüz altmış iki bölü evet yine aynı sonucu elde ettik. Hani şey bu da eşittir yüz altmış ikidir. Sonuçla aynı.
A:Hım.
Ö:Çarpma işlemi de yaparak bulabilirdik.
A:Peki o çarpma işleminde ne anlıyorsun? Ne yaptık şimdi o çarpma işleminde?
Ö:Bu çarpma işleminde işte yirmi yedi bölü iki çarpı on iki. Yani on ikiyi yirmi yedi bölü iki artı yirmi yedi bölü iki artı ondan on iki tane o şekilde gidiyor.
A:He on iki tane. Neden peki çarpma yaptın orda?
Ö:Çünkü hani burda da zaten çarpma yapmıştık. Bir tanesinin içinde on iki tane varsa on üç tanesinin içinde kaç tane vardır diye bir şey de oluşuyor zaten. Onu yapmak içinde zaten çarpma kullanmamız gerekiyordu. Burda da aynı işlemi yaptık.
A:Peki orda ımm yirmi yedi bölü ikiyi nasıl buldun?
Ö:Burda yirmi yedi bölü ikiyi nasıl buldum. Heh şu on üçle ikiyi çaptım. On üçle ikiyi çarptım üstüne bir ekledim yirmi yedi bölü iki oldu. Bu da zaten bunun şey halidir. Imm nasıl bileşik kesir birleşik kesre çevrilmiş halidir.
A:Hımm. Peki bileşik kesir ne demek?
Ö:Bileşik kesir, payı paydasına eşit ya da payı paydasından büyük olan kesirlerdir.
A:Hımm. Tam sayılı kesir peki ne demek?
Ö: Tam sayılı kesir, ee şey hani bu bir tane bütünü kullanıp onun yanında bir veya daha fazla bütünü kullanıp, onun yanında başka bir bütün daha kullanılan kesirlerdir.
A:Hımm. Peki devam edelim diğer sorudan.
Ö:Hıhı.
A:He pardon on üç tam bir bölü iki yumurta kolisi var diyor ya.
Ö:Hıhı.
A:Ne anlıyorsun bu on üç tam bir bölü iki yumurta kolisinden?
Ö:On üç tane yumurta kolisi yani tamamı varmış birde bir yumurta kolisinin yarısı varmış. Bir bölü iki çünkü yarım demektir. Ya da işte bir koliyi yine ikiye bölmüşler onun yarı kısmını doldurmuşlar diye de hani on üç kolinin yanında bir de o koli vardır. Hani böylede şey yapabiliriz.
A:Hım. Tamam devam edelim.
Ö:Hıhı.
Ö: (Soruyu okuyor)Şimdi bu bir bütün olarak düşünürsek hani bunu bir bölü altı bulmak için ee şöyle bunları kullanalım. Şu şekilde hani bunları böyle yaparız. Bu bir bütünse bunun bir bölü altısını bulmak için biz hani bunu altı parçaya bölcez ya. Bir,iki işte bir,iki,üç,dört,beş,altı parça oldu. Şunun bir kısmı bir bölü şeydir altıdır. Yani şöyle yapalım. Şunu yazalım. Şurası bir bölü altıdır. Dört tane bundan yan yana gelirse ne olur diye soruyor bize hemen ee şey bunların dört tanesini şöyle yapmaya çalışalım. Şöyle çiziyoruz. Ee şöyle yine. Ee şundan yine bir tanesini ondan sonra şöyle şundan bir tanesini şöyle şundan şöyle bunlar eşit olcak bir tanesini. Buna baktığımızda işlemin sonucunun bir,iki,üç,dört ee bir dakika bir,iki,üç,dört,beş bir dakika iki,dört,altı,sekiz,on,on iki,on dört,on altı bir dakika..Bir,iki,üç,dört,beş,altı,yedi,sekiz,dokuz,on,on bir,on iki,on üç,on dört,on beş, on altı, on yedi,on sekiz,on dokuz,yirmi,yirmi bir,yirmi iki, yirmi üç,yirmi dört..Yirmi dört mü? Bir saniye…
A:Şimdi orda onların her biri bir bölü altıyı mı modelledik? Ne yaptın orda?
Ö:Ee şimdi şu mesela örnek veriyorum üçü bir bölü altıdır. Altı parçaya bölünmüş biri alınmış. Bunların dört tanesini yan yana getirdik.
A:Hımm.
Ö:Dört tane bu şekilde.
A:Dört tane bir bölü altı diye dedin.
Ö:Hıhı. Dört tane tabi bu yaptığım bir bölü altıya giriyorsa. Dört tane bir bölü altı elde ediyoruz. Dört tane bir bölü altı bir,iki,üç,dört,beş,altı,yedi,sekiz,dokuz,on,on bir,on iki,on üç,on ödrt,on beş,on altı,on yedi,on sekiz,on dokuz,yirmi,yirmi bir,yirmi iki,yirmi üç,yirmi dört bölü dört elde ediyor. Ama hani aslında böyle elde etmemiz gerek çünkü işlemi yaptığımızda işlem dört bölü altıyı veriyor bize. Dört tane bir bölü altı bir bölü altı artı bir bölü altı artı bir bölü altı artı bir bölü altı şimdi bunları nasıl yapcaz.

A:Orda peki ne buluyorsun modelden sen?
Ö:heh modelden ne buluyorum. Dört bölü yirmi dört buluyorum. Ya bu da hani dört tane bir bölü yirmi dördün bir araya gelmesi ama o da aynı şey değil.
A:Hımm. Neden peki böyle oldu?
Ö:Ee çünkü ama biz bütünü bu şekilde altıya böldük hani bir bölü altı artı bir bölü heh şey olabilir. Biz paydalarını aslında şey yapcaktık. Paydalarının hani bunları toplamamamız gerekirdi. Payda her zaman aynı olcaktı. Onu unuttuk. Bu işlemi yaptığımızda aslında şey hani şunları bir şekilde dört tane var. Şimdi buraya baktığım da daha demin hatalı bir şey oldu. Şimdi bunlara baktığımızda her birini topladığımızda bir zaten bir bölü altı artı bir bölü altı artı bir bölü altı hemen zaten burda da yapayım. Bir bölü altı artı bir bölü altı artı bir bölü altı biz burda şeyi değiştirdik ee paydayı değiştirdik. Aslında hiçbir zaman payda değişmez. Yani toplama işleminde. Dört bölü altıdır. Hani burda şey budur. Dört tane bir bölü altı, bir bölü altı, bir bölü altı, bir bölü altı onun dört tanesinden ne kadar elde edilir yani dört çarpı bir bölü altı kesri de aynı şeydir. Yine ardışık toplamanın kısaltılmışı dört tane bir bölü altı.(şekil çizdi)
A:Yani o modellemeyi nasıl modellersin orda? o zaman yani bu yaptığın modelleme doğru mu?
Ö:Evet doğru.
A:Ordan dört tane bir bölü altıyı ..
Ö:Burdan dört tane bir bölü altıyı her şeyi silerek ben tekrardan göstereyim bunu burda. Imm şimdi şurası şu şekilde ve şu şekilde bu hani düşünerek dediği için şurası bir bölü altıdır dimi? Elimizde var bir bölü altı artı şimdi şu şekilde bir bölü altıdır ve onun bir kısmını alırız. Bir bölü altı şöyle artı buraya yazayım başından devam edeyim. Ee yine aynı şekilde böyle bir şekil aynı şeyin üzerine şöyle bunu da bu şekilin üzerine yaptığımızda yine bu bir bölü altıyı verir bize. Ee yine şunu şurdan çekip şunu şu şekilde yaptığımızda şurası yine bir bölü altıyı vercek bize. Ee bu da eşittir, dört bölü altı. Aynı şekilde bu işlem eşittir, dört çarpı bir bölü altı.(şekil çizdi)
A:Hımm. Peki devam edelim.
Ö: (soruyu okuyor)Biz bu hani bir kesrin kesrini bulmak için kullandığımız işlem çarpmaydı.
A:Hımm?
Ö:Dört bölü beş çarpı iki bölü üç derken nerden yardım alalım? Normalde işlem olarak da yapabiliriz. Evet hemen burda işlemimize bakalım. Dört bölü beş çarpı iki bölü üç bunları..
A:Şurda gösterebilirsin.
Ö:Hıhı. Bunları iki kesre böyle şey yaparak yapıyoruz. Şimdi sayıyoruz bakalım paydası kaç bunun. Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz, dokuz, on, on bir, on iki, on üç, on dört, on beş. Paydası on beş.
A: Peki orda nasıl yapıyorsun? Onlarla çarpmayı nasıl gösteriyorsun?
Ö:Bunlarla çarpmayı gösterirken bunu bu şekilde ya da bu şekilde bunu da ona tam zıt yönünde birbirleriyle kesiştirerek hani bakıyoruz kaç parçaya bölünmüş. Bu da hani ne demek kaç parçaya hani biz bunu da hani kesir bir kesrin ne demek olduğunu derken ne kadara bölünüp ne kadarı alındığından bahsediyorduk ya. Bunda da bu on beş parçaya bölünmüş şimdi saydık. Şimdi bu koyu renkli yani kesiştikleri yerleri sayalım. Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz. Sekiz tanesi alınmış.(materyal kullandı)
A:Peki o koyu renkli almalarının mantığı ne? Yani ne anlıyorsun ordan?
Ö:Yani bunların şimdi bir, iki, üç, dört bölü beş kesrini bu kesri ee şey üç bölü iki kesrine bölüyor. Yani dört bölü nasıl anlatsam? Dört bölü beş bir dakika.. Şöyle iki bölü üçe onu nasıl desem? Diyeceğim şeyi bir, iki, üç, dört, beş üstüne bunu koyunca hani dört bölü beş iki bölü üç.. He kaç tane iki bölü üç iki bölü üç bir dakika… Ee dört bölü beş eder gibi aslında soruda bunun başka bir işlemle yapılışıdır ama hani bunun şöyle hani dört bölü beşin içinde iki kaç tane iki bölü üç vardır gibi oluyor dicem. Hani ona benziyor. Ee şimdi yok tam olarak aslında öyle değil. Şimdi burda dört bölü beşin iki bölü üçünü çarpma yaparız dedin .
Ö:Evet.
A:Ee iki kesrin kesrini bulmadır dedin.
Ö:Evet kesrin kesrini bulmadır.
A:Peki kesrin kesri bulma derken neyi kastediyorsun? Ne demek?
Ö:Yani bir kesrin içinde.
A:Hımm?
Ö:Ee yani mesela dört bölü beşin, dört bölü beşi şöyle ben çizerek anlatmak istiyorum. Ee bir, iki, üç, ödrt, beş bunların her biri eşit şu dört kısmında bunu da iki bölü üç üstüne hani bide iki bölü bunu da bunların içinde de iki bölü üç yani şunların içinde iki bölü üçü ee kaç tane iki bölü üç ee bir dakika iki

bölü üçü bunda şurayı da üçe bölüyoruz. Hani şu kısmı. Ee bir tam olarak olmadı ama hani her birini eşit sayarsak şöyle şunlara da baktığımızda zaten hani bunun içinde bu nasıldır? Dört bölü beş kesrinin içinde iki bölü üçü bulduk.(soruyu okuyor)
A:Hım.
Ö:Hemen işlematik olarak yaparsak. Ee sekiz bölü on beş sekiz bölü on beş hani burda baktığımızda da bu sonucu elde ediyoruz.
A:Hım. Peki eemm devam edelim diğer sorudan. Hımm bir dakika. Burda heh burda mesela şey dört bölü beşle iki bölü üçü çarptık değil mi?
Ö:Evet.
A:Burda iki bölü üç değil de sekiz bölü on ikiyle çarpsaydık.
Ö:Evet.
A:Ne olurdu işlemin sonucu?
Ö:İşlemin sonucu..Hemen çarparak gösterelim. Dört bölü beş çarpı sekiz bölü on iki şimdi bunu yaparken yine ben aynı sonuç çıkacağına inanıyorum.
A:Neden?
Ö:Çünkü bu bunun katı. Bu bunun zaten denk kesri. Hani denk olduğu için yine aynı sonuç çıkacak. Zaten bu işlemi yapmadan önce bir sadeleştirme yapalım. Dördü on ikiye bölelim. Burası ikidir. E şey pardon. Burası birdir. Burası üçtür. Hemen işlemi yaptığımızda zaten sekiz bölü on beş çıkıyor. Yine eşit çünkü bunun denk kesirdir ki bunu hani bu şekilde sadeleştirmeden de yaptığımız da otuz iki bölü altmış çıkar. Bu da zaten şey eşittir, sekiz bölü on beş kesrine. En bunun en sade hali de sekiz bölü on beş kesridir.
A:Hımm. Peki denk kesir ne demek? Bu bunun denk kesridir dedin ya. Ne demek?
Ö:Mesela iki bölü üç kesrinin bir sayıyla genişletilmiş hali. Veya bir sayının en sade hali, sadeleştirilmiş hali.
A:Peki orda sekiz bölü on iki, iki bölü üçün?
Ö:Ee dört katıdır. Dörtle genişletilmiş halidir.
A:He dörtle genişletilmiş hali.
Ö:Hehe.
A:O yüzden çarpma değişmiyor diyorsun?
Ö:Evet.
A:Peki iki bölü üçle üç bölü ikiyi çarpsaydık ne olurdu?
Ö:İki bölü üçle üç bölü ikiyi çarpsaydık ee şey burdan biz şurası bir şunlar bir zaten bir bölü bir o da bize bir biri verirdi.
A:Neden bir çıktı peki bu?
Ö:Ee çünkü zaten paydaları şimdi birinin paydası ile ötekinin payı aynı, birinin paydası ile ötekinin payı aynı hani zaten paydaları zaten birbirlerini götürdükleri için birinin payıyla birinin paydası bibirini götürür. Birinin payıyla birinin paydası birbirini götürür. Elde bir kalıyor. Zaten öteki türlü işlem yaptığımızda da hani çarpma işleminin değişme özelliği vardır. Hani üç kere iki altı, üç kere iki altı. İki kere üç altı, üç kere iki altı. Altı bölü altı da zaten bire eşit olacağı için hani böyle bir sonuç çıkıyor.
A:Hımm. Peki devam edelim.
Ö: (soruyu okuyor) Bir bölü iki çarpı bir bölü dört eşittir, bir bölü sekizdir. Şimdi bir bölü şey şimdi işleminin sonucu ne anlama gelir. Çeyreğin yarsı anlamına geliyor. Şey evet bir çeyreğin yarısı. Hemen bunu normal bir şekilde de gösterelim çeyreğin yarısı olduğunu. Bir,iki şöyle bir tane daha evet böyle dört parça olunca şimdi bu çeyrek ise şu çeyrek ise şöyle yaptığımızda bunun herbirine iki koyduğumuzda şöyle evet bunu şeye böldüğümüzde bu da çeyreğin yarısı anlamına geliyor bir bölü sekiz. (şekil çizdi)
A:Hımm?
Ö:zaten yrım çarpı bir bölü dörtte şey bir bölü dördün yarısı bir bölü sekiz o şey oluyor.
A:Hımm. Peki diğeri ne?
Ö:Diğeri. (soruyu okuyor)Burda yine bir bölü dört çarpı bir bölü iki ee bir bölü sekiz yine aynı manaya geliyor. Bu seferde hani yarımın çeyreği diyebiliriz biz buna yada çeyreğin yarımı. Yani bu iki işleme baktığımızda bir de şunu görüyoruz. Çarpma işleminde değişme özelliği vardır. Yerleri değişince hiçbir şey değişmiyor. Hemen bu işlemi de eğer gösterirsek bir bütünü ikiye bölüyoruz. Bir, bir dakika bunun birini.. Bir, iki, üç, dört işte bu da yarım bir bölü sekiz yine dörde böldüğümüzde burayı bir,iki,üç,dört,beş,altı,yedi,sekiz bir bölü sekiz. (şekil çizdi)

A:Peki orda bir bölü sekizi nasıl buluyorsun modelde?
Ö:Şimdi modelde hani burayı dörde bölüyoruz böyle bütün kesri. Bütün kesri dörde bölüyoruz bir bölü ikinin ee bir bölü ikinin bir bölü dördü olduğunu buluyoruz.
A:Şimdi şu, şu modelle şu model aynı mı?
Ö:Değil. Burda bir bölü iki çarpı bir bölü dörtten bahsediyor. Burda bir bölü dört çarpı bir bölü sekizden bahsediyor.
A:Yani bura neyi modelliyorsun burda neyi modelliyorsun?
Ö:Burda bir bölü dördün bir bölü ikisini modelliyoruz. Burda bir bölü ikinin bir bölü dördünü modelliyoruz.
A:Hımm.
Ö:Şöyle hemen..
A:Yani o aradaki farkı gösterebilir misin? Çok anlaşılmadı.
Ö:Arada pek bir fark yok. Hani şu bir bölü dört bunu böyle koyduğumuzda bir,iki,üç,dört,beş,altı,yedi,sekiz şurası da zaten ortak nokta. Bir bölü sekiz aynı şeyi dördün hani şu şekilde eğer koyarsak yine bir,iki,üç,dört,beş,altı,yedi,sekiz bir bölü sekiz yine aynı şey olcak.(materyal kullandı)
A:Peki şimdi bir dakika. Birinci çarpmayı bu şeffaf kartlarla bir modeller misin? Nasıl modelliyorsun bir bölü iki çarpı bir bölü dört.
Ö:Bir bölü iki çarpı onu da ters olarak şöyle koyalım bir bölü dört. Modellediğimizde bakalım paydamız kaçmış? Bir,iki,üç,dört,beş,altı,yedi,sekiz burda ee bu hani ortak çarpıldığında oluşan yerse birdir. Bir bölü sekizdir. (materyal kullandı)
A:Peki bu çarpmayı burdan nasıl yorumlarsın?
Ö:Ee hangi çarpmayı?
A:Bu çarpmayı burdan nasıl yorumluyorsun?
Ö:Bir bölü ikinin bir bölü dördü bir bölü sekizdir.
A:Hım peki diğerini nasıl modelliyorsun? Bir bölü dört çarpı bir bölü ikiyi?
Ö:Diğerin de ise bunu böyle koyuyoruz ee bunu da şu şekilde ee bir dakika bunuda ters bir şekilde koyduğumuzda yine bir,iki,üç,dört,beş,altı,yedi,sekiz bölü ee bir bölü sekiz çıkıyor.(materyal kullandı)
A:Peki nasıl modellediğini bir anlatır mısın onlarla?
Ö:Önce bir bölü dördü şu şekilde koyuyoruz sonra tersine hani buna ters bir şekilde bir birlerini kescek şekilde koyuyoruz.
A:Neden öyle yapıyoruz?
Ö:Çünkü eğer bu şekilde hani koyulursa bir anlamı olmuyor. Birbirini kescek şekilde koyarsak sadece çarpma işlemince doğru sonuca ulaşabiliriz.
A:He böyle koyduğumuzda da gene bir şey olmuyor.
Ö:Böyle koyduğumuzda bir,iki,üç,dört bir bölü dört ortaya çıkıyor. Böyle koyduğumuzda hani bu işlemde şey oluyor bunun sadeleşmiş halini ortaya çıkartıyoruz.
A:hımm.
Ö:Bu işlemde öteki işlem için geçerli mi?
A:Bilmem.
Ö:Deneyelim.
A:Deneyelim.
Ö:Hemen şu şekilde ee bir şey ee iki bölü üç çarpı bir bölü iki kesrini önce bir şu şekilde çarpalım. Ne oluyor? Ters bir dakika yanyana koyarsak bir,iki,üç,dört,beş,altı iki bölü altı oluyor. Bu şekilde koyarsak ne oluyor? Hemen şey yapalım. Zaten bakalım şu şekilde koyduğumuzda da ee şey bu şekilde koyduğumuzda doğru bir sonuca zaten erişemiyoruz. Hani o yüzden bunu şu şekilde bir de kescek şekilde koymalıyız.
A:Hımm. Peki ee şimdi ee şuna ne diyoruz peki?
Ö: (soruyu okuyor)Burda ki işlemin sonucu aynıdır. Bir bölü sekizdir. Bunun nedeni çarpma işleminde değişkenlik özelliğinin olmasıdır. Hani ha bir bölü dört çarpı bir bölü iki ha da bir bölü iki çarpı bir bölü dört hani bu şey değişmez.
A:Tamam yazalım oraya.
Ö:Ee şey.. Çarpma işleminin değişme özelliği vardır diyoruz.
A:Hım. Devam edelim.

