

**TÜBİTAK**

2008-333

**TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU**  
THE SCIENTIFIC AND TECHNOLOGICAL RESEARCH COUNCIL OF TURKEY

**Temel Bilimler Araştırma Grubu**  
Basic Sciences Research Grant Group

95987

**Nükleer Füzyon Reaktör Problemlerinin Sınır Elemanlar Yöntemi ile  
Çözümü**

**PROJE NO : 105T091**

**Prof. Dr. Münevver TEZER-SEZGİN**

**Ocak 2008  
ANKARA**

**TÜBİTAK**  
**PROJE ÖZET BİLGİ FORMU**

<b>Proje No: 105T091</b>
<b>Proje Başlığı: NÜKLEER FÜZYON REAKTÖR PROBLEMLERİNİN SINIR ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ</b>
<b>Proje Yürütücüsü ve Araştırmacılar:</b> Prof.Dr. Münevver TEZER-SEZGİN (Yürütücü) Doc.Dr. Ali İhsan NESLİTÜRK Araş.Gör. Selçuk Han AYDIN
<b>Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi:</b> Orta Doğu Teknik Üniversitesi Uygulamalı Matematik Enstitüsü Eskişehir Yolu, 06531 ANKARA
<b>Destekleyen Kuruluş(ların) Adı ve Adresi:</b>
<b>Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri:</b> 01/11/2005 – 01/11/2007
<b>Öz (en çok 70 kelime)</b> <p>Bu çalışmada nükleer füzyon reaktör problemlerinin modellesi sonucu elde edilen Grad-Shafranov (GS) denkleminin sınır elemanları yöntemi (BEM), sonlu elemanlar yöntemi (FEM) ve difereansiyel kuadratür yöntemi (DQM) ile değişik plazma türleri için çözümleri sunulmaktadır. GS denklemi aksisimetrik koordinatlarda en genel hali ile magnetohidrodinamik denklemlerinden elde edildiğinden dolayı, çalışmanın geri kalan bölümlerinde ilk olarak Navier-Stokes denklemlerinin, daha sonra da magnetohidrodinamik denklemlerinin stabilize edilmiş sonlu elemanlar yöntemleri ile kararlı çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen çalışmalar uluslararası konferanslarda sunulmuş ve yayınlanmak üzere uluslararası hakemli dergilere gönderilmiştir. Bu proje Tübitak tarafından 105T091 nolu proje adı altında iki yıl süreyle desteklenmiştir.</p>
<b>Anahtar Kelimeler:</b> Magnetohidrodinamik(MHD), füzyon reaktör, plazma
<b>Projeden Yapılan Yayınlar: (1) Kabul edilen 2,3)Hakemler tarafından değerlendirme aşamasında olanlar)</b> <b>1)- A. I. Neslütürk, S. H. Aydın, M. Tezer-Sezgin; Two-level finite element method with a stabilizing subgrid for the incompressible Navier-Stokes equations, International Journal For Numerical Methods In Fluids</b> <b>2)- S. Han Aydın, M. Tezer-Sezgin; Numerical Solution of Grad-Shafranov Equation for the Distribution of Magnetic Flux in Nuclear Fusion Devices, An International Journal Computers and Fluids.</b> <b>3)- S. H. Aydın, A. I. Neslütürk, M. Tezer-Sezgin; Stabilized FEM in space - FEM in time formulations for unsteady incompressible and magnetohydrodynamic flows, International Journal for Numerical Methods in Engineering</b>

# NÜKLEER FÜZYON REAKTÖR PROBLEMLERİNİN SINIR ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

**PROJE NO: 105T091**

Pof.Dr. MÜNEVVER TEZER-SEZGİN  
Doc.Dr. ALİ İHSAN NESLİTÜRK  
Araş.Gör. SELÇUK HAN AYDIN

KASIM 2007

## ÖNSÖZ

Bu çalışmada nükleer füzyon reaktör problemlerinin modellesi sonucu elde edilen Grad-Shafranov (GS) denkleminin sınır elemanları yöntemi (BEM), sonlu elemanlar yöntemi (FEM) ve difereansiyel kuadratür yöntemi (DQM) ile değişik plazma türleri için çözümleri sunulmaktadır. GS denklemi aksisimetrik koordinatlarda en genel hali ile magnetohidrodinamik denklemlerinden elde edildiğinden dolayı, çalışmanın geri kalan bölümlerinde ilk olarak Navier-Stokes denklemlerinin, daha sonra da magnetohidrodinamik denklemlerinin stabilize edilmiş sonlu elemanlar yöntemleri ile kararlı çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen çalışmalar uluslararası konferanslarda sunulmuş ve yayınlanmak üzere uluslararası hakemli dergilere gönderilmiştir. Bu proje Tübitak tarafından 105T091 nolu proje adı altında iki yıl süreyle desteklenmiştir.

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ .....	1
ŞEKİL LİSTELERİ .....	3
ÖZET .....	4
ABSTRACT .....	5
İÇİNDEKİLER .....	6
BÖLÜMLER	
1 GİRİŞ .....	7
2 GRAD-SHAFRANOV DENKLEMİNİN SAYISAYAL YÖNTEMLERLE ÇÖZÜMÜ .....	9
2.1 Sınır Elemanları Yöntemi (BEM) ile Çözüm .....	9
2.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi (FEM) ile Çözüm .....	12
2.3 Diferansiyel Kuadratür Yöntemi (DQM) ile Çözüm .....	14
2.4 Sayısal Sonuçlar .....	15
2.4.1 Örnek 1 .....	16
2.4.2 Örnek 2 .....	22
2.4.3 Örnek 3 .....	23
3 NAVIER-STOKES DENKLEMLERİ .....	24
3.1 Denklemlerin Tanımı .....	24
3.1.1 Denklemlerin Varyasyonel Formülasyonu .....	26
3.1.2 Örnek .....	29
3.2 Navier-Stokes Denklemlerinin Üçgen Elemanlar Üzerinde Stabilize Edilmiş Yöntemlerle Çözümü .....	32
3.2.1 Stabilizasyon parametresinin hesaplanması .....	33
3.2.2 Örnekler .....	35
3.3 Navier-Stokes Denklemlerinin Üçgen Elemanlar Üzerinde Bubble Fonksiyonları Kullanarak İki Aşamalı Çözümü .....	45
3.3.1 Alt düzey problemleri .....	45

3.3.2	Doğrusal Terimler	47
3.3.3	Bubble Terimleri	48
3.3.4	Örnek	49
3.4	3-Boyutlu Uzayda Navier-Stokes Denklemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü	53
3.4.1	Örnek	54
4	ZAMAN BAĞIMLI NAVIER-STOKES DENKLEMLERİ	56
4.1	Konveksiyon-Difüzyon Problemi	57
4.1.1	Örnekler	58
4.2	Zaman Bağımlı Navier-Stokes Denklemleri	61
4.2.1	Örnek	62
5	MAGNETOHİDRODİNAMİK DENKLEMLERİ	64
5.1	MHD Denklemlerinin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü	65
5.1.1	Örnek	66
5.2	Stabilized(SUPG) Formulation of MHD Equations	72
5.2.1	Örnek	72
6	SONUÇ	77
	KAYNAKÇA	79
	EKLER	86
1.8	$Re=400$ için basınç alanları	
1.9	$Re=4000$ için basınç alanları	
3.10	$Re=5000$ için basınç alanları	
1.11	$Re=5000$ için akış alanları	
3.12	Back Step Flow Problemi	
1.13	$Re=150$ için basınç alanları	
1.14	$Re=150$ için akış alanları	
1.15	Süblim akışın bir akış problemi	
1.16	$Re=25$ için akış alanları	
1.17	Bubble fonksiyon seçimi	
1.18	Bubble fonksiyonların bir akış problemi için kullanılması	
3.19	Cavity Flow problemi için sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen akış alanları	
1.20	Cavity Flow problemi için sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen akış alanları	

2.1	Dikdörtgen plazma problemi BEM yöntemi, $\mu_0 r J_\varphi = 1$	16
2.2	Dikdörtgen plazma problemi BEM yöntemi, $\mu_0 r J_\varphi = r^3 z^2$	17
2.3	Dikdörtgen plazma problemi BEM yöntemi, $\mu_0 r J_\varphi = r^2 z^3$	17
2.4	Dikdörtgen plazma problemi FEM yöntemi, $\mu_0 r J_\varphi = 1$	18
2.5	Dikdörtgen plazma problemi FEM yöntemi, $\mu_0 r J_\varphi = r^3 z^2$	19
2.6	Dikdörtgen plazma problemi FEM yöntemi, $\mu_0 r J_\varphi = r^2 z^3$	19
2.7	Dikdörtgen plazma problemi DQM yöntemi, $\mu_0 r J_\varphi = 1$	20
2.8	Dikdörtgen plazma problemi DQM yöntemi, $\mu_0 r J_\varphi = r^3 z^2$	21
2.9	Dikdörtgen plazma problemi DQM yöntemi, $\mu_0 r J_\varphi = r^2 z^3$	21
2.10	D-şeklinde tokamak plazma problemi (BEM and FEM)	22
2.11	Tokamak plazma(Solov'ev' türü) BEM ve tam değer eğrileri	23
3.1	Driven Cavity Flow Problemi	29
3.2	Basınç Sonucu	30
3.3	Hız(u,v) Sonuçları	30
3.4	Basınç Sonucu	31
3.5	Hız(u,v) Sonuçları	31
3.6	Üçgen eleman	34
3.7	Akımın mesh belirlenmesindeki etkisi	35
3.8	Re=400 için basınç grafiği	36
3.9	Re=5200 için basınç eğrileri	37
3.10	Re=5200 için basınç grafiği	38
3.11	Re=5200 için akıntı çizgileri	39
3.12	Back Step Flow Problemi	40
3.13	Re=150 için basınç grafiği	41
3.14	Re=150 için akıntı çizgileri	42
3.15	Silindir etrafında akım problemi	43
3.16	Re=26 için akıntı çizgileri	44
3.17	Bubble fonksiyon eğrileri	50
3.18	Bubble fonksiyonları 3-boyutlu görünüm	50
3.19	Cavity Flow probleminde Re=400 için, N=20 ve N=40 ayrıklaştırmalarında elde edilen basınç grafikleri	51
3.20	Cavity Flow probleminde Re=5200 için, N=20, N=40, N=80 ayrıklaştırmalarında stabilized subgrid ve bubble çözümlerinin karşılaştırılması	52



3.21	Basınç eğri ve elevation grafikleri . . . . .	55
3.22	Hız vektörünün (u,v) bileşen eğrileri . . . . .	55
4.1	Zaman bağımlı 2-boyutlu uzay . . . . .	56
4.2	Sayısal ve teorik çözümler (t=0.05) . . . . .	59
4.3	Sayısal ve teorik çözümler (t=0.01 and t=0.05) . . . . .	60
4.4	Basınç eğrileri ve akıntı çizgileri grafikleri (t=1.0) . . . . .	63
4.5	Hız bileşen u ve v eğrileri (t=1.0) . . . . .	63
5.1	Basınç eğrileri ve grafiklerinin standart Galerkin yöntemi ve teorik sonuçlarla kıyaslaması . . . . .	68
5.2	Hız bileşen (u,v) eğrilerinin standart Galerkin yöntemi ve teorik sonuçlarla kıyaslaması . . . . .	69
5.3	Manyetik alan bileşen(Bx,By) eğrilerinin standart Galerkin yöntemi ve teorik sonuçlarla kıyaslaması . . . . .	70
5.4	Basınç için sayısal (Babuska-Brezzi koşulu altında) ve teorik sonuçlar . . . . .	71
5.5	Manyetik alan +x yönünde, basınç grafiği . . . . .	73
5.6	Manyetik alan +x yönünde, hız u bileşen eğrileri . . . . .	74
5.7	Manyetik alan +y yönünde, basınç grafiği . . . . .	75
5.8	Manyetik alan +y yönünde, hız u bileşen eğrileri . . . . .	76

## ÖZET

Hidrojen çekirdeğinin füzyonundan güneş enerjisi kadar yüksek enerji elde edilebileceği uzun süreden beri bilinmekte ve çok ilgi görmektedir. Ümit verici yöntemlerden birisi çok yüksek ısı ( $10^7$ - $10^8$  Kelvin) ve manyetik alan etkisi altında plazmayı tokamak diye adlandırılan şekilde tutabilmektir. Bu yüksek ısıda iyonlardan oluşan plazma mükemmel bir elektrik geçirgendir. Böyle bir plazmanın dengesinin fiziği yüksek ısının ve uygulanan manyetik alanın basınçlarının kuvvet dengelenmesi ile tanımlanır. Manyetik alan 3 boyutta axisimetrik kabul edildiğinde plazmanın matematiksel modellenmesi Grad-Shafranov denklemi ile tanımlanır. Grad-Shafranov denklemi lineer olmayan bir denklemdir ve teorik çözümü bulunmamaktadır. Ancak sayısal metodlar kullanarak çözümler elde etmek mümkündür. Literatürde var olan bir çok sayısal çözüm ise ardışık çözümler olup bilgisayar programlaması ve çözülmesi çok zaman gerektirmektedir.

Bu projede, son yılların en kuvvetli sayısal yöntemleri olan sonlu elemanlar ve sınır elemanları yöntemleri kullanılacaktır. Çözümün çok hassas olması gerektiği için sonlu elemanlar yöntemi, kararlılık ve yakınsaklık özelliği çok yüksek olarak bilinen kalansız ampul fonksiyonları ile kullanılarak; sınır elemanları yöntemi ise plazmanın çeperinin değişken olma durumunda en uygun olan bir yöntem olarak kullanılacaktır. Denklemin sağ taraf fonksiyonunun bilinmesi halinde de radyal baz fonksiyonları kullanılacaktır.

Sonlu elemanlar yönteminde kalansız ampul fonksiyonlarının kullanımı, sınır elemanları yönteminin radyal baz fonksiyonlarını kullanması ve değişken plazma çeperine uygun olması dolayısı ile Grad-Shafranov denkleminin var olan çözümlerden daha hassas ve kararlı çözümleri elde edilebilecektir. Ardışık çözümlerdeki kadar da fazla bilgisayar zamanı harcanmayacaktır. Nükleer füzyon probleminin çözümüne teorik olarak yapılacak bu katkının uygulama ve deneylerde çok yararı görülecektir.

Grad-Shafranov denklemi, dikdörtgen plazma probleminin uygulaması kolay ve basit olan diferansiyel kuadratür yöntemi (DQM) ile de çözülmüştür. Her üç yöntemden, (BEM, FEM ve DQM) elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Ayrıca D-şeklinde ve Solov'ev türü plazma problemleri için de sayısal sonuçlar elde edilmiştir.

Grad-Shafranov denklemi, en genel hali ile aksi simetrik koordinatlarda manyetik flux türünden magnetohidrodinamik denklemlerinden elde edilebileceğinden dolayı ilk olarak Navier-Stokes denklemleri daha sonra da magnetohidrodinamik denklemleri çözülmüştür. Denklemlerde yer alan doğrusal olmayan terimlerden dolayı uygulamadaki avantajları göz önünde bulundurularak stabilize edilmiş sonlu elemanlar yöntemi kullanılmış ve kararlı çözümler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Magnetohidrodinamik(MHD), füzyon reaktör, plazma

## ABSTRACT

Fusion of the nuclei of hydrogen provides the energy source which powers the sun. It also offers the possibility of a practically limitless terrestrial source of energy. However, the harnessing of this power has proved to be highly challenging problem. One of the most promising approaches is based on the magnetic confinement of a high temperature ( $10^7$ - $10^8$  Kelvin) plasma in a device called tokamak (from the Russian for 'toroidal' magnetic chamber). At these temperatures the highly ionized plasma is an excellent electrical conductor, and can be confined and shaped by strong magnetic fields. The physics of the plasma equilibrium is determined by force balance between the thermal pressure of the plasma and the pressure of the magnetic field. The equilibrium of a perfectly conductive plasma confined by an axisymmetric magnetic field is described in terms of solution of the Grad-Shafranov equation.

Due to the non-linear nature of the Grad-Shafranov equation a general analytical solution is not possible. However, for a given current density (the non-homogeneity), the Grad-Shafranov equation can be solved numerically. Most the numerical methods are iterative in nature due to the non-linearity of the equation.

In this project two different recent and powerful numerical methods, namely the finite element method with residual free bubble functions and the boundary element method are going to be used without the need of iteration. The residual free bubble functions are used for stabilizing the numerical results obtained from the finite element method. The boundary element method is well-suited for plasma equilibrium analysis that requires efficient data preparation and computation following the change in plasma shape during the operation of an actual fusion device. The non-homogeneity in the Grad-Shafranov equation is going to be approximated by using radial basis functions.

The use of the residual free bubble functions in finite element method to stabilize the numerical method, and the use of radial basis functions in the boundary element method for approximating the right hand side of the equation are going to improve the solutions obtained previously, by other numerical techniques and iterative methods in the sense of accuracy and stability. This contribution will be helpful in the applications and experiments.

The Grad-Shafranov equation is also solved by using differential quadrature method (DQM) which is simple and easy to implement in the case of rectangular plasma. The solutions obtained from BEM, FEM and DQM are compared. Also, D-shape and Solov'ev type tokamak type plasma problems are solved numerically.

Since the Grad-Shafranov equation can be obtained in axsi-symmetric coordinate system from the magnetohydrodynamic equations in terms of magnetic flux function, Navier-Stokes equations and magnetohydrodynamic equations are solved numerically.

Since the finite element method has advantageous in non-linear equations, we have used and obtained stable results with stabilized finite element methods in the solution of the equations.

Keywords: MHD, fusion reactor, plasma

## BÖLÜM 1

### GİRİŞ

Plazma, elektrik yüklü parçacıkları ihtiva eden ve elektrik ileten akışkan veya gazdan oluşmaktadır. Yüksek ısı altında iyonlarına ayrışan plazma mükemmel bir elektrik iletkeni haline gelir ve kuvvetli manyetik alan ile de şekillendirilebilir. Plazma konfigürasyonu Grad-Shafranov (GS) denkleminin çözümü ile tarif edilmektedir. Lineer olmayan tabiatından dolayı analitik bir çözümü bulunmayan Grad-Shafranov denklemi sayısal yöntemlerle ardışık olarak çözülebilmektedir. Sabit sınırlı dikdörtgen plazmanın tanımlandığı, sağ taraf fonksiyonunun polinomlar ile yaklaştırılmış hali için direk sayısal çözümler bulunmakla birlikte [38], Grad-Shafranov denklemi doğrusal olmayan sağ taraf fonksiyonu için ancak ardışık sayısal yöntemlerle çözülmüştür [56].

Gerçek füzyon cihazlarında değişken sınırlı plazma olarak görülmekte olan tokamak tipindeki plazma problemlerinde sayısal çözümler için problem bölgesi çok ufak elemanlara bölünmek zorundadır. Sınır elemanları yöntemi yalnız sınırı ayrıklaştırdığı için az sayıda ayrık nokta kullanarak doğru yaklaşık çözümler verebilmektedir. Bu da hesaplamalarda maliyeti oldukça düşürmektedir.

Bu çalışmada, sınır elemanları yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi ve differansiye kuadratür yöntemi Grad-Shafranov denklemini sayısal olarak çözmekte kullanılmıştır. Dikdörtgen plazma için her üç metod ile de çözüm elde edilmiş ve sonuçlar karşılaştırılmış olup D-şeklindeki plazma için sonlu elemanlar ve sınır elemanları yöntemleri kullanılmış, Solov'ev tokamak plazma problemi için ise sınır değişken olması nedeni ile sınır elemanları yöntemi tercih edilmiştir. Itegaki [38] de kullanılan ve eliptik integraller içeren temel çözüm yerine Tezer-Sezgin ve Dost [64]'un kullandığı basit integral formunda olan temel çözümlerden yararlanılmıştır. GS denkleminin sağ tarafı polinom olarak alındığında denklemi özel bir çözüm bulunmuş ve sınır elemanları metodu homojen denkleme uygulanmıştır. D-şeklinde plazmada sağ taraf doğrusal olmadığı için sonlu elemanlar yöntemi doğrusal üçgen ve ikili-doğrusal dikdörtgen elemanlar kullanılarak ve ardışık olarak uygulanmıştır.

Literatürdeki diğer çalışmalar ile yapılan karşılaştırmalarda, dikdörtgen plazma problemi için en ucuz ve basit yöntemin differansiyel kuadratür metodu olduğu görülmüştür. Ardışık sonlu elemanlar yönteminin D-şeklindeki plazma için çok hassas yaklaşık çözüm verdiği, sınır değişken olmasından dolayı ise Solov'ev tokamak plazma problemine ise sınır elemanları metodunun en uygun olduğu gözlemlenmiştir.

Sıvı metallerin elektromanyetik analizinde momentum denklemleri, Maxwell denk-

lemleri ve Ohm's kanunun kullanılmaktadır. Böylece akım, süreklilik denklemi ve Navier-Stokes denklemlerine elektromanyetik kuvvet etkisinden kaynaklanan magnetohidro-dinamik terimlerin eklenmiş hali ile tanımlanır [57, 43]. Grad-Shafranov denklemi ise en genel hali ile magnetohidrodinamik denklemlerinin bir bütün halinde kartesyan koordinatlarda, manyetik flux cinsinden yazılması ile elde edilebilmektedir [38, 56, 3]. Bundan dolayı çalışmanın diğer bölümlerinde magnetohidrodinamik denklemlerinin çözümü üzerine yoğunlaşmıştır. Magnetohidrodinamik denklemleri, Momentum, Maxwell ve süreklilik denklemleri ile manyetik alan terimleri için geçerli olan Divergence-Free koşullarından oluşmaktadır. İlk aşamada denklemlerin karmaşık yapısı göz önünde bulundurularak, Momentum ve süreklilik denklemlerinden oluşan Navier-Stokes denklemlerinin temel değişkenler (u-v-p) formunda çözümü üzerinde çalışılmıştır. Denklemlerin doğrusal olmayan ve iç içe girmiş yapılarından dolayı, pek çok mühendislik probleminin çözümünde başarılı sonuçlar veren sonlu elemanlar yöntemi tercih edilmiştir.