Ö: (soruyu okuyor)Şimdi bunu şey yaparken çarpma işleminde sonucun doğru olması için şey yapıyoruz. Imm bunları başta normla tam sayıyı bileşik kesre çeviriyoruz. Dokuz kere iki on sekiz, on dokuz bölü dokuz çarpı yirmi dört artı yedi, otuz bir bölü sekiz. Şimdi bu işlemi çarpma olarak yapacağız. Ee yaparken hemen şöyle bir şey deneyeceğim. Hemen deneyelim. Hımm hayır olmuyor. On dokuzu dokuza bölemiyoruz hayır. Evet. Neyse hemen şimdi şöyle bir çizgi çekelim bunun başına. Dokuz kere sekiz yetmiş iki. Otuz birle de on dokuzu çarpalım. Ee bir dakika. Dokuz kere üç ee bir saniye dokuz kere üç yirmi yedi. Bir, üç ee dokuz sekiz.. Beş yüz seksen dokuz bölü yetmiş iki. He ama bir dakika burda işlemin sonucunu tahmin edin diyormuş.(işlem yaptı)
A:Tamam zaten işlemi de yapacağız.
Ö:Hıhı.
A:Devam edelim .
Ö:Beş yüz seksen dokuz çarpı yetmiş iki oldu. Şimdi beş yüz seksen dokuzu da yetmiş ikiye bölelim bakalım ne kadar oluyor. Bir dakika beş yüz seksen dokuz bölü yetmiş iki. Şimdi bunu işlemi yapmak için biraz zaman alacak. Yetmiş iki direk orda yoktur. Altı ker denesek altı kere yedi kırk sekiz. Ee kırk dokuz direk böyle denesek. Şuna bir yetmiş iki daha eklesek bakalım ne oluyor? Ee sanıyorsam evet yedi olması gerek. Yedi kere yedi bir dakika kırk dokuz zaten şimdi burda oldu. Şey on kırk dokuz. Elli oldu. Hemen buradan bir deneyelim ne oluyor? Dokuzdan dört çıkarsa beş sekiz, değil. O zaman sekiz olacak. Hemen işlemimizi baştan yapalım. Silelim şurayı ee sekiz, sekiz kere iki on altı yedi kere sekiz elli altı bir elli yedi. Hemen bunları çıkaracağız. Dokuzdan altı çıktı üç sekizden yedi çıkardığımızda bir. On üç oluyor. Sekiz tam o da eşittir. Sekiz tam on üç bölü yetmiş iki.
A:Hım.
Ö:Şimdi daha deminki gibi tahmin edin diyordu bize.
A:Şimdi bir saniye. Burda eee iki tam bir bölü dokuzu işte çevirdin bileşik kesre çevirip yaptın.
Ö:Evet.
A:Neden bileşik kesre çeviriyoruz.
Ö:Evet. Çünkü hani bu şekilde bulma nasıl çarpma bulunmamıştır daha diyim. Ee hani bileşik kesre çevirerek şey yaparsak hem daha sağlam bir sonucu elde edebiliriz.
A:Hım. Peki şimdi birde tahmin edip bi çarpmayı yapalım.
Ö:Onu tahmin ederek çarpma..İki tam bir bölü dokuz eşittir bir saniye..I ı şey iki tam bir bölü dokuz yaklaşık olarak ee şey iki tamdır.
A:Neden?
Ö:Eee çünkü bir bölü dokuz sıfıra yakındır. Hani zaten sayı doğrusunda da gösterirsek. İki tam da zaten elimizde vardı.
A:Göterelim.
Ö:Sayı doğrusunda hemen bir bölü dokuzu gösterelim. Sıfır şurası..
A:İki tam bir bölü dokuz.
Ö:Pardon o zaman burası iki burası üç.
A:hıhı.
Ö:Bir,iki bir dakika üç, dört,beş,altı,yedi,sekiz,dokuz. Bir,iki,üç,dört,beş,altı,yedi,sekiz,dokuz aslında aralıklar eşit. Şu bire baktığımızda buraya daha yakın olduğunu görüyoruz. Bu ikiye eşittir. Üç tam yedi bölü sekizde yaklaşık olarak dörttür. Hemen yedi bölü sekizinde nasıl şey olduğuna bakalım. Ee burası üç burası şey dört bunun arasını da sekize bölcez. İki,üç,dört,beş,altı,yedi,sekiz bunu böyle böldüğümüzde bir,iki,üç,dört,beş,altı,yedi,sekiz şey yediyi bulalım. Bir dakika bir,iki,üç,dört,beş,altı,yedi ee yedinin dörde daha yakın olduğunu görüyoruz. Bu da eşittir dört tamdır. Dört artı iki eşittir sekiz işlemimize baktığımızda sekiz tam..
A:Bir dakika dört artı iki sekiz??
Ö:Pardon özür dilerim altı eder.Ee şey yalnız çarpı olacaktı bu burası artı değil çünkü çarpma işlemi yapıyoruz. Sekiz olur. Sekiz tam zaten ee on üç bölü yetmiş iki de sayı doğrusunda sekiz tama hani yaklaşık olarak sekiz tamdır.
A: O neden peki sekiz tama yakın?
Ö:Bu sekiz tama. On üç bölü yetmiş iki sayı doğrusunda şimdi burda yetmiş iki parçaya şey oluyorya hani bu on üç tam yetmiş iki sıfıra yakındır on üç bölü yetmiş iki. Elimizde sekiz vardır. Hani sıfıra arı sekiz, sekiz. O mantıktan giderek şey yapabiliriz.
A:Ha o sekiz tama yakın.
Ö:hıhı.
A:Biz ona yaklaşık olarak zaten..

Ö:Şey sekiz olduğunu..
A:Sekiz bulduk.
Ö:Bulduk.
A:Peki devam edelim.
Ö:Hıhı. (soruyu okuyor)İşlemi yaparak görelim. Beş bölü altı çarpı üç bölü dört. Şimdi başta bu işlemi yapmadan önce sadeleştirelim şurası iki oldu. Şurası bir oldu. Ee şey dört kere iki sekiz. Beş bölü sekize eşittir. Zaten direk sonuç beş bölü sekiz çıkıyor.
A:Hıhı. Nasıl yaptın o çarpmayı anlatalım.
Ö:Çarpmayı yaparken karşılıklı sayılar ya da altlı üstlü sayılar sadeleştirilerek yapılabilir çarpma işlemi. Altı mesela altıyla üç birbirinin katı olduğu için bir birinin katı değil. Mesela burda üç oldu. Burda on şey yani yine birbirinin katı oluyor da mesela dört altı olsaydı burda dört bu tarafta olsaydı iki ile sadeleştirebilirdik. Hani bunların ortak olan bir şeyini bulup bölenini bulup ebobunu bulup ee onları bölüyoruz birbirine sonra ondan sonra en sade haline getirdiğimizde kesirleri çarpıyoruz. Ya da şöyle bir şey yapabilirdik. Beş bölü altı çarpı üç bölü dört dediğimizde beş kere üç on beş altı kere dört yirmi dört zaten bunu da hani bunu kaçla sadeleştiriyoruz bunu da zaten ımm.. üçle sadeleştirdiğimizde yine bir şey hemen sadeleştirelim. Bölü üç beş bölü üç sekiz yine beş bölü sekiz kesrini verecektir bize.
A:Hımm.
Ö:Yani biz onu işlemin başında yaptık daha hızlı olsun diye.
A:Sadeleştirme yapmak ne demek yani?
Ö:Hani bir kesrin daha küçük denk kerini bulmak.
A:Peki devam edelim diğeriyle.
Ö:Hemen bakalım. İki bölü üç çarpı bir bölü beş işte bu önce bunu çaparız. Sonra üç bölü dörtle çarparız. Farketmez çünkü çarpma işleminde hani bunu buraya koymuşuz önce bunun sonucunu bir bölü üçle çarparız. Ya da bunların sonucunu şeyle çarparız o farketmiyor. Hemen yapalım bu işlemimizi on beş bölü iki ee evet. On beş bölü iki çarpı üç bölü dört bu da eşittir, hemen şunları sadeleştirelim iki üç oluyor. Üç bölü otuzdur işlemin sonucu.
A:Üç bölü otuz. Hım. Peki burda ımm hani önce ikisini çarptın sonra diğeriyle çarptın ya.
Ö:evet.
A:Üçünü birden çarpamaz mıydın?
Ö:Hani üçünü birden evet çarpabilirdim.
A:Aynı sonucu mu bulurdun?
Ö:Evet aynı sonucu bulurdum. Çarpı bir bölü beş çarpı üç bölü dört hemen bunu deneyelim. İkiyi çarptım bir, üç kere iki altı. Beş kere üç on beş on beşle de dördün çarpımı ee şey altmış. Ama bunları sadeleştirirsek bölelim şey altıya şey bir, ee bölelim altıya bir, bölelim altıya on. Bir bölü on bunu da zaten bölelim üçe bir bölelim üçe şey on olur. Yine aynı sonuç .
A:Hımm. Yani aynı sonuç çıkıyor.
Ö:Evet aynı sonuç çıkıyor.
A:Peki orda o üçlü çarpmayı nasıl yaptın bir anlatalım.
Ö:Üçlü çarpma yine ikiyle çarpma yine önce ki çarpmalarda yaptığımız gibi pay çarpı şey payları birbirleriyle çarpıyoruz, paydaları birbirleriyle çarpıyoruz.
A:Şimdi bu işlemleri bir yapalım çarpma işlemlerini.
Ö:Hıhı. Üç bölü dört çarpı bir bölü iki şimdi bu işlemi yaparken hani sadeleştirme olmayacağı için ee sekiz bölü üç kesrini verir bize. Şey üç bölü sekiz kesrini verir.
A:Üç bölü sekiz. Ne yaptık o çarpmada?
Ö:Çarpmada payları payı payla şey paydayı da paydayla çarptık.
A:Hım. Peki şimdi burda üç bölü sekiz çarpma işlemimizin sonucu çıktı. Çarpma işlemimizin sonucunu çarpanlarla kıyaslayabilir misin? Hani üç bölü dörtle bir bölü ikiyle kıyaslayabilir misin?
Ö:Hıhı. Kıyaslayabilirim. Hani üç bölü dört bu şey ee çarpımın sonucu ee şey bunlardan küçük çıktı?
A:Nasıl buldun hani nasıl kıyasladın?
Ö:nasıl kıyasladım. Ya direk buna hani kafadan direk ikiyle çarparsak zaten hani ben direk öyle buldum. Sekiz bu da burda veya şöyle ben bunu daha kısa bir yol bu tama yakındır. Bu yarıma yakındır. Bu sıfıra yakındır. Hani yakınlık olarak baktığımızda da zaten bu en küçükleri oluyor sonuç.
A:Hımm.
Ö:Hani normal matematik işlemi..
A:Onları nasıl yaptın tama yakın yarıma yakın hani mesela şuraya çarpar mısın onu nasıl yaptın?

Ö:Hıhı. Mesela örneğin şurda şöyle bir şey çizelim. Hani bunu bir şöyle şuraya sıfır diyelim. Şuraya da bir diyelim. Şurası neyse bir, iki, üç, dört.. Dört tane eşit parça hani bunun bir, iki, üçünü almış bu bire yakındır.
A:O hangi kesir?
Ö:Bu şey üç bölü dört.
A:Üç bölü dört bire yakın.
Ö:Hıhı. Bir bölü ikiye baktığımızda sıfırla bir arası iki parçaya bölünmüş. Ee şey bunun burası alınmış bu ad yarımdır zaten direk yarımın kendisidir. Bir bölü iki. Üç bölü sekize baktığımızda ama sıfır bir eee şöyle bir dakika burası da… Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz eş parçadan ee şey bir, iki, üçüncüsünü aldığımızda sıfıra daha yakın olduğunu görüyoruz. Normal işlem olarak da eğer bunları yaparsak hani şöyle bir şey yapalım. Bunları ee şey bunları genişletelim ikiyle ve sekiz altı hani bu budur. Şuna eşittir diyelim. Bunu da dörtle genişletirsek eğer ee şey dört bölü sekiz oluyor. Ama bu üç bölü sekiz hani arlarında en küçüğün bu olduğunu görüyoruz.
A:Onları nasıl kıyaslıyorsun? En küçüğünün olduğunu?
Ö:En küçüğünü bulduğunda paydaları eşit olan kesirlerin payı büyük olan her zaman daha büyüktür. Payı küçük olan en küçüktür. Çünkü bir bütünü bölüyorsunuz sekize ee dört oldu onu da şöyle ikiye bölelim. Heh sekize böldüğünüzde şimdi siz bunun eş parçalara altı tanesini mi alırsanız daha büyük olur dört tanesini mi yoksa üç tanesini mi alırsanız. Tabi ki de üç tanesini alırsanız daha büyük olur. Şöyle de hemen gösterelim zaten aynı şekil üçerinde üç kesri. Şöyle..(şekil çizdi)
A:Tamam.
Ö:Hani şöyle şöyle şu şekilde bunun üzerinde de zaten hemen şunu boyayalım üç,dört,beş ve altı şöyle hani buna baktığımızda bir,iki,üç,dört hani ötekide..
A:Öbürü de üç zaten.
Ö:Öteki de zaten hani üç olacağı için bir,iki işte üç dört, bir, iki,üç,dört e şey hani bundada zaten üç olcağı için bir,iki,üç arlarında en küçüğün bu olduğunu da bu şekilde görebiliyoruz.(şekil çizdi)
A:Hımm. Peki diğer çarpmayı yapalım. Bir de onun sonucunu kıyaslayalım çarpanlarla.
Ö:Yedi bölü altı çarpı beş bölü iki dediğimizde sadeleşcek kesir ee var mı yok mu diye bakıyoruz. Yok. Ee hemen ilerliyoruz. Otuz beş şey.. Otuz beş bölü on iki.
A:Hıhı.
Ö:Bu sefer ee şey bir dakika. Büyük çıktı. Bu sefer şöyle bir şey oldu. Bunları hemen deneyeceğiz çünkü bu biraz daha şey olduğu için. Altı kere iki he altı kere beş otuz bölü ee kaç oldu bu? Otuz bölü on iki ee bunu da şey ikiyle çarpmamız lazım. On dört bölü on iki oluyor. Arlarında bu sefer en büyük şey oldu. Imm nasıl desem çarpım oldu.
A:Hım. En büyük çarpım oldu. Diğerlerinden büyük.
Ö:Evet.
A:Peki yukardakinde en küçük çıktı.
Ö:Evet.
A:Aşağıda en büyük çıktı.
Ö:Evet.
A:Niye böyle oldu.
Ö:Bu hani kesirlerin büyüklükleri ve küçüklükleri ile alakalı. Birde şöyle bir şey var. Aşağıda kesirler basit kesirlerdi. Burdakiler hani bileşik kesirde hani basit kesir bileşik kesirle alakalı olduğunu düşünmüyorum. Kesirlerin büyüklükleri ve küçüklükleri..
A:Nasıl yani büyüklükleri ve küçüklükleri derken?
Ö:Bunları mesela birbirleriyle çarparken şöyle bir şey var. Bu.. BU kesir bundan daha şey küçük yani öyle değil. Hani bu kesirlerin kendilerine nasıl desem? Bunlar daha küçük kesirlere bunlar daha büyük kesirlerdir. Hani çarpımı o şekilde bir büyüklük çıkmış olabilir.
A:Hımm. O zaman burdan bir genelleme yapabilir miyiz acaba? Ya da bazen büyük çıkıyor bazen küçük çıkıyor. Neye göre böyle çıkıyor. Bir şey söyleyebilir miyiz?
Ö:Neye göre çıkıyor. Eğer hani başka işlemlerde de istisna olmuyorsa hani hiç denemedim. Şöyle bir şey söyleyeceğim. Bileşik kesirler çarpılınca sonuç kendilerinden şey oluyor. Ee büyük oluyor. Ee normal basit kesirlerle çarpılınca da küçük oluyor diyebiliriz. Ama bu hani ne kadar doğru ne kadar yanlış tam olarak başka işlemler de yaparak öğrenebiliriz bunu.
A:Mesela deneyebilirsin orda.
Ö:Hıhı. Hemen deneyelim..

A:Peki ne şunu sorayım bileşik kesirlerde neden büyük oluyor sonuç kendinden yani kendilerinden büyük oluyor?
Ö:Ya çünkü yukardaki sayı alttaki sayıdan şimdi daha büyük olunca ee illaki hani büyük bu sayıyı böyle büyük bir sayıyla çarpıyorsunuz. Hani bileşiği olan daha böyle üst tam sayılı bir sayıyla çarpıyorsun. Hemen deneyelim. Bir bölü iki çarpı ee şey hemen bir saniye bir bölü iki çarpı iki bölü beşi çarpalım. Hemen iki on bölü iki oldu. On bölü iki bunların ikisinden de hemen hani şey yapalım. Beşle çarpalım beş bölü on oldu. Bunu ikiyle çarpalım dört bölü on oldu. Bu daha küçük oluyor. Bir bileşik kesri deneyelim. Ee şey altı bölü dört çarpı iki bölü bir diyelim. Bunu da yapmak için hemen bir sadeleştirme yapalım. Burası bir olsun burası iki olsun. Altı şey altı oldu. İki oldu. Bunun sonucu ee bu sefer aynı şeyle eşit mi oldu? Bir saniye pardon bir dakika altı evet. Bu sefer sonuç eşit oldu. Imm ilk şey bir dakika bir saniye ee hemen şurda bir dakika bir daha yapalım. İki evet. Bu sefer de hani sonuç altı bölü iki oldu. Buna baktığımızda hani üç burası normalde bakalım daha mı büyük çıkcaktı. Hemen hesaplayalım. Burayı eğer altı ile yapmak istersek. On iki bölü altı oluyor yani şey ımm iki bu da eşittir. İki şuna baktığımızda dört bunu bir dakika iki hani bunu sadeleştiririz. Üç bölü iki olur. Bu da eşittir bir ama bölü iki bu da bu da eşittir üç yine şey daha büyük çıktı. Imm nasıl desem? Ee bileşik kesirlerde sonuç daha büyüktür.
A:Şurda da üç bölü ikiye eşittir bir derken ne dedin orda?
Ö:Hıhı. Pardon üç bölü iki eşittir ee bir mi.. Pardon bir tam bir bölü ee bir tam bir bölü iki. Ee şey ama yine hani bir tam bir bölü iki daha şeydir küçüktür.
A:O zaman genelleme yapabilir miyiz?
Ö:Evet şu şekilde..
A:Ne diyoruz?
Ö:Bileşik kesriler bir birleriyle çarpılırsa hani sonuç ee yine bir bileşik kesir çıkar ve onlardan büyük olur. Basit sayılı kesirler birbirleriyle çarpılırsa sonuç onlardan küçük olur, basit sayılı bir kesir çıkar.
Ö:Tamam. (soruyu okuyor)Şimdi soruya bir de dakika cinsinden sorduğu için bir saat altmış dakikadır. Altmışın dört bölü hani altmışın dört bölü beşinin iki bölü üçünü soruyor. Başta altmışla dört bölü beşi çarpıyoruz. Şimdi bunu yapmadan önce tabi ufak bi hemen işlem yapalım. Ee altmışı beşe bölersek hemen bir saniye şey on beş.. değil on beş değil. On iki. Beşte bir olur. On iki çarpı dört ee şey kırk sekiz bölü bir. O da eşittir, kırk sekiz. Kırk sekiz dakika bir saatin dört bölü beşidir kırk sekiz dakika. Kırk sekiz şimdi saati birde kırk sekiz dakikanın iki bölü üçünü bizden istiyor. Kırk sekiz ee bölü bir çarpı iki bölü üç dersek kırk sekizde eğer üçe bölersek hemen onu da bölelim. Imm…Imm bir dakika. Şey bir dakika burda biz kaç yazdık? Kırk sekiz bölü üç olcak dimi? Buraya bir olcak şöyle olcak. Tamam on sekizde üç altı kere üç on sekiz. On altıdır. Hani buraya on altı yazarız. Buraya bir yazarız. Bunun da çarpımı da ee şey otuz ikidir. Otuz iki bölü bir o da eşittir, otuz iki dakika. Hani bu sorunun cevabı eşittir, otuz iki. (işlem yaptı)
A:Hımm. Peki burda ımm neden çarpma işlemleri yaptın hani birinci çarpmadan mesela ne anlıyorsun?
Ö:Hıhı. Ya daha demin de soruda da çıktığı gibi şöyle beş bölü dördü çizelim. Bir, iki, üç, bunların hepsi eşit. Ee şöyle dördünü tarayalım. Şimdi dört bölü beş.. altmış dakika bunun tamamıdır. Biz bunun hani altmış dakikayı beşe böldük. Her birini bulduk. Ee şey on iki, on iki, on iki, on iki, on iki bunu da dörtle çarptık. Burda yaptığımız işlem aslında aynı. İşte altmışı beşe böldük on iki. Dörtle çarptık ya da zaten şöyle bir şey oluyor. Altmışı dörtle çarpınca beşi de birle çarpınca ee şey ımm bu sonucu yine beşe bunları hani birbirlerine hangi sayıya ulaştıklarını görmek için yine bölcektik. Yine aynı işlemi yapcaktık. Hani yapcağımız işlem yaptığımız işlem aslında altmış bölü beş çarpı dört bölü dört ya da altmış çarpı dört bölü beş.
A:Peki o altmış çarpı dört bölü beş ne anlama geliyor?
Ö:Hıhı. Ya bir bütün hani şey altmış ee bir bütün altmış şimdi altmış ee bölü dört altmış bölü beş çarpı dört şu manaya geliyor. Hani bir bütün beş parçaya bölündü tamamı altmışsa. Biri ne kadardır diyebiliyoruz beşe böldüğümüzde. Onu da dörtle çarpınca işte dört tanesinin ne kadar olduğunu anlıyoruz.
A:Hımm tamam. Peki bu.. Bu problemi başka türlü çözebilir miydin?
Ö: Bu problemi başka türlü ee şimdi bir şekilde daha denicem. Hani bilmiyorum ne kadar doğru ne kadar yanlış ama..
A:Tamam deneyelim şurda yukarıya yapalım.
Ö:Hıhı. Dört bölü beş çarpı iki bölü üç desek. Ee sekiz bölü on beş oluyor. Onu da altmışla hani çarparsak belki olur diye düşünüyorum. Ee şey on beş altmışta dört kere vardır. Hemen şurası dört

olur. Şurası bir olur. Otuz iki bölü bir evet hani daha demin düşündüğüm yöntem de doğru. Başta bunun içinde ne kadar olduğunu bulduktan sonra. E bunla pardon yanlış şey oldu. Hani bu kesrin iki bölü üçü ne kadar olduğunu bulduktan sonra şeyin kırk beşin şey kaçtı sayımız? Altmışın da iki bölü şey bu sonucun ne kadarı olduğunu buluyor.
A:Hımm. Aynı sonucu veriyor.
Ö:Hıhı. Evet.
A:Hıhı. Tamam devam edelim.
Ö: (soruyu okuyor)İki bölü üç çarpı dört bölü altı. Şimdi direk şunları sadeleştirelim. Bir,üç,dört üç kere üç de dokuz ee dört bölü dokuz şey oldu ee dört bölü dokuz ee bir dakika…Bunu başka bir şekilde bir dakika bir yerde hata mı yaptık? Her yere bakalım. Ee bir altı üç kere iki altı tamam dört üç kere üç dokuz evet. Ee şimdi dört bölü dokuz bir bölü dördü üç tane ımm..Bir bölü dördü üç tane ise tamamı ne kadardır diye bakarsak. Ee şey üç çarpı bir bölü dört olur. onun da altına bir eklerim o da eşittir. Üç bölü dört. Doğrusu bir dakika ben niye böyle bir şey yaptım. Çok şey oldu. Imm şey üçle dört ee şöyle şurdan gösterelim. Mesela bir bölü dördü üç tane bir bölü dördü üç tane etti altı tane. Bir bölü dört daha üç tane etti dokuz tane. Bi bir bölü dört daha üç tane yani dört bölü dört oldu şimdi. Bunlarda eşittir bize on iki tane oldu. On iki tane elma var yani sepette on iki tane elma var. (materyal kullandı)
A:He tamamı on iki elmadır diyorsun.
Ö:Hıhı.
A:Oraya da birde modelleyebilir misin orda?
Ö:Hıhı. Şey bir bölü dört eşittir, üç. Bir bölü dört eşittir, üç. Bir bölü dört eşittir, üç. Ve bir bölü dört eşittir, üç. Yani bunların hepsinin topladığımızda da zaten on iki ediyor.
A:Hımm?
Ö:Ee şimdi dokuz on iki bunlar birbirlerine … alınamayacağı için bunu ee şey yapalım. Ne yapalım? Imm kaç tane elma vardır? Şimdi buna baktığımızda nasıl yapabiliriz bunu? On iki tane elmanın şey on ikiyi dörtle çarpalım. Onu dokuza bölelim. Bir dakika pardon niye öyle bir şey yapıyoruz ki? On iki çarpı dört bölü dokuz yapalım. Imm on iki çarpı dört bölü dokuz bölü bir ee şey eşittir, dört kere iki sekiz kırk sekiz bölü dokuz.
A:Kırk sekiz bölü dokuz.
Ö:Evet. Kırk sekiz bölü dokuzda eşittir bir dakika şey bir dakika…Ee kırk sekiz bölü dokuz,üç,beş,altı beş kırk beştir. Ee şey burası dokuz beş tam üç bölü dokuz elmadır.
A:Hımm. Peki diğer soruya bakalım.
Ö: Kaç tane elma vardır? Yine aynı soru. Beş bölü on iki çarpı üç bölü dörde baktığımızda şimdi sadeleşcek şu sayılar var. Üç şey bu on ikiyi de eğer üçe bölersek ee şey dört olur. ee beş bölü sek ee dört kere dört on altı elma.
A:hımm?
Ö:Ee şimdi bunu da yine yukardaki gibi yapmaya çalışırsak ee beş bölü on altı çarpı on iki bölü bir o da eşittir. Bunların ikisini birbirini dörtte şey yapabiliriz. Dört, üç, on beş bölü dörttür. On beş bölü dörtte eşittir, ee şey üç tam bir dakika üç tam iki bölü şey dört bir saniye hehe üç tam üç bölü dörttür.
A:Peki burda neden çarptın mesela beş bölü on altıyla on ikiyi çarptın ya.
Ö:Hıhı.
A:Niye çarptın orda?
Ö:Çünkü hani nasıl desem? Imm bir saniye hani dört bölü dokuz on iki bir saniye nasıl olcak? Burda heralde çarpma işlemi kullanmamamız gerekiyordu yanılmıyorsam.
A:Niye?
Ö:Çünkü burda biz bunları daha çok hani ekledik bölme işlemi mi olcaktı acaba diye düşünüyorum. Ama bölme işlemi de değil. Bir saniye bir şey..
A:Orda çarpmakla ne yaptın?
Ö:Şimdi burda çarpma..
A:Yani iki işlemde de aynı şeyi yaptın mesela birincide on ikiyle dört bölü dokuzu çarptın. Neyi bulmuş oldun burda?
Ö:Hani on iki şey on iki şey bir dakika…Ee şey dört bölü on iki tane dört bölü dokuzun böyle yanyana toplanmışını buldum.
A:Hımm?
Ö:Bana ne kadar ettiğini beş tam üç bölü dokuzu verdi.
A:Hımm. Peki beş tam üç bölü dokuz..

Ö:Evet.
A:Yani kaç elmaya eşit oluyor?
Ö:Şimdi beş tam zaten ee şey beş on ikiyi çarp beş altmış elma. On ikiyi de dok hani dokuzdu on ikiyi şey yapsak bunu hani yirmi dört yapsak yine olmuyor. Hani dokuzlu gruplara şey ya da on ikiyi üçle çarpıp otuz altı bölü dokuz yaparsak evet böyle bir şey yapabiliriz. Elimizde altmış elma vardı. Ee on iki çarpı üç, üç kere iki otuz altı bölü dokuz. Bu da bize dördü verir. Ee altmış dört elma. Bu sorunun cevabı altmış dört. Eğer buna bakarsak da hani üç tam zaten ee şey otuz altı. On ikiyi burda dörde bölersek on iki kere üç, üç kere üçte dokuz eder. Hemen bunu da bu şekil toplarsak dokuz, beş kırk beş eder.
A:Kırk beş elma. Peki ımm bu iki soruyu da yani başka türlü çözebilir miydin?
Ö:İki soruyu da hani başka türlü..
A:Mesela birinci soruyu başka türlü çözebilir miydin?
Ö:Şu birinci soruyu başka türlü çözebilir miydim? Bu soruyu başka türlü bakıyım nasıl çözebilirdim. Çözebilir miydim daha doğrusu? Bir dakika şey hayır. Yani ben çözemezdim. Belki matematik olarak çözülebilir de..
A:Peki ımm on iki elmanın mesela şu birinci çarpmaya bakarsak.
Ö:Evet.
A:O on iki elmanın üçte ikisi kaç elmadır?
Ö:On iki elmanın üçte ikisi bir dakika. Hemen on iki elmanın iki bölü üçü şey ee eşittir, yirmi dört bölü üçtür. O da eşittir, sekiz elmadır.
A:Sekiz elma peki on iki elmanın altıda dördü kaç elmadır?
Ö:Ee on iki bölü bir çarpı dört bölü altı şey buraya iki bir dakika bir saniye evet burası da bir. Ee sekiz bir dakika sekiz bölü kaç olabilir? Sekiz o da sekiz elmadır.
A:Hımm. Peki bu on iki elmanın üçte ikisiyle altı da dördü ikisi de eşit çıktı.
Ö:Evet.
A:Neden?
Ö:Çünkü bu bunun sadeleştirilmiş yani bu bunun sadeleştirilmiş halidir. Bu da bunun zaten genişletilmiş hali, denk kesirlerdir yani.
A:Hımm o çarpma o zaman kaç olucak?
Ö:Hangi çarpma?
A:İşlem.
Ö:Hım bu işlem. Hangi işlem?
A:Şurda şimdi üçte iki elma çarpı altıda dört elma.
Ö:Evet.
A:Kaç elma olcak?
Ö:Bu kaç elma olcak. Aslında bir saniye bakalım. Şey ee şey altmış dört elma çıkıyor.
A:Hımm. Sende zaten..
Ö:Altmış dört buldum.
A:Altmış dört elma bulmuş muydun? Peki şu ikincisinde de gene beş bölü onla on ikiyi çarptın ya.
Ö:Evet.
A:Orda ne buluyorsun? Niye çarptın?
Ö:Şimdi beş bölü onla on ikiyi çarptığımızda hani beş bölü on iki tane beş bölü onun toplamını buluyorum ben orda yine.
A:Peki neden çarpıyorsun orda onu soruyorum? Tamam anlamını biliyorsun on iki çarpı on iki tane beş bölü on da niye çarptın orda? Ne buldun yani çarparak?
Ö:Çarparak neyi buldum. Hani beş bölü on, on iki işte on ikinin beş bölü onunu buldum.
A:Hımm.
Ö:On iki sayısının beş bölü onunu buldum.
A:O da ne bulduk?
Ö:O da on beş bölü dört.
A:On beş bölü dört. Onun da kaç elma olduğunu bulduk.
Ö:Onun da kaç elma kırk beş elma olduğunu bulduk.
A:Tamam.
Ö: (soruyu okuyor)Şimdi "a" kesri eşittir diyelim. Şimdi bu üç tane kutu bir bölü üç her birindeki üç tane kutuya bakalım. Bu bir bölü üç, bir bölü üçü elimizde tutalım şimdi. Bir,iki,üç bu bir bölü üç. Bir,iki,üç bu bir bölü üç. Bir,iki,üç bu bir bölü üç. Bu da eşittir, bir bölü üç artı bir bölü üç artı bir bölü

üç artı bir bölü üç şuraya parantez içinde ne olduğunu yazayım. Dört çarpı bir bölü üç eşittir, dört bölü üçtür. O da eşittir, bir tam bir bölü üçtür.
A:Hım. Peki ımm o dört çarpı bir bölü üçü nasıl yazdın?
Ö:Dört hani dört doğal sayısı çarpı bir bölü üç. Dört tane doğal sayı toplanıyor ya.
A:Dört tane üçte bir.
Ö:Evet. Dört tane üçte bir.
A:Peki "b" şıkkını nasıl yaprsın?
Ö: "b" şıkkına baktığımızda şimdi eğer böyle bir şeyse bir,iki,üç bir bölü üç. Bir,iki,üç bir bölü üç. Şimdi bu böyle olcak olabilir. Bir bütün olarak da tamamlayalım eğer ne olcak olabilir. Eğer hani bu şekilde olursa bu biraz yamuk oldu ama bir,iki hani bunu birde şu şekilde görürsek bu bir bölü üçün bir üçü oluyor. O da bir bölü altı oluyor.
A:Nasıl buldun bir bölü altıyı?
Ö:Şimdi hemen şöyle diyim. Şöyle hani onu böyle olunca bir bölü üçün bir bölü üçü bir bölü üç çarpı bir bölü üçtür. O da eşittir, bir bölü altıdır. Hani o şekilde buldum. Şurası bir bölü altı. Bir bölü üç ..
A:O bir bölü üçün bir bölü üçü işlemini nasıl yaptın?
Ö:Yine payları birbirleriyle çarptım. Paydaları birbirleriyle çarptım. Bu budur. Şu da bir sileyim. Çünkü öteki işlemi alıcam. Onu aşağı bir yere yine yazalım onu. Bir bölü üç çarpı bir bölü üç o da eşittir bir bölü altı. Şimdi burda bir bölü üç arı bir bölü üç artı bir bölü altı bu da eşittir, bir bölü üç artı bir bölü üç artı şunu ikiyle şey yaparsak. İki bölü altıdır. O da eşittir bir.. İki.. dört daha şey pardon bir dakika yanlış oldu. Evet evet bir dakika. Bir saniye ya şunları şey yapcaktık özür dilerim. Ters oldu. Burası zaten bir bölü altı. Genişleteceğimiz sayılar şunlar olacaktı. İkiyle genişletelim. Bunlar iki bölü altı olur. Hemen toplayalım. İki iki dört, bir de bir var burda beş. Beş bölü altı.
A:Hım. Peki başkaa başka yoldan yapabilir miydin?
Ö:Başka yoldan bunu hani yapabilirim. Yine şu bir bölü üç kısmına kadar aynı tekrardan hani bunu bu şekilde yapardım. Başka bir şekilde yapmazdım.
A:Peki ordaki herbir kare bu bütünün kaçta kaçını gösterir?
Ö:Her bir kare hani şurda da bulduğumuz gibi bu bütünün bir bölü altısını gösterir.
A:Neden?
Ö:He?
A:Neden?
Ö:Çünkü hani bir bölü üçün bir bölü üçünü buluyoruz ya aslında. Hani bu bir bölü üç bütünün, burası da o bir bölü üçün bir bölü üçü olduğu için bir bölü altıyı gösterir. Ha aynı şekilde sizin dediğiniz gibi yapabiliriz. Bir bölü altı çarpı bir bölü altı çarpı bir,iki,üç,dört,beş,altı,yedi,sekiz hani ordan da yapılabilir.
A:Nasıl yani?
Ö:Ee bir saniye. Yok öyle olmuyor.
A:Başka türlü nasıl yapıyorsun?
Ö:Yok başka türlü olmuyor pardon. Ben bir bölü altı şeklinde hani o şekilde olunca işler karışıyor olmuyor.
A:Nasıl yani o bir bölü altı şeklinde derken neyi kastediyorsun?
Ö:Bir bölü altı çarpı burdaki karelerin sayısını yapınca olmuyor.
A:Kaç kare var orda?
Ö:Sekiz kare var. Şu benim çizdiklerim dışında. Bir dakika pardon bir,iki,üç,dört,beş,altı,yedi kare var.
A:Hımm?
Ö:Bir bölü altı çarpı yedi olunca hani başka bir sonuç elde ediyoruz. Yedi bölü altı o da eşittir, bir tam bir bölü altı oluyor ama biz burda bir bölü beş bulduk.
A:Peki neden ikisi farklı çıkıyor? Aynı çıkması gerekmiyor mu?
Ö:Ee evet. Demek ki hani burda bu şekilde bu bir bölü altı değildir demek ki başka bir sayı ya da bizim burda hani şunu yaparken düşündüğümüz mantık yanlış. İkisinden birisi.
A:Orda bir bölü altı değilse diğeri de bir bölü altı değil o zaman ilk yaptığın sonuçta yanlış oldu.
Ö:Evet yani evet bu böyleyse bu da olabilir.
A:Nerde hata yapmış olabilirsin?
Ö:Nerde hata yapmış olabilirim. Bir bölü üç çarpı bir bölü üçte hata yaptım. Çünkü bir üç şey çok yani şey dikkatsizlik bütün soruyu etkiledi. Üç çarpı üç altı değildir dokuzdur. E hatayı orda yaptım. O yüzden şurası bir bölü dokuz olcak.

A:Şurada o zaman düzelicek.
Ö:Hıhı. Evet burası da düzelecek. Bir bölü dokuz olcak. Burası bir bölü dokuz olduğu için buralarda düzelcek. Bunlar üç bölü dokuz olcak. Üç bölü dokuz şurası dabir bölü dokuz olcak. Bu da eşittir, üç üç altı, yedi bölü dokuz olcak. Ötekinde de zaten bir bölü dokuz bir bölü dokuz bir bölü dokuz bir bölü dokuz dicez hepsine. Bir bölü dokuz çarpı yedi bölü bir o da eşittir, yani daha demin benim dediğim şey aslında hani yedi bölü bir dakika.. Heh ne oldu şey yedi bölü dokuz oldu. Yedi bölü dokuz da zaten onun şeyi yoktur. Burası yanlıştır. Han, yedi bölü dokuz.
A:Yani?
Ö:Şey hani aynı sonuç.
A:Hıhı. Peki ee bunun birde bütünü çizebilir misin oraya?
Ö:Bunun hani bütün olarak düşündüğümüzde nasıldır? Hani şöyledir. Ee bu bir bölü üçü ise bir saniye..Şu onun iki bölü üçüdür. Bir dakika şöyle oldu. Bir de şu var. Bütündür. Çünkü şu bir bölü üç, şu bir bölü üç etti iki bölü üç. Artı bir bölü üç daha üç bölü üç o da bir tam oluyor.
A:Orda kaç kare oluyor toplamda?
Ö: Bir,iki,üç,dört,beş,altı,yedi,sekiz,dokuz kare olur. Her birine de zaten bir bölü dokuz dediğimizi dersek şey oluyor.