Literatürde, daha önceki çalışmalardan da bilinen ve sonlu elemanlar yönteminin normal Galerkin türü sonuçlarında, basınç değişkeni için salınımlar ve kararsız sonuçlar elde edildiği gözlemlenmiştir. Sonlu elemanlar yönteminde kararlı çözümler elde edebilmek için belli koşulları sağlayan (Babuska-Brezzi koşulu) uygun baz uzayları seçilmeli veya değişik stabilizasyon teknikleri uygulanmalıdır. Bu çalışmada, daha önce Navier-Stokes denklemlerinin çözümünde kullanılan SUPG(Streamline Upwind Petrov-Galerkin) ve bubble fonksiyonları yöntemleri ile kararlı çözümler elde edilmiştir. Daha önce sadece konveksiyon-difüzyon denklemleri için, üçgen elemanlar ile uygulanan stabilize edilmiş alt grid yöntemi ile de kararlı çözümler elde edilmiş, ve çıkan sonuçlar diğer yöntemlerle karşılaştırılmıştır.

Çalışmanın son bölümünde, en genel hali ile magnetohidrodinamik denklemleri manyetik alan, hız ve basınç türünden iki boyutlu uzayda tanımlanmış, sonlu elemanlar yöntemi ile formülasyonu yapılmıştır. Navier-Stokes denklemlerinin çözümünde uygulanan yöntemler, magnetohidrodinamik denklemlerinin çözümüne uygulanmış ve kararlı sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların, literatürdeki diğer sonuçlarla ve tam sonuçlarla mukayesesinden sonuçların uyumluluğu gözlemlenmiştir.

İki yıl boyunca süren proje çalışmalarından, Grad-Shafranov denkleminin çözümü, Navier-Stokes denklemlerinin stabilize edilmiş alt grid yöntemi ile çözümü ve zaman bağımlı Navier-Stokes denklemlerinin zaman bileşeni yönünde de sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözümü üç ayrı makale olarak hazırlanmış ve yayınlanmak üzere uluslararası hakemli dergilere gönderilmiştir. Magnetohidrodinamik denklemlerinin stabilize edilmiş sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçları da ayrıca makale olarak hazırlanmakta olup uluslararası hakemli bir dergide yayınlanmak üzere gönderilecektir.

## BÖLÜM 2

### GRAD-SHAFRANOV DENKLEMİNİN SAYISAYAL YÖNTEMLERLE ÇÖZÜMÜ

Aksisimetrik  $(r, z)$  koordinat sisteminde Grad-Shafranov denklemi aşağıdaki gibi olup

$$-\Delta^* \Psi \equiv - \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \Psi = \mu_0 r^2 \frac{dP}{d\Psi} + \frac{d}{d\Psi} \left( \frac{F^2}{2} \right) \equiv \mu_0 r J_\varphi \quad (2.1)$$

denklemden  $\Psi$  manyetik flux fonksiyonu,  $P$  plazma basıncı,  $F$  poloidal akım fonksiyonu,  $J_\varphi$  da plazma akımının toroidal bileşenidir

#### 2.1 Sınır Elemanları Yöntemi (BEM) ile Çözüm

Gerçek nükleer füzyon cihazlarında, uygulanan operasyonlar sonucu plazma şeklini değiştirdiği için sınır elemanları yöntemi plazma problemlerinin çözümünde avantaj göstermektedir. Çünkü sınır elemanları yöntemi sadece problemin tanımlı olduğu bölgenin sınırlarını ayrıklaştırır.

Grad-Shafranov denklemi için aşağıdaki eşitliği sağlayan temel çözüm  $\Psi^*$  (2.1)

$$-\Delta^* \Psi^* = r \delta_i.$$

( $\delta_i$  Dirac delta fonksiyonunu göstermektedir) basit integral formunda Tezer-Sezgin ve Dost [64] tarafından hesaplanmış olup

$$\Psi^* = \frac{ar}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{R} d\theta \quad (2.2)$$

formunda yazılabilir.  $R^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos\theta + (z - b)^2$  ve  $(a, b)$ ,  $(r, z)$  sırası ile kaynak(sabit) ve değişken nokta koordinatlarını göstermektedir. Eliptik integraller türünden de  $(K(k)$  and  $E(k)$  birinci ve ikinci türden eliptik integraller olmak üzere) temel çözüm verilmektedir [38]

$$\Psi^* = \frac{\sqrt{ar}}{\pi k} \left[ \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right] \quad (2.3)$$

burada  $k^2 = \frac{4ar}{(r+a)^2 + (z-b)^2}$  sabit ve değişken noktalara bağlı bir parametredir.

Denklem (2.1)'i temel çözümler (2.3) ile çarpıp, problemin tanım bölgesi üzerinde integralledikten sonra Green's ikinci eşitliği kullanılarak [38]

$$\int_{\Gamma} \left\{ \frac{\Psi^*}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \frac{\Psi}{r^2} \frac{\partial \Psi^*}{\partial n} \right\} d\Gamma = - \int_{\Omega} \frac{\Psi^*}{r^2} (\mu_0 r J_{\varphi}) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\Psi}{r} \delta_i d\Omega \quad (2.4)$$

denklemini elde edilir. Sadeleştirilmiş olarak

$$c_i \Psi_i = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\Psi^*}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \frac{\Psi}{r} \frac{\partial \Psi^*}{\partial n} \right\} d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\Psi^*}{r} (\mu_0 r J_{\varphi}) d\Omega \quad (2.5)$$

öyleki  $c_i$  sabit değeri iç noktalarda 1 ve sınırlarda ise 1/2 değerini alır.  $\partial/\partial n$  sınırlarda dış doğru birim normal vektörüne göre türevi göstermektedir.

Problemin tanımlandığı bölgenin sınırları  $N$  tane sabit sınır elemanına ( $\Gamma_j$ ) ayrıklaştırılırsa (2.5) denkleminde aşağıdaki matris-vektör sistemi elde edilir

$$\sum_{j=1}^N H_{i,j} \Psi_j - \sum_{j=1}^N G_{i,j} q_j = Q_i \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.6)$$

Denkleminde  $q_j = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right)_j$  olup, matris ve vektör elemanları açık şekilde

$$H_{i,j} = c_i + \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^*}{\partial n} d\Gamma$$

$$G_{i,j} = \int_{\Gamma_j} \frac{\Psi^*}{r} d\Gamma \quad (2.7)$$

$$Q_i = \int_{\Omega} \frac{\Psi^*}{r} (\mu_0 r J_{\varphi}) d\Omega \quad i, j = 1, \dots, N$$

formunda yazılır.

Her bir sınır elemanı için, eleman matris/vektörlerinin global sisteme dağıtımı ve Dirichle türü sınır koşullarının etki ettirilmesinden sonra elde edilen

$$[G] \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right\} = [H] \{ \Psi \} + \{ Q \} \quad (2.8)$$

doğrusal yapıdaki denklemler, sınırlarda bilinmeyen normal türev değerleri (her bir elemanın orta noktası olarak) için çözülür. Daha sonra bölge içerisinde herhangi bir  $i = (a, b)$



noktasında,  $c_i = 1$  alınarak manyetik flux fonksiyonu

$$\Psi_i = - \sum_{j=1}^N H_{ij} \Psi_j + \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j + Q_i$$

eşitliği kullanılarak hesaplanabilir. Burada artık  $R$ , manyetik flux fonksiyonunun değerinin hesaplandığı  $(a, b)$  noktasından sınırdaki değişken  $(r, z)$  noktasına olan uzaklığı göstermektedir.

Eşitlik (2.7)'de bulunan alan integrali  $Q_i$  değişik yöntemler kullanılarak sınır integralleri türünden ifade edilebilir. Grad-Shafranov denkeleminde yer alan sağ taraf terimlerinin  $(r, z)$  bağımsız değişkenler veya  $\Psi$  manyetik flux fonksiyonları türünden ifade edilmesi ile alan integrali elimine edilebilir. Temel baz fonksiyonları kullanılarak, DR-BEM(dual reciprocity boundary element method) uygulaması ile alan integral terimleri, matris-vektör formunda sınır integrallerine dönüştürülür [38]. Elde edilen sistemde, sınır ve iç noktalardaki özel çözüm fonksiyonunun değerleri kullanılır. Sağ taraf fonksiyonu polinomlar türünden ifade edildiği durumda, özel çözüm fonksiyonları(particular solution) kullanılarak, Grad-Shafranov denklemi homojen hale dönüştürülerek de alan integrallerinin eliminasyonu gerçekleştirilebilir.

GS denklemi için özel çözüm  $\varphi^{(l,m)}$  temel baz fonksiyonları kullanılarak  $-\Delta^* \varphi^{(l,m)} = r^l z^m$  sonsuz seri seri halinde yazılabilir

$$\varphi^{(l,m)} = - \frac{r^l z^{m+2}}{(m+1)(m+2)} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{s=1}^k \left[ - \frac{(l-2s+2)(l-2s)}{(m+2s+1)(m+2s+2)} \frac{z^2}{r^2} \right] \right\}. \quad (2.9)$$

Referans [38] de önerildiği gibi

$$\hat{\Psi} = \Psi - \varphi^{(l,m)} \quad (2.10)$$

$\hat{\Psi}$  değişkeninin tanımlanması ile

$$-\Delta^* \hat{\Psi} = 0 \quad (2.11)$$

homojen denklemi ve

$$\hat{\Psi}_{BC} = \Psi_{BC} - \varphi_{BC}^{(l,m)}. \quad (2.12)$$

sınır koşulları sağlanır.

Elde edilen (2.11) denkleminin BEM uygulaması ve (2.12) sınır koşullarının etki ettirilmesi ile (2.6) denkleminin benzer fakat homojen formda ayrıklaştırılmış sistem elde edilebilir. Dönüştürülmüş sistemin çözümünden elde edilen  $\hat{\Psi}$  fonksiyon değerleri

$$\Psi = \hat{\Psi} + \varphi^{(l,m)} \quad (2.13)$$

eşitliğinde kullanılarak bilinmeyen manyetik flux fonksiyonu hesaplanır. Böylelikle alan integrali hesaplanması yerine, özel çözüm kullanılarak  $\Psi$  değerleri elde edilir.

Grad-Shafranov denkleminin sağ tarafı  $\mu_0 r J_\varphi$ , bilinmeyen  $\Psi$  değerleri türünden ifade edildiği durumlarda, doğrusal olmayan bir denklem elde edilir. Bu durumda aşağıdaki aşamalı formülasyon kullanılır

$$-\Delta^* \Psi^{(n+1)} = F(r, z, \Psi^{(n)}). \quad (2.14)$$

Başlangıç  $\Psi^{(0)}$  değerleri, sınır koşulları göz önünde bulundurularak tahmin edilir ve belirli bir yakınsaklık sağlanana kadar iterasyon devam eder.

## 2.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi (FEM) ile Çözüm

Sonlu elemanlar yöntemini uygulamadan önce

$$H_0^1(\Omega) = \{N_i : N_i \in L_2(\Omega), |\nabla N_i| \in L_2(\Omega), N_i|_{\partial\Omega} = 0\}$$

ile tanımlanan bir test uzayı alalım. Grad-Shafranov denklemini yeniden yazıp

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = F(\Psi, r, z) = -\mu_0 r J_\varphi \quad (2.15)$$

Galerkin yöntemi ile sonlu elemanlar metodu(FEM) ([50]) bilinmeyen  $\Psi$  manyetik flux fonksiyonu için

$$\Psi(r, z) = \sum_{j=1}^{ndof} \Psi_j N_j(r, z) \quad (2.16)$$

yaklaşık değeri kullanılarak elde edilir. Burada  $ndof$ , toplam bilinmeyen sayısını,  $\Psi_j$ ,  $\Psi$ 'nin  $j$ 'ninci noktadaki sonlu eleman yaklaşımını ve  $N_j(x) \in H_0^1$  de  $j$ 'ninci noktadaki baz(shape) fonksiyonunu göstermektedir.

Denklem (2.15)  $N_i$  test fonksiyonu ile çarpılıp elemanlar ( $\Omega^e$ ) üzerinde integral-  
lendiğinde

$$\sum_{j=1}^{ndof} \int_{\Omega^e} \int \left( \frac{\partial^2 N_j}{\partial r^2} N_i + \frac{\partial^2 N_j}{\partial z^2} N_i \right) d\Omega - \sum_{j=1}^{ndof} \int_{\Omega^e} \int \frac{1}{r} \frac{\partial N_j}{\partial r} N_i d\Omega = \int_{\Omega^e} \int F(\Psi, r, z) N_i d\Omega \quad (2.17)$$

eşitliği elde edilir ( $i = 1, \dots, ndof$ ). Green's ikinci eşitliği ilk terim için kullanıldığında  
denklem

$$\sum_{j=1}^{ndof} \int_{\partial\Omega^e} \frac{\partial N_j}{\partial n} N_i ds - \sum_{j=1}^{ndof} \int_{\Omega^e} \int \left( \frac{\partial N_j}{\partial r} \frac{\partial N_i}{\partial r} + \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) d\Omega - \sum_{j=1}^{ndof} \int_{\Omega^e} \int \frac{1}{r} \frac{\partial N_j}{\partial r} N_i d\Omega = \int_{\Omega^e} \int F(\Psi, r, z) N_i d\Omega \quad (2.18)$$

şeklini alır ve sonuç olarak

$$\sum_{i=1}^{ndof} \sum_{j=1}^{ndof} K_{i,j} \Psi_j = \sum_{i=1}^{ndof} F_i$$

matris-vektör eşitliği elde edilir. Matris elemanları

$$K_{i,j} = \int_{\partial\Omega^e} \frac{\partial N_j}{\partial n} N_i ds - \int_{\Omega^e} \int \left\{ \frac{\partial N_j}{\partial r} \frac{\partial N_i}{\partial r} + \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_j}{\partial r} N_i \right\} dr dz$$

ve vektör elemanları ise

$$F_i = \int_{\Omega^e} \int F(\Psi, r, z) N_i d\Omega$$

şeklinde yazılır. Dirichle türünde sınır koşulu belirtildiği durumda  $K_{i,j}$  eşitliğindeki sınır  
integrali sıfır değerini alır. Eleman matris/vektörlerinin global sisteme etki ettirilmesi ve  
sınır koşullarının uygulanmasından sonra, bilinmeyen manyetik flux fonksiyonu  $\Psi$

$$[K]\{\Psi\} = \{F\} \quad (2.19)$$

sisteminin çözümünden yaklaşık olarak elde edilir.

Eğer  $F(\Psi, r, z)$  fonksiyonu doğrusal değilse (2.14) denkleminde benzer şekilde aşamalı  
çözüm yöntemi uygulanır. Sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sistem bol miktarda  
sıfır içerdiğinden dolayı (sparse) uygun bir çözüm yöntemi (sparse system solver) uygula-  
nır.

## 2.3 Diferansiyel Kuadratür Yöntemi (DQM) ile Çözüm

Polinom tabanlı ve uygulaması son derece kolay olan diferansiyel kuadratür yöntemi [59] ile, Grad-Shafranov denkleminin sağ tarafının polinomlar türünden ifade edildiği durumlarda, çok az sayıda grid noktası kullanılmasına rağmen oldukça yakınsak sonuçlar elde edilebilmektedir.

Diferansiyel kuadratür yöntemi ile türev değerleri toplam seriler halinde ifade edilir. Bilinmeyen  $\Psi$  fonksiyonu  $r$  ve  $z$  yönlerinde sırası ile  $M_r$  ve  $M_z$  ninci dereceden polinomlar türünden ifade edilirse, ikinci dereceden türev değerleri  $(r_i, z_j)$  noktasında

$$\Psi_{rr}(r_i, z_j) = \sum_{k=1}^{M_r} b_r(i, k) \Psi(r_k, z_j), \quad \Psi_{zz}(r_i, z_j) = \sum_{k=1}^{M_z} b_z(j, k) \Psi(r_i, z_k).$$

formunda yazılır.

Buna göre GS denkleminin DQM formülasyonu

$$\sum_{k=1}^{M_r} b_r(i, k) \Psi_{kj} + \sum_{k=1}^{M_z} b_z(j, k) \Psi_{ik} - \frac{1}{r_i} \sum_{k=1}^{M_r} a_r(i, k) \Psi_{kj} = r_i^l z_j^m \quad (2.20)$$

$$i = 1, \dots, M_r, \quad j = 1, \dots, M_z$$

şeklinde  $M_r$  ve  $M_z$  kadar grid noktası için,  $\Psi_{ik} = \Psi(r_i, z_k)$ ,  $b_r(i, k)$  ve  $b_z(j, k)$  ikinci dereceden türev ağırlık katsayıları, ve  $a_r(i, k)$ ,  $a_z(j, k)$  birinci dereceden türev ağırlık katsayıları kullanılarak yazılır. Türev katsayılarının formülleri aşağıda açık olarak verilmektedir;

$$a_r(i, k) = \frac{M(r_i)}{(r_i - r_k)M(r_k)} \quad i \neq k; \quad a_r(i, i) = - \sum_{k=1, k \neq i}^{M_r} a_r(i, k) \quad i, k = 1, \dots, M_r$$

$$a_z(j, k) = \frac{M(z_j)}{(z_j - z_k)M(z_k)} \quad j \neq k; \quad a_z(j, j) = - \sum_{k=1, k \neq j}^{M_z} a_z(j, k) \quad j, k = 1, \dots, M_z$$

$$b_r(i, k) = 2a_r(i, k) \left[ a_r(i, i) - \frac{1}{r_i - r_k} \right], \quad i \neq k; \quad b_r(i, i) = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{M_r} b_r(i, k) \quad i, k = 1, \dots, M_r$$

$$b_z(j, k) = 2a_z(j, k) \left[ a_z(j, j) - \frac{1}{z_j - z_k} \right], \quad j \neq k; \quad b_z(j, j) = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{M_z} b_z(j, k) \quad j, k = 1, \dots, M_z$$

burada

$$M(r_k) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{M_r} (r_k - r_j) \quad M(z_k) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{M_z} (z_k - z_j).$$

Sonuç olarak (2.20) denkleminde elde edilen sistem, matris vektör formunda

$$[A]\{\Psi\} = \{B\}$$

ve  $B_{ij} = r_i^l z_j^m$  alınarak yazılır, bilinmeyen  $\Psi$  değerleri için çözülür.

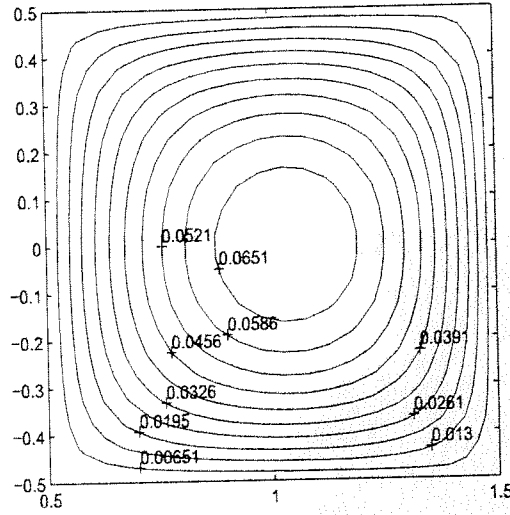
Differansiyel kuadratür yönteminde, eşit aralıklı grid noktaları yerine Chebyshev-Gauss-Lobatto düzeninde grid noktaları kullanmak daha verimli sonuçlar elde edilmesini sağlamaktadır [60]. Ayrıca, grid noktalarının sıralaması (satır veya sütun yönünde) elde edilen global sistemin yapısını belirlediğinden dolayı, yakınsak sonuçlar alınmasında önem arz etmektedir [65].

## 2.4 Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde Grad-Shafranov denkleminin sabit (dikdörtgen plazma) ve değişken sınır koşullu D-şeklindeki tokamak türü plazma halleri ve Solov'ev türü plazma türlerinin sayısal sonuçları verilmektedir. Dikdörtgen plazma için BEM, FEM ve DQM yöntemlerinin üçü ile de sonuçlar elde edilmiştir. D-şeklindeki plazma için BEM ve FEM yöntemlerinden sonuçlar elde edilmiş ve karşılaştırılmıştır. Problem tanım bölgesinden dolayı Solov'ev türü plazma için sadece BEM yöntemi uygulanmış ve avantajları sunulmuştur.

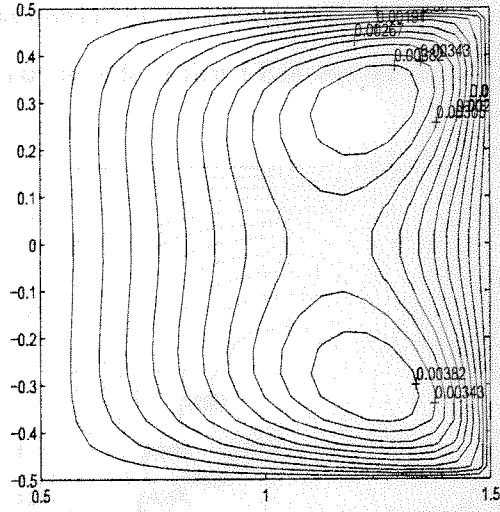
### 2.4.1 Örnek 1

Örnek dikdörtgen plazma problemi  $0.5 \leq r \leq 1.5$ ,  $-0.5 \leq z \leq 0.5$  bölgesinde, sağ taraf fonksiyonu  $\mu_0 r J_\varphi$  için temel polinom baz fonksiyonları olarak  $1$ ,  $r^2 z^3$  ve  $r^3 z^2$  alınarak çözülmüştür. Sınır koşulları olarak, bütün sınırlarda  $\Psi = 0$  alınmıştır. Aynı problemin sağ taraf fonksiyonu için  $r^3 z^2$  DRBEM yöntemi ile eliptik türündeki temel çözüm fonksiyonu alınarak sonuçlar elde edilmiştir [38]. Bu çalışmada elde edilen BEM sonuçlarında basit integral formundaki [64] temel çözüm kullanılmıştır. Basit integral formundaki temel çözümün kullanılması, integrallerin herhangi bir sayısal yöntemle (örneğin Gauss-Legendre) hesaplanabilir avantajını sunmaktadır. BEM yöntemi ile yapılan hesaplamalarda  $N = 80$  sabit sınır elemanı kullanılmıştır. Böylelikle sonuç olarak  $80 \times 80$  boyutunda global sistem elde edilerek çözülmüştür. Şekiller (2.1),(2.2),(2.3)'de BEM yöntemi ile elde edilen manyetik flux fonksiyonu  $\Psi$  kontur eğrileri verilmektedir.