APPENDIX F

TRANSCRIPT OF INTERVIEW WITH VOLKAN

Ö: (soruyu okuyor) Eee dört böle beş kesri ee şöyle gösteriyim. Mesela bunları beş parçaya ayırdık. Hepsi birer tane. Eee dört bölü beş kesride bunların dört tanesi demektir.Şöyle dört tanesini almak demektir.(materyal kullandı)
A: He beşe bölüp dört parçasını.
Ö: Almak demektir veya çokluklarını almak demektir.
A: Hım peki dört böle beş kesrini bulmak isteseydin nasıl bulurdun?
Ö:Nasıl?
A:Yani dört bölü beş kesrini nasıl elde edersin?
Ö:Toplayarak elde edebilirim mesela.
A: Nasıl toplayarak neyle neyi toplarsın mesela.
Ö: Yani birden fazla işlemle bulabilirim. Şöyle göstereyim mesela beşte üç kesri ile beşte bir kesrini toplayabilirim. Yine dört bölü beş kesrine ulaşırım.
A: Peki başka türlü nasıl bulabilirsin dört bölü beşi?
Ö:Ee yine.
A:Hani birden fazla yöntemle bulabilirim dedin ya başka nasıl yapabilirsin?
Ö:Evet. Toplamayı yaparım, bunların sayılarını değiştiririm. İkisini iki de yaparsam bulabilirim. Çarparak da bulabilirim.
A: Çarparak nasıl bulursun?
Ö:Beşte iki kesriyle ee iki tamı çarparsam yine dört bölü beş kesrini bulurum. Çıkartadabilirim.
A:Eee peki orda beşte iki kesriyle iki tamı neden çarptık?
Ö:Eee şey iki tamı kesre çevirdim. Çünkü iki tam çarpma ardışık toplama olduğu için iki tane beş yani buna eşittir. İki tane beşte ikiyi toplamak gibidir. Çıkartarak da bulabilirim.
A:Hımm. Tamam.
Ö:Şöyle de gösterebilirim. Eski beşte üç yaparsam buda beş bölü beş kesrini ifade eder.
A:Hım. Peki diğer soruyla devam edelim.
Ö:(soruyu okuyor)Ee burda iki bölü bir yani yarım su bardağı sıvı yağ demiş.beş kişilik ikin yarım bardak gerekiyorsa on beş kişiliği bulmak için üç ile çarparım.doğal sayıları kesre çeviririm(işlem yapıyor).böylelikle üç bölü iki kesrini bulurum.yani keki hazırlamak için bir tam ikide bir su bardağı sıvı yağa ihtiyacım vardır.dörtte üç sıvı yağ beş kişilik olduğu için on beş kişilik hazırlanmak isteniyor.Bunun için bunu üçle çarparım.yine doğal sayıyı kesre çeviririm.bunda da dokuzda dört su bardağı süt bulurum buda eşittir iki tam dörtte bir kesrine eşittir.yani keki yapmak için iki tam dörtte bir su bardağı süte ihtiyacım vardır.burda iki tam ikide bir su bardağı şeker on beş kişilik istediği için bunuda üçle çarparım.ee ama bunu tam bileşik kesre çeviririm(işlem yapar).beş bölü iki yine üçle çarparım.on beş kişilik hazırlamak için yedi tam ikide bir su bardağı şekere ihtiyacım vardır.ondan sonra iki tam üçte bir su bardağı un istiyor. E bu beş kişilik.on beş kişilik olduğu için üçle çarparım tekrar(işlem yapar).bileşik kesre çeviririm.ondan sonra bunu üçle çarparım.bundan da ee yedi tamı elde ederim.yani on beş kişilik kek yapmak için yedi tam pardon yedi bardak una ihtiyacım vardır.ve iki yumurta denmiş burda onu kesre çeviririm ve üçle çarparım.buda eşittir altı tane yumurta gerektirir on beş kişilik kek hazırlamak için.on gram kabartma tozu bunla da üçü çarparım.buda eşittir otuz tam yani otuz gram kabartma tozuna ihtiyacım vardır.
A:Peki şu en başta yaptığınbir bölü ikiyle üçü çarptın üç bölü iki sonra bir tam bir bölü iki dedin ya..Eee ne anlıyosun bu çarpma işleminden?
Ö:Ya beş kişilik yani üç katına çıkartıyorum kesirleri.
A: Orda peki paydasına neden bir verdik?
Ö:Şey ee bunu verirsek bu eşittir üçtür çünkü üç tamdır bu.paydası birdir.ee şey pardon..
A:peki o çarpma işlemini nasıl yapıyosun?
Ö: çarpma işlemi ee payları birbirleriyle çarpıyorum ve paydalarıda birbirleriyle çarpıyorum.
A:Hmm üç bölü ikiyi bir tam bir bölü iki olarak nasıl yazıyosun?

Ö:Bölme işlemi yaparak üçü ikiye bölüyorum.Bir defa vardır.o bir tamdır ve bir daha artar kalan da buraya yazılır. Payda değişmez.
A:hmm peki pay payda ne ifade ediyor sana?
Ö:Payda,bir şeyin bölündüğü veya ee mesela payda onu bölmek mesela parçalara bölmek veya toplulukları bölmek .Pay ise onlardan bir kısmını almak.
A:ee peki bu bir bölü iki çarpı üç işlemini başka türlü yapabilirmiydin?
Ö:şey ee belki şu yarımı ifade ettiği için onluk kesir olarak çarpabilirim.
A:he ondalık kesre çevirip çarpabilirdim diyosun.Eee ondan farklı bir yöntemle peki yapabilirmiydin?
Ö:Hayır.ee toplayarak üç tane aynı kesri toplayarak.
A:neden?
Ö:Çünkü çarpma ardışık toplamadır.
A:Çarpma ardışık toplamadır.nasıl yaparsın peki o ardışık toplamayı? Bi gösterir misin orda?
Ö:Şöyle gösterebilirim(yazıyor).
A:ne yaptın şimdi burda?
Ö:iki bölü bir kesrini yazdım.toplamada sadece paylar toplanır.payddalar olduğu gibi yazılır.payları topladım. Hepsinin toplamı üçtür. Paydada zaten ikidir. Değişmez.
A:Hmm peki bu ardışık toplama çarpmadır dedin ya neden böyle düşündün? Hani onu anlatır mısın ne demek istediğini?
Ö:ee çarpma zaten toplamanın kısaltılmışıdır. Zaten baktığımızda aynı sonuç çıkıyor. Ve buna tek işlem yaparken buna tek işlem yapıyoruz.
A:hmm.Eee peki şu iki tam bir bölü ikiyle üçü çarparken bileşik kesre çevirden beş bölü iki çarpı üç bölü birden on beş bölü iki buldun ya. Orda neden bileşik kesre çevirdin?
Ö: Daha basit olması için daha kolay olması için.
A:çevirmeden peki yapabilirmiydik?
Ö:Evet
A:Nasıl yapardın?
Ö:Şu kesir demi?
A:Hıhı.Şu işlemden bahsediyorum.
Ö:İki tam iki bölü bir çarpı birde üç bu eşittir iki tamı olduğu gibi yazarız payları çarparız paya yazarız ve paydalarıda çarpar paydaya yazarız.
A:Ne yaptın?
Ö:Burda verildiği gibi iki tamı direk yazarız. Payları çarparız ve paydaları çarparız. Payları çarpar paya yazarız paydaları çarpar paydaya yazarız.
A:peki o iki tam üç bölü iki buldun orda diğerinde iki tam yedi tam bir bölü iki buldun. Eşit mi bunlar birbirine?
Ö:Hayır.
A:Peki neden farklı çıktı?
Ö:Çünkü ee şey tam tamıda çarpmam gerekiyordu . tamıda bunla çarpcaktım.iki ile üçü çarparım altı. Ee bu ikisini çarparım ve ikiyle biri çarparım iki.
A:Bu altı tam üç bölü iki yedi tam ikide bire eşit mi?
Ö:Evet.
A:Neden?
Ö:ee zaten altı tamımız vardı. Üçün içinde iki bir defa vardır o zaman yedi tam olur. Ve zaten kalanda birdir.paydada kendinden yazılır ve yedi tam ikide bir kesrini ifade eder.
A:Hmm peki bu çarpmadan ne anlıyorsun?iki tam bir bölü ikiyi su bardağı şekeri üçle çarptın ya burda on beş bölü iki buldun mesela sonrada. Bu çarpmadan ne anlıyosun?
Ö:ee mesela iki buçuk ile üçü çarpmak.
A:İki buçukla üçü çarpmak.Iım peki bunu başka türlü türlü yapabilirmiydin?
Ö: Hayır.
A:Başka bir yöntem kullanamaz mıydın? Başka bir yöntem ??
Ö:Bu alınabilir ama yani..
A:Mesela neyi kullanabilirdin?
Ö: Neyi kullanabilirdim. Başka bir şeyi kullanamazdım. Veya kesirleri genişletip yapardım. Oda aynı şey .
A:Genişletip yapabilirdin..ee peki bir tam bir bölü iki su bardağı işte şey dedin ya burda sıvı yağ buldun ya sonucu. Ee ne anlıyosun bu bir tam bir bölü iki su bardağından?

Ö:Bir buçuk su bardağı sıvı yağ.
A:Bir buçuk su bardağı sıvı yağ. Peki ee diğerinden he şurda iki tam bir bölü üç su bardağı alın demiş bundan ne anlıyosun?
Ö:iki tam üç bölü şumu?
A:Hehe iki tam üçte bir.
Ö: E ondan ne anlıyorum. İki bardak ve bir bağın üçte biri.
A:İki bardak ve bir bardağın üçte birini anlıyosun.
Ö:Şöyle gösterebilirim.Şu bir tam şu da bir tam ve üçte bir ve şöyle (materyal kullandı). Şöyle gösterebilirim. İki tam var ve üçte bir.
A: He iki tam üçte bir. Peki devam edelim diğer soruyla.
Ö: (soruyu okuyor) Eee burda bir doktor ve öğretmenin toplam kırk beş tane kitabı varmış. Öğretmenin kitaplarının beşte dördü ve doktorun kitaplarının üçte ikisi romanmış. Öğretmen ve doktorun kitap sayılarını bulunuz. Ee o zaman heh kırk beşi beşe bölerim ve beşte dördü roman olduğu için beşte biri de normal kitaptır. Beşe bölersem beşte birini bulurum. Ve normal kitabı itapları zaten kırk beş taneçıkartırım ondan. Kırk beşin içinde beş dokuz defa vardır. Dokuz ee öğretmenin kitaplarının beşte biri dokuz tane kitapmış. Zaten beşte dördü romandı. Ve geriye kalanda beşte birdir. Ve buda normal hikaye kitabıdır. Kendi kitaplarını bulmak istersek ee şey neyse e bunu devam ettirelim bunun kendi kitapları zaten kırk beş tane. Onun ee şey doktorun kitaplarının üçte ikisi romanmış. Bunun içinde kırk beşi de üçe bölerim. Üçte birini bulmak için(işlem yapıyor).
On beş doktorun kitaplarının üçte biri on beş taneymiş. Üçte ikisi de romanmış. İlk önce öğretmenin kitap roman sayısını bulurum. Bu beşte biriydi ve onun toplam kitapları beşte beştir. Dokuzu beşle çarparım. Yok dörtle çarparım beşte dördü roman olduğu için. Ve otuz altı sonucunu bulurum. Öğretmenin otuz altı tane romanı olduğunu bulurum. Öğretmeninse üçte ikisidir. On beş üçte biri olduğu için bunu da ikiyle çarparım. Ve onunda otuz tane roman kitabının olduğunu bulurum.
A: Orda niye ikiyle çarptın.
Ö: Çünkü bunun tamamı üç bölü üçtür. Ve ben burda üçte birini bulmuştum. Roman sayıları üçte ikisi olduğu için üçte biri ikiyle çarparsam üçte iki olduğunu şey yapabilirim. Onun için ikiyle çarptım. Burda iki tane olduğu için.
A: Hımm. Peki bunu başka türlü çözebilirmiydin? Bu problemi?
Ö: Başka türlü…Hayır.
A: Eee kıkbeş kitabın beşte dördünü peki hangi işlemle bulursun?
Ö: Beşte dördünü,beşe bölüp dört ile çarparak burda yaptığım gibi.
A: beşe bölüp dörtle çarparsan. Peki bu ee kesirlerle işlem yapsaydın kırk beş kitabın beşte dördünü nasıl bulurdun?
Ö: Kesirlerle işlem yapsaydım ee kırk beşi kesre çevirirdim. Şöyle gösterirdim. Altına bir koyarım . zaten beşe bölcektim. Kesirlerle bölme işlemi yaparım. Şey beşe bölcektim heh. Eee kesirlerle bölme işlemi yaparken ilk sayı durur ikinci sayı ters çevrilir,çarpılır. Ve kırk beş bölü beş sonucuna ulaşırım. Buda dokuzdur. Yani burda bulduğum gibi dokuz. Ondan sonra da dörtle çarpardım dokuzu bunuda kesre çeviriyim. Buda eşittir otuz altı bölü bir oda eşittir otuz altıdır. Yani sonucu bulduğum gibi otuz altı.
A: Peki bu her zaman doğrumudur?
Ö:Evet.
A:Tamam devam edelim diğer sorudan.
Ö: (soruyu okuyor) Zaten on üç koli on üç tane kolisi varmış. Onun için en başta on üçle on ikiyi çarparım. Yüz kırk altı yumurta vardır on üç kolide ve bir tane de yarım koli vardır yarım. Onun için on ikiyi ikiye bölerim. O ikiye bölündüğü için. Ve altı sonucuna ulaşırım. Yani yarım kolide altı yumurta vardır. Ve yüz kırk altıyla da altıyı toplarım.
A:Yani yüz elli iki yumurtası vardır dersin. Peki bu ıımm yani bunu başka türlü çözebilirmiydin bu soruyu?
Ö:Eee kesir kesirlerle.
A:Nasıl yapardın kesirlerle?
Ö:On üçü kesre çevirirdim on üç tamı ve on iki yumurta olduğu için onu da kesre çevirirdim. Çarpardım. On ikiyle o üçü çarpınca yüz kırk altı bulurum. Ve birle biri çarpınca birdir. Buda eşittir yüz kırk altı yumurtadır. Bir kolide on iki yumurta varmış iki bölü yok tam tersi bir bölü ikiyle de çarpı on iki bölü biri çarparım. Buda eşittir altı. Ve yüz kırk altıyla da altıyı toplarım. O da artı eşittir yüz elli ikidir.

A:Peki kesirleri kullanarak çözebilir miydin bu soruyu?
Ö:hayır.
A:Böyle yapabilirdin.
Ö:Hıhı.
A:On üç tam bir bölü iki yumurta kolisinden ne anlıyorsun?
Ö:On üç tane tam koli ve birde yarım koli.
A:On üç tane tam koli bir de yarım koli. Hım peki. Tamam devam edelim diğer sorudan.
Ö: (soruyu okuyor)Dört çarpı altıda bir. Yani bu ee..
A:Şimdi soruyu anladık mı önce ne diyor bize?
Ö:Evet. Bir bütünü göstermektedir bize aşağıdaki yer. Aynı bütünü düşünerek verilen işlemleri dikdörtgensel alan üzerine modelleyerek yapınız diyor. Yani bu işlemi buraya modelliyeceğiz. Ee bunu nasıl ee şey şöyle ya da bir dakika. Evet şöyle yapabilirim. Şöyle bölebilirim. Çünkü şöyle fazla olur. Altıya mesela altıya bölerim. Şöyle çizginin üzerinden iyice gideyim. Altıya bölerim bu dört tamı zaten bir kesre çeviririm. Altıya böldüm. Bir,iki,üç,dört,beş. Bir dakika yaa. Şöyle bir tane daha çıkartayım. Şey bir dakika. Altıya böldüm bunu ve bir tanesini alacağım. Bir tanesi. Zaten biz bunu bire bölmek zaten bir tam olduğu için. Yani ikiye bölseydik. Şöyle bölerdik ama bire bölmek diye bir şey olamaz. Onun için direk bunun dördünü alırım. Yani altıda birin dördü. Bunu nasıl gösterebilirim. Altıda bir.(şekil çizdi)
A:Peki burda bir şey soracağım. Altıya böldün ya yarısını alırım dedin. Bu büyüklüğü neye göre belirledin?
Ö:Büyüklüğü? Şu altıda bir kesrine göre belirledim.
A:Eee peki burda bir,iki,üç,dört kare büyüklüğünde aldın ya.
Ö:He evet.
A:Neden atıyorum tamamını almadın veya bir kare almadın? Onu soruyorum anlatabildim mi?
Ö:Şey ee tamamını da alabilirim.
A:Yo silme bunu söyledim soruyorum sadece neden öyle aldın?
Ö:Çünkü zaten altıya böldüm şurasını ve bunu istediğimiz kadar uzatabiliriz.
A:Yani o büyüklük önemli değil diyorsun?
Ö:Hehe.
A:Tamam onu soruyodum. Tamam şimdi altıda biri buldun. Dört çarpı altıda biri nasıl modelliyorsun?
Ö:Zaten bu sıfıra böldük ve bunun dördünü alacağım. Şöyle gösterebilirim onu da dört tanesini. Şöyle yaparım. Bide şurayı alayım(şekil çizdi).Yani bu şekilde altıda biridir. Altıda bir olarak buldum.
A:Hımm? Yani? Sonuç neye eşit çıktı?
Ö:Altıda bire ama.
A:Sonuç altıda bire. Peki bu çarpmanın sonucu neye eşit?
Ö:Dört bölü altı.
A:Altıda dört yani.
Ö:Hıhı.
A:Peki altıda dörtle altıda bir farklı çıktı. Neden farklı çıktı?
Ö:Eee bilemiyorum.
A:Peki bu dört çarpı altıda birden ne anlıyorsun? Bu çarpmadan ne anlıyosun?
Ö:Dört tane altıda bir.
A:Dört tane altıda bir.
Ö:Hıhı.
A:peki bunu modellerken dört tane altıda biri nasıl modellersin?
Ö:Dört tane altıda biri. Dördün şey altıya bölüp şöyle dört tanesini alarak modellerim.(çizdi)
A:Dört tane altıda bir olduğu için her bir altıda bir oluyor.
Ö:Evet.
A:Dördünü aldın.
Ö:Şöyle olur.
A:Yani ne buldun?
Ö:Yani altıda dört buldum. Çünkü altıya böldüm dördünü aldım.
A:Hım. Peki bu her zaman böyle midir?
Ö:Her zaman böyledir.
A:Hım. Peki şu bütüne geri dönelim. Bu bütün ee hani orda kaç tane üç tane dikdörtgenim var değil mi benim?