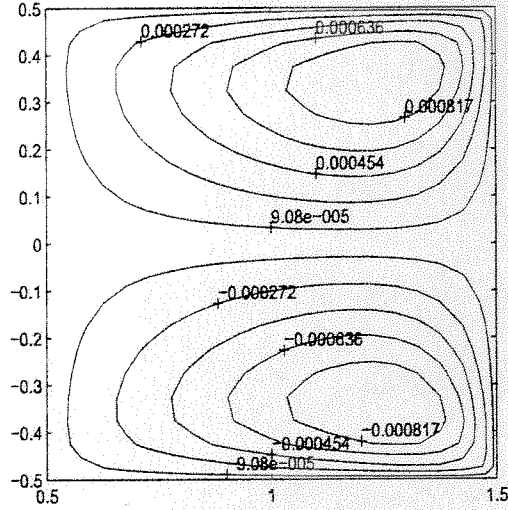
Şekil 2.1: Dikdörtgen plazma problemi BEM yöntemi,  $\mu_0 r J_\varphi = 1$

4. yuz problemi ...  
 gen. (0,0) elemanlar ...  
 (0,0) elemanlar ...  
 gen. (0,0) elemanlar ...



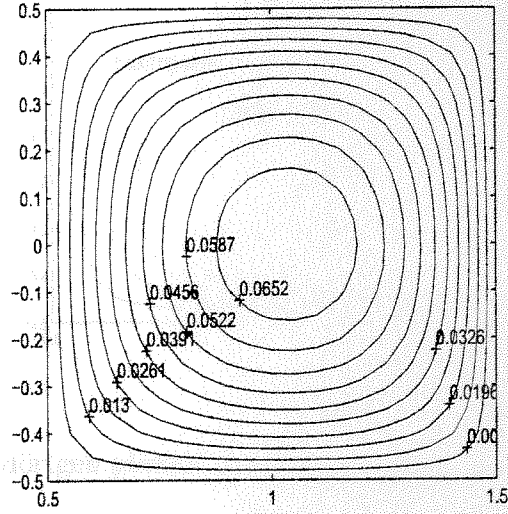
Şekil 2.2: Dikdörtgen plazma problemi BEM yöntemi,  $\mu_0 r J_\varphi = r^3 z^2$

Şekil 2.3: Dikdörtgen plazma problemi BEM yöntemi



Şekil 2.3: Dikdörtgen plazma problemi BEM yöntemi,  $\mu_0 r J_\varphi = r^2 z^3$

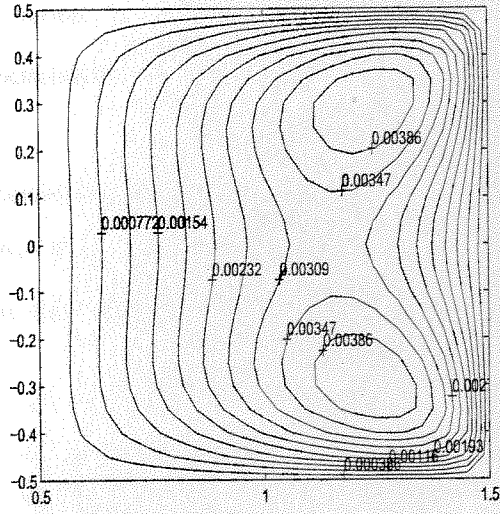
Aynı problem  $21 \times 21$  eşit dağılımlı grid noktası üzerinde üçgen (800) ve dikdörtgen (400) elemanlar kullanılarak sonlu elemanlar yöntemi (FEM) ile de çözülmüştür. Üçgen ve dikdörtgen elemanlarda benzer sonuçlar elde edildiğinden dolayı, (2.4),(2.5),(2.6) şekillerinde üçgen elemanlar ile elde edilen FEM sonuçları verilmektedir.



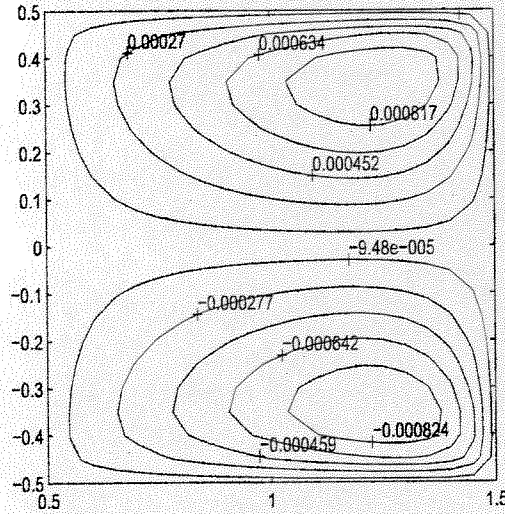
Şekil 2.4: Dikdörtgen plazma problemi FEM yöntemi,  $\mu_0 r J_\varphi = 1$



Matematiksel problemlerin çözümünde FEM yöntemi kullanılmaktadır. Bu yöntem, alan problemlerini elemanlar üzerine bölerek çözümlenmektedir. Dörtgen elemanlar kullanılarak alan problemi çözümlenmektedir. Alan problemi çözümlenmektedir. Alan problemi çözümlenmektedir.



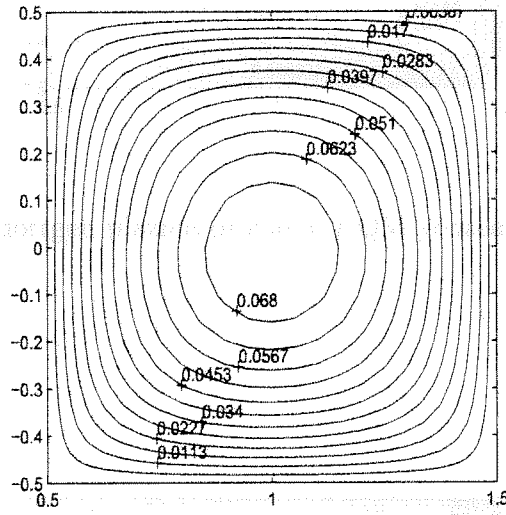
Şekil 2.5: Dikdörtgen plazma problemi FEM yöntemi,  $\mu_0 r J_\varphi = r^3 z^2$



Şekil 2.6: Dikdörtgen plazma problemi FEM yöntemi,  $\mu_0 r J_\varphi = r^2 z^3$

Manyetik flux fonksiyonu, dikdörtgen plazma problemi için diferansiyel kuadratür yöntemi (DQM) [59] ile de sağ taraf fonksiyonu için aynı polinomlar alınarak çözülmüştür. DQM yöntemi hesaplama süresi olarak BEM ve FEM yöntemlerine kıyasla çok daha hızlı olmasına rağmen, aynı yakınsaklıkta sonuçlar elde edilmiş ve (2.7),(2.8),(2.9) şekillerinde verilmiştir.

DQM ve FEM yönteminde  $441 \times 441$ , BEM yönteminde ise  $80 \times 80$  boyutlarında sistemler elde edilmektedir. Fakat BEM ve FEM yöntemlerinde integral hesaplamaları olduğu için DQM yöntemi dikdörtgen plazma problemi için avantaj göstermektedir.



Şekil 2.7: Dikdörtgen plazma problemi DQM yöntemi,  $\mu_0 r J_\varphi = 1$

## 2.2 Örnek 2

2.2.1. Dikdörtgen plazma problemi

2.2.1.1. Dikdörtgen plazma problemi

2.2.1.2. Dikdörtgen plazma problemi

2.2.1.3. Dikdörtgen plazma problemi

2.2.1.4. Dikdörtgen plazma problemi

2.2.1.5. Dikdörtgen plazma problemi

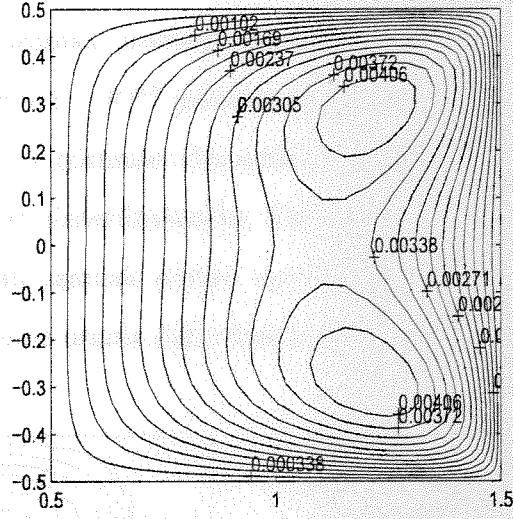
2.2.1.6. Dikdörtgen plazma problemi

2.2.1.7. Dikdörtgen plazma problemi

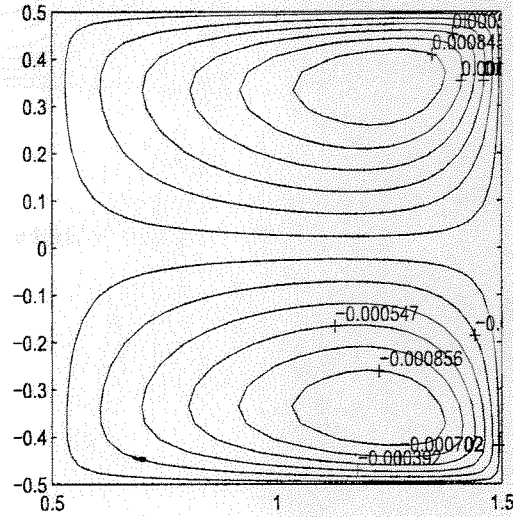
2.2.1.8. Dikdörtgen plazma problemi

2.2.1.9. Dikdörtgen plazma problemi

2.2.1.10. Dikdörtgen plazma problemi



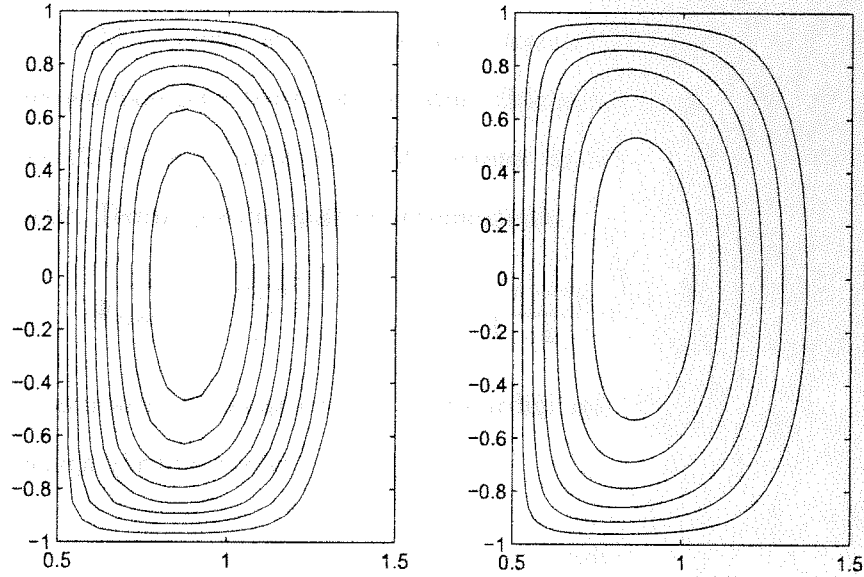
Şekil 2.8: Dikdörtgen plazma problemi DQM yöntemi,  $\mu_0 r J_\phi = r^3 z^2$



Şekil 2.9: Dikdörtgen plazma problemi DQM yöntemi,  $\mu_0 r J_\phi = r^2 z^3$

## 2.4.2 Örnek 2

GS denkleminin sağ tarafı bilinmeyen  $\Psi$  türünden doğrusal olmayan fonksiyon olarak ifade edilen ve D-sekindeki tokamak problemi aşamalı olarak çözülür. Bu örnekte sağ taraf  $\mu_0 r J_\varphi = 0.1(1 - 0.70199r^2)(1 - \Psi)^{0.6}$  şeklinde seçilerek [38]  $[0.5, 1.5] \times [-1, 1]$  bölgesinde BEM ve FEM yöntemleri ile çözümler elde edilmiştir. Şekil (2.10)'da her iki yöntemle elde edilen  $\Psi$  fonksiyon eğrileri gösterilmektedir. Sağ taraf fonksiyonu doğrusal olmadığından dolayı (2.14) de anlatılan aşamalı çözüm uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlarda FEM yönteminin BEM yöntemine oranla daha hızlı yakınsadığı gözlemlenmiştir.



Şekil 2.10: D-sekinde tokamak plazma problemi (BEM and FEM)

### 2.4.3 Örnek 3

Solov'ev [44] GS denklemi için sağ taraf fonksiyonunu

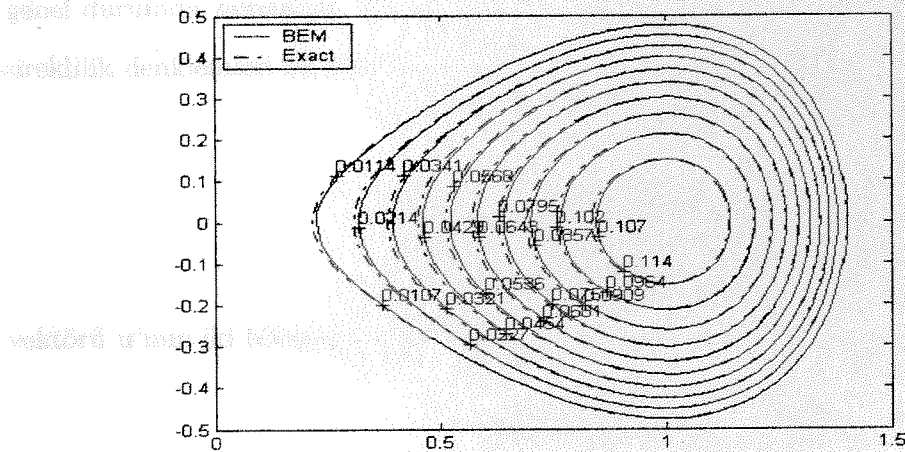
$$\mu_0 r J_\varphi = -f_0 (r^2 + r_0^2)$$

Dirichle türü sınır koşulu altında  $\Psi = 0$  ve  $r_b = r_0 \sqrt{1 + \frac{2a \cos \alpha}{r_0}}$ ,  $z_b = ar_0 \sin \alpha$ ,  $\alpha = 0 : 2\pi$ ,  $f_0 = 1$ ,  $r_0 = 1$ ,  $a = 0.5$  parametreleri şeklinde tanımlamıştır.

Bu problem FEM yöntemi ile özel olarak seçilmiş 3200 adet grid noktası seçilerek çözülmüştür [44]. Nokta sayısının fazla olması, bölgenin problemin yapısına göre düzgün ayrıklaştırmasını ve elde edilen sistemin hesaplanmasını zorlaştırmaktadır. Aynı problem bu çalışmada BEM yöntemi ile 200 sabit sınır elemanı ve  $\varphi_p = \frac{r^4}{8} + \frac{z^2}{2}$  özel çözümü ile denklem homojen hale getirilerek çözülmüştür. Elde edilen sayısal çözüm ve teorik çözüm değerleri Şekil (2.11)'de verilmiş ve BEM yöntemi ile elde edilen sonuçların yakınsaklığı gözlemlenmiştir. Teorik çözüm aşağıda verilmektedir

$$\Psi_{exact} = \frac{f_0 r_0^2 a^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{z}{a} \right)^2 - \left( \frac{r - r_0}{a} + \frac{(r - r_0)^2}{2ar_0} \right)^2 \right]$$

Sadece sınırların ayrıklaştırmasını gerektirdiği için BEM yönteminin avantajı bu problemde açıkça görülmektedir.



Şekil 2.11: Tokamak plazma(Solov'ev' türü) BEM ve tam değer eğrileri

## BÖLÜM 3

### NAVIER-STOKES DENKLEMLERİ

Bu bölümde ilk olarak Navier-Stokes denklemleri verilecektir. Navier-Stokes denklemleri 4. Bölümde çözülecek olan magnetohidrodinamik denklemlerinin, Lorentz kuvveti ve dış manyetik alan etkisi bulunmayan, sade hali olduğu için, ilk olarak sayısal yöntemler bu denklemlerde uygulanacaktır. Karşılaşılan zorluklar stabilizasyon teknikleri ile giderilecek ve magnetohidrodinamik denklemleri için de stabilizasyon tekniğine hazırlık olacaktır. Sonlu elemanlar yöntemi (FEM) özellikle pek çok mühendislik probleminin çözümünde uygulanabilmesi ve yakınsak sonuçlar elde etmede başarılı olmasından dolayı, Navier-Stokes denklemlerinin FEM ile formülasyonu yapılacaktır. Çözüm aşamasında ilk olarak standart Galerkin yöntemi uygulanacak ve karşılaşılan sorunlar değişik stabilizasyon yöntemleri ile giderilecektir.

#### 3.1 Denklemlerin Tanımı

En genel durumda zamandan bağımsız Navier-Stokes denklemlerinin tanımı momentum ve süreklilik denklemleri ile verilmekte olup

$$(\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} - \epsilon \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

hız vektörü  $\mathbf{u}$ 'nun iki bileşeni bulunmakta

$$\mathbf{u} = (u, v)$$

ve  $p$  basıncı,  $\mathbf{f}$  toplam dış etken kuvveti,  $\epsilon$  de viskozite parametresini ( $\epsilon = 1/Re$ ,  $Re =$  Reynolds sayısı olmak üzere) göstermektedir. Ardışık formda değişkenler aşağıdaki gibi

yazılabilir

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n + \hat{u} \\ v^{n+1} &= v^n + \hat{v} \end{aligned}$$

öyleki  $u^n$  ve  $v^n$  bir önceki aşamadan gelen bilinen değerleri ve  $\hat{u}$  ve  $\hat{v}$  karşılık gelen doğrulama değerlerini göstermektedir.

Buna göre denklem (3.1) de yer alan doğrusal olmayan terimler aşağıdaki şekli alır

$$(\nabla \mathbf{u}^{n+1}) \mathbf{u}^{n+1} \approx (\nabla \mathbf{u}^n) \mathbf{u}^n + (\nabla \mathbf{u}^n) \hat{\mathbf{u}} + (\nabla \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{u}^n,$$

burada operatörün tanımı açık hali ile de verilebilir

$$(\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Benzer şekilde

$$\Delta \mathbf{u}^{n+1} = \Delta \mathbf{u}^n + \Delta \hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} \end{pmatrix},$$

ve süreklilik denklemi de 2-boyutlu uzayda açık şekilde

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.2)$$

olarak yazılır.

Basınç değişkeni ise ardışık formda  $p^{n+1} = p^n + \hat{p}$  olup basınç gradyanı basıncın türevlerinden oluşan bir vektördür

$$\nabla p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Denklem (3.1) ve (3.2)'nin çözümünden önce süreklilik denkleminin normalizasyonu yapılır

$$\kappa p + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.3)$$

öyleki  $\kappa$  çok küçük bir gerçek sayı ( $\approx 10^{-5}$ ) dır.

Bu tanımlamalardan sonra denklemlerin ardışık halleri açık olarak yazılır,

$$\begin{aligned}
u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial u^n}{\partial y} + \hat{u} \frac{\partial u^n}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial u^n}{\partial y} + u^n \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + v^n \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} - \epsilon \left( \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} \right) - \epsilon \left( \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial p^n}{\partial x} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} &= f_1 \\
u^n \frac{\partial v^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial v^n}{\partial y} + \hat{u} \frac{\partial v^n}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial v^n}{\partial y} + u^n \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + v^n \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} - \epsilon \left( \frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2} \right) - \epsilon \left( \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial p^n}{\partial y} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} &= f_2 \\
\epsilon p + \epsilon \hat{p} + \frac{\partial u^n}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial v^n}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

### 3.1.1 Denklemlerin Varyasyonel Formülasyonu

Denklemlerin varyasyonel hallerinin yazılabilmesi için baz fonksiyonlarının tanımlanması ve bazı notasyonların belirtilmesi gerekmektedir. Hız değişkenine karşılık gelen baz fonksiyonları  $N_i$  ve basınç değişkenine karşılık gelen baz fonksiyonları  $M_i$  olarak tanımlanmaktadır. Programlarda  $M_i$ 'ler birinci dereceden polinom doğrusal baz fonksiyonları ve  $N_i$ 'ler ikinci dereceden polinom baz fonksiyonları olarak seçilmiştir.

Buna göre

$$u = \sum_{i=1}^{ndof_u} u_i N_i, \quad v = \sum_{i=1}^{ndof_v} v_i N_i, \quad p = \sum_{i=1}^{ndof_p} p_i M_i,$$

burada  $ndof$  "number of degree of freedom" yerine kullanılmaktadır.

Aynı zamanda yazım kolaylığı ve anlaşılabilirlik açısından doğrusal olmayan terimlerden gelen iç-içe toplamların yazımında aşağıdaki notasyonlar kullanılmaktadır

$$\begin{aligned}
Su &= \sum u_i^n N_i & Sux &= \sum u_i^n \frac{\partial N_i}{\partial x} & Suy &= \sum u_i^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \\
Sv &= \sum v_i^n N_i & Svx &= \sum v_i^n \frac{\partial N_i}{\partial x} & Svy &= \sum v_i^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \\
Sp &= \sum p_i^n M_i & Spx &= \sum p_i^n \frac{\partial M_i}{\partial x} & Spy &= \sum p_i^n \frac{\partial M_i}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Denklemlerin Sonlu Elemanlar Yöntemi (FEM) ile çözümünde gerekli olan varyasyonel halinin yazılabilmesi için aşağıdaki eşitliklerin belirtilmesi gerekmektedir:

#### 1. Green's İkinci Eşitliği ( $\Delta U$ )

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \right) N_j = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial n} N_j d\Omega - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right)$$

Eğer sınır koşulları Dirichle türünde verilmiş ise sınır integrali sıfır değerini alır.



## 2. Parçalı İntegral Eşitliği ( $\nabla p$ )

Basınç değişkenine karşılık gelen baz fonksiyonları ( $M_i$ ) türevlenebilir olmadığı için, parçalı integral eşitliğinden yararlanarak türevler hız değişkenine karşılık gelen baz fonksiyonları ( $N_i$ ) üzerine taşınmaktadır.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial M_i}{\partial x} N_j = M_i N_j - \int_{\Omega} M_i \frac{\partial N_j}{\partial x}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial M_i}{\partial y} N_j = M_i N_j - \int_{\Omega} M_i \frac{\partial N_j}{\partial y}$$

Bu tanımlamalara göre (3.4) nolu denklemlerin matris-vektör halleri aşağıdaki gibi yazılır

$$\begin{bmatrix} E_{1\hat{u}} & E_{1\hat{v}} & E_{1\hat{p}} \\ E_{2\hat{u}} & E_{2\hat{v}} & E_{2\hat{p}} \\ E_{3\hat{u}} & E_{3\hat{v}} & E_{3\hat{p}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RHS_1 \\ RHS_2 \\ RHS_3 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

ve açık halleri ile terimler

$$E_{1\hat{u}} = \left( SuxN_i + Su \frac{\partial N_i}{\partial x} + Sv \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) N_j + \epsilon \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \quad (3.6)$$

$$E_{1\hat{v}} = SuyN_i N_j \quad (3.7)$$

$$E_{1\hat{p}} = -M_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad (3.8)$$

$$E_{2\hat{u}} = SvxN_i N_j, \quad (3.9)$$

$$E_{2\hat{v}} = \left( SvyN_i + Su \frac{\partial N_i}{\partial x} + Sv \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) N_j + \epsilon \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \quad (3.10)$$

$$E_{2\hat{p}} = -M_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \quad (3.11)$$

### 3.1.3 Özet

$$E_{3u} = \frac{\partial N_i}{\partial x} M_j \quad (3.12)$$

$$E_{3v} = \frac{\partial N_i}{\partial y} M_j \quad (3.13)$$

$$E_{3p} = \epsilon M_i M_j, \quad (3.14)$$

$$RHS_1 = \left[ - (Su.Sux + Sv.Suy) N_j - \epsilon \left( Sux \frac{\partial N_j}{\partial x} + Suy \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) N_j + Sp \frac{\partial N_j}{\partial x} \right], \quad (3.15)$$

$$RHS_2 = \left[ - (Su.Svx + Sv.Svy) N_j - \epsilon \left( Svx \frac{\partial N_j}{\partial x} + Svy \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) N_j + Sp \frac{\partial N_j}{\partial y} \right], \quad (3.16)$$

$$RHS_3 = - [\epsilon Sp + Sux + Svy] M_j. \quad (3.17)$$

#### Sınır Koşulları ve Döngü başlangıç değerleri

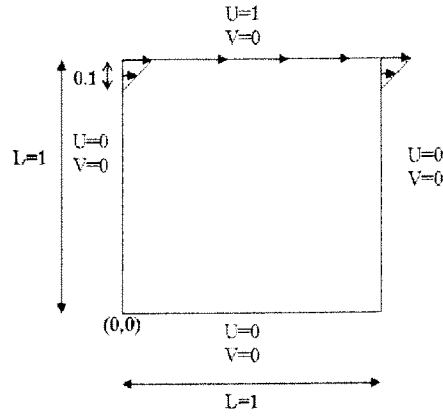
Dirichle türü sınır koşulunun belirtildiği sınır noktalarında  $u^n$  ve  $v^n$  bilinen sınır koşul değerleri ve  $\hat{u}$  ve  $\hat{v}$  sıfır olarak alınmaktadır.

Döngü başlangıç değerleri olarak  $u^0$  and  $v^0$  Dirichle türü sınır koşul noktalarında belirtilen sınır koşul değerlerini ve diğer bütün noktalarda sıfır değerini almaktadır. Basınç değişkeni için başlangıç değeri olarak  $p^0$  bütün noktalarda sıfır olarak alınmaktadır.

### 3.1.2 Örnek

#### Driven Cavity Akım Problemi

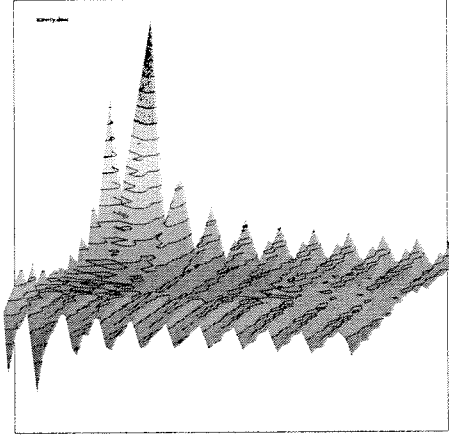
En çok bilinen ve arakesiti kare bölge olan borudaki sıvı akımının tanımlandığı test problemidir. Sıvının hareketi basınç gradyanı ve hareketli üst duvar ile oluşmaktadır. Şekil (3.1) de tanım bölgesi ve sınır koşulları verilen driven cavity akım problemi sonlu elemanlar yöntemi ile çözülmektedir.



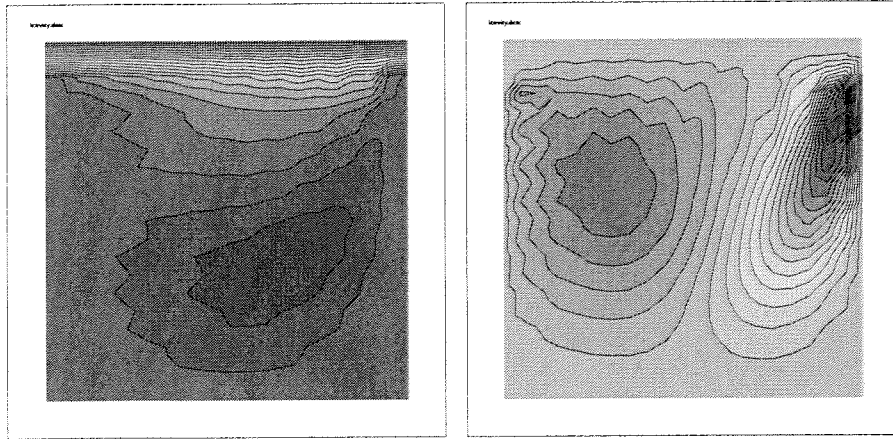
Şekil 3.1: Driven Cavity Flow Problemi

#### Eşit dereceli polinom baz fonksiyonları ile çözüm ( $Re=400$ )

Bu problem ilk olarak hız ve basınç değişkenleri için eşit dereceli polinomlardan seçilen baz fonksiyonları kullanılarak çözüldü. Bu çözümden elde edilen sonuçlarda gerçek çözümde olmaması gereken osilasyonların olduğu gözlemlenmektedir (Şekil (3.2) ve Şekil (3.3)).



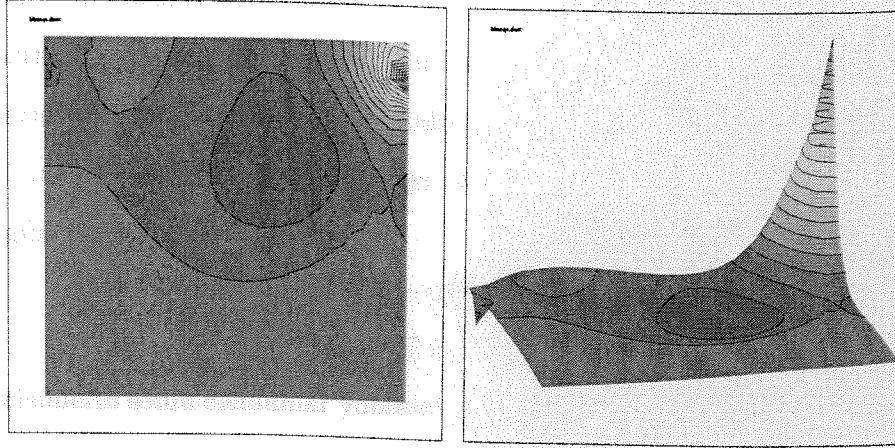
Şekil 3.2: Basınç Sonucu



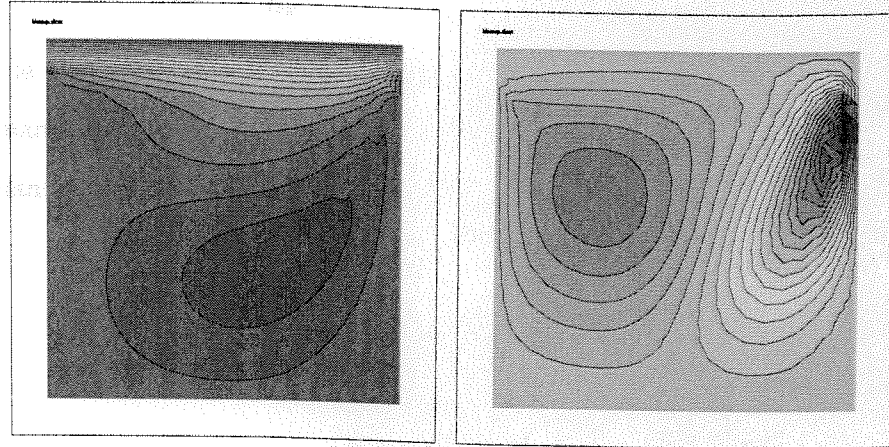
Şekil 3.3: Hız(u,v) Sonuçları

### Babuska-Brezzi koşulu ile çözüm ( $Re=400$ )

Aynı problem Babuska-Brezzi koşulu olarak bilinen, basınç için 1.dereceden, hız için 2.dereceden baz fonksiyonları kullanılarak çözülmüş ve eşit derecede baz fonksiyonları kullanılarak elde edilen çözümlerde görülen osilasyonun olmadığı gözlemlenmiştir (Şekil (3.4) ve Şekil (3.5)).



Şekil 3.4: Basınç Sonucu



Şekil 3.5: Hız(u,v) Sonuçları

### 3.2 Navier-Stokes Denklemlerinin Üçgen Elemanlar Üzerinde Stabilize Edilmiş Yöntemlerle Çözümü

Bir önceki bölümde belirtildiği üzere, Navier-Stokes denklemlerinin sonlu elemanlar yöntemi ile kararlı şekilde çözülebilmesi için Babuska-Brezzi koşulunun sağlanması gerekmektedir. Hız bileşeni için yüksek dereceden baz fonksiyonları kullanmak sistem boyutunun artmasına neden olmaktadır. Bu sorunun giderilebilmesi ve eşit dereceden baz fonksiyonlarının kullanılabilmesi için stabilize yöntemler geliştirilmiştir [36, 16].

Daha önce Navier-Stokes denklemleri momentum ve süreklilik denklemleri türünden aşağıdaki gibi verilmişti;

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} - \epsilon \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Denklemlerin sonlu elemanlar yöntemi ile stabilize edilmiş varyasyonel formülasyonu en genel hali ile [35, 27, 31, 33, 42, 58]

$$B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) + \sum \tau_K \int_{\Omega_K} [(\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} + \nabla p - \mathbf{f}][(\nabla \mathbf{v})\mathbf{u} - \nabla q] = F(\mathbf{v}, q) \quad (3.19)$$

denklemleri ile yazılabilir. Denklemlerde yer alan  $B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q)$  ve  $F(\mathbf{v}, q)$  terimleri, (3.20) ve (3.21) numaralı denklemlerde belirtildiği gibi daha önceki bölümde açık şekilde formülasyonu yapılan ve standart sonlu elemanlar yönteminden elde edilen terimleri göstermektedir;

$$B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) = ((\nabla \mathbf{u})\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \epsilon(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) - (p, \nabla \mathbf{v}) - (\nabla \mathbf{u}, q) \quad (3.20)$$

$$F(\mathbf{v}, q) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}). \quad (3.21)$$

Denklemlerde ilave olarak yer alan  $\tau_K$  stabilizasyon katsayısı ve stabilizasyon terimlerinin açık şekilleri aşağıda verilecektir.

2-Boyutlu uzayda stabilizasyon terimleri  $[(\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} + \nabla p - \mathbf{f}][(\nabla \mathbf{v})\mathbf{u} - \nabla q]$  vektörel olarak şöyle yazılmaktadır.

$$\begin{aligned}
1) & \left( \frac{\partial u^n}{\partial x} \hat{u} + \frac{\partial u^n}{\partial y} \hat{v} + u^n \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + v^n \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial u^n}{\partial y} + \frac{\partial p^n}{\partial x} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} - f_1 \right) \left( -u^n \frac{\partial v_1}{\partial x} - v^n \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \\
2) & \left( \frac{\partial v^n}{\partial x} \hat{u} + \frac{\partial v^n}{\partial y} \hat{v} + u^n \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + v^n \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + u^n \frac{\partial v^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial v^n}{\partial y} + \frac{\partial p^n}{\partial y} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} - f_2 \right) \left( -u^n \frac{\partial v_2}{\partial x} - v^n \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \\
3) & \left( \frac{\partial u^n}{\partial x} \hat{u} + \frac{\partial u^n}{\partial y} \hat{v} + u^n \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + v^n \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial u^n}{\partial y} + \frac{\partial p^n}{\partial x} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} - f_1 \right) \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \\
& \left( \frac{\partial v^n}{\partial x} \hat{u} + \frac{\partial v^n}{\partial y} \hat{v} + u^n \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + v^n \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + u^n \frac{\partial v^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial v^n}{\partial y} + \frac{\partial p^n}{\partial y} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} - f_2 \right) \left( \frac{\partial q}{\partial y} \right).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Aşağıda ayrıntısı verilecek stabilizasyon parametresi  $\tau_K$  hesaplandıktan sonra standart sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen terimlerle birlikte (3.18) denkleminin varyasyonel matris-vektör formu aşağıdaki şekli alır.

$$\left( \begin{bmatrix} E_{1\hat{u}} & E_{1\hat{v}} & E_{1\hat{p}} \\ E_{2\hat{u}} & E_{2\hat{v}} & E_{2\hat{p}} \\ E_{3\hat{u}} & E_{3\hat{v}} & E_{3\hat{p}} \end{bmatrix} + \tau_K \begin{bmatrix} e_{1\hat{u}} & e_{1\hat{v}} & e_{1\hat{p}} \\ e_{2\hat{u}} & e_{2\hat{v}} & e_{2\hat{p}} \\ e_{3\hat{u}} & e_{3\hat{v}} & e_{3\hat{p}} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RHS_1 \\ RHS_2 \\ RHS_3 \end{pmatrix} + \tau_K \begin{pmatrix} rhs_1 \\ rhs_2 \\ rhs_3 \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

Formülasyonda yer alan sol taraf birinci matris elemanları ( $E_{\hat{x}}$ ) standart sonlu elemanlar yönteminden karşılık gelen terimleri, sol ikinci matris elemanları ( $e_{\hat{x}}$ ) stabilizasyon formülünden karşılık gelen terimleri, sağ taraf birinci vektör elemanları ( $RHS_i$ ) standart sonlu elemanlar yönteminden gelen bilinen değerleri ve ikinci vektör elemanları ( $rhs_i$ ) ise stabilizasyon formülünden gelen bilinen değerleri göstermektedir.

### 3.2.1 Stabilizasyon parametresinin hesaplanması

Daha önce yapılan çalışmalarda SUPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin) yönteminde stabilizasyon parametresi [10]

$$\tau_K = \frac{h_K}{2|\mathbf{u}|_K} \varepsilon(Pe_K) \tag{3.24}$$

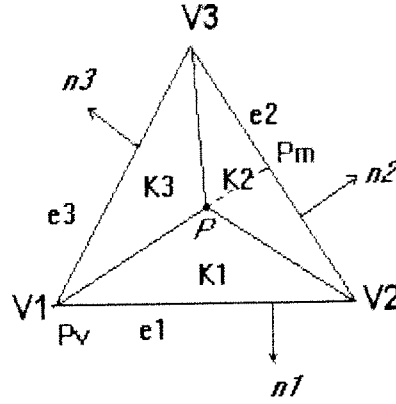
öyleki

$$\varepsilon(Pe_K) = \begin{cases} Pe_k & \text{if } Pe_k < 1 \\ 1 & \text{if } Pe_k \geq 1 \end{cases}$$

$$Pe_K = \frac{|\mathbf{u}|_K h_K}{6\varepsilon}.$$

formülü ile hesaplanmıştır.

Akım yönüne ve şiddetine bağlı olarak üçgen elemanlar içerisinde konumu belirlenen tek nokta kullanılarak stabilizasyon (Stabilized subgrid [13, 47]) parametresinin hesaplanması ise aşağıda verilmektedir.



Şekil 3.6: Üçgen eleman

Şekil (3.6) de gösterildiği üzere konumu belirlenen  $P$  noktasından yararlanarak üzerinde sonlu elemanlar formülasyonu yapılan ana üçgenden ( $K$ ) 3-alt üçgen ( $K_1$ ,  $K_2$  ve  $K_3$ ) elde edilmiş olsun

$$\alpha(P) = \frac{\int_K b_P dK}{\nu \int |b_P|^2 dK} = \frac{|K|/3}{\nu \sum \frac{|e_j|^2}{4|K_j|}}$$

ve

$$\int b_P(x) = \frac{|K|}{3}$$

olarak bulunduktan sonra, stabilizasyon parametresi [10, 47]

$$\tau_K = \frac{1}{|K|} \int b_k = \frac{1}{|K|} \int \alpha(P) b_P(x) = \frac{|K|}{9\epsilon} \frac{4}{\sum \frac{|e_j|^2}{4|K_j|}} \quad (3.25)$$

formülü ile hesaplanır.

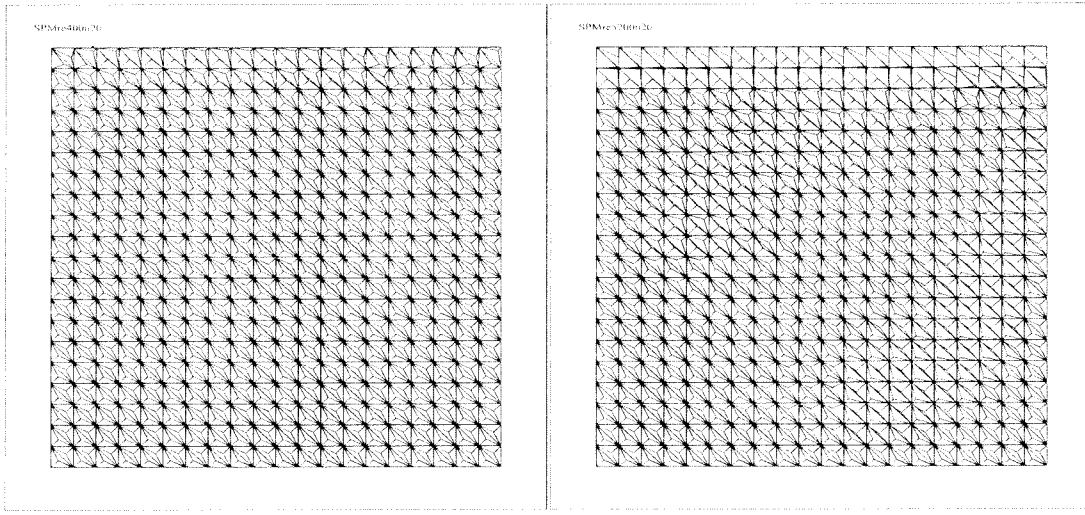


### 3.2.2 Örnekler

Bu bölümde stabilized subgrid çözüm yönteminin standart test problemleri üzerinde uygulaması verilecektir. Elde edilen sonuçların literatürdeki ve diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlarla uyumluluğu gözlemlenmiştir.

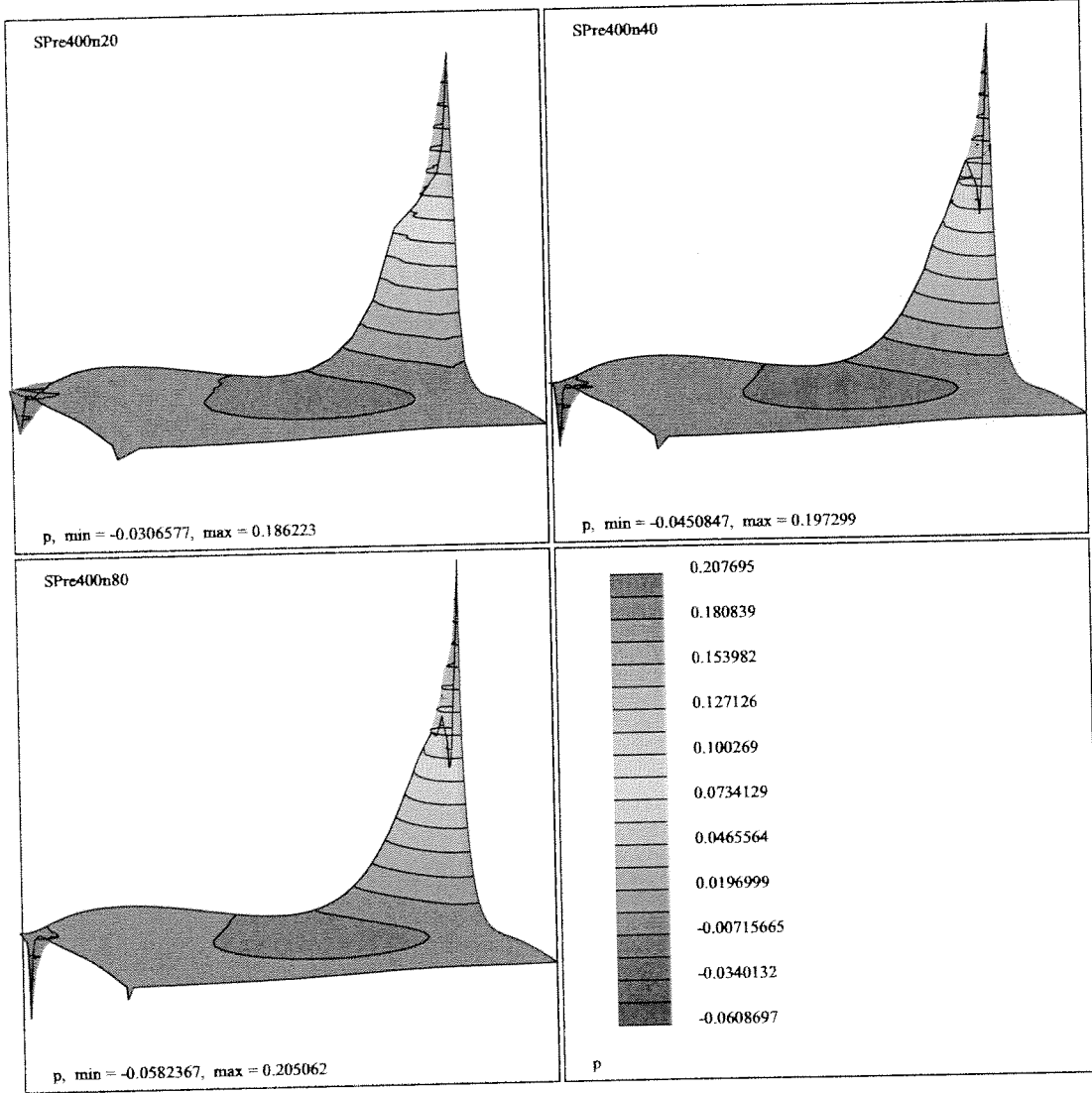
#### Driven Cavity Akım Problemi

Driven cavity akım problemi  $Re=400$  ve  $Re=5200$  olmak üzere iki ayrı Reynolds sayısı için çözülmüştür.