Ö:evet.
A:O bir bütünü gösteriyorsa. Bu bütünün altıda birini peki nasıl gösterirsin?
Ö:Bu bütünün altıda birini. Şöyle bunları ikişer parçaya bölerek gösterebilirim. Altı sonuçta bir,iki,üç,dört,beş. İki,dört,altı. Altıda bir ise şura olur.
A:Altıda bir orası oldu. Neden?
Ö:Çünkü bunu altı parçaya böldüm. Şöyle ibr,iki,üç,dört,beş,altı ve birini aldım.
A:altı parçaya böldün, birini aldın. Peki bu bütünü düşünerek modelleseydin nasıl modellerdin dört tane altıda biri?
Ö:Bütün düşünerek. Dört tane altıda biri şöyle modellerdim.(şekil çizdi)
A:Hım. Yani sonucum ne oldu?
Ö:Sonucumuz değişmezdi.
A: Yani ne olurdu?
Ö:Dört bölü altı.
A:Dört bölü altı. Peki burda böyle modelledin burda daha farklı modelledin. Neden?
Ö:Yoo aslında aynı.
A:Nasıl aynı?
Ö:Çünkü bunda altı parçaya böldük. Çünkü büyüklükleri önemlidir. Önemli değildir. Bunu da altı parçaya böldük dördünü aldık. Bunu da altı parçaya böldük dördünü aldık.
A:Büyüklüğü neden önemli değil?
Ö:Şey sadece büyüklükleri eşit olsa olur. Çünkü sonuçta eşit olunca..
A:Aynı bütünü mü ifade ediyor peki burdaki ile burdaki altıda bir?
Ö:evet.
A:Neden?
Ö:Çünkü bunada altıda dört deriz bunada altıda dört deriz. Ama bundan daha büyük çizebiliriz.
A:Hım.
Ö:O yüzden.
A:Peki devam edelim diğer sorudan.
Ö: (soruyu okuyor)Yani burda kesrin kesri olduğu için çarpma işlemi yaparım(işlem yapıyor). Burdan da sekiz bölü on beş kesrine ulaşırım.
A:Hım. Bu çarpmayı nasıl yaptın peki?
Ö:Bu çarpmayı nasıl yaptım. Payları birbirleriyle çarptım paya yazdım. Paydaları birbirleriyle çarptım paydaya yazdım.
A:Hım. Peki kesrin kesri olduğu için çarpma yaparım dedin ya.
Ö:Evet.
A:Kesrin kesri ne demek? Ne anlıyorsun?
Ö:Kesrin kesri mesela beşte dördün şey kesir kartlarıyla gösterebilirim. Beşte dördün üçte ikisidir. Üçte iki. Beşte dördün üçte ikisidir. Şöyle de gösterebilirim.(materyal kullandı)
A:Şuraya koyarsak daha rahat görücem. Heh.
Ö:Bunlara bakarsak ikisini üstüne koyarız. Burdan anlıyabiliriz burdaki şekilden. Eee bunda bir,iki,üç,dört,beş.. on beş tane vardır toplamda. Ve bunların ee şey sekizi ise yani sekizi ise cevaptır. Eee yani on nasıl diyim beşte dört şu şekilde onun üçte ikisini istiyor. Onun için üçe bölerim onuda ikisini alırım. Yani şurasının üçte ikisi.(materyal kullandı)
A: He o koyu renk oluyor. Üçe bölüp ikisini alıyorsun oda on beşte sekiz diyorsun. Eee peki bu dört bölü beş çarpı iki bölü üç değil de mesela dört bölü beş çarpı sekiz bölü on iki olsaydı. Sonucu nasıl bulurdun?
Ö:Dört bölü beş çarpı?
A: sekiz bölü on iki olsaydı. İki bölü üç yerine sekiz bölü on ikiyle çarpsaydın napardın nasıl bulurdun sonucu?
Ö: Yine aynı şekilde bulurdum. Bunlara ikisini sadeleştirebilirim dörde bölerim bunu bir bunu da dörde bölersen üç. Buda beşle üçü çarparım on beş birle sekizi çarparım sekiz.
A: Ne oldu peki?
Ö:Aynı sonuca ulaştım.
A: Neden peki aynı sonuç çıktı?
Ö:Çünkü ikisi birbirine denk kesirdir.
A: neyle ne denk?

Ö:üçle iki sekiz bölü on ikiye eşittir. Bunu şöyle anlayabilirim. Ee şimdi şu ikisini çarparım yirmi dört eder bu ikisini de çarparım oda yirmi dört eder ve burdan da ikisinin birbirlerine denk olduğunu anlarım.
A:Hım peki denk kesir ne demek?
Ö: Denk kesir ee aynı kesir. Birbirleriyle aynı olan.
A: Birbirleriyle aynı olan.
Ö:Aynı şeyi ifade eden.
A:Peki bide iki bölü üçle üç bölü ikiyi çarpsaydın.
Ö:İki bölü üç.
A:İki bölü üçle üç bölü ikiyi çarpsaydın ne bulurdun sonucu?
Ö:Altı bölü altı o da eşittir altı. Yok bir.
A:Neden peki bir oldu bu?
Ö:Eee bunun paydası altı oldu payı da altı oldu. Eee paydayı paya bölersem yok payı paydaya bölersem bir sonucuna ulaşırım.
A:Hım peki bu çarpmadan ne anlıyorsun?
Ö:Bir tamı. Yani ee üçte ikinin pardon iki bölü üçün üç bölü ikisi.
A:İki bölü üçün üç bölü ikisi o da bir tama eşittir diyoruz. Peki devam edelim.
Ö: (soruyu okuyor) Yani bu yarımın bir bölü ikinin bir bölü dördüdür. Yani bu eşittir. Yarımın çeyreğidir. Modelleyerek gösteriniz diyor. Şunlardan da gösterebilirim.
A:Tamam.
Ö:İkide bir.. Şey ikide birin dörtte biridir. Böyle baktığımızda ikide bire yani şöyle ikiye böldük. Dörtte birini aldık. Dörde böldük ve birini aldık o ikide birin. İkide bir şurasıydı. Burayı dörde böldük. Ve birini aldık. O da buraya eşittir. Ve sekizde bir. (materyal kullandı)
A:Yani sekiz de birdir.
Ö:Hıhı.
A:Peki orda onu modelleyebilir misin?
Ö:Evet.
A:Yani çizebilir misin oraya?
Ö:Hıhı.Şöyle bunuda dörde bölerim. Ve ikide birdi bu ve bunu da dörtte birini alırım. Dört parçadan birini alırım. Yine burasının bulurum(şekil çizdi).Aynı burda gördüğümüz gibi. Üst üste gelen kısım.
A:Hım.Şurayı gösterelim sekizde bir diye. Peki diğerine bakalım.
Ö:(soruyu okuyor)Dörtte bir kesri. Bunun ikide biri yine aynı kesre ifade gelmektedir. Çünkü çarpma değişken olabilir. Değişken özelliğe sahiptir.
A:Peki burda nasıl yaptın? Bu işlemden ne anlıyorsun önce?
Ö:Çeyreğin yarımı.
A:Çeyreğin yarımı. Orda peki gösterir misin nasıl yapılıyor çeyreğin yarımı?
Ö:Bir bütünü dört parçaya böldük. Ve birini aldık. Yani çeyreğini aldık. Ve bunu iki parçaya böldük. Böldük şöyle. Ve o dörtte birin şöyle dörtte birin bir,iki,üç dörtte birin birini aldık.
A:Hım.
Ö:İkide birini aldık.
A:Dörtte birin yarısını aldık. O da..
Ö:Sekiz de bire eşittir.
A:Sekizde bire eşit oldu. Peki bunu da modelleyebilir misin?
Ö:Evet.
A:Anlatarak çizelim.
Ö:Ee dörde bölerim ilk önce. Dörde bölerim. Ondan sonra birini alırım. Ondan sonra bunu ikiye bölerim. Ve bu taralı kısmın yani iki tane parça yarısını alırım. Şurayı da alabilirim farketmez. Ve yine aynı şekilde kesiştiği yeri şöyle de olabilir.
A:Orası da sekizde bire eşit olur diyorsun yani. Peki bu iki işlemin sonucu hakkında ne söyleyebiliriz peki?
Ö:İkiside aynıdır. Çünkü çarpma değişkenlik özelliğine sahiptir.
A:Ne demek peki bu değişkenlik özelliği?
Ö:Yani bu ikide birle dörtte bir yer değiştirince de sonuç aynı çıkar. Değiştirmessek de yine aynı sonuç çıkar demektir.
A:Peki o şeffaf kesir kartlarıyla sen bize başka bir çarpma yapıp gösterebilir misin? Kendin kurgulayacağın bir çarpma.

Ö:Evet.
A:Ne anlıyorsun bu çarpmadan anlatıp gösterebilir misin?
Ö:Mesela altıda üçü bir,iki,üç,dört,beş,altı,yedi,sekiz altıda üçün yada şöyle koyayım. Altıda üçün sekizde biri. Şimdi bir tane bütünü altıya bölerim. Üçünü alırım. Ondan sonra bunu sekize bölerim. Bu altıda üç olan kısmın sekizde birini alırım. Yani şöyle altıda bir pardon altıda üç, onun sekizde birini alırım. Sekizde birini alırım şöyle. Ve kalan kısım burasıdır.(materyal kullandı)
A:Altıda üçün sekizde biri…
Ö:Burasıdır.
A:Koyu yer.
Ö:Hehe. Koyu yer.
A:Yani kaçta kaç olur?
Ö:Bir,iki,üç,dört, beş, altı, yedi, sekiz. Bir,iki,üç,dört,beş,altı. Kırk sekiz bölü üç. Pardon kırk sekizde üç.
A:Kırk sekizde üç olur. Peki he şuraya bide ne söylediğimizi yazalım.
Ö:Çarpma değişkenlik özelliğine sahiptir. Bu yüzden iki tane çarpma işlemini değiştirirsek de aynı çıkar sonuç.
A:Şu sonucu da oraya yazalım sekizde bir diye.
Ö: (yazdı)
A:Tamam devam edelim diğer sorudan.
Ö: (soruyu okuyor)Tahmin ediyim. İki tam dokuzda bir yaklaşık olarak iki tama yakındır. Çünkü dokuz da bir sıfıra yakındır zaten iki tamımız da vardı. Bu yüzden iki tama yakındır. Üç tam sekizde yedi ise dört tama yakındır. Bunun sebebi zaten üç tamımız vardı. Ve yedi bölü sekiz bir tama yakın olduğu için eee ikisini toplarsak dört tamdır. Ve iki tamı toplarsam altı tam eder.
A:Neden topladın orda?
Ö:Pardon çarpma.
A:He çarpma olduğu için çarptın.
Ö:Evet.
A:Yaklaşık olarak sekiz tama yakındır dedin.
Ö:Hıhı.
A:Peki bu çarpma işlemini yapabilir misin bana? Sonuçla tahmini bir kıyaslayalım.
Ö:Şu ikisini çarparım. İki ile üçü altı bulurum. Dokuzla sekizi çarparım yetmiş iki. Eee şey birle yediyi çarparım yedi bulurum. Ama bu pek yakın olmadı. Bu beş tama yakın oldu.
A:Bu neye yakın? Altı tam yetmiş ikide yedi beş tama neden?
Ö:Bilmiyorum.
A:Beş tama yakını nasıl buldun? Altı tam yetmiş iki bölü yedinin.
Ö:Şey ben bunları bide bileşik kesre çevirerek bulabilirim. Belki o zaman daha yakın çıkabilir. Bunu yanlış yapmış olabilirim.
A:Peki onu da şurdan heh tepeden.
Ö:Dokuzla ikiyi çarparım on sekiz. Bir eklerim on dokuz bölü dokuz. Diğeri ise üç tam sekiz bölü yedi. Sekizle üçü çarparım yirmi dört. Yedi eklerim eee yirmi dört, otuz bir bulurum. Bu ikisini çarptığımda on dokuz bölü dokuz şöyle çarptığımda otuz birle on dokuzu çarparsam beş yüz seksen dokuz bulurum. Ve dokuzla sekizi çarptığımda yetmiş iki bulurum. Ee bunu tama çevirmek için beş yüz seksen dokuzu yetmiş ikiye bölerim. Şöyle yapayım. Yetmiş ikiye bölerim. Eee beş defa desem beş kere iki on ve yedi kere beş otuz beş fazla gelir. Yok bir dakika beş kere iki on onun sıfırını yazarım elde var bir. Beşle yediyi çarparım yetmiş pardon otuz beş bir eklerim. Bir dakika. Yerine yazarım. Yedi kere beş otuz beş otuz altı. Yüz otuz altı bulurum. Demek ki bunun sonucu beşten fazladır. Yediyle çarparım. Yedi kere iki on dört ee onun dördü yazarım. Elde var bir. Yedi kere yedi kırk dokuz. Bir eklerim elli. Dört yüz elli bulurum. Demek ki yediden de büyüktür sonuç. Dokuz verirsem dokuz kere iki on sekiz. Aa bir dakika şuraya yazcaktım.
A:Demin neden başa yazdın?
Ö:Karışıklık yaptım. On sekiz. Kafam karıştı.
A:Neden kafan karıştı?
Ö:Şey ee hangisi olduğunu unuttum.
A:Düşün biraz. Nereye yazacağını mı karıştırdın?
Ö:Evet.
A:Normalde nasıl yapıyorsun?

Ö:İşte onu unuttum.
A:Başka bir bölme düşünebilirsin. Mesela ıı otuz altıyı on ikiye bölebilirsin.
Ö:Üç defa vardır da. He şey en başa yazıyodun. Tamam teşekkür ederim. Ee dokuzla ikiyi çarparım on sekiz. Eee yok bir dakika. Sekizi yazarım buraya. Dokuzla yediyi çarparım. Altmış üç.
A:Orda ne yaptın şimdi?
Ö:Yok yanlış yaptım. Çünkü onla çarparsam yedi yüz yirmi çıkar. Dokuzla çarpınca sekiz yüz üç çıkmaz.
A:Peki biraz önce otuz altıyı on ikiye böldün. Bir böl bakıyım nasıl yaptın?
Ö:Üçleçarparım. Üç kere bir üç. Üç kere iki altı.
A:Hım nasıl yazdın onu. O kalsın orda onu silme?
Ö:O zaman dokuzla yediyi çarparım. Altmış üç. Dokuzla ikiyi yok bir dakika. Eee altmış üç aaa…Fazla çıkıyor.
A:Fazla çıkıyorsa demek ki sekizi dene birde o değil.
Ö:Yediyle sekizi çarparım. Yedi kere sekiz elli altı. Şey ee…
A:Hıım?
Ö:Tamam. Sekizle yediyi çarparım elli altı. Beş tamımız var. Sekizle ikiyi çarparım on altı. Baş tamı da eklerim. Yirmi bir. Demek ki şey az önce yanlış yaptım. Sekiz de değil.
A:Onu bir dakika nasıl yaptın. Sekizle yediyi çarptın. Elli altı.
Ö:Elli altı. Altıyı buraya yazdım. Beş tamı kenara koydum. Sekizle ikiyi çarptım on altı. Beşi de ekledim yirmi bir. Altı yüz yirmi bir çıkıyor. Ama beş yüz seksen dokuzdan daha fazla bu yüzden yediyi deneyeceğim. Ee yedi kere yedi kırk dokuz. Dokuzu yazarım buraya. Elimizde dört tam var. Yedi ile ikiyi de çarparım on dört. Bir dakika. Yedi kere yedi kırk dokuz. Uff…
A:Peki şöyle bir soru soralım sana. Yetmiş ikiyi yirmi dörde böler misin?
Ö:ikiyi denerim. İki kere iki dört. Bir dakika. İki kere dört yok iki değil. Üçü deniyim. Üç kere iki altı. Üç kere dört ….. Bu soruyu geçsek.
A:Tamam şimdi gerçek sorumuza dönelim tekrar. İki tam dokuzda biri tam sayılı kesre çevirdin. On dokuz bölü dokuzdur dedin. Üç tam yedi bölü sekizi de çevirdin. Otur bir bölü sekizdir dedin. Çarptın bunları. Paydaları çarptın, payları çarptın.
Ö:Evet.
A:Beş yüz seksen dokuz bölü yetmiş iki dedin. Eee biraz önce de mesela şunları çaparken. Üç kere iki altı dedin. Sonra tamları çarptın işte eee payları çarptın, paydaları çarptın. Yedi bölü yetmiş iki buldun. Şimdi bu ikisini sonucunun aynı çıkmasını mı bekliyoruz?
Ö:Hayır. Çünkü bir tahmin ediyoruz. Yuvarlıyoruz mesela. Dokuzda biri iki tama yuvarlıyoruz. Birinde çoğaltıyoruz.
A:Yok onu sormadım. Şu yaptığında tahmin etmedin normal çarptın. Altı tam yedi bölü yetmiş ikidir dedin. Şurda da beş yüz seksen dokuz bölü yetmiş ikidir dedin. Bunların sonucunun aynı çıkmasını mı bekliyorum?
Ö:Hayır.
A:Neden?
Ö:Çünkü ee burda tahmin ediyoruz, yuvarlıyoruz. Ama burda yuvarlamadan yapıyoruz. Onun için eksik yada fazla çıkabilir.
A:Tamam tahmin ettiğin ayrı. Tahminden sekiz buldun yuvarlayıp.
Ö:Hıhı.
A:Sonra bide çarpmanın kendisini yap dedim ben sana o zaman da noldu bi şöyle yaptın birinci yol. Bide dedin ki bileşik kesre çevirerek de yapabilirim dedin, şunu yaptın.
Ö:Evet.
A:Şimdi bunun sonucunu böyle buldun. Bunun sonucunu böyle buldun. Bunların sonucunun aynı çıkmasını mı bekliyoruz normalde? Onu soruyorum.
Ö:Evet.
A:Tahmin etmedik çünkü sonuç yaptık.
Ö:Hıhı evet.
A:Peki şunu peki bileşik kesre çevirebilir misin? Aynı mı çıkıyor bir görelim.
Ö:Evet evet daha rahat olur. Şey şuraya yapabilirim. Yetmiş ikiyle altıyı çarparım. Altıyla ikiyi çarparım on iki. Elde var bir. Yedi ile altıyı çarparım kırk iki. Altı kere yedi kırk iki. Bide elde vardı kırk üç.
A:Hıhı.

Ö:Dört yüz otuz iki. Buna bide yediyi eklerim. Dört yüz otuz dokuz bulurum. Ama burda beş yüz seksen dokuz buldum.
A:Dört yüz otuz dokuz bölü yetmiş iki o da beş yüz sesken dokuz bölü yetmiş iki. İkisinin sonucun aynı çıkmasını bekliyorduk demi normalde?
Ö:Evet.
A:Peki niye farklı çıktı?
Ö:Ya bunda yada bunda bir yanlışlık yapmış olabilirim.
A:Hangisinde yanlışlık yapmış olabilirsin?
Ö:Şu olabilir.
A:Neden?
Ö:Eee çünkü tamları tamlarla çarpıyorduk ama şunlarla çarpıyorduk bide galiba öyle hatırlıyorum ama?
A:Çarptın orda da ama. Tamları çarptın onları çarptın. Peki devam edelim diğer sorudan.
Ö: (soruyu okuyor)Bunu işlem yaparak anlayabilirim(işlem yapıyor). On beş bölü yirmi dört kesrini buldum. On beş bölü şey yirmi dört kesrini buldum. Eşit olmasını anlamak için yine az önceki yaptığım işlemi yaparım. Beşle yirmi dördü çarparım. Eee yüz yirmi bulurum. On beşle de sekizi çarparım onla da yüz yirmi kesri yüz yirmiyi bulurum. Demek ki bu iki kesir eşittir.
A: Bu işlemin sonucu ona eşittir diyosun. Peki bu işlemden ne anlıyosun beş bölü altı çarpı üç bölü dört eşittir beş bölü sekiz işleminden ne anlıyorsun?
Ö:Eee bu işlemden ne anlıyorum. Bir kesri yok beş bölü altının üç bölü dördünü anlıyorum.
A:Beş bölü altının üç bölü dördünü anlıyosun. Peki sonuç ne ifade ediyor çarpmanın sonucu sana? Beş bölü sekiz ne ifade ediyor?
Ö: Bir çokluğu veya bir bütünü sekize bölüp sekiz eş parçaya bölüp onun o sekiz parçadan beşini almak.
A:Sekiz parçadan beşini almak. Hım. Diğer soruyla devam edelim.
Ö: (soruyu okuyor)Eee burda ilk önceilk şunları çarparım. İki bölü üç ile bir bölü beş eşittir on beş.
A:Ne yaptın orda anlatarak yapalım.
Ö:Eee payları çarptım paya yazdım. Paydaları çarptım paydaya yazdım.
A:Hıhı.
Ö:Eee ondan sonra bu kesri de şey üç bölü dörtle çarparım. On beşte dört altmış eder.
A:Ne yaptın onu da anlatalım.
Ö:Yine payları çarptım paya yazdım. Paydaları çarptım paydaya yazdım. Ve on iki bölü altmış kesrini buldum.
A:Hım peki bunun en sade halini bulsaydın nasıl bulabilirdin?
Ö:Altıya bölerdim. Bunu altıya bölersem iki bulurum bunu altıya bölersem on bulurum. Bunu tekrar ikiye bölerim. Bir bulurum bunu da tekrar bölersem beş bulurum. Ve bir bölü beş kesrini bulurum.
A:Eee peki burda niye önce şu ikisini çarptın sonra onu çarptın.
Ö:Şey ee ilk ikisini bu ikisini de çarpabilirdim. Şu ikisini de çarpabilirdim. Ama ilk olarak o ikisini çarpmak istedim.
A:Yani herhangi ikisini çarpıp sonra diğerini de çarpabilirdin. Neden peki böyle yapabilirdin?
Ö:Çünkü hepsi çarpma işlemi eğer toplama olsaydı bunun içinde ilk önce çarpma işlemlerini yapardım. Çünkü işlem sırasında çarpma ve bölme daha önde olur. Onun için ilk önce çarpar ondan sonra toplardım. Bunda hepsi çarpma olduğu için zaten ikisiyle de ilk önce çarpabilirim.
A:Diğer soruyla devam edelim. Önce bu çarpma işlemlerini yapalım.
Ö:Tamam.
A:Nasıl yaptığımızı anlatarak yapalım.
Ö:Eee payla payı çarptım üç. Paya yazdım. Paydayla paydayı çarptım. Dörtle ikiyi yani sekiz buldum. Altındakine geçeyim. Payla payı çarparım yani yediyle beşi çarparım. Otuz beş bulurum. Payda sltıyla ikiyi çarparım. On iki bulurum.
A:Hım. Peki şimdi birinci çarpmada işte çarpımın sonucunu yani üç bölü sekiz olarak buldun. Peki bu üç bölü sekizi üç bölü dört ve bir bölü ikiyle kıyaslayabilir misin?
Ö:Nasıl?
A:Yani üç bölü sekiz üç bölü dörtten büyük mü küçük mü? Bir bölü ikiden büyük mü küçük mü? Bunu soruyorum hani kıyaslayabilir misin üç bölü sekizle?
Ö:Kıyaslarım. Paydalarını eşitleyerek.
A:Yapalım nasıl yaparsın?

Ö:Iıımm bunların ekokda birleştiririm paydalarını bunların ekoku da sekizdir.
A:Şuraya bir çizgi çizelim çekelim de karışmasın öbür soruyla. Hıh tamam.
Ö:Eee bunuda zaten sekiz olduğu için birle çarparım. Dörtle ikiyi çarparsam dört bulurum. Pardon sekiz bulurum. İkiyle üçü çarparsam altı bulurum. Bunla ikiyle dördü çarparsam sekiz dörtle biri de çarparsam dört bulurum. Bunu da zaten kesrin aynısını yazarım. Yani burda en büyüğü üç bölü dört kesridir. Ondan sonra bir bölü iki ondan sonra üç bölü sekiz.
A:Yani üç bölü sekiz sonuç hepsinden küçük çıkıyor burda değil mi? Eee peki burda şunları nasıl yaptın? Hani altı bölü sekizi nasıl buldun?
Ö:İkiyle genişlettim kesri. Bunda da dört ile genişlettim.
A:Peki diğerini bide otuz beş bölü on iki buldun sonucu bunu yedi bölü altı ve beş bölü ikiyle kıyaslayabilir misin?
Ö:Evet. Eee bunların ekoku on ikidir. İki ile altıyı çarparım on iki. İkiyle yediyi çarparım on dört. Ee altıyla ikiyi çarparım on iki altı ile beşi çarparım otuz. Buda zaten on iki bölü otuz beş. Bunla da sonuç en büyüktür.
A:Peki o kıyaslamayı nasıl yapıyorsun?
Ö:Eee şey paydalrı zaten eşit paydaları eşit olan kesirler de payı büyük olan diğerlerinden daha büyüktür. Ona göre yapıyorum.
A:Hım. Burda sonuç en büyük çıktı ama birinci yaptığında da sonuç en küçük çıktı.
Ö:evet.
A:Niye böyle çıktı sence? Birinde büyük çıkarken birinde küçük çıktı.
Ö:Eee çünkü burda basit kesirleri çarptık. Burda ise bileşik kesirleri çarptık.
A:Hıı?
Ö:O yüzden.
A:Bu durumda ıı çarpma işleminin sonucu hakkında ne söyleyebilirsin? Yani her duruma bunu genelleyebilir miyiz? Her durumda doğru mudur?
Ö:Evet.
A:Yani hep basit kesirleri çarptığım da sonuç işte büyük çıkacak.
Ö:Yok.
A:Küçük çıkıyor. Bileşik kesirle çarptığın da büyük çıkacak diye her duruma genelleyebilir miyiz?
Ö:Hayır.
A:Neden?
Ö:Eee çünkü mesela bu altı yerine sekiz olsaydı bu da yedi olsaydı yine pardon bu şey altı da yedi buda dört olsaydı bu beş olsaydı altı ile dördü çarpardım yirmi dört. Yedi ile beşi çarpardım otuz beş bu sefer kesir daha küçük olurdu.
A:Şunlarla kıyasladığın da peki?
Ö:Onlarla kıyasladığım da yine en büyük olurdu. Bence genelleyebiliriz.
A:Genelleyebiliriz. Peki bunları paydaları eşitlemeden kıyaslasaydın kıyaslayabilir miydin?
Ö:Evet.
A:Nasıl?
Ö:Tama yakın yarıma yakın olarak.
A:Bide öyle kıyaslayabilir misin?
Ö:Altı pardon yedi bölü altı yaklaşık bir tama eşittir.
A:Nasıl buldun onun bir tama eşit olduğunu?
Ö:Bir tam altı da altıdır. Ve altı da yedi en çok bir tama yakındır bu yüzden o birdir. Beş bölü iki kesri de yaklaşık iki tama yakındır.
A:Neden?
Ö:Çünkü şey iki tam, dört bölü ikidir. Bu kesir de beş bölü iki. Bu yüzden iki tama daha çok yakındır. İki tamdır. Ve bu bir tam la iki tamı toplarsam üç tam bulurum. Pardon şey ya böyle şey yapabiliriz.
A:O bir tama yakın. O iki tama yakın. Peki şu?
Ö:O da …
A:Otuz beş bölü on iki.
Ö:Üç tama yakındır. Çünkü üç tam otuz altı bölü on ikidir. Şöyle göstereyim. Otuz altı bölü on ikidir o ise otuz beş bölü on ikidir. Bu yüzden üç tama yakındır.
A:Üç tama yakın. Peki kıyasladığın da.
Ö:En büyük yine bu.
A:Üç tama yakın olduğu için. Peki şunu yaparsak?

Ö:Eee şey üç bölü dört kesri bir tama yakındır.
A:Neden?
Ö:Çünkü üç bölü dört pardon bir tam dört bölü dörttür. Ve bu kesir de üç bölü dört en yakın bir tama en çok bir tama yakındır. Bir bölü iki kesri yarıma yakındır. Ondalık kesir olarak şöyle gösterebilirim. Çünkü şey bir,iki.. iki parçaya ayırmış bir bütünü. Şöyle de burda iki parçaya ayırmış bir bütünü böyle koyayım. Ve bunun bir tanesini almış. Şurasını. Ve burası da bir yarımı ifade eder. O yüzden yarıma yakındır..(materyal kullandı)
A:Hıhı. Peki üç bölü sekiz? Sonucu öyle buldun ya.
Ö:üç bölü sekiz bu yarıma yakındır.
A:Neden?
Ö:Çünkü yarım dört bölü sekizdir bu kesir de üç bölü sekiz yaklaşık olarak yarımdır.
A:Kıyasladığında peki böyle.
Ö:Kıyasladığımda yaklaşık olarak kıyasladığım da bir bölü ikiyle üç bölü sekiz eşittir diye gözüküyor. Ama gerçek işlemde öyle değildir. Çünkü ee bu bir tamdır. Tam yarımdır. Bu ise yarımdan bir küçüktür. O yüzden bir bölü iki daha büyüktür.
A:Hıhı. Peki diğer soruyla devam edelim.
Ö: (soruyu okuyor)Eee ilk önce yine kesrin kesri gibi ifade edilmiş. Onun için çarparım birbirleriyle. Sekiz bölü on beş sonucuna ulaşırım. Ve bir saati de yani altmış dakikayı on beşe bölüp yani on beşe bölüp sekiz ile çarparsam otuz iki dakikayı ifade eder.
A:Otuz iki dakika. Peki burda neden on beşe bölüp sekizle çarptın.
Ö:Eee beş dört yani bu saatin iki bölü üçü demiş yani bu bir kerin keri olarak ifade etmiş. Yani dörtte üçün iki yok dört bölü beşin iki bölü üçü olarak. Ve bunun için çarpma yaptım. Sekiz bölü on beş kesrini buldum. Sekiz bölü on beş bir saat altmış dakika olduğu için sekize böldüm on beşle çarptım. Sekize bölmemin amacı on beşte birini bulmak.
A: E orda on beşe böldün sekizle çarptın.
Ö:Eee şey ters oldu.
A: Peki neden sekize bölüp on beşle çarpacaksın?
Ö:Çünkü sekize bölersem on beşte birini bulurum. Ee şey on beşle çarparsam o on beşte biri onunla da on beşte on beşini bulurum.
A:Hım yapalım.
Ö:Eee yok dur bir dakika şey ee burda sekiz bölü on beş kesri zaten on beşe bölüp sekizle çarpmadır. Çünkü paydayı bölerim paydayı çarparım.
A:Hım yani biraz önce yaptığım doğrudur diyosun.
Ö:Hehe. Bunu yapmak tamamını bulmak olur. Yani burda şu kesri bulmamızı istiyor. Bir saatin bunun üzerindeki şeyini bulmamızı istiyor.
A:On beşe bölünce altmışı ne buluyorsun burdan?
Ö:Dört.
A:Yani neyi dört ne oluyor orda bulduğun?
Ö:Dört ee on beşe bölünce dört dakika oluyor.
A:Tamam bu dört dakika ne ifade ediyor sana? Yani neyi buluyorsun burda? On beşe bölüp dört dakika?
Ö:…..
A: Tamam devam edelim.
Ö:Bunuda sekizle çarparım.
A: Otuz iki dakikadır dersin.
Ö:Evet.
A:Peki bu altmış dakikanın on beşte sekizi ne? İşte on beşe böldüm sekizle çarptım. Otuz iki dakika bulurum dedin. Peki bunu başka türlü yapabilir miydin? Altmış dakikanın on beşte sekizini başka bir yolla?
Ö:Kesre çevirerek yapabilirdim.
A:Nasıl yaparsın kesre çevirerek?
Ö:Sekiz bölü on beş bunu on beşe bölcektim. Onun için altmışı kesre çeviririm. On beşide kesre çeviririm. Bölme işlemi yaparım. İlk sayı olduğu gibi yazılır,ikinci sayı ters çevrilir çarpılır. Burdan da altmış bölü on beş ve buda eşittir dört.
A:Hımm sonra ne yaparsın?

Ö:Eee bu dörttü şimdi sekizle çarpmam gerekiyor. Onun için dört kesre çeviririm. Sekizi de kesre çeviririm. Çarparım. Bu da eşittir otuz iki bölü bir oda eşittir otuz iki. Yani yine aynı sonucu buldum.
A:Peki şurda yaptığın on beşe bölmekle neyi buluyorsun? Dört buldun ya.
Ö:Şey ee on beşe bölmekle on beş parçaya ayırıyorum. Sekizini alıyorum. On beş parçadan biri dört parça pardon dörttür. Bunun sekizini alırken de sekizle çarparım.
A:Hım. Eee peki bunu o zaman altmışın on beşte sekizini kesirler de hangi işlemle bulursun?
Ö:Bölme, çarpma. Bölme ve çarpma.
A:Önce bölme yaptım sonra çarpma yaptım diyorum. Altmışın on beşte sekizini
Ö:Bulmak için.
A:Bölme ve çarpmayla.
Ö:Hıhı.
A:Peki diğer sorudan devam edelim.
Ö: (soruyu okuyor)Burda dört bölü bir eşittir üç elmadır. Bunların ekokunu bulabilirim.
A:Neden ekok buluyorsun?
Ö:İşlemi basitleştirmek için.
A:Tamam yapalım.
Ö:Ee bunları on ikide sadeleştirebilirim. On iki bölü sekiz, on iki bölü sekiz buda on iki bölü üç. Bunları biz tekrar dörtte bire sadeleştirebilirim bunları yok hepsini değil ama bunları dörtte bire sadeleştiremem. Dörtte bir üç tane ise on ikide üç yine üç tanedir. Burdan anlıyorum ki on ikide üç yani on ikide bir, bir elmaya eşittir. Bunun için bunların hepsini toplarım. On altı üç eklersem on dokuz bölü on iki. Yani on dokuz tane elma varmış.
A:Nasıl buldun onu?
Ö:Ee şimdi bu dörtte bir üç elmaya eşitti. Bunu genişlettim on iki bölü üç yaptım. Bunda da gördüm ki on iki bölü üç, üç elmaya eşitmiş. Ve üç elmada on ikide üç de üç elmaya eşit olduğu için. Yani on ikide bir de bir elmaya eşit olarak eşit olduğunu gördüm. Bu yüzden de on ikide sekiz, sekiz elmayı ifade eder. Bu da sekiz elmayı ifade eder. Ve bu da üç elmayı ifade yok bir dakika şu çıkcak. On altı. İkisi de sekiz elmayı ifade eder ikisi de birbirine denktir. Bu yüzden on altı elmadır.
A:Orda üç elmayı yok iki elmayı mı çıkardın? On altı elmayı nasıl buldun?
Ö:Şey burda ee sekiz elma vardı. Buda sekiz elma vardı. On altı elma oldu.
A:Haa topladın. Neden topladın orda?
Ö:Çarpabilirdim de.
A:Yani bu çarpma işleminde on altı elma vardır diye mi söyledik yoksa on altı bölü on iki elma mı?
Ö:On altı elma.
A:On altı elma.
Ö:Payı elma olarak şey yaptık.
A:Peki diğer soruyu nasıl yaparsın?
Ö:Beş bölü on iki çarpı üç bölü dört işleminde kaç tane elma vardır. On ikide şey.. On ikide beş şey demiştik zaten on ikide bir, bir elmaya eşit demiştik. Ondan sonra bunu da on ikiye eşit paydasını on iki yapabilirim. Üçle çarparım dokuz. Bu da on ikide beşti . Bu ikisini toplarım. On dörtte on iki yani on dört elma.
A:Neden topladık orda?
Ö:Eee şey bunun payı bir tane elmayı pardon on ikide bir yani paydaki bir, bir elmayı ifade ediyor. Burda beş tane var beş elmayı. Bu da dokuz elmayı ifade ediyor. İkisini toplayınca on dört elmayı ifade ediyor.
A:Peki bu çarpma işlemi sen toplama yapıyorsun. Neden topladın?
Ö:Aaa şey eee çarpacaktım ben bunu toplama olarak yaptım. Çarparsam beşle dokuzu çarparım kırk beş. On ikiyle on ikiyi çarparım yüz dört mü yok.
A:Çarpabilirsin orda.
Ö:Yüz kırk dört elma. Pardon yüz kırk dörttür paydası da.
A:yani bu işlemin sonucunda kaç elma vardır?
Ö:Bu işlemin sonucunda kaç elma vardır? Ee ben bunu sadeleştiririm. Çünkü on ikide biri olarak bulmuştum. On ikiyle sadeleştiririm. Yine on iki bulurum. Bunu on ikiyle sadeleştiremem ama ee…
A:Peki burda on ikide bire göre neden düşünüyorsun? Hani niye on ikiyle sadeleştiriyorsun?
Ö:Çünkü sadeleşiyor ama aralarında asal sayılar. Ben bunu hiç şey yapmadan da düşünebilirim. İkisini çarparım. On ikiyle beş bunu bulurum.
A:peki bu kaç elmadır?

Ö:Bu kaç elmadır?? Eee on ikide bir, bir elmayı gösteriyordu. Bu dört katı o zaman bu bir çeyrek elmayı gösteriyor. Dört yani dörtte birlik bir elmayı gösteriyor. Bir elmanın çeyreğini. On beş tane de çeyrek çarparsak on beşle dört bir dakika bu eşittir üç tam üç bölü dört elmaya eşittir. Üç elma ve bide dörtte üç bir elmanın dörtte üçüne eşittir.
A:Bir elmanın dörtte üçü. Peki bu on ikide bire göre işlem yapıyorsun ya .
Ö:Evet.
A:Onu nasıl buldun?
Ö:Burda buldum. Çünkü dörtte bir üç tane elmaydı. Üç ile genişlettim. On ikide üç kesrini buldum.
A:Hım.
Ö:On ikide üç pardon dörtte bir üç elmaydı. On ikide üçte üç elmayı gösteriyor. Ve düşündüm paydası kaç üçtü paydası o yüzden de üç elmayı ifade ediyor. Bu yüzden.
A:Tamam. Üçle genişlettin on ikide üç oldu. Dörtte biri üç elmaysa on ikide üçü de üç elmadır dedin.
Ö:Hehe.
A:E on ikide bire nasıl ulaştın?
Ö:Şey on ikide üç payı üç olduğu için üç elma olarak öyle şey yaptım. On ikide bir de bir elmaya eşit olduğunu gördüm.
A:He bir elma on ikide bire eşit.
Ö:Hıhı.
A:O zaman bunun tamamı kaç elma oluyor? Bu sepetteki elmaların tamamı?
Ö:Nasıl sepet?
A:Hani elma alıyor ya pazardan üç elma dörtte bire eşitse bir elma on ikide bire eşit.
Ö:Evet.
A:Bir elma on ikide bire eşitse tamamı kaç elmaya eşit?
Ö:On iki elmaya.
A:On iki elmaya eşit.
Ö:hehe.
A:Peki bu on iki elmayı düşünerek ee iki bölü üç çarpı dört bölü altının kaç elmaya eşit olduğunu bulabilir misin?
Ö:Eee tamamı on iki elma…Bulamam.
A:Gene böyle yapardın.
Ö:Hıhı. Mantık yürütürdüm.
A:Hım. Peki şurda şu yaptığın işlemde sekiz bölü on ikiyle sekiz bölü on ikiyi topladın. On altı bölü on iki dedin ya.
Ö:Evet.
A:O sekiz bölü on ikiyle sekiz bölü on iki kaç elmaya eşit oluyor?
Ö:Sekiz bölü on iki, sekiz bölü on iki.. On altı. Yani on altıda on iki elmaya eşit oluyor.
A:Peki bir tane sekiz bölü on ikiden ne anlıyorsun?
Ö:Sekiz elma. Sekiz elmaya eşittir.
A:Neden?
Ö:Çünkü on ikide biri bir elmadır. On ikide sekizi ise sekiz elmaya eşit oluyor.
A:Sekiz elmaya. Peki bu üçte iki ile altıda dörtte ikisini de o zaman sekiz elmaya eşit buldun.
Ö:Evet.
A:Eşit mi bunlar?
Ö:Evet.
A:Neden?
Ö:Birbirine denktir. Çünkü bunu sadeleştirdiğimizde yine üç bölü iki kesrini buluruz. Yine ikiye bölersek bu üç olur bunu da ikiye bölersek iki olur. Yine aynı kesir.
A:Hım.
Ö:Birbirleriyle denktir.
A:Anladım peki bu bütünün tamamını bana çizebilir misin? Oraya üç elma dörtte birse. Sepetteki elmaları? Kaç elmadır tamamı?
Ö:Bir dakika. Dörde bölersem bir bu da çok küçük oldu. Ee şimdi dörtte bir üç elmaydı. O zaman şurası üç elmadır. Burası da üç elmadır. Hepsi üçer elma. Bu da üç, bu da üç, bu da üç, burda da üç olduğu için üç kere dörtte on iki elmadır. Yani tamamı on iki elma.(şekil çizdi)
A:Hım. Peki o üçte iki kaç elmadır? Onu gösterebilir misin?
Ö:Üçte iki?