Şekil 3.7: Akımın meshi belirlenmesindeki etkisi

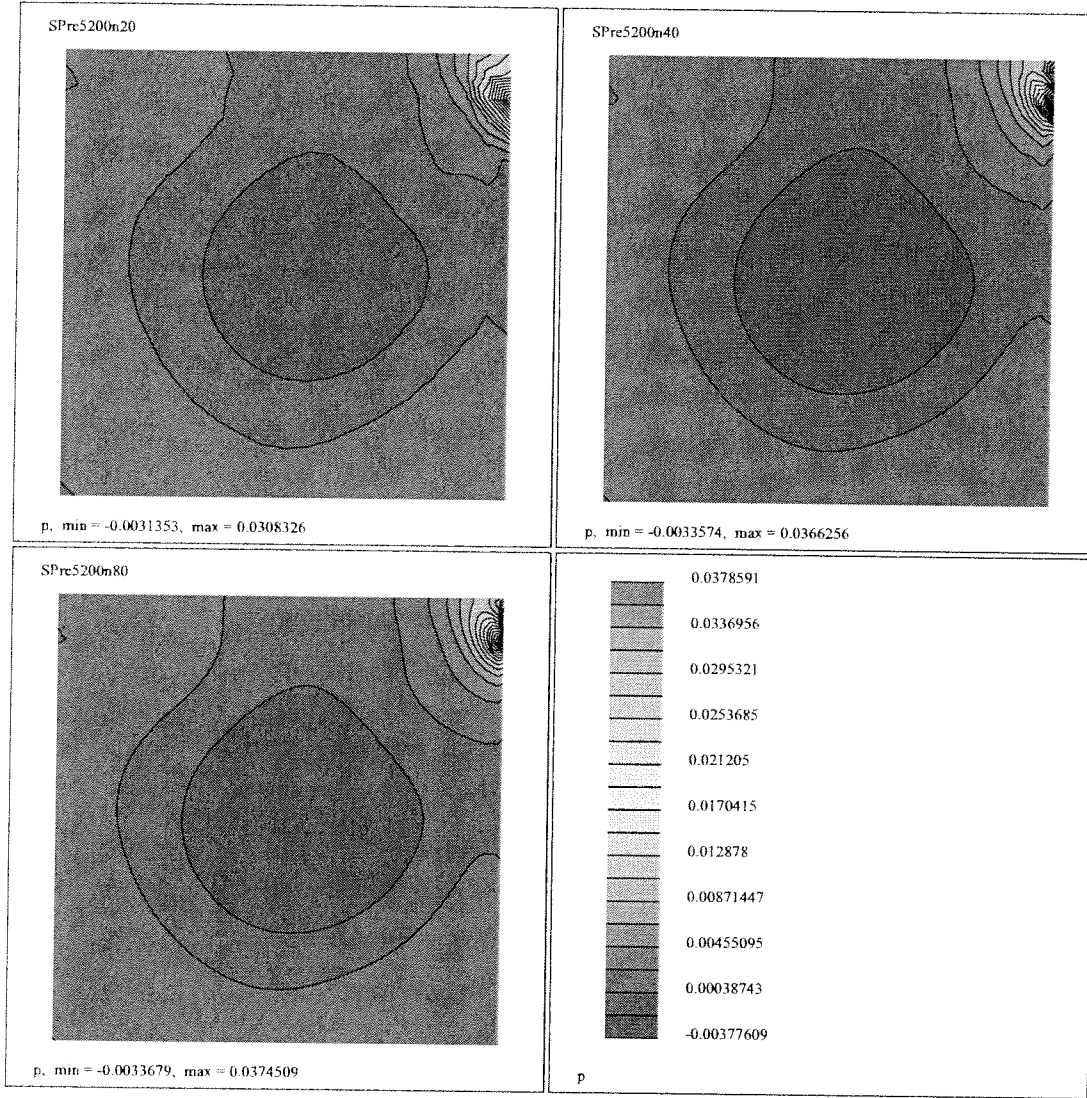
Şekil (3.7) de küçük boyutlardaki ayrıklaştırmalarda Reynolds sayısı büyüdükçe ( $Re=5200$ ) üçgen eleman içerisindeki yer alan ve stabilizasyon parametresi  $\tau_K$ 'nin hesaplanmasında kullanılan noktanın konumunun akım şiddeti ve doğrultusunca ayarlandığı gözlemlenmektedir.



Şekil 3.8:  $Re=400$  için basınç grafiği

Şekil (3.8) de  $Re=400$  için basınç grafiği verilmektedir. Şekillerde kullanılan etiket isimlerinde yer alan **SP**, problemin stabilized subgrid yöntemi ile çözüldüğünü, **re** Reynolds sayısını ve **n** ise her bir kenarda kullanılan eşit sayıdaki ayrıklaştırma nokta sayısını göstermektedir. Grafikten, bölgenin üçgenleştirilmesi yoğunlaştıkça elde edilen sonuçların deneysel sonuçlara yakınlaşmasına rağmen kaba ayrıklaştırmalarda bile iyi sonuçlar elde edildiği gözlemlenmektedir.

Şekiller (3.9) ve (3.10) de Reynolds sayısı büyük olmasına rağmen kaba ayrıklaştırmalarda bile stabilizasyon parametresinin etkisi ile yakınsak sonuçların elde

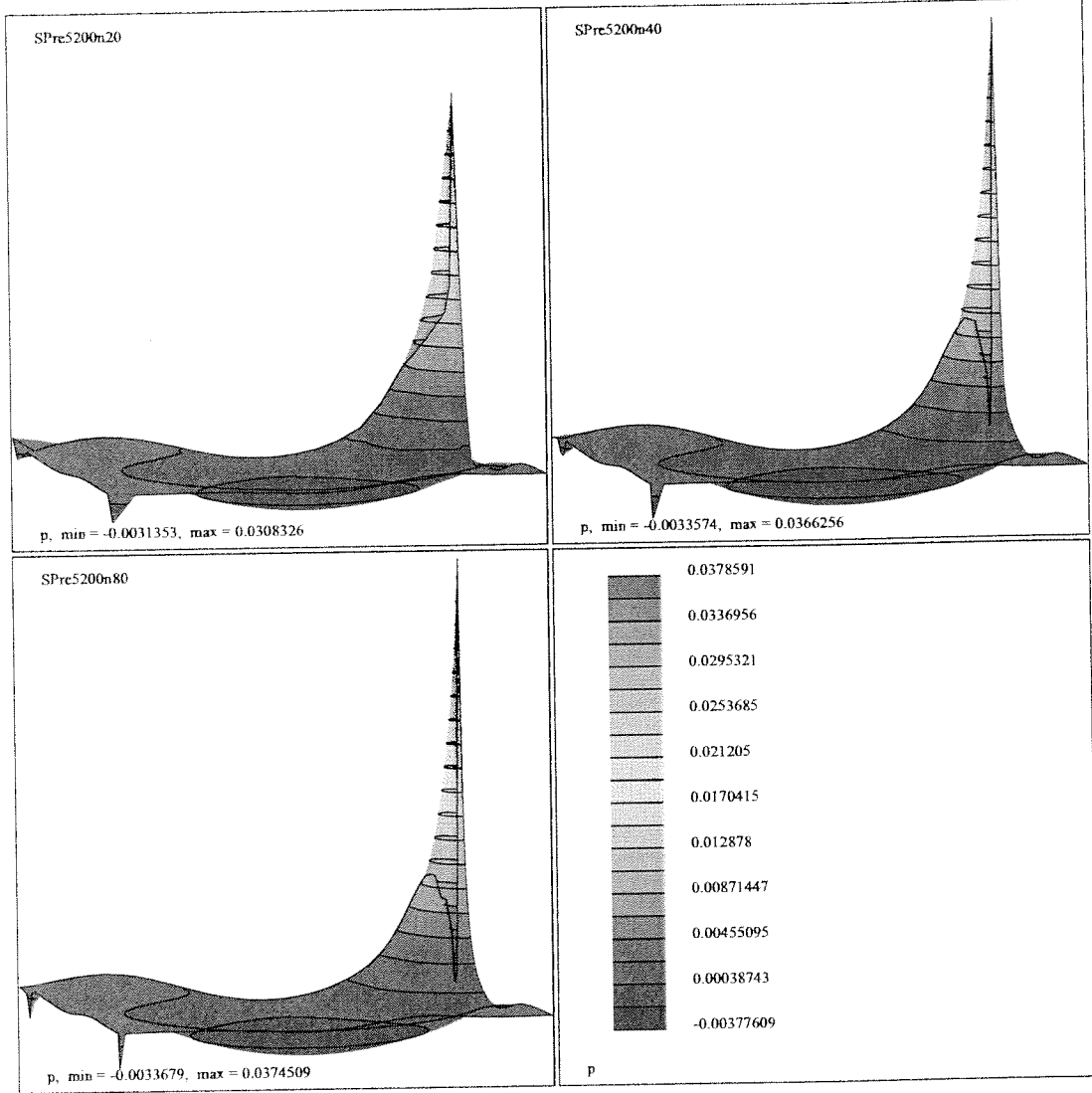


Şekil 3.9:  $Re=5200$  için basınç eğrileri

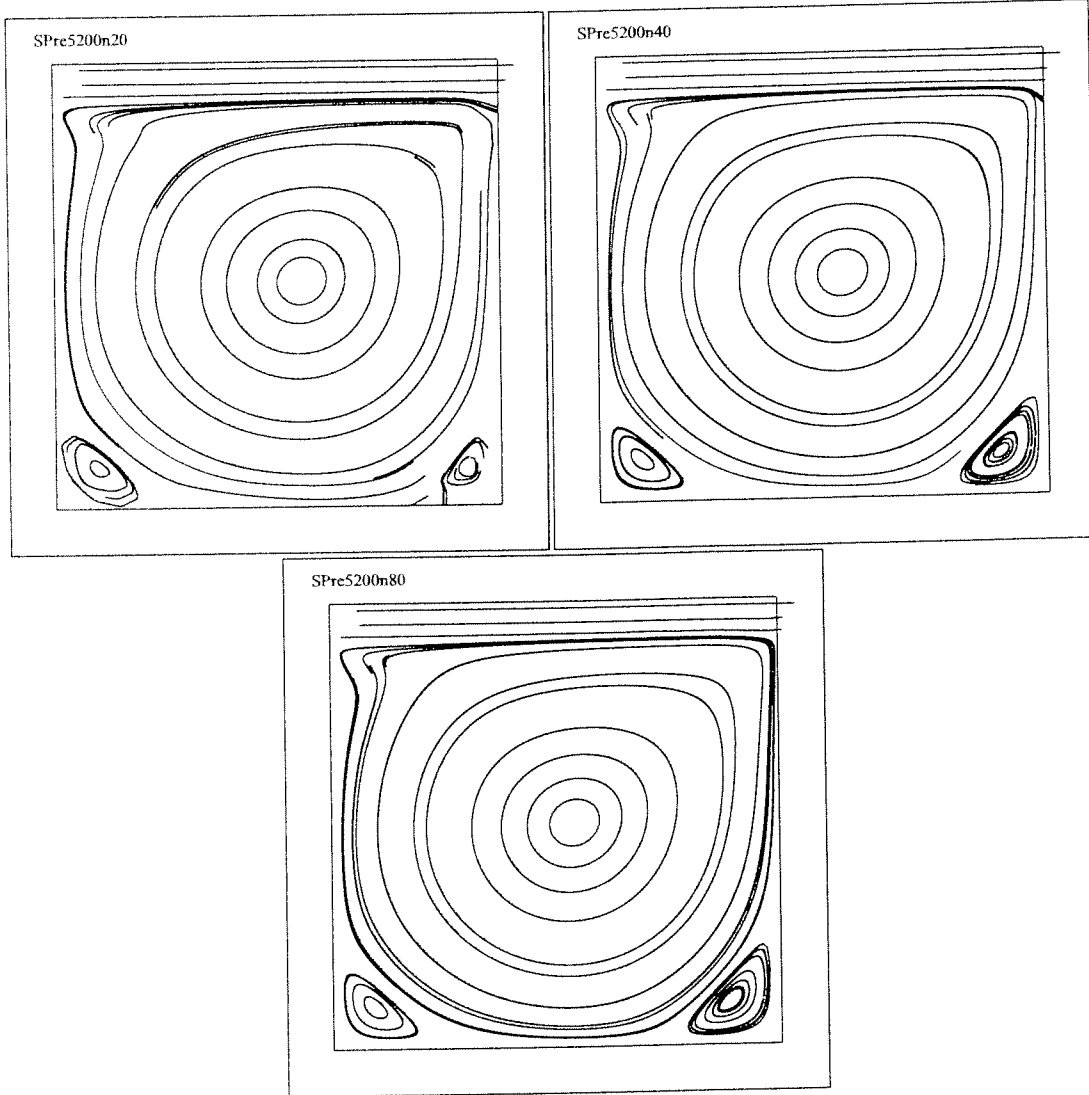
edilebildiği gözlemlenmektedir.

Yine Reynolds sayısı 5200 için basınç grafiklerinden kaba ayrıklaştırmanın ( $n = 20$ ) bile stabilized subgrid çözüm yöntemi için yeterli olduğu görülmektedir (Şekil (3.10)).

Son olarak Resim (3.11) de  $Re=5200$  için akım çizgileri ve oluşan verteksler gösterilmektedir. Stabilized subgrid yöntemi ile elde edilen sonuçlar diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlarla ve literatürdeki diğer sonuçlarla uyuşmaktadır.

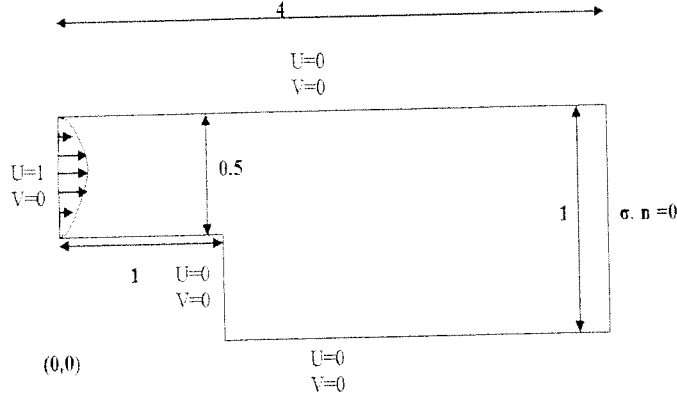


Şekil 3.10:  $Re=5200$  için basınç grafiği



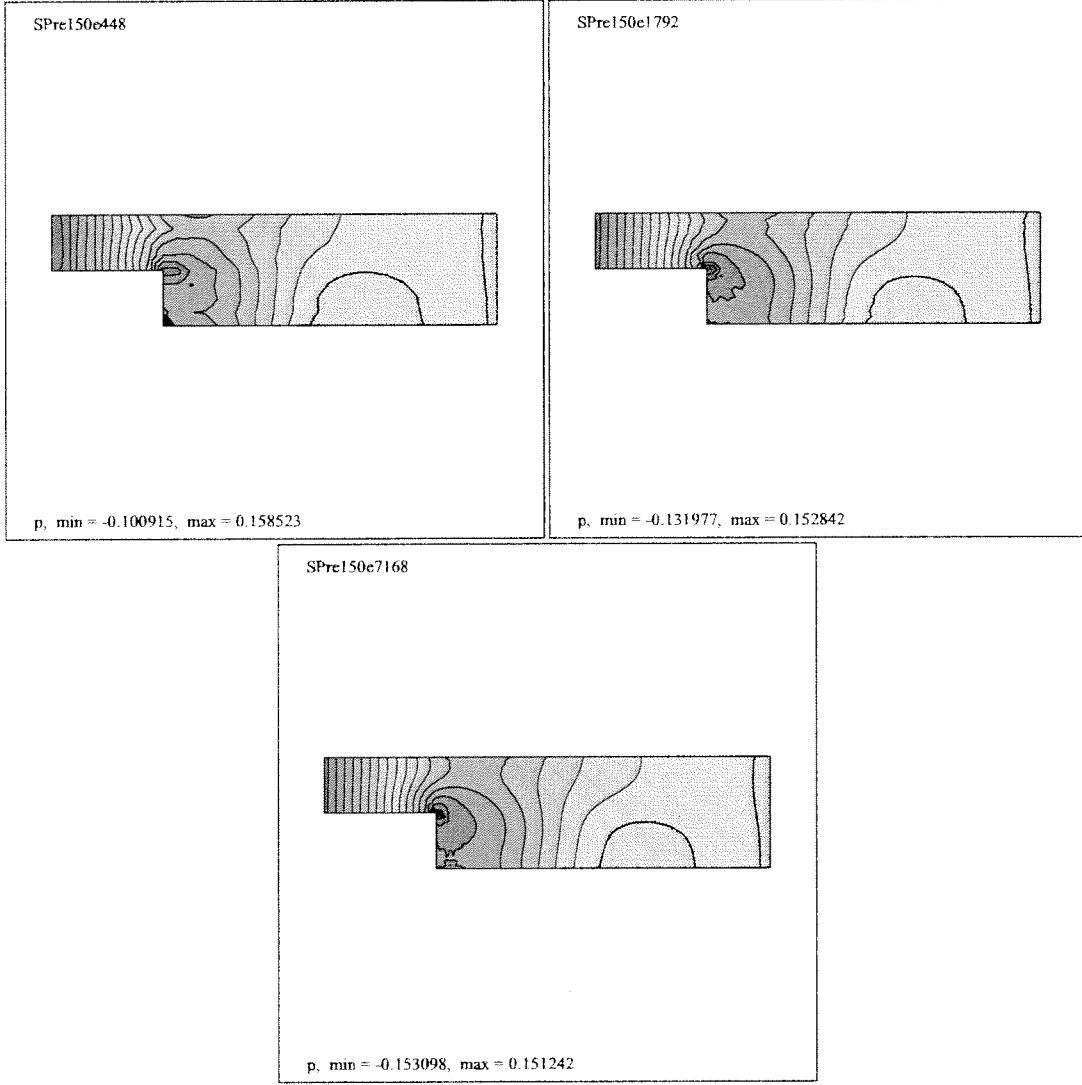
Şekil 3.11:  $Re=5200$  için akıntı çizgileri

## Back Step Flow Problemi



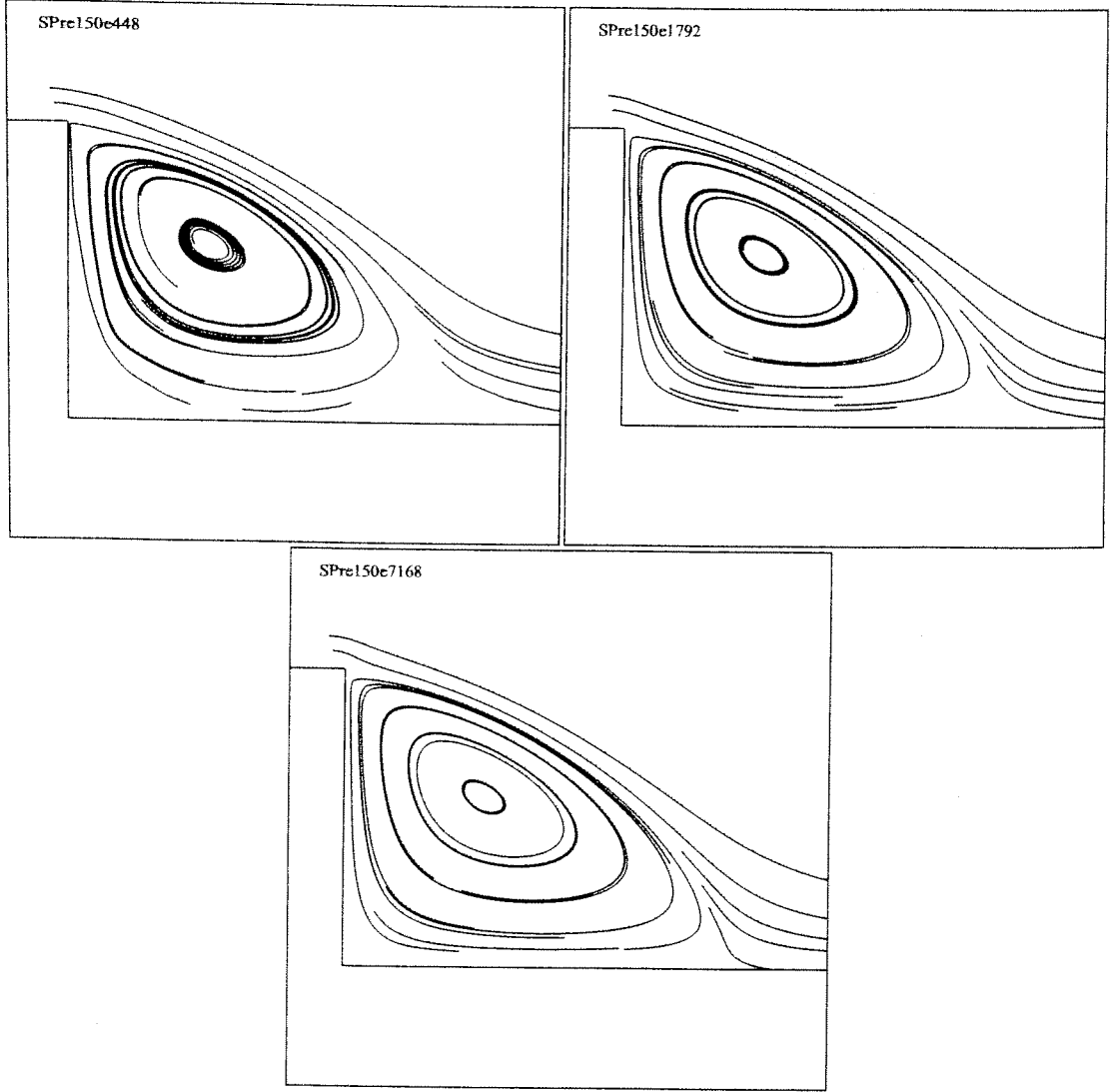
Şekil 3.12: Back Step Flow Problemi

Şekil (3.12) de tanım bölgesi ve sınır koşulları verilen problem, belli bir basamak yüksekliği üzerinde meydana gelen akımın yapısını göstermektedir. Problem Reynolds sayısı  $Re = 150$  için eşit elemanlardan oluşan üç farklı sayıda ( $e = 448$ ,  $e = 1792$  ve  $e = 7168$  eleman) ayrıklaştırmalar kullanılarak çözülmüştür.