A:Hım.
Ö:Yani sekiz olarak buldum ama üçte iki kaç elma… Sekiz elma.
A:Neden?
Ö:Yani şu on ikide bir olarak düşünüyorum ama.
A:Orda yaptığın gibi.
Ö:hıhı.
A:Peki diğer sorudan devam edelim.
Ö: (soruyu okuyor)Aşağıdaki şekil yani bu şekil üçte biri göstermekteymiş bu şekil. O açıdan bunları bulmamızı istiyor. Yani şurda o şekilden var bir tane şöyle. Yani bir tane üçte biri var. Şunu eklersek buraya yani ikisini alırız.
A:Orda çizebilirsin, tarayabilirsin.
Ö:Şu ikisini aldık. Bu üçte birmiş. Üç tane şey. Eee bu ikisini alırız. Ve bunu da alırsak. Bu yine bir üçte bir eder. Ondan sonra şu iki tane alırız. Şuda hani bir tane alırız. Buda bir üçte bir eder. Ve üç tane de geriye kalan onları da alırsak bir tane daha üçte bir eder. Ve bunların toplamı yani şöyle yapıyorum, yapıyım. Ee üç bölü dört.
A:Hım. Peki bunu başka türlü bulabilir miydin?
Ö:Hayır. Bide çarparak toplayabilirdim öyle.
A:Nasıl çarparak?
Ö:Çünkü burda dört tane üçte bir var. Üçte birle dördü çarpardım. Yine aynı sonucu bulurdum.
A:Neden aynı sonucu buluyosun peki?
Ö:Çünkü toplama ardışık pardon çarpma ardışık toplamadır. Yani bunu tek işlemle yaparken onu birden fazla işlemle yaparız. Yine aynı sonuç çıkar ama.
A:Hım. Peki “b” şıkkında hangi kesri ifade ediyor.
Ö:Şu şekilde bir üçte birdir. Şu şekilde de bir üçte birdir. Ama burası artıyor. Üç tane kutucuk üçte birse bir tane kutucuk ee denklem kurarak yapabilirim.
A:Nasıl yaparsın?
Ö:Üç kutu üçte birse bir kutu soru işareti koyarım. Çaprazları çarparım ve şuna bölerim birle üçte biri çarparım. Eşittri yine aynı üçte biri buldum. Ve bu üçte biri üçe bölerim. Bu da eşittir üç bölü bir ters çevirip çarparım. Buda eşittir yine üçte bir.
A:Nasıl yaptın onu?
Ö:Üçte birle üçte biri çarptım.
A:Hımm nasıl çarptın?
Ö:Pardon şurası dokuz olacak. Payları çarptım ilk önce paya yazdım. Paydaları çarptım paydaya yazdım. Yani bir kutucuk dokuzda birmiş. O zaman ben bu üçte birleri paydasını dokuz yaparım. Üç ile genişletirim. Bunu üçle çarparsam zaten birde dokuzla birimiz vardı. Üç kere üç dokuz üç dokuzda üç bunların hepsi. Burda da dokuzla bir vardı. Bunu toplarsam. Bu yedi bölü dokuza eşittir.
A:Yedi bölü dokuza eşittir. Eee peki bunu başka türlü yapabilir miydin?
Ö:Hayır.
A:Böyle yapardın.
Ö:Hıhı.
A:Peki bu hani en başta şu şekil bir bütünün üçte birini gösteriyorsa bu bütünün tamamı kaç kareden oluşur?
Ö: Bu bütünün tamamı üçte birdir. Üçle çarparım. Üç kare ise üçle çarparsam dokuz karedir.
A:Dokuz kareden oluşur.
Ö:Hıhı.
A:O zaman her bir kare kaçta kaça eşit oluyor?
Ö:Nasıl? Her bir kare?
A:Bir kare kaçta kaçına eşit oluyor bu bütünün?
Ö:Dokuzda bir.
A:Dokuzda birine eşit oluyor. Peki ıııım bunu düşünerek “b” şıkkını başka türlü yapabilir miydin?
Ö:Bunu düşünerek.. Şey yapabilirdim. Az önce dediğimiz gibi bir bütün dokuz tanedir. Bunu bir,iki,üç,dört,beş,altı,yedi tane var. O zaman bir bütün dokuz tane ve dokuz da yedi diyebilirdim.
A:Dokuz da yedi.
Ö:Diyebilirdim.
A:He her biri dokuz da bir yedi tane olduğu için dokuzda yedi.
Ö:Hıhı.

A: Peki bunu hangi işlemle yapardın?
Ö:Toplama.
A:Toplama. Başka bir işlemle yapabilir miydin?
Ö:Çarpma.
A:Çarpma. Nasıl yapardın?
Ö:Toplamaya şey yapardım. Dokuz tane pardon yedi tane dokuz da biri yan yana toplardım. Çarpmada ise dokuzda yedi ile dokuzda biri çarpardım. Çünkü yedi tane var.
A:He yediyle dokuzda bir çarpardın.
Ö:dokuzda bir çarpardım.
A:Tamam teşekkürler.

APPENDIX G

ACTIVITY SHEET OF VOLKAN

KESİRLERLE ÇARPMA İŞLEMİ

1)

Müzik parçalarında dik çizgi ile ayrılan bölümlerdeki (dolap) notaların vuruşları toplamı eşittir. Yukarıdaki parçada gerekli hesaplamaları yaparak bu bilginin doğru olup olmadığını kontrol ediniz.

Sadece bir dolaptaki notaların vuruş sayılarını kullanarak tüm parçanın toplam ölçüsünü nasıl bulabiliriz? Hangi işlemleri yaparız? Tartışalım. Yukarıdaki parça için bu işlemi yapalım.

$2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ vuruşluk

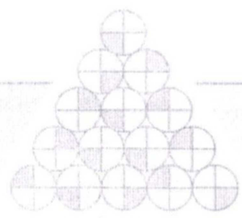
8 aralık olduğuna göre:

$$\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\right)=\frac{40}{2}$$

Bu işlemi daha kısa yoldan yapmak için nasıl bir işlem yapmalıyız? Çarpma işlemi yapmalıyız

$\frac{8}{1} \times \frac{5}{2} = \frac{40}{2}$

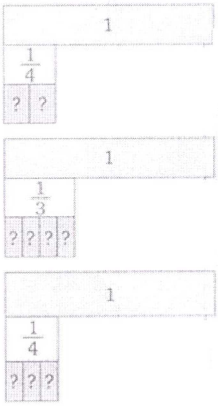
2)



Yandaki şekilde, boyalı kısımların belirttiği kesri en kısa yoldan bulabilmek için hangi yöntemi kullanırsınız? Açıklayınız.

Çarpma ve toplama. Kısa yoldan bulmak için " işlemi yaparız: $\frac{4}{4} \times \frac{15}{1} = \frac{15}{4}$

3) Etkinlik: Kesir takımı kullanarak çarpma işlemi yapma
Araç ve gereç: Kesir takımı



a) $\frac{1}{4}$ lik kesir parçasının $\frac{1}{2}$ ini nasıl bulabiliriz?

$\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{4} = 2$

b) Bu işlemi yapmak için 1 lik ve $\frac{1}{4}$ lik parçaları şekildeki gibi alt alta yerleştirelim. Diğer parçaları deneyerek hangisinin $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{2}$ i kadarı olduğunu bulunuz.

c) Yaptığınız işlemi matematiksel olarak nasıl ifade edebilirsiniz?

d) $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{4}$ ini ve $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{3}$ ini aynı yöntem ile bulup, sonuçları karşılaştırınız.

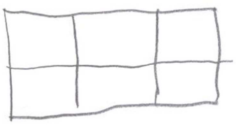
$\frac{1}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$\frac{1}{4} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{4}$

4) Etkinlik: Kâğıt katlama ile çarpma işlemi yapma
Araç ve gereç: Kâğıt

a) Kâğıt ince bir şerit haline getirilir.
b) $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{2}$ ini bulmak için önce kağıdı 3 eş parçaya katlayınız.
c) 3 parçaya katlanmış kâğıt tam ortadan ikiye katlayınız.
d) Katlanmış kâğıt açılarak en küçük bölümü kesir olarak ifade ediniz. Oluşan şekli çiziniz.

$\frac{1}{6}$



e) İşlemi matematiksel olarak ifade ediniz.

$\frac{1}{3}$'ün $\frac{1}{2}$'si

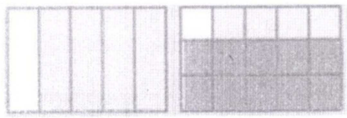
$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$

5) Etkinlik: Şeffaf kesir kartları ile çarpma işlemi yapma
Araç ve gereç: Şeffaf kesir kartları

a) $\frac{4}{5}$ lük şeffaf kesir kartının üzerine $\frac{2}{3}$ lik şeffaf kesir kartını yerleştiriniz. Oluşan şekil kaç eş parçadır? 15

b) İki rengin çakıştığı yer tüm şeklin kaçta kaçıdır? Yandaki şekil üzerinde gösteriniz.

$\frac{8}{15}$



c) $\frac{4}{5}$ ün $\frac{2}{3}$ si kaçtır? İşlemi matematiksel olarak ifade ediniz.

$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$

6) Ayşe üç arkadaşı ile doğum gününü kutladı. Ayşe pastayı önce ikiye böldü, yarısını anne, baba ve kardeşine ayırdı. Diğer yarısını da üç arkadaşı ile paylaştı.

a) Ayşe'nin arkadaşlarından biri pastanın ne kadarını yedi?

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

b) Ayşe'nin annesi pastanın ne kadarını yedi?

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

7) Bir çocuk 12 fındığın $\frac{3}{4}$'ünü yemiştir. Çocuk kaç tane fındık yemiştir?

$12 \div 4 = 3$, $3 \times 3 = 9$ tanesini yemiştir.

8) Aşağıdaki çarpma işlemlerini yapınız ve çarpımları en sade biçimde yazınız.

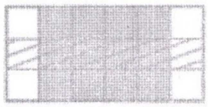
a) $\cancel{12}^{2} \times \frac{5}{\cancel{6}_{1}} = \frac{10}{1} = 10$

c) $1\frac{3}{\cancel{5}_{1}} \times \frac{\cancel{5}^{1}}{9} = \frac{8}{9}$

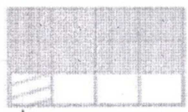
b) $\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{8}_{4}} \times \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{15}_{3}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

d) $\frac{9}{4} \times \frac{17}{5}$ $\frac{153}{20}$

9) Aşağıdaki modellerde gösterilen çarpma işlemlerini ve sonuçlarını yazınız.



$\frac{4}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{18}$



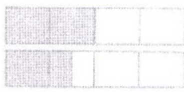
$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{12}$

10) Aşağıdaki örneğe inceleyiniz. Diğer soruları da örneğe uygun olarak tamamlayınız ve sonuçlarını yazınız.

Örnek

→ $\frac{1}{4}$

→ $\frac{1}{4}$'in $\frac{1}{3}$'i



→ $\frac{1}{2}$

→ $\frac{1}{2}$'in $\frac{1}{2}$'i

11) Aşağıdaki ifadelerde verilen işlemleri yapınız. Doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.

[D] $\frac{1}{2}$x$\frac{1}{3}$ işleminin sonucu $\frac{1}{6}$'dır.

[Y] $\frac{5}{8}$ x $\frac{1}{3}$ kesirinin 2 katı $\frac{10}{16}$'dır.

[Y] $\frac{4}{3}$x1$\frac{1}{6}$ işleminin sonucu $\frac{44}{18}$' dir.

[Y] $\frac{6}{13}$ x $\frac{13}{2}$ = a ise a = 1'dir.

12) 24 kalemin $\frac{1}{6}$ ini Kerem, $\frac{1}{4}$ ini Aslı, geriye kalanını da Banu almıştır. Banu kaç kalem almıştır?

24 | 6 → 4 Kerem   24 | 4 → 6 Aslı   6+4= 10   24−10=14 Banu almıştır.

13) Mehmet, İsmail ve Mustafa ortak olarak aldıkları arsayı müteahhide vermek istiyorlar. Arsanın $\frac{1}{3}$ i Mehmet'in, $\frac{1}{6}$ i İsmail'in, $\frac{1}{2}$ i Mustafa'nındır. Arsa sahipleri müteahhidle anlaştılar. Buna göre arsanın yarısı müteahhide verilecektir. Daireler ise ortaklar arasında paylaşılacaktır. Arsaya her katında 3 daire olan 8 katlı bir bina yapılacaktır.

a) Ortakların paylarını gösteren bir şema çiziniz.

b) Bina yapıldıktan sonra arsa sahiplerinin her birinin kaç dairesi olacağını bulunuz.

$8 \times 3 = 24$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} =$
(2) (3)

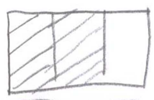
$24 \div 2 = 12$ Mustafa

$24 \div 6 = 4$ ismail

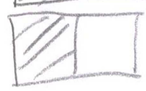
$24 \div 3 = 8$ Mehmet

14) 240 kapasiteli yolcu uçağı, İstanbul aktarmalı olarak Ankara'dan Frankfurt'a gidecektir. Ankara'da uçaktaki koltukların $\frac{2}{3}$ si satıldı. İstanbul'da ise kalan koltukların $\frac{1}{2}$ i satıldı. Buna göre;

a) Problemdeki verileri şema çizerek gösteriniz.

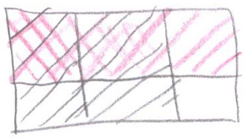


koltukların $\frac{2}{3}$'si satıldı, geriye $\frac{1}{3}$ kaldı.



kalan // $\frac{1}{2}$'i //

b) Uçakta ne kadar boş yer kaldığını bulunuz.



$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$

APPENDIX H

SELF EVALUATION OF VOLKAN

Öz Değerlendirme

1) Kesirlerle çarpma işlemiyle ilgili neleri biliyorum?

Kesrin kesri çarpmayı ifade eder. Kesirlerle çarpma yaparken pay ile pay çarpılır paya yazılır. Payda ile payda çarpılır Paydaya yazılır.

2) Kesirlerle çarpma işleminde neleri kolayca öğrendim?

İşlem yapmayı

3) Kesirlerle çarpma işleminde neleri öğrenirken ve yaparken zorlandım? Bu zorlukları nasıl aştım?

Bazı farklı soruları yaparken zorlandım. Çevremdekiler sayesilden bu soruları aştım.

4) Kesirlerle çarpma işleminde neleri severek yaptım ve öğrendim?

Kesirlerle çarpa işlemi yaptım. Bazı püf noktalar öğrendim.

5) Kesirlerle çarpma işleminde başka neleri de yapabilmeyi isterdim?

— — — — — —

Öz Değerlendirme Formu

Bu form kendinizi değerlendirmek amacıyla hazırlanmıştır. Her bir ifade için sizi en iyi tanımlayan seçeneği (X) ile işaretleyiniz.

Kesirlerle Çarpma İşlemi	Evet	Emin Değilim	Hayır
Bir bütünün belirtilen kesir kadarını bulabiliyorum.	X		
Bir kesrin belirtilen bir kesir kadarını bulabiliyorum.	X		
Kesirlerle çarpma işleminin anlamını biliyorum.	X		
Kesirlerle çarpma işlemini yapabiliyorum.	X		
Tam sayılı kesirlerle çarpma işlemi yapabiliyorum.		X	
Bir bütünün belirtilen kesir kadarını modelleyerek gösterebiliyorum.	X		
İki kesrin çarpımını modelleyerek gösterebiliyorum.	X		
Kesirlerle çarpma işlemi ve toplama işlemi arasındaki ilişkiyi açıklayabiliyorum.	X		
Kesirlerle çarpma işleminin sonucunu strateji kullanarak tahmin edebiliyorum.	X		
Kesirlerle çarpma işleminin değişme özelliğini açıklayabiliyorum.	X		
Kesirlerde çarpma işlemi gerektiren problemler çözüp, kurabiliyorum.	X		

APPENDIX I

JOURNAL OF VOLKAN

MATEMATİK GÜNLÜĞÜM

Kesirlerle çarpma işlemini yapmayı öğrendiniz. Bu konuyla ilgili aşağıda verilen soruları açıklayarak cevaplayınız.

1) Kesirlerde çarpma işlemi sana ne ifade ediyor?

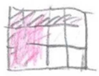
Bir kesrin kesri. Bir kesrin belirtilen bir kesir kadarı

2) Günlük hayatta kesirlerle çarpma işlemi nerelerde karşımıza çıkar?

Para verirken veya alırken

3) Kesirlerle çarpma konusunun işlendiği gün, hastalanıp okula gelemeyen bir arkadaşın bu konuyu anlamak için senden yardım istiyor. Sen de bu konuda arkadaşına yardımcı olmaya karar veriyorsun. Bu arkadaşına kesirlerde çarpma işlemini nasıl anlatırsın? Örnek verip, modelleyerek gösterebilir misin?

Bir kesrin kesri çarpma işlemini ifade eder.
Bir kesrin belirtilen bir kesir kadarını bulmak bir çarpma işlemi ifade eder

$\frac{1}{3}$'ün $\frac{2}{4}$'ü  $\frac{1}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{2}{12}$,

4) Aynı arkadaşına tam sayılı kesirlerle çarpma işlemini nasıl anlatırsın? Bu konuda söyleyeceğin en önemli şey ne olur? Örnek vererek açıklayıp, gerekiyorsa şekil çizebilirsin.

Bu konuyu çok iyi anlatamam

5) Aynı arkadaşına bir bütünün belirtilen kesir kadarını bulmayı nasıl anlatırsın? Örnek verip, modelleyerek gösterebilir misin?

Bunu yaparken bütünü ifade eden sayı kesirle çarpılır "Kerem 120 sayfalık bir kitabın $\frac{3}{8}$'ini okuduğuna göre kaç sayfa okumuştur?"

$\frac{\cancel{120}^{15}}{1} \cdot \frac{3}{\cancel{8}_{1}} = \frac{45}{1} = 45$ sayfa

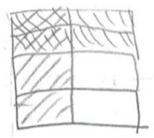
6) Kesirlerle çarpma işlemi ve toplama işlemi arasındaki ilişkiyi nasıl açıklarsın?

Kesirlerle toplama işlemi yaparken payda eşitlememiz gerekir.

7) Kesirlerle çarpma işleminin sonucunu strateji kullanarak nasıl tahmin edersin? Örnek vererek açıklayabilir misin?

Kesirlerle çarpma işlemini stratejik olarak yapmak istersek şeffaf kesir kartlarını kullanabiliriz.

$\frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{2}{8}$



8) Kesirlerle çarpma işlemini kullandığın bir problem yazıp, çözebilir misin?

Bir atölyede 240 m kumaşın $\frac{3}{8}$'i ile ceket, kalanın $\frac{2}{5}$'i ile gömlek dikilmektedir. Geriye kaç m kumaş kalır?

$\frac{\cancel{240}^{30}}{1} \times \frac{3}{\cancel{8}_{1}} = \frac{90}{1} = 90$ m

$240 - 90 = 150$

$\frac{\cancel{150}^{30}}{1} \times \frac{2}{\cancel{5}_{1}} = \frac{60}{1} = 60$

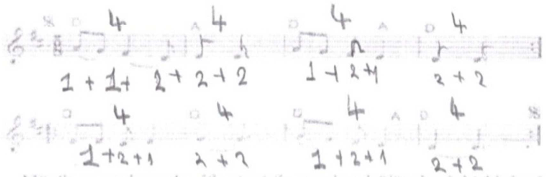
$240 - 60 = 180$

APPENDIX J

ACTIVITY SHEET OF AHMET

KESİRLERLE ÇARPMA İŞLEMİ

1)



Müzik parçalarında dik çizgi ile ayrılan bölümlerdeki (dolap) notaların vuruşları toplamı eşittir. Yukarıdaki parçada gerekli hesaplamaları yaparak bu bilginin doğru olup olmadığını kontrol ediniz.

Sadece bir dolaptaki notaların vuruş sayılarını kullanarak tüm parçanın toplam ölçüsünü nasıl bulabiliriz? Hangi işlemleri yaparız? Tartışalım. Yukarıdaki parça için bu işlemi yapalım.

$2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ vuruşluk

8 aralık olduğuna göre

$$\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\right)=\frac{40}{2}$$

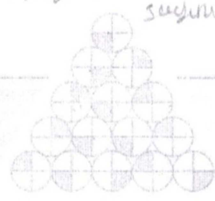
Bu işlemi daha kısa yoldan yapmak için nasıl bir işlem yapmalıyız? Bu işlem bir ardışık toplamadır. Ardışık toplama çarpma demek olduğuna göre çarpma işlemi yaparız. 8 tane $\frac{5}{2}$ demektir

$$\frac{\cancel{8}^{4}}{1}\cdot\frac{5}{\cancel{2}_{1}}=\frac{20}{1}=20$$

Çarpma işlemini yaparken 8'in paydasına 1 koymamızın nedeni her doğal sayının paydası 1'dir.

2)

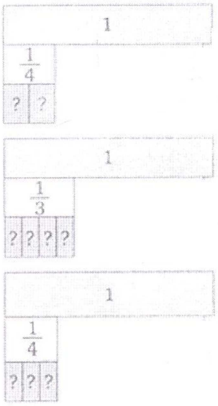
Yandaki şekilde, boyalı kısımların belirttiği kesri en kısa yoldan bulabilmek için hangi yöntemi kullanırsınız? Açıklayınız.



Yukarıdaki işlem $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{16}{4}$ işlemidir. Ama bu işlemi daha kısa yoldan $\frac{16}{1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{16}{4}$ olarak gösterebiliriz.

1

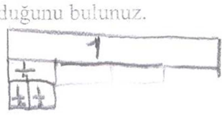
3) Etkinlik: Kesir takımı kullanarak çarpma işlemi yapma
Araç ve gereç: Kesir takımı



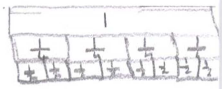
a) $\frac{1}{4}$ lik kesir parçasının $\frac{1}{2}$ ini nasıl bulabiliriz?

$\frac{1}{4}$ ile $\frac{1}{2}$ kesrini çarparak bulabiliriz

b) Bu işlemi yapmak için 1 lik ve $\frac{1}{4}$ lik parçaları şekildeki gibi alt alta yerleştirelim. Diğer parçaları deneyerek hangisinin $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{2}$ i kadarı olduğunu bulunuz.



bütün olarak düşünürsek



c) Yaptığınız işlemi matematiksel olarak nasıl ifade edebilirsiniz?

Bu işlemi çarpma işlemi olarak ifade edebiliriz

$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ 'dir

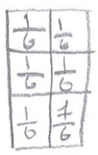
d) $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{4}$ ini ve $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{3}$ ini aynı yöntem ile bulup, sonuçları karşılaştırınız.

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ bu iki işlem bize çarpma işleminin değişme özelliğini olduğunu gösterir

4) Etkinlik: Kâğıt katlama ile çarpma işlemi yapma
Araç ve gereç: Kâğıt

a) Kâğıt ince bir şerit haline getirilir.
b) $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{2}$ ini bulmak için önce kağıdı 3 eş parçaya katlayınız.
c) 3 parçaya katlanmış kâğıt tam ortadan ikiye katlayınız.
d) Katlanmış kâğıt açılarak en küçük bölümü kesir olarak ifade ediniz. Oluşan şekli çiziniz.

$\frac{1}{6}$ oluştu. Oluşan şekil ise



e) İşlemi matematiksel olarak ifade ediniz.

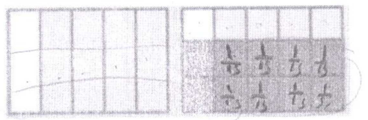
Çarpma işlemidir $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

5) Etkinlik: Şeffaf kesir kartları ile çarpma işlemi yapma
Araç ve gereç: Şeffaf kesir kartları

a) $\frac{4}{5}$ lük şeffaf kesir kartının üzerine $\frac{2}{3}$ lik şeffaf kesir kartını yerleştiriniz. Oluşan şekil kaç eş parçadır?

$\frac{4}{5}$ kesrinin üzerinde toplam 5 parça vardır. Buna ek şekilde üç parça daha sayarsa toplam 15 parça oluşur.

b) İki rengin çakıştığı yer tüm şeklin kaçta kaçıdır? Yandaki şekil üzerinde gösteriniz.



$\frac{8}{15}$'idir.

c) $\frac{4}{5}$ ün $\frac{2}{3}$ si kaçtır? İşlemi matematiksel olarak ifade ediniz.

Bir kesrin kesrini bulmak için çarpma işlemini kullanırız.

$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$

6) Ayşe üç arkadaşı ile doğum gününü kutladı. Ayşe pastayı önce ikiye böldü, yarısını anne, baba ve kardeşine ayırdı. Diğer yarısını da üç arkadaşı ile paylaştı.

a) Ayşe'nin arkadaşlarından biri pastanın ne kadarını yedi?

Bu soruyu çözmek için $\frac{1}{2}$'nin $\frac{1}{4}$'ünü bulmamız gerek. Bunun için de çarpma işlemi yapılır.

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$'ini yemiştir

b) Ayşe'nin annesi pastanın ne kadarını yedi?

Ayşenin annesi pastanın yarısının $\frac{1}{3}$'ini yedi

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$'sını yedi

7) Bir çocuk 12 fındığın $\frac{3}{4}$'ünü yemiştir. Çocuk kaç tane fındık yemiştir?

Bir bütünün bir kesir kadarını bulmak için çarpma işlemi yapılır. Bir doğal sayının paydası her zaman 1'dir.

$\frac{\cancel{12}^{3}}{1} \cdot \frac{3}{\cancel{4}_{1}} = \frac{9}{1} = 9$ fındık yemiştir

8) Aşağıdaki çarpma işlemlerini yapınız ve çarpımları en sade biçimde yazınız.

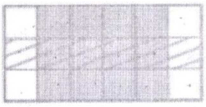
a) $\frac{12}{1} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{1} = 10$

c) $1\frac{3}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{8}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{8}{9}$

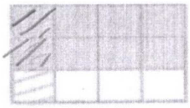
b) $\frac{5}{8} \times \frac{6}{15} = \frac{3}{20}$

d) $2\frac{1}{4} \times 3\frac{2}{5} = \frac{9}{4} \cdot \frac{17}{5} = \frac{153}{20} = 7\frac{13}{20}$

9) Aşağıdaki modellerde gösterilen çarpma işlemlerini ve sonuçlarını yazınız.



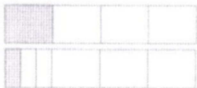
$\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{18}$



$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{12}$

10) Aşağıdaki örneğe inceleyiniz. Diğer soruları da örneğe uygun olarak tamamlayınız ve sonuçlarını yazınız.

Örnek



→ $\frac{1}{4}$

→ $\frac{1}{4}$'in $\frac{1}{3}$'ü

→ $\frac{2}{4}$

→ $\frac{2}{4}$'ün $\frac{3}{4}$'ü

11) Aşağıdaki ifadelerde verilen işlemleri yapınız. Doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ $\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5 \cdot 2}{24 \cdot 2} = \frac{10}{48}$

[D] $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ işleminin sonucu $\frac{1}{6}$'dır.

[Y] $\frac{5}{8} \times \frac{1}{3}$ kesirinin 2 katı $\frac{10}{16}$'dır.

[Y] $\frac{4}{3} \times 1\frac{1}{6}$ işleminin sonucu $\frac{44}{18}$' dir.

$\frac{4}{3} \cdot \frac{7}{6} = \frac{28}{18}$

[Y] $\frac{6}{13} \times \frac{13}{2} = a$ ise $a = 1$'dir.

$\frac{6}{13} \cdot \frac{13}{2} = \frac{3}{1} = 3$

12) 24 kalemin $\frac{1}{6}$'ini Kerem, $\frac{1}{4}$'ini Aslı, geriye kalanını da Banu almıştır. Banu kaç kalem almıştır?

Bir sayının basit kesrini bulmak için çarpım işlemi yapılır.

$\frac{24}{1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{1} = 4$ Kerem

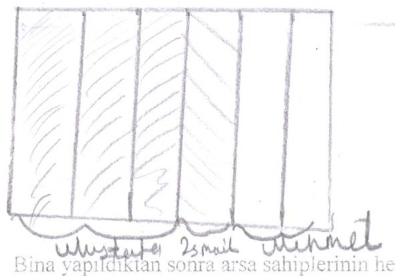
$6 + 4 = 10$

$24 - 10 = 14$ tane kalem almıştır (Banu)

$\frac{24}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{1} = 6$ Aslı

13) Mehmet, İsmail ve Mustafa ortak olarak aldıkları arsayı müteahhide vermek istiyorlar. Arsanın $\frac{1}{3}$ i Mehmet'in, $\frac{1}{6}$ i İsmail'in, $\frac{1}{2}$ i Mustafa'nındır. Arsa sahipleri müteahhidle anlaştılar. Buna göre arsanın yarısı müteahhide verilecektir. Daireler ise ortaklar arasında paylaşılacaktır. Arsaya her katında 3 daire olan 8 katlı bir bina yapılacaktır.

a) Ortakların paylarını gösteren bir şema çiziniz.



$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ = Mehmet

$\frac{1}{6}$ = İsmail

$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ = Mustafa

b) Bina yapıldıktan sonra arsa sahiplerinin her birinin kaç dairesi olacağını bulunuz.

3 . 8 = 24 daire var

24 : 2 = 12 daire müteahhide

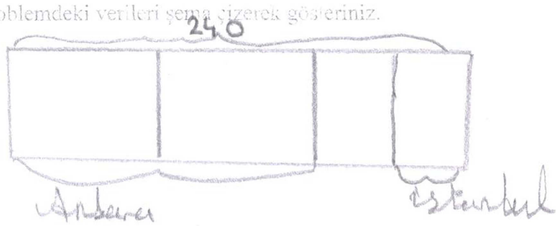
$\frac{12}{1} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{1}$ = 4 daire Mehmet'e

$\frac{12}{1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{1}$ = 2 daire İsmail'e

$\frac{12}{1} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{1}$ = 6 daire Mustafa'ya

14) 240 kapasiteli yolcu uçağı, İstanbul aktarmalı olarak Ankara'dan Frankfurt'a gidecektir. Ankara'da uçaktaki koltukların $\frac{2}{3}$ si satıldı. İstanbul'da ise kalan koltukların $\frac{1}{2}$ i satıldı. Buna göre;

a) Problemdeki verileri şema çizerek gösteriniz.



b) Uçakta ne kadar boş yer kaldığını bulunuz.

$\frac{240}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{160}{1}$ = 160 Ankara

240 − 160 = 80

$\frac{80}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{40}{1}$ = 40 İstanbul

80 − 40 = 40 boş koltuk

APPENDIX K

SELF EVALUATION OF AHMET

Öz Değerlendirme

1) Kesirlerle çarpma işlemiyle ilgili neleri biliyorum?

Kesirler çarpma işlemi ardışık kesir toplamasıdır ($\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=2\cdot\frac{1}{3}$) yani de, kesrin kesridir ($\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}$). Kesirlerle çarpma işleminde paydaları eşitlenmez. Tam sayılı kesir çarparken bu kesri bileşik kesre çeviririz. Doğal sayıda paydaları 1'dir.

2) Kesirlerle çarpma işleminde neleri kolayca öğrendim?

Tahmin işlemini ve de problem çözmeyi

3) Kesirlerle çarpma işleminde neleri öğrenirken ve yaparken zorlandım? Bu zorlukları nasıl aştım?

Modellemede zorlandım. Öğretmenin yardımı ve uyarıları ile aştım.

4) Kesirlerle çarpma işleminde neleri severek yaptım ve öğrendim?

Kesir kadranlarıyla yaptığı işi severek yaptım ve öğrendim

5) Kesirlerle çarpma işleminde başka neleri de yapabilmeyi isterdim?

Kesirlerle çarpma işleminde tahmini yollarla olarak değil de en doğru sonuçla bulmak isterdim.

Öz Değerlendirme Formu

Bu form kendinizi değerlendirmek amacıyla hazırlanmıştır. Her bir ifade için sizi en iyi tanımlayan seçeneği (X) ile işaretleyiniz.

Kesirlerle Çarpma İşlemi	Evet	Emin Değilim	Hayır
Bir bütünün belirtilen kesir kadarını bulabiliyorum.	X		
Bir kesrin belirtilen bir kesir kadarını bulabiliyorum.	X		
Kesirlerle çarpma işleminin anlamını biliyorum.	X		
Kesirlerle çarpma işlemini yapabiliyorum.	X		
Tam sayılı kesirlerle çarpma işlemi yapabiliyorum.	X		
Bir bütünün belirtilen kesir kadarını modelleyerek gösterebiliyorum.	X		
İki kesrin çarpımını modelleyerek gösterebiliyorum.		X	
Kesirlerle çarpma işlemi ve toplama işlemi arasındaki ilişkiyi açıklayabiliyorum.	X		
Kesirlerle çarpma işleminin sonucunu strateji kullanarak tahmin edebiliyorum.	X		
Kesirlerle çarpma işleminin değişme özelliğini açıklayabiliyorum.	X		
Kesirlerde çarpma işlemi gerektiren problemler çözüp, kurabiliyorum.	X		

APPENDIX L

JOURNAL OF AHMET

MATEMATİK GÜNLÜĞÜM

Kesirlerle çarpma işlemini yapmayı öğrendiniz. Bu konuyla ilgili aşağıda verilen soruları açıklayarak cevaplayınız.

1) Kesirlerde çarpma işlemi sana ne ifade ediyor?

Kesirlerde çarpma işlemi bir kesrin kesrini belirtir yerde bir sayının o kesir kadarını ifade eder. Ayrıca ardışık toplamından da

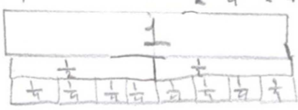
2) Günlük hayatta kesirlerle çarpma işlemi nerelerde karşımıza çıkar?

Matematik problemlerinde karşımıza çıkar.

Örneğin: Bir günün $\frac{2}{6}$'sı kaç saattir. $= \frac{\cancel{24}^{4}}{1} \cdot \frac{2}{\cancel{6}_{1}} = \frac{8}{1} = 8$ saat

3) Kesirlerle çarpma konusunun işlendiği gün, hastalanıp okula gelemeyen bir arkadaşın bu konuyu anlamak için senden yardım istiyor. Sen de bu konuda arkadaşına yardımcı olmaya karar veriyorsun. Bu arkadaşına kesirlerde çarpma işlemini nasıl anlatırsın? Örnek verip, modelleyerek gösterebilir misin?

Kesirlerde çarpma işlemini yaparsın paydalar paydalarla, paylar paylarla çarpılır. Örneğin $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 \times 1}{2 \times 4} = \frac{1}{8}$'dir. Bunu modellersek olursak



4) Aynı arkadaşına tam sayılı kesirlerle çarpma işlemini nasıl anlatırsın? Bu konuda söyleyeceğin en önemli şey ne olur? Örnek vererek açıklayıp, gerekiyorsa şekil çizebilirsin.

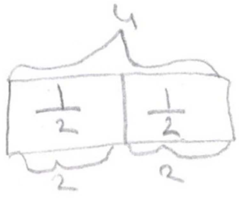
Tam sayılı kesir çarpma yaparken tam sayılı kesirleri bileşik kesre çevirerek çarpma yaparsın

$$1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$$

5) Aynı arkadaşına bir bütünün belirtilen kesir kadarını bulmayı nasıl anlatırsın? Örnek verip, modelleyerek gösterebilir misin?

Bir bütünün belli kesir kadarını bulurken o bütün sayısı altına 1 koyarsın. sonra yine çarpma işi yapılır

$\frac{\cancel{4}^{2}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_{1}} = \frac{2}{1} = 2$



6) Kesirlerle çarpma işlemi ve toplama işlemi arasındaki ilişkiyi nasıl açıklarsın?

Kesirlerle çarpma işlemi ardışık toplamadır. Örneğin

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$

$\frac{8}{1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$

7) Kesirlerle çarpma işleminin sonucunu strateji kullanarak nasıl tahmin edersin? Örnek vererek açıklayabilir misin?

Kesri yuvarlayarak tahmin ederim örneğin

$\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}$ $\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{24}$ gerçek sonuç

$\frac{1}{3} \cong 0$ $\frac{7}{8} \cong 1$ $0 \times 1 = 0$ bakın $\frac{7}{24} \cong 0$'dır

8) Kesirlerle çarpma işlemini kullandığın bir problem yazıp, çözebilir misin?

Problem= Yusuf bir günün $\frac{1}{3}$'ini uyuyarak geçiriyor. Geriye kalanın yarısını okul ve dersler için ayırıyor. Buna göre kaç saat serbest kalır.

Cevap= Bir gün = 24 saat

$\frac{\cancel{24}^{8}}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{3}_{1}}=\frac{8}{1}=8$ saat uyuyor $16-8=8$ saat serbest kalır

$24-8=16$ 8

$\frac{\cancel{16}^{8}}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_{1}}=\frac{8}{1}=8$ saat ders   2

CURRICULUM VITAE

PERSONAL INFORMATION

Surname, Name: Düzenli Gökalp, Nurgül
Nationality: Turkish (TC)
Date and Place of Birth: 23 August 1981, Kütahya
Marital Status: Married
email: nurgulduzenli@yahoo.com

EDUCATION

Degree	**Institution**	**Year of Graduation**
BS	Middle East Technical University, Department of Elementary Mathematics Education, Ankara	2004
High School	Kütahya Anatolian Teacher Training High School , Kütahya	1999

WORK EXPERIENCE

Year	**Place**	**Enrollment**
2012 – present	İsmet İnönü Public Elementary School	Mathematics Teacher
2006 – 2012	Hafize Özal Public Elementary School	Mathematics Teacher
2005 – 2006	Eti Holding Public Elementary School	Mathematics Teacher,

FOREIGN LANGUAGES

Advanced English

PUBLICATIONS

Düzenli, N., & Erbas, A. K. (2005). Using Java applets in teaching and learning of fractions. Paper presented at the V. International Educational Technology Conference, September 21-23, 2005, Sakarya, Türkiye

Gökalp, M. S. & Düzenli, N. (2005). Fimatem.Com: Fizik ve Matematik Eğlence Merkezi. Paper presented at the V. International Educational Technology Conference, September 21-23, 2005, Sakarya, Türkiye

Düzenli-Gökalp, N., & Sharma, M. D. (2010). A study on addition and subtraction of fractions: The use of Pirie and Kieren model and hands-on activities. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 2*, 5168–5171

Düzenli-Gökalp, N., Bulut, S., & Sharma, M. D. (2010). An assessment of students' understanding of addition and subtraction of fractions. Paper presented at the ECER 2010, Helsinki, Finland.

Gökalp, M. S. & Düzenli-Gökalp, N. (2011). An Online Learning Environment in Which the Interaction Maximized. Paper presented at the World Conference on New Trends in Science Education (WCNTSE), September 19-23, 2011, Kuşadası, Türkiye

Gökalp, M. S. & Düzenli-Gökalp, N. (2011). Use of Internet Based Activities in Physics and Mathematics Education. Paper presented at the World Conference on New Trends in Science Education (WCNTSE), September 19-23, 2011, Kuşadası, Türkiye

Gökalp, M. S, Uşak, M., & Düzenli-Gökalp, N. (2012). Web Kullanıcıları ve Web Destekli Eğitim: Neredeyiz? Nereye Gidiyoruz?. Paper presented at the 6th International Computer & Instructional Technologies Symposium (ICITS 2012), October 4-6, 2012, Gaziantep, Türkiye