Şekil 3.13:  $Re=150$  için basınç grafiği

Şekil (3.13) de gösterildiği gibi stabilized subgrid yöntemi basamağın köşe noktasında basınç eğrisinde oluşan kritik yapıyı(singularity) yakalayabilmektedir.



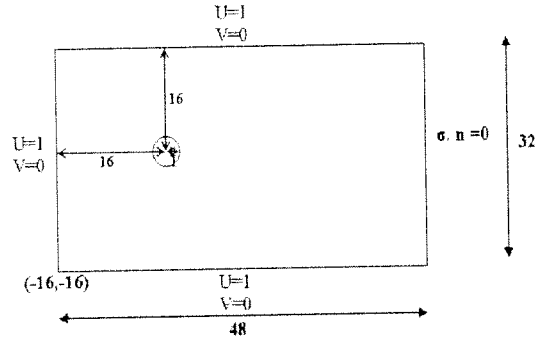
Şekil 3.14:  $Re=150$  için akıntı çizgileri

Back step flow probleminde, basamak bölgesindeki akım eğrilerinin detaylı gösteriminden oluşan verteks Şekil (3.14) de verilmiştir.



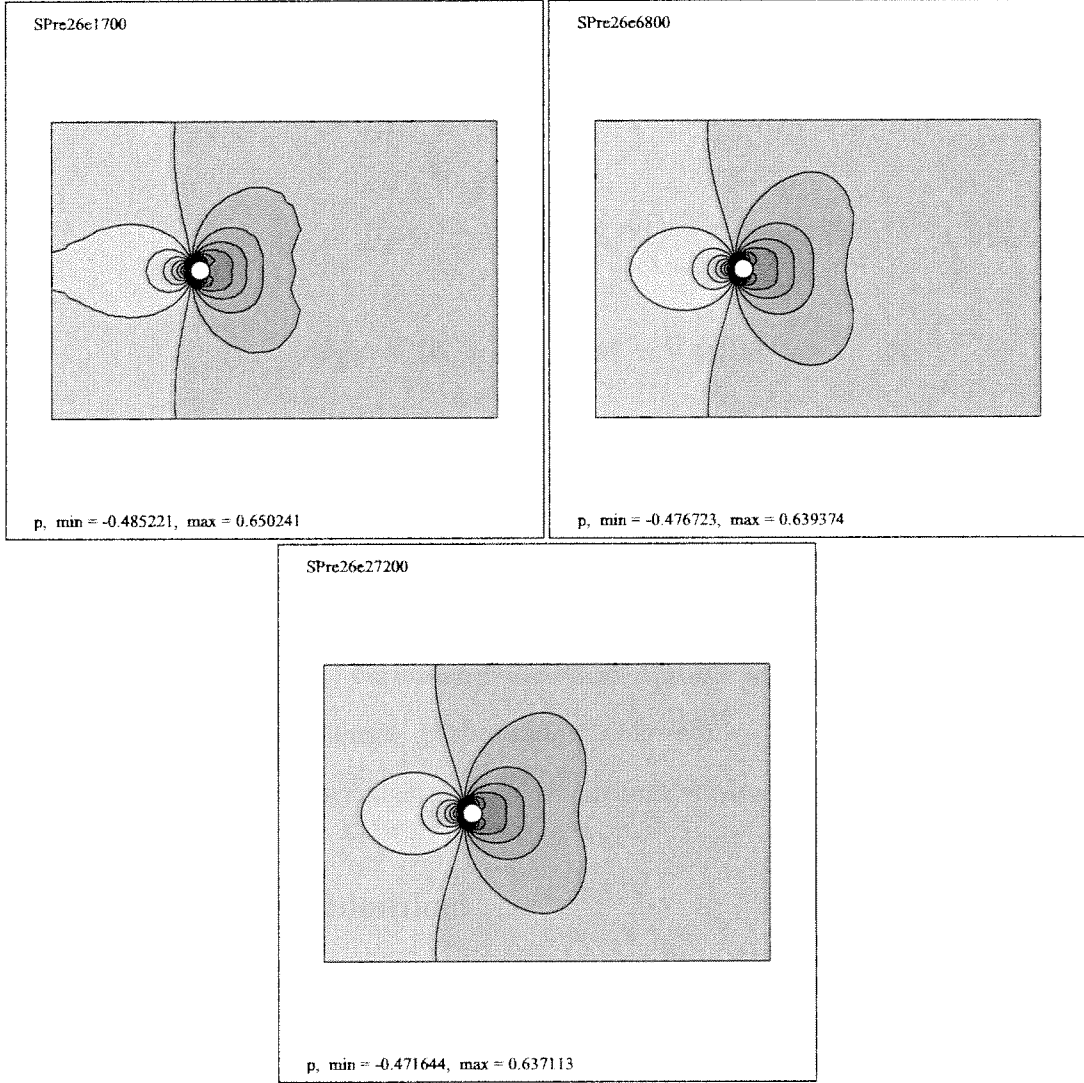
### Silindir etrafında akım problemi ( $Re=26$ )

Diğer bir uygulama olarak aşağıda Şekil (3.15) de sınır koşulları belirtilen silindir etrafındaki akım problemi çözülmüş ve sonuç değerlerinin grafikleri Şekil (3.16) de gösterilmiştir.



Şekil 3.15: Silindir etrafında akım problemi

Şekil (3.16) de basınç eğrilerinin yapısının çok net ve düzgün bir şekilde stabilized subgrid yöntemi ile tespit edildiği gösterilmektedir.



Şekil 3.16:  $Re=26$  için akıntı çizgileri

### 3.3 Navier-Stokes Denklemlerinin Üçgen Elemanlar Üzerinde Bubble Fonksiyonları Kullanarak İki Aşamalı Çözümü

Navier-Stokes denklemlerinin sonlu elemanlar yöntemi ile varyasyonel formülasyonu

$$((\nabla \mathbf{u}_1^n) \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_1) + ((\nabla \hat{\mathbf{u}}_h) \mathbf{u}_1^n, \mathbf{v}_1) - \epsilon (\Delta \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_1) - (\nabla \mathbf{v}_1, \hat{\mathbf{p}}_1) =$$

$$(\mathbf{f}, \mathbf{v}_1) - ((\nabla \mathbf{u}_h^n) \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_1) + \epsilon (\Delta \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_1) + (\nabla \mathbf{v}_1, \mathbf{p}_1^n) \quad (3.26)$$

$$(\kappa \hat{\mathbf{p}}_1 + \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_h, q_1) = (-\kappa p_1^n - \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_h^n, q_1)$$

şeklinde

$$\hat{\mathbf{u}}_h = \hat{\mathbf{u}}_1 + \hat{\mathbf{u}}_b \quad \mathbf{u}_h^n = \mathbf{u}_1^n + \mathbf{u}_b^n$$

formülü kullanılarak yazılabilir. Denkleminde yer alan  $\hat{\mathbf{u}}_1$  ve  $\mathbf{u}_1^n$  sayısal çözümün doğrusal kısmını,  $\hat{\mathbf{u}}_b$  ve  $\mathbf{u}_b^n$  ise bubble kısmını oluşturmaktadır. Doğrusal terimler standard baz(shape) fonksiyonları( $N_i$ ) türünden ifade edilir. Bubble terimleri ise alt ayrıklaştırma üzerinde tanımlanan problemin çözümünden elde edilir [25]. Aşağıda alt düzeyde tanımlanan problemler ile ayrıklaştırılması ve çözümü verilmektedir.

#### 3.3.1 Alt düzey problemleri

Genel çözümün bubble terimleri  $\mathbf{u}_b$ 'nin hesaplanması için aşağıdaki alt düzey problemi çözülecektir.

$$(\nabla \mathbf{u}_b^{n+1}) \mathbf{u}_1^n - \epsilon \Delta \mathbf{u}_b^{n+1} = \mathbf{f} - (\nabla \mathbf{u}_1^{n+1}) \mathbf{u}_1^n + \epsilon \Delta \mathbf{u}_1^{n+1} - \nabla \mathbf{p}_1^{n+1}. \quad (3.27)$$

Bunun için 2-Boyutlu uzayda hız vektörünün bileşenleri açık şekilde yazılır.

$$u_b = \sum_{i=1}^{\#nds} u_i \varphi_i^u + \sum_{i=1}^{\#nds} p_i \varphi_i^{p1} + \varphi^{f1} \quad (3.28)$$

$$v_b = \sum_{i=1}^{\#nds} v_i \varphi_i^v + \sum_{i=1}^{\#nds} p_i \varphi_i^{p2} + \varphi^{f2}.$$

Yukarıdaki tanımlamalarda hız vektörünün bileşenlerinde yer alan  $\varphi_i^u$ ,  $\varphi_i^v$ ,  $\varphi_i^{p1}$ ,  $\varphi_i^{p2}$ ,  $\varphi_i^{f1}$  ve  $\varphi_i^{f2}$  terimlerinin hesaplanması için alt düzey problemi ayrıklaştırılmış problemlere dönüştürülür ve

$\varphi_i^u$ ,  $\varphi_i^v$  için;

$$\begin{aligned} L\varphi_i^u &= -(u^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + v^n \frac{\partial N_i}{\partial y}) \text{ on } K \\ \varphi_i^u &= 0 \text{ on } \partial K \end{aligned} \quad (3.29)$$

$\varphi_i^{p1}$ ,  $\varphi_i^{p2}$  için;

$$\begin{aligned} L\varphi_i^{p1} &= -\frac{\partial N_i}{\partial x} \text{ on } K & L\varphi_i^{p2} &= -\frac{\partial N_i}{\partial y} \text{ on } K \\ \varphi_i^{p1} &= 0 \text{ on } \partial K & \varphi_i^{p2} &= 0 \text{ on } \partial K. \end{aligned} \quad (3.30)$$

$\varphi_i^{f1}$ ,  $\varphi_i^{f2}$  için ise

$$\begin{aligned} L\varphi_i^{f1} &= f_1 \text{ on } K & L\varphi_i^{f2} &= f_2 \text{ on } K \\ \varphi_i^{f1} &= 0 \text{ on } \partial K & \varphi_i^{f2} &= 0 \text{ on } \partial K \end{aligned} \quad (3.31)$$

problemleri çözülür.

(3.29)-(3.31) nolu alt düzey problemleri, ana problem ile aynı özellikte olduğundan dolayı, alt düzey problemlerinin kararlı çözümü için daha önce anlatılan SUPG gibi stabilize bir çözüm yöntemi uygulanmalıdır. Buna göre denklemlerin SUPG yöntemine göre ayrıklaştırılmış halleri aşağıda verilmektedir.

Tüm alt düzey problemlerinin çözümünde sol taraf matrisi ortak olduğundan dolayı şu şekilde yazılabilir;

$$\epsilon(\nabla N_i^* \cdot \nabla N_m^*) + (Su \frac{\partial N_i^*}{\partial x} + Sv \frac{\partial N_i^*}{\partial y}) N_m^* + \tau_{K^*} (Su \frac{\partial N_i^*}{\partial x} + Sv \frac{\partial N_i^*}{\partial y}) (Su \frac{\partial N_m^*}{\partial x} + Sv \frac{\partial N_m^*}{\partial y}) \quad (3.32)$$

Sağ taraf vektörleri ise sırası ile

bubble hız bileşenleri:

$$-(Su \frac{\partial N_i}{\partial x} + Sv \frac{\partial N_i}{\partial y}) N_m^* - \tau_{K^*} (Su \frac{\partial N_i}{\partial x} + Sv \frac{\partial N_i}{\partial y}) (Su \frac{\partial N_m^*}{\partial x} + Sv \frac{\partial N_m^*}{\partial y}) \quad (3.33)$$

bubble basınç bileşenleri:

$$-\frac{\partial N_i}{\partial x} N_m^* - \tau_{K^*} \frac{\partial N_i}{\partial x} (Su \frac{\partial N_m^*}{\partial x} + Sv \frac{\partial N_m^*}{\partial y}) \quad (3.34)$$

$$-\frac{\partial N_i}{\partial y} N_m^* - \tau_{K^*} \frac{\partial N_i}{\partial y} \left( Su \frac{\partial N_m^*}{\partial x} + Sv \frac{\partial N_m^*}{\partial y} \right) \quad (3.35)$$

ve bubble kuvvet bileşenleri:

$$f_1 N_m^* + \tau_{K^*} f_1 \left( Su \frac{\partial N_m^*}{\partial x} + Sv \frac{\partial N_m^*}{\partial y} \right) \quad (3.36)$$

$$f_2 N_m^* + \tau_{K^*} f_2 \left( Su \frac{\partial N_m^*}{\partial x} + Sv \frac{\partial N_m^*}{\partial y} \right) \quad (3.37)$$

olarak yazılır.

### 3.3.2 Doğrusal Terimler

(3.26) nolu denklemde yer alan doğrusal terimlerin çözümü için aşağıdaki tanımlamalar yapıldıktan sonra

$$ct1 = Su \frac{\partial N_i}{\partial x} + Sv \frac{\partial N_i}{\partial y}, \quad ct2 = \epsilon \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right)$$

sadece doğrusal terimleri içeren sistem elde edilir

$$\begin{bmatrix} (SuxN_i + ct1)N_j + ct2 & SvyN_iN_j & -N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ SvxN_iN_j & (SvyN_i + ct1)N_j + ct2 & -N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j & \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j & \kappa N_i N_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f_1 - SuSux - SvSvy)N_j - \epsilon(Sux \frac{\partial N_j}{\partial x} + Svy \frac{\partial N_j}{\partial y}) + Sp \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ (f_2 - SuSvx - SvSvy)N_j - \epsilon(Svx \frac{\partial N_j}{\partial x} + Svy \frac{\partial N_j}{\partial y}) + Sp \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ -(Sux + Svy + \kappa Sp)N_j \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

### 3.3.3 Bubble Terimleri

(3.26) nolu denklemde yer alan bubble terimleri için ilk olarak ortak terimler aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$Bu = \sum u_i \sum c_l^{u_i} N_l^* + \sum p_i \sum c_l^{p1_i} N_l^* + \sum c_l^{f1} N_l^*$$

$$Bux = \sum u_i \sum c_l^{u_i} \frac{\partial N_l^*}{\partial x} + \sum p_i \sum c_l^{p1_i} \frac{\partial N_l^*}{\partial x} + \sum c_l^{f1} \frac{\partial N_l^*}{\partial x}$$

$$Buy = \sum u_i \sum c_l^{u_i} \frac{\partial N_l^*}{\partial y} + \sum p_i \sum c_l^{p1_i} \frac{\partial N_l^*}{\partial y} + \sum c_l^{f1} \frac{\partial N_l^*}{\partial y}$$

$$Bv = \sum v_i \sum c_l^{v_i} N_l^* + \sum p_i \sum c_l^{p2_i} N_l^* + \sum c_l^{f2} N_l^*$$

$$Bvx = \sum v_i \sum c_l^{v_i} \frac{\partial N_l^*}{\partial x} + \sum p_i \sum c_l^{p2_i} \frac{\partial N_l^*}{\partial x} + \sum c_l^{f2} \frac{\partial N_l^*}{\partial x}$$

$$Bvy = \sum v_i \sum c_l^{v_i} \frac{\partial N_l^*}{\partial y} + \sum p_i \sum c_l^{p2_i} \frac{\partial N_l^*}{\partial y} + \sum c_l^{f2} \frac{\partial N_l^*}{\partial y}$$

$$ct1^* = Su \frac{\partial N_l^*}{\partial x} + Sv \frac{\partial N_l^*}{\partial y}, \quad ct2^* = \epsilon \left( \frac{\partial N_l^*}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_l^*}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right).$$

Buna göre (3.26) nolu denklemde yer alan bubble terimleri için aşağıdaki sistem oluşur;

$$\begin{bmatrix} E1_u & E1_v & E1_p \\ E2_u & E2_v & E2_p \\ E3_u & E3_v & E3_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RHS_1 \\ RHS_2 \\ RHS_3 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

öyleki

$$E1_u = Sux \sum c_l^{u_i} (N_l^* + ct1^*) N_j + ct2^*$$

$$E1_v = Suy \sum c_l^{u_i} N_l^* N_j$$

$$E1_p = Sux \sum c_l^{p1_i} [(N_l^* + ct1^*) N_j + ct2^*] + Suy \sum c_l^{p2_i} N_l N_j$$

$$E2_u = Svx \sum c_l^{u_i} N_l^* N_j$$

$$E2_v = (Svy \sum c_l^{u_i} [(N_l + ct1^*) N_j + ct2^*])$$

$$E2_p = Svx \sum c_l^{p1_i} N_l^* N_j + Svy \sum c_l^{p2_i} [(N_l^* + ct1^*) N_j + ct2^*]$$

$$E3_u = \sum c_l^{u_i} \frac{\partial N_l^*}{\partial x} N_j$$

$$E3_v = \sum c_l^{u_i} \frac{\partial N_l^*}{\partial y} N_j$$

$$E3_p = (\sum c_l^{p1_i} \frac{\partial N_l^*}{\partial x} + \sum c_l^{p2_i} \frac{\partial N_l^*}{\partial y}) N_j$$

$$RHS_1 = -(Bu(Sux + Bux) + SuBux + SvBuy + Bv(Suy + Buy)) N_j - \nu (Bux \frac{\partial N_j}{\partial x} + Buy \frac{\partial N_j}{\partial y})$$

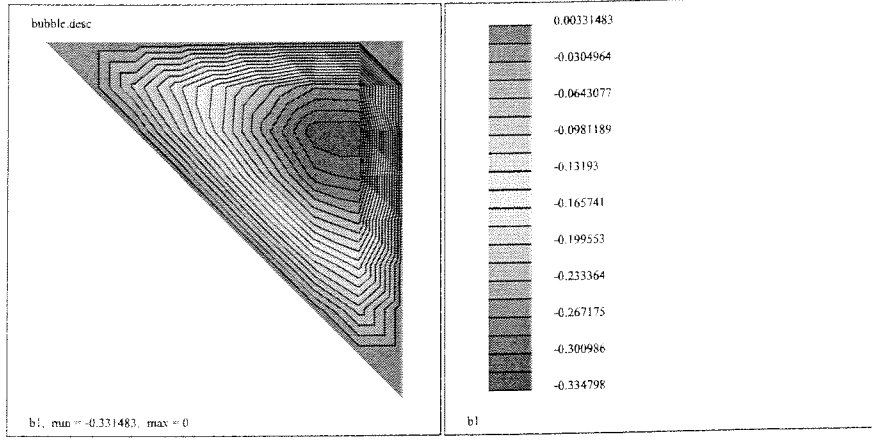
$$RHS_2 = -(Bu(Svx + Bvx) + SuBvx + SvBvy + Bv(Svy + Bvy)) N_j - \nu (Bvx \frac{\partial N_j}{\partial x} + Bvy \frac{\partial N_j}{\partial y})$$

$$RHS_3 = -(Bux + Bvy) N_j.$$

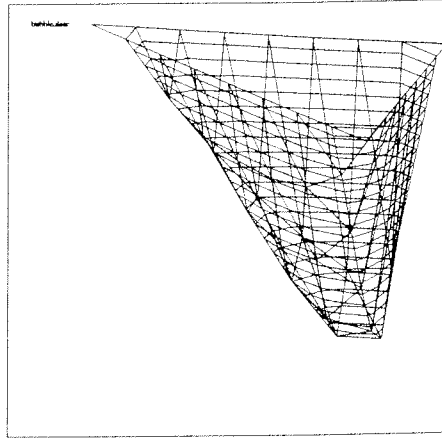
### 3.3.4 Örnek

#### Driven Cavity Akım Problemi

Driven cavity akım probleminin iki aşamalı sonlu elemanlar yöntemi ile çözümünde elde edilen bubble fonksiyonlarının 2-Boyutlu (Resim (3.17)) ve 3-Boyutlu (Resim (3.18)) örnek yapıları verilmektedir.

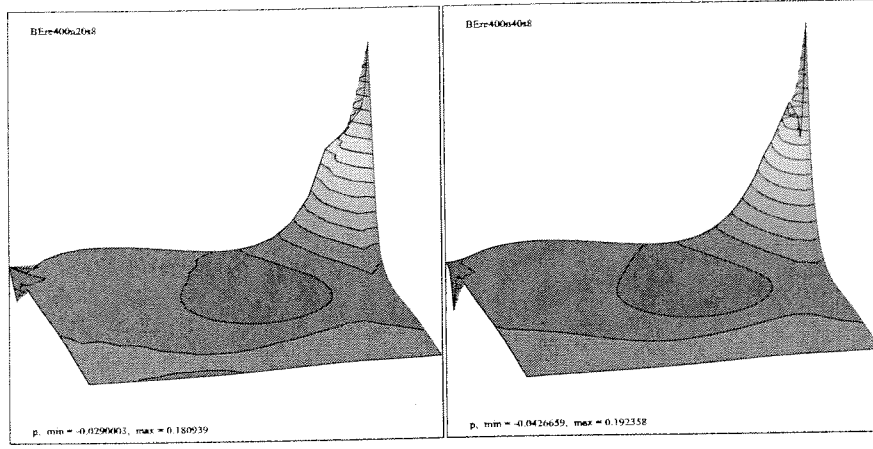


Şekil 3.17: Bubble fonksiyon eğrileri



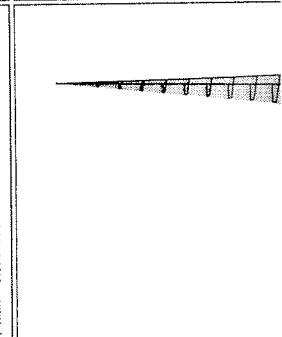
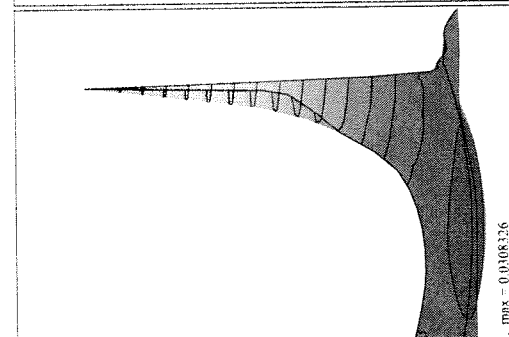
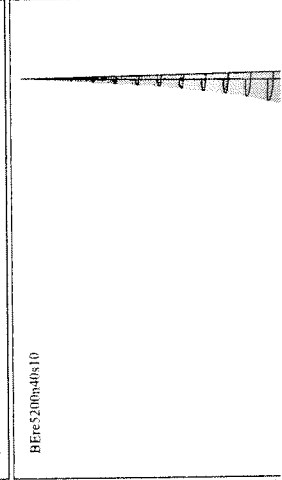
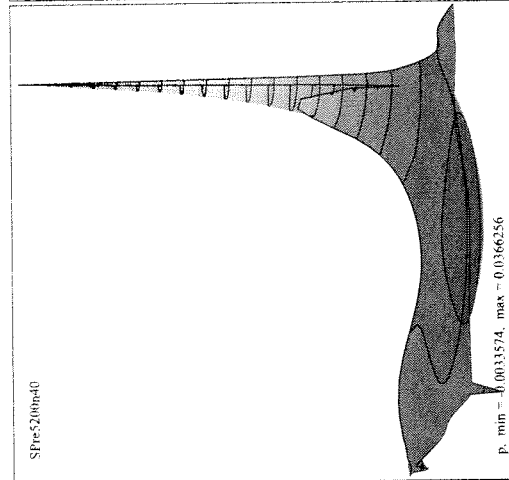
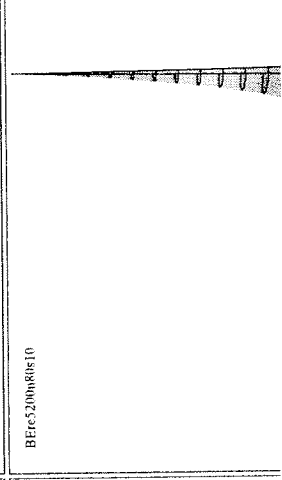
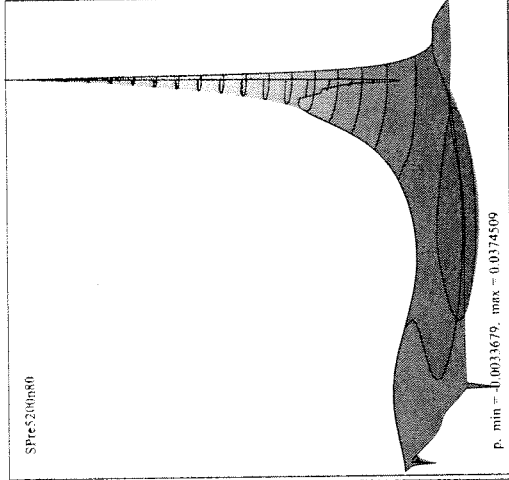
Şekil 3.18: Bubble fonksiyonları 3-boyutlu görünüm

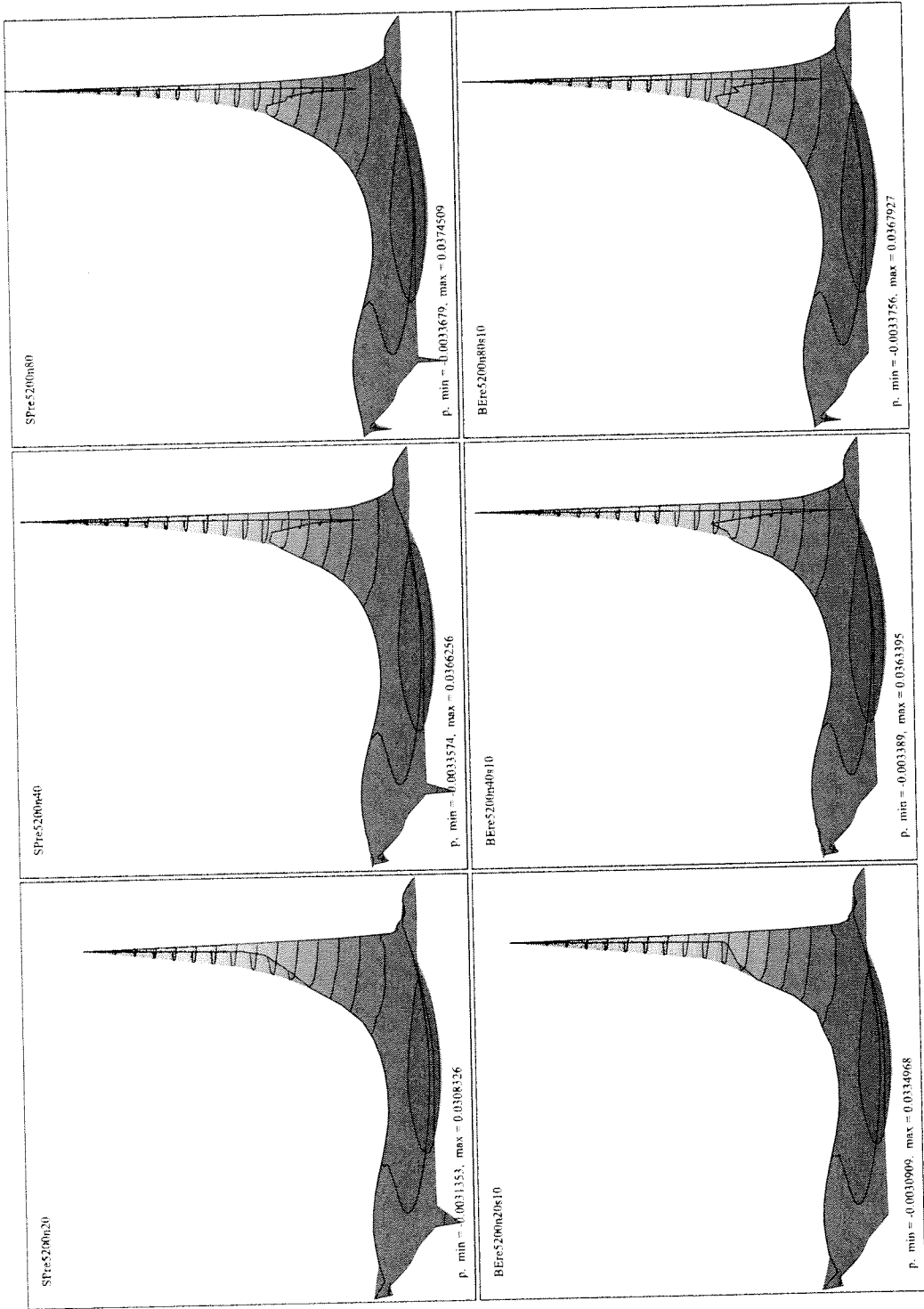




Şekil 3.19: Cavity Flow probleminde  $Re=400$  için,  $N=20$  ve  $N=40$  ayrıklaştırmalarında elde edilen basınç grafikleri

Resim (3.20) de değişik ayrıklaştırmalarda (20, 40, 80) elde edilmiş stabilized subgrid (SP) ve bubble fonksiyonları ile iki aşamalı (BE) çözüm yöntemleri ile elde edilmiş sonuçlar gösterilmektedir. Her iki yöntemde elde edilen sonuçlardan, basınç eğrilerinin yapısı ve en düşük/en yüksek değerlerin yakınlığı gözlemlenmektedir.





Şekil 3.20: Cavity Flow probleminde  $Re=5200$  için,  $N=20$ ,  $N=40$ ,  $N=80$  ayrıklaştırmalarında stabilized subgrid ve bubble çözümlerinin karşılaştırılması

### 3.4 3-Boyutlu Uzayda Navier-Stokes Denklemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü

En genel durumda 3-boyutlu uzayda zamandan bağımsız Navier-Stokes denklemleri, momentum ve süreklilik denklemleri ile tanımlanır

$$\begin{aligned}(\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} - \epsilon \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0,\end{aligned}\tag{3.40}$$

burada hız vektörünün üç bileşeni bulunmaktadır

$$\mathbf{u} = (u, v, w).$$

Değişkenler yine ardışık formda alınır

$$\begin{aligned}u^{n+1} &= u^n + \hat{u} \\ v^{n+1} &= v^n + \hat{v} \\ w^{n+1} &= w^n + \hat{w}\end{aligned}$$

öyle ki  $u^n$ ,  $v^n$  ve  $w^n$  bir önceki aşamadan gelen bilinen değerler ve  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  ve  $\hat{w}$  karşılık gelen doğrulama değerlerini göstermektedir.

Doğrusal olmayan terimin ardışık formda yazılımı

$$(\nabla \mathbf{u}^{n+1})\mathbf{u}^{n+1} \approx (\nabla \mathbf{u}^n)\mathbf{u}^n + (\nabla \mathbf{u}^n)\hat{\mathbf{u}} + (\nabla \hat{\mathbf{u}})\mathbf{u}^n$$

ve operatörün açık hali aşağıdaki gibi tanımlanır

$$(\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} & v \frac{\partial u}{\partial y} & w \frac{\partial u}{\partial z} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} & v \frac{\partial v}{\partial y} & w \frac{\partial v}{\partial z} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} & v \frac{\partial w}{\partial y} & w \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Benzer şekilde Laplace ve gradyan operatörleri 3-boyutlu uzayda tanımlanır

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{u}^{n+1} &= \Delta \mathbf{u}^n + \Delta \hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 w^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w^n}{\partial z^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} \end{pmatrix} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.\end{aligned}\tag{3.41}$$

### 3.4 3-Boyutlu Uzayda Navier-Stokes Denklemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü

En genel durumda 3-boyutlu uzayda zamandan bağımsız Navier-Stokes denklemleri, momentum ve süreklilik denklemleri ile tanımlanır

$$\begin{aligned}(\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} - \epsilon \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0,\end{aligned}\tag{3.40}$$

burada hız vektörünün üç bileşeni bulunmaktadır

$$\mathbf{u} = (u, v, w).$$

Değişkenler yine ardışık formda alınır

$$\begin{aligned}u^{n+1} &= u^n + \hat{u} \\ v^{n+1} &= v^n + \hat{v} \\ w^{n+1} &= w^n + \hat{w}\end{aligned}$$

öyle ki  $u^n$ ,  $v^n$  ve  $w^n$  bir önceki aşamadan gelen bilinen değerler ve  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  ve  $\hat{w}$  karşılık gelen doğrulama değerlerini göstermektedir.

Doğrusal olmayan terimin ardışık formda yazılığını

$$(\nabla \mathbf{u}^{n+1})\mathbf{u}^{n+1} \approx (\nabla \mathbf{u}^n)\mathbf{u}^n + (\nabla \mathbf{u}^n)\hat{\mathbf{u}} + (\nabla \hat{\mathbf{u}})\mathbf{u}^n$$

ve operatörün açık hali aşağıdaki gibi tanımlanır

$$(\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} & v \frac{\partial u}{\partial y} & w \frac{\partial u}{\partial z} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} & v \frac{\partial v}{\partial y} & w \frac{\partial v}{\partial z} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} & v \frac{\partial w}{\partial y} & w \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Benzer şekilde Laplace ve gradyan operatörleri 3-boyutlu uzayda tanımlanır

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{u}^{n+1} &= \Delta \mathbf{u}^n + \Delta \hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 w^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w^n}{\partial z^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} \end{pmatrix} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.\end{aligned}\tag{3.41}$$

Basınç değişkeni için 3-boyutlu uzayda karşılık gelen türev terimleri

$$\nabla p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ve ardışık formda basınç değişkeni

$$p^{n+1} = p^n + \hat{p}$$

şeklinde yazılır.

Denklem (4.1) ve (3.41)'nin çözümünden önce yine süreklilik denkleminin küçük bir  $\kappa$  sayısı ( $\approx 10^{-5}$ ) ile normalizasyonu yapılmakta

$$\kappa p + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.42)$$

ve denklemlerin ardışık halleri açık olarak verilmektedir

$$\begin{aligned} & u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial u^n}{\partial y} + w^n \frac{\partial u^n}{\partial z} + \hat{u} \frac{\partial u^n}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial u^n}{\partial y} + \hat{w} \frac{\partial u^n}{\partial z} + u^n \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + v^n \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + w^n \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} \\ & - \epsilon \left( \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial z^2} \right) - \epsilon \left( \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p^n}{\partial x} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = f_1 \\ & u^n \frac{\partial v^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial v^n}{\partial y} + w^n \frac{\partial v^n}{\partial z} + \hat{u} \frac{\partial v^n}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial v^n}{\partial y} + \hat{w} \frac{\partial v^n}{\partial z} + u^n \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + v^n \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + w^n \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \\ & - \epsilon \left( \frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial z^2} \right) - \epsilon \left( \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p^n}{\partial y} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} = f_2 \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} & u^n \frac{\partial w^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial w^n}{\partial y} + w^n \frac{\partial w^n}{\partial z} + \hat{u} \frac{\partial w^n}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial w^n}{\partial y} + \hat{w} \frac{\partial w^n}{\partial z} + u^n \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} + v^n \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} + w^n \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} \\ & - \nu \left( \frac{\partial^2 w^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w^n}{\partial z^2} \right) - \nu \left( \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p^n}{\partial z} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} = f_3 \end{aligned}$$

$$\kappa p + \kappa \hat{p} + \frac{\partial u^n}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial v^n}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial w^n}{\partial z} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} = 0.$$

(3.43) nolu denklemlerin varyasyonel formülasyonu yine Green's ikinci ve parçalı integral eşitlikleri kullanılarak elde edilir.

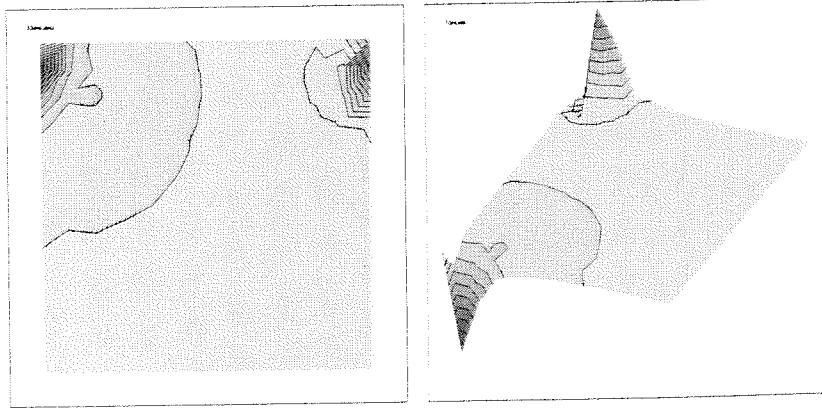
### 3.4.1 Örnek

#### Cavity Flow Akım Problemi

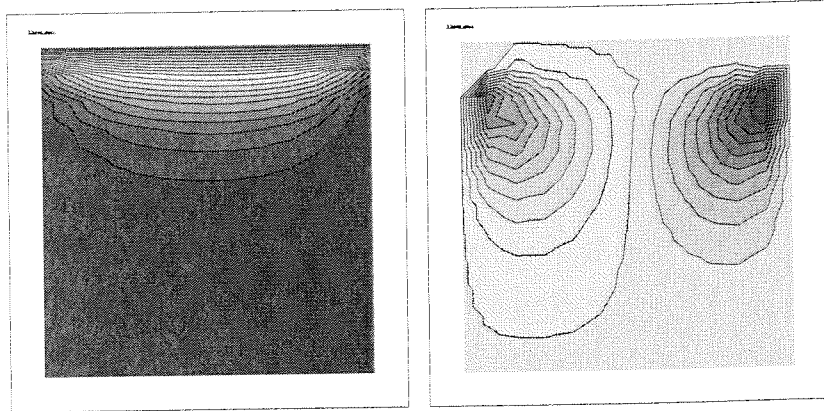
İki boyuta tanımlanan Navier-Stokes denklemleri aşağıdaki sınır koşulları kullanılarak 3-boyuta genişletilmiş ve sonuçlar elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(0, y, z) &= 0, & \mathbf{u}(1, y, z) &= 0 \\ \mathbf{u}(x, 0, z) &= 0, & \mathbf{u}(x, 1, z) &= 1 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} &= 0 & \text{at} & z = 0, 0.1 \end{aligned}$$

Çözümde  $x$  ve  $y$  yönünde 12'şer eleman kullanılmış ve Resim (3.21) de basınç grafikleri ve Resim (3.22) de  $z=0$  düzleminde hız bileşeninin  $u$  ve  $v$  grafikleri verilmiştir. Kaba ayrıklaştırma olmasına rağmen sonuçların uyumluluğu gözlemlenmektedir. Fakat, ayrıklaştırma sorunu ile karşılaşıldığından dolayı, bundan sonraki çalışmalarda 3-buyutlu uzayda hesaplamalar yapılmayacaktır.



Şekil 3.21: Basınç eğri ve elevation grafikleri



Şekil 3.22: Hız vektörünün (u,v) bileşen eğrileri

## BÖLÜM 4

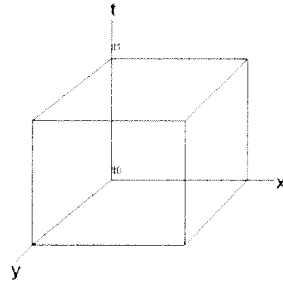
### ZAMAN BAĞIMLI NAVIER-STOKES DENKLEMLERİ

Bu bölümde zaman bağımlı Navier-Stokes denklemlerinin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümünde zaman bileşeninde de sonlu elemanlar kullanılarak çözümü verilecektir. Çözüm yönteminin anlaşılabilirliği bakımından, metod ve formülasyon ilk olarak konveksiyon-difüzyon problemi üzerinde verilecek, daha sonra Navier-Stokes denklemleri üzerine genişletilecektir. Son olarak metodun uygulaması olarak örnek problemlerin çözümünden elde edilen sonuçlar verilecektir.

2-boyutlu uzayda zaman bağımlı bilinmeyen  $\mathbf{u}$  fonksiyonunu  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, t)$  olarak tanımlarsak, sonlu elemanlar yöntemi ile her bir eleman üzerinde

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^{ndof} N_i(x, y) T_k(t) u_{ik} \quad (4.1)$$

şeklinde yazılabilir. Resim (4.1) den de anlaşılacağı üzere, formülde yer alan  $N_i$ 'ler alan yönündeki  $(x, y)$  baz fonksiyonlarını,  $T_k$ 'ler ise zaman yönündeki baz fonksiyonlarını göstermektedir.



Şekil 4.1: Zaman bağımlı 2-boyutlu uzay

#### Zaman Yönündeki Baz Fonksiyonlarının Özellikleri ( $T_k$ 'ler)

Zaman yönünde seçilen baz fonksiyonları doğrusal olup şu özellikleri sağlamaktadırlar; Baz fonksiyonları  $[t_0, t_1]$  aralığında ve

$$T_1 = \begin{cases} 1 & \text{at } t_0 \\ 0 & \text{at } t_1 \end{cases} \quad T_2 = \begin{cases} 0 & \text{at } t_0 \\ 1 & \text{at } t_1 \end{cases}$$



Ayrıca, bilindiği üzere zaman yönünde sayısal hesaplamalar yapılırken, ilk olarak aşağıda verilen doğrusal dönüşüm işlemi gerçekleştirilir.

$$[t_0, t_1] \rightarrow [-1, 1] \text{ üzerinde } t \rightarrow \tau \text{ öyleki } t = [(t_1 - t_0)\tau + (t_1 + t_0)]/2$$

Buna göre

$$\tau = \frac{2t}{t_1 - t_0} - \frac{t_1 + t_0}{t_1 - t_0}$$

ve

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{2}{t_1 - t_0}.$$

Sonuç olarak yeni değişken( $\tau$ ) ile baz fonksiyonları

$$T_1(\tau) = \frac{1 - \tau}{2}, \quad T_2(\tau) = \frac{1 + \tau}{2}$$

olarak yazılır.

#### 4.1 Konveksiyon-Difüzyon Problemi

Zaman bağımlı konveksiyon-difüzyon problemi, başlangıç koşulu ve Dirichle türü sınır koşulları ile aşağıdaki şekilde

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \epsilon \nabla^2 u + \mathbf{a} \cdot \nabla u &= f, & \text{in } \Omega \times [0, T] \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0 & \text{at } t = 0 \\ u(\mathbf{x}, t) &= \bar{u}(\mathbf{x}, t) & \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.2)$$

$\mathbf{a} \cdot \nabla u = a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}$ , ve  $a(x, y)$ ,  $b(x, y)$ ,  $u_0(\mathbf{x})$ ,  $\bar{u}(\mathbf{x}, t)$  bilinen fonksiyonları ile tanımlanır. Standart Galerkin türü sonlu elemanlar yöntemi ile formülasyonu ayrıklaştırılmış olarak,  $u_h$  yaklaşık fonksiyonu ile

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_h} [u_h v_h + \epsilon (\nabla u_h \cdot \nabla v_h) + (\mathbf{a} \cdot \nabla u_h) \cdot v_h] dx dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_h} f v_h dx dt \quad (4.3)$$

$v_h$  baz fonksiyonu kullanılarak yazılır. Daha önce belirtildiği gibi, konveksiyon baskın problemlerde (çok küçük  $\epsilon$  katsayısı için), sonlu elemanlar yöntemi ile kararlı çözümler elde edilebilmesi için, stabilize edilmiş sonlu elemanlar yöntemlerinden birinin kullanılması gerekmektedir. Konveksiyon-difüzyon denkleminin, sonlu elemanlar yöntemi ile stabilize

edilmiş hali [30]

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} a(u_h, v_h) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_K \tau_K \int_{\Omega_h} (-\epsilon \Delta u_h + \mathbf{a} \cdot \nabla u_h - f)(\gamma \epsilon \Delta v_h + \mathbf{a} \cdot \nabla v_h) dx dt \\ = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_h} f v_h dx dt \end{aligned} \quad (4.4)$$

$a(u_h, v_h)$  ikili doğrusal operatörü

$$a(u_h, v_h) = \int_{\Omega_h} [u_h v_h + \epsilon (\nabla u_h \cdot \nabla v_h) + (\mathbf{a} \cdot \nabla u_h) v_h] dx$$

ve  $\tau_K$  stabilizasyon katsayısı [?]

$$\tau_K = \begin{cases} \frac{h_K}{2|\mathbf{a}|_K} & \text{if } Pe_K \geq 1 \\ \frac{h_K^2}{12\epsilon} & \text{if } Pe_K < 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

kullanılarak yazılır. Stabilizasyon katsayısında yer alan ,  $h_K$  eleman çapını,  $Pe_K$  Péclet numarasını  $Pe_K = \frac{|\mathbf{a}|_K h_K}{6\epsilon}$  ve  $\mathbf{a}$  ise akım vektörünü göstermektedir, öyleki  $\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$  ise  $|\mathbf{a}|_K = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

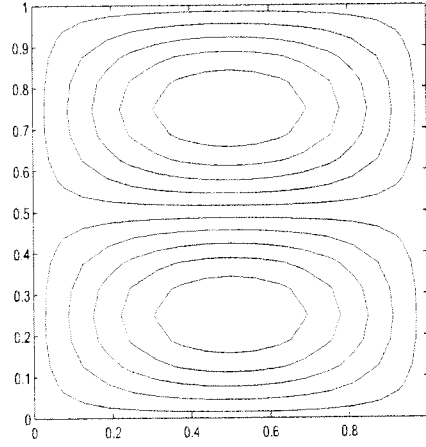
#### 4.1.1 Örnekler

**Örnek 1:**

Zaman yönünde sonlu eleman kullanımı 2-boyutlu zaman bağımlı difüzyon ve konveksiyon-difüzyon problemlerinin çözümünde test edilecektir. İlk örnek olarak aşağıda tanımı, sınır ve başlangıç koşulları verilen difüzyon problemi çözülmüştür.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \nabla^2 \mathbf{u} \quad \text{on} \quad (x, y) \in [0, 1] \quad \text{and} \quad t \in [0, T] \\ \mathbf{u}(x, y, 0) &= \sin(\pi x) \sin(2\pi y) \\ \mathbf{u} &= 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \\ \mathbf{u}_{exact} &= e^{-5\pi^2 t} (\sin(\pi x) \sin(2\pi y)) \end{aligned}$$

Problemin çözümünde, sırası ile alan ve zaman yönündeki ayrıklaştırmalar  $dx = dy = 0.0625$  ve  $dt = 0.01$  olarak alınmıştır. Resim (4.2) de sayısal sonuç ve teorik sonuç verilmekte ve sonuç eğrilerinin çakışmasından metodun verimliliği gözlemlenmektedir.



Şekil 4.2: Sayısal ve teorik çözümler ( $t=0.05$ )

### Örnek 2:

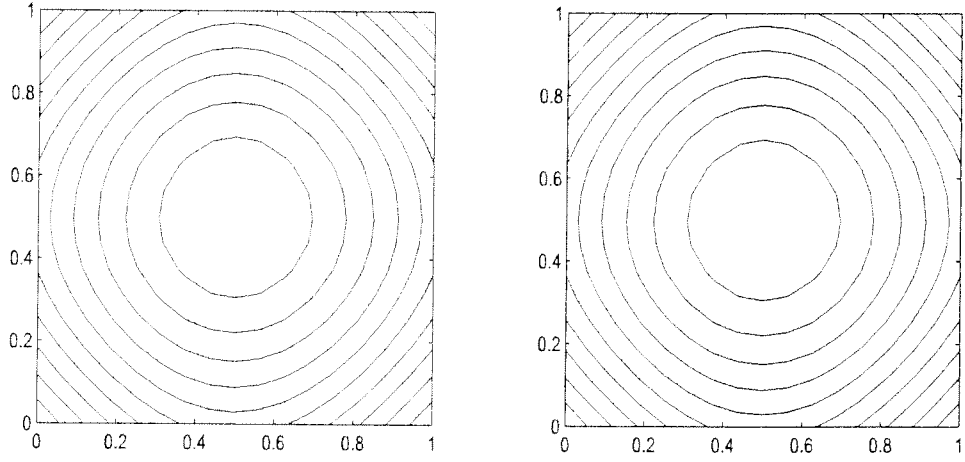
İkinci örnek olarak, konveksiyon-difüzyon problemi

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = k \nabla^2 \mathbf{u} \quad \text{on} \quad (x, y) \in [0, 1] \quad \text{and} \quad t \in [0, T]$$

$$\mathbf{u}(x, y, 0) = \sin(\pi x) + \sin(\pi y)$$

$$\mathbf{u}_{exact} = e^{-k\pi^2 t} [\sin(\pi x) + \sin(\pi y)]$$

ayrıklaştırma değerleri olarak  $dx = dy = 0.0625$ ,  $dt = 0.01$  ve difüzyon katsayısı  $k = 0.1$  için çözülmüş ve Resim (4.3) de  $t = 0.01$  ve  $t = 0.05$  zamanlarında elde edilmiş sayısal ve teorik sonuçlar verilmiştir.



Şekil 4.3: Sayısal ve teorik çözümler ( $t=0.01$  and  $t=0.05$ )

## 4.2 Zaman Bağımlı Navier-Stokes Denklemleri

Zaman bağımlı Navier-Stokes denklemleri hız ve basınç türünden

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} - \epsilon \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{in } [0, T] \times \Omega \\
 \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{in } [0, T] \times \Omega \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{g} & \text{on } [0, T] \times \partial\Omega \\
 \mathbf{u}(0, \cdot) &= \mathbf{u}_0 & \text{in } \Omega \\
 \int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} &= 0 & \text{in } [0, T] \times \Omega
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$\mathbf{u}$  hız vektörü,  $\mathbf{u}_0$  başlangıç hız değeri,  $p$  basınç,  $\mathbf{f}$  toplam dış kuvveti,  $\mathbf{g}$  Dirichlet türü sınır koşulunu,  $[0, T]$  zaman aralığını ve  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ise problemin tanımlandığı bölge olarak gösterilmektedir.

Standart Galerkin yöntemi ile  $[t_n, t_{n+1}]$  zaman aralığında problem sonlu elemanlar yöntemi ile

$$B(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_h} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} dt \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_1^h, q_h \in Q_1^h, \tag{4.7}$$

formülü ile

$$B(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) =$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_h} [(\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h) + ((\nabla \mathbf{u}_h)\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h) + \epsilon(\nabla \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h) - (\nabla \mathbf{v}_h \cdot p_h) + (\nabla \mathbf{u}_h \cdot q_h)] \, d\mathbf{x} dt$$

kullanılarak ayrıklaştırılmış halde yazılır.

Denkelemlerin doğrusal olmayan yapılarından dolayı bilinmeyen  $\mathbf{u}_h$  ve  $p_h$  değerleri

$$\mathbf{u}_h^{s+1} = \mathbf{u}_h^s + \hat{\mathbf{u}}_h \tag{4.8}$$

$$p_h^{s+1} = p_h^s + \hat{p}_h \tag{4.9}$$

şeklinde yazılır. Eşitliklerde  $\mathbf{u}_h^{s+1}$  ve  $p_h^{s+1}$  mevcut zamandaki yaklaşık değerleri,  $\mathbf{u}_h^s$  ve  $p_h^s$  bir önceki zamandaki yaklaşık değerleri,  $\hat{\mathbf{u}}_h$  ve  $\hat{p}_h$  ise bir önceki aşamadan gelen doğrulama değerleri göstermektedir. Buna göre doğrusal olmayan konveksiyon terimi

$$(\nabla \mathbf{u}_h^{s+1})\mathbf{u}_h^{s+1} \approx (\nabla \hat{\mathbf{u}}_h)\mathbf{u}_h^s + (\nabla \mathbf{u}_h^s)\hat{\mathbf{u}}_h + (\nabla \mathbf{u}_h^s)\mathbf{u}_h^s$$

şeklinde yazılır.

Konveksiyon-difüzyon problemine benzer şekilde, bilinmeyen değişkenler ayrıklaştırılmış formda aşağıdaki gibi ifade edilir

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^{ndof} \phi_i(x, y) \tau_1(t) \mathbf{u}_{i,n} + \sum_{i=1}^{ndof} \phi_i(x, y) \tau_2(t) \mathbf{u}_{i,(n+1)}, \quad (4.10)$$

$$p \approx p_h = \sum_{i=1}^{ndof} \phi_i(x, y) \tau_1(t) p_{i,n} + \sum_{i=1}^{ndof} \phi_i(x, y) \tau_2(t) p_{i,(n+1)} \quad (4.11)$$

öyleki  $\mathbf{u}_{i,n} = \mathbf{u}_h(x_i, y_i, t_n)$ ,  $\mathbf{u}_{i,(n+1)} = \mathbf{u}_h(x_i, y_i, t_{n+1})$ ,  $p_{i,n} = p_h(x_i, y_i, t_n)$ ,  $p_{i,(n+1)} = p_h(x_i, y_i, t_{n+1})$  olarak tanımlanmaktadır.

(4.10), (4.11) eşitliklerini (4.8), (4.9) de yerine koyup (4.7) denklemini yeniden yazıldığında,  $\phi_i$  baz fonksiyonları türünden ayrıklaştırılmış formda

$$S(\phi_i, \tau_1; \phi_j, \tau_1) \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_n \\ P_n \end{Bmatrix} + S(\phi_i, \tau_2; \phi_j, \tau_2) \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{n+1} \\ P_{n+1} \end{Bmatrix} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \phi_j \tau_1) \, dxdt \quad (4.12)$$

$$S(\phi_i, \tau_1; \phi_j, \tau_2) \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_n \\ P_n \end{Bmatrix} + S(\phi_i, \tau_2; \phi_j, \tau_2) \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{n+1} \\ P_{n+1} \end{Bmatrix} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \phi_j \tau_2) \, dxdt \quad (4.13)$$

açık halde

$$S(\phi_i, \tau_k; \phi_j, \tau_l) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_h} [\phi_i \phi_j \frac{\partial \tau_k}{\partial t} \tau_l + \{(\nabla \phi_i \cdot \phi_j) + \epsilon(\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j) - (\nabla \phi_j \cdot \phi_i) + (\nabla \phi_i \cdot \phi_j)\} \tau_k \tau_l] \, dxdt$$

denklemleri elde edilir.

Daha önce de belirtildiği gibi, Navier-Stokes denklemlerinde basınç için osilasyonların engellenmesi ve kararlı çözüm elde edilebilmesi için uygun baz fonksiyon ikilileri veya stabilize edilmiş yöntemler kullanılmalıdır.

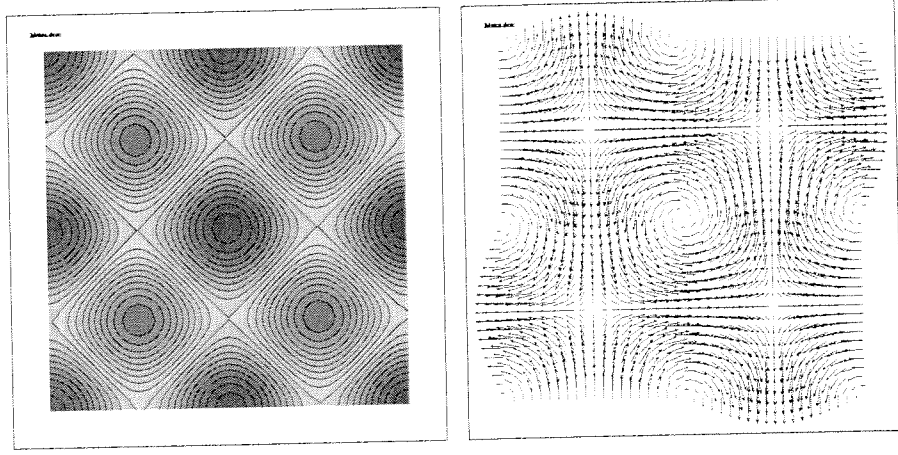
#### 4.2.1 Örnek

##### Taylor vortex akım problemi [4]

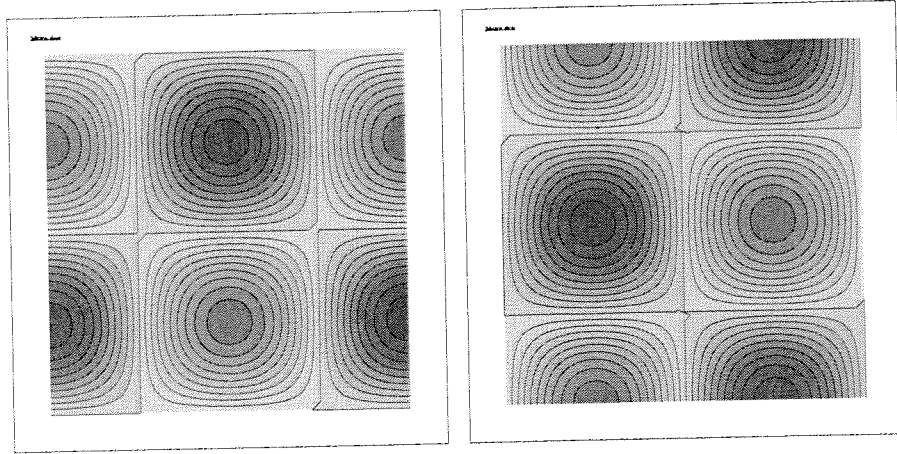
Metodun uygulaması olarak zaman bağımlı homojen Navier-Stokes denklemlerini sağlayan Taylor vortex akım problemi çözülmektedir. Problem  $[-\pi, \pi]x[-\pi, \pi]$  aralığında

$$\mathbf{u} = e^{-2t\epsilon} \begin{cases} -\cos x \sin y \\ \sin x \cos y \end{cases}, p = -\frac{1}{4} e^{-4t\epsilon} (\cos 2x + \cos 2y) \quad (4.14)$$

teorik çözümünden elde edilen sınır ve başlangıç koşulları ile zaman yönünde  $\Delta t = 0.1$  ayrıklaştırması ile çözülmüş ve  $t = 1.0$  anındaki basınç, akıntı çizgileri ve hız bileşen sonuçları Resim (4.4) ve (4.5) de verilmiştir.



Şekil 4.4: Basınç eğrileri ve akıntı çizgileri grafikleri ( $t=1.0$ )



Şekil 4.5: Hız bileşen  $u$  ve  $v$  eğrileri ( $t=1.0$ )

## BÖLÜM 5

### MAGNETOHİDRODİNAMİK DENKLEMLERİ

Füzyon reaktör aparatlarında büyük bir ısı oluşturan lityum örtüsü genellikle helyum gazı, su veya sıvı metal lityum ile soğutulur. Soğutma işleminde sıvı metal lityum kuvvetli bir manyetik alan altında bir basınç kanaldan geçirilerek basıncın düşmesi sağlanır. Bu sebeble MHD kanal akımlarının çözümleri önem kazanmaktadır. İki boyutlu uzayda manyetik bir alan etkisindeki sıvının akımını tanımlayan magnetohidrodinamik (MHD) denklemleri, momentum denklemi, Maxwell denklemi (Ohm's kuralı ile birlikte) ve süreklilik denklemleri türünden ifade edilir [54, 32, 53, 30, 18]. Burada Navier-Stokes denklemleri Lorentz kuvveti ilave edilerek verilmektedir. Maxwell denklemi ve Ohm's kanunundan çıkarılmış olan manyetik indüksiyon denklemi ise hem dışarıdan etki eden manyetik alanı hem de sıvının içindeki elektrik akımından kaynaklanan indüklenmiş manyetik alanı ihtiva etmektedir.  $Re$  akım Reynolds sayısı,  $Rem$  manyetik Reynolds sayısı,  $Ha$  Hartmann sayısı,  $\mathbf{u} = (u, v)$  hız vektörü,  $p$  basınç,  $\mathbf{B} = (B_x, B_y)$  manyetik alan ve  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ ,  $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$  dış etken kuvvet vektörleri olmak üzere, MHD denklemleri  $\Omega$  bölgesi üzerinde aşağıdaki gibi yazılır;

$$(\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} - \frac{1}{Re}\Delta \mathbf{u} + \nabla p - \frac{Ha^2}{Re.Rem}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mathbf{f} \quad (5.1)$$

$$-\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{Rem}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{g} \quad (5.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5.4)$$

Bilindiği üzere, denklemlerde yer alan bazı terimlerin açık hali

$$\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right), \quad \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u & v & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} (uB_y - vB_x)$$



ise

$$(\nabla \times \vec{\mathbf{B}}) \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} (B_y \frac{\partial B_x}{\partial y} - B_x \frac{\partial B_y}{\partial x}) + \vec{j} (B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} - B_y \frac{\partial B_x}{\partial y})$$

ve

$$-\nabla \times (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}}) = - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & uB_y - vB_x \end{vmatrix} = \vec{i} (-u \frac{\partial B_y}{\partial y} + v \frac{\partial B_x}{\partial y} - B_y \frac{\partial u}{\partial y} + B_x \frac{\partial v}{\partial y}) + \vec{j} (u \frac{\partial B_y}{\partial x} - v \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial u}{\partial x} - B_x \frac{\partial v}{\partial x})$$

şeklinde ifade edilirler.

Ayrıca, denklem (5.2) için

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla^2 \mathbf{B} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B})$$

eşitliği ve denklem (5.4) deki

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial y}$$

koşulu kullanılırsa iki boyutlu uzayda MHD denklemleri (5.1) - (5.3) aşağıdaki denklem sistemi formunu alır

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{Ha^2}{Re \cdot Rem} B_y \left( \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) = f_1 \quad (5.5)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{Ha^2}{Re \cdot Rem} B_x \left( \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) = f_2 \quad (5.6)$$

$$u \frac{\partial B_x}{\partial x} + v \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{1}{Rem} \left( \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} B_x - \frac{\partial u}{\partial y} B_y = g_1 \quad (5.7)$$

$$u \frac{\partial B_y}{\partial x} + v \frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{1}{Rem} \left( \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} B_y - \frac{\partial v}{\partial x} B_x = g_2 \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5.9)$$

## 5.1 MHD Denklemlerinin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü

MHD denklemlerinin sonlu elemanlar yöntemi ile çözülebilmesi için, bazı sonlu elemanlar uzaylarının tanımlanması gerekmektedir.  $K$  elemanı için tanımlanan

$$X_h^k = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), v_h|_K \in (P_k(K) \text{ or } Q_k(K)), \forall K \in \tau_h\}$$

uzayında,  $P_k(K)$  üçgen elemanlar uzayını,  $Q_k(K)$  ise dörtgen elemanlar uzayını göstermektedir. Buna göre hız bileşenleri  $\mathbf{u}$  için  $V_h = (X_h^k \cap H_0^1(\Omega))^3$ , basınç  $p$  için  $M_h = X_k^m \cap L_0^2(\Omega)$  ve basınç bileşenleri  $\mathbf{B}$  için ise  $W_h = (X_h^l)^3 \cap H^1(\Omega)^3$  uzaylarından seçilir.  $(u_h, B_h, p_h) \in (V_h, W_h, M_h)$  alınarak MHD denklemlerinin, standart Galerkin formu sonlu elemanlar metoduna göre  $\epsilon = \frac{1}{Re}$ ,  $\eta = \frac{1}{Rem}$  ve  $S = \frac{Ha^2}{Re \cdot Rem}$  olmak üzere

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}_h, \mathbf{B}_h, p_h; \mathbf{v}_h, \mathbf{C}_h, q_h) = & \\ ((\nabla \mathbf{u}_h) \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \epsilon(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h) - (p_h, \nabla \mathbf{v}_h) + S(\mathbf{B}_h \times (\nabla \times \mathbf{B}_h), \mathbf{v}_h) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) & (5.10) \\ -(\nabla \times (\mathbf{u}_h \times \mathbf{B}_h), \mathbf{C}_h) + \eta(\nabla \mathbf{B}_h, \nabla \mathbf{C}_h) - (\mathbf{g}, \mathbf{C}_h) - (q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h) = 0 & \end{aligned}$$

$\forall (v_h, C_h, q_h) \in (V_h, W_h, M_h)$  eşitliği ile gösterilir.

Sonlu elemanlar yöntemi ile çözüm aşamasında, denklemlerde yer alan doğrusal olmayan terimler için

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \hat{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^n + \hat{\mathbf{B}}$$

eşitlikleri kullanılarak denklemler doğrusal hale getirilebilir

$$(\nabla \mathbf{u}^{n+1}) \mathbf{u}^{n+1} \approx (\nabla \mathbf{u}^n) \mathbf{u}^n + (\nabla \mathbf{u}^n) \hat{\mathbf{u}} + (\nabla \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{u}^n,$$

$$(\nabla \times \mathbf{B}^{n+1}) \times \mathbf{B}^{n+1} \approx (\nabla \times \mathbf{B}^n) \times \mathbf{B}^n + (\nabla \times \mathbf{B}^n) \times \hat{\mathbf{B}} + (\nabla \times \hat{\mathbf{B}}) \times \mathbf{B}^n$$

$$\nabla \times (\mathbf{u}^{n+1} \times \mathbf{B}^{n+1}) \approx \nabla \times (\mathbf{u}^n \times \mathbf{B}^n) + \nabla \times (\mathbf{u}^n \times \hat{\mathbf{B}}) + \nabla \times (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{B}^n).$$

Sonlu elemanlar yöntemi ile yakınsak ve kararlı çözümler elde edilebilmesi için, Navier-Stokes denklemlerinde olduğu gibi, uygun baz fonksiyonları seçilmeli veya stabilizasyon yöntemleri uygulanmalıdır.

### 5.1.1 Örnek

MHD denklemlerinin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümünün uygulaması olarak, tam çözümü bilinen ve (5.1 - 5.4) denklemlerini sağlayan  $[0, 1] \times [0, 1]$  kare bölgesinde tanımlanan

[57] ve teorik çözüm olarak

$$\begin{aligned}u &= 1 - \exp(x) \cos(2\pi y) \\v &= \exp(x) \sin(2\pi y)/(2\pi) \\B_x &= \cos(\pi x) \cos(\pi y) \\B_y &= \sin(\pi x) \sin(\pi y) \\p &= (1 - \exp(2x))/2 + C\end{aligned}\tag{5.11}$$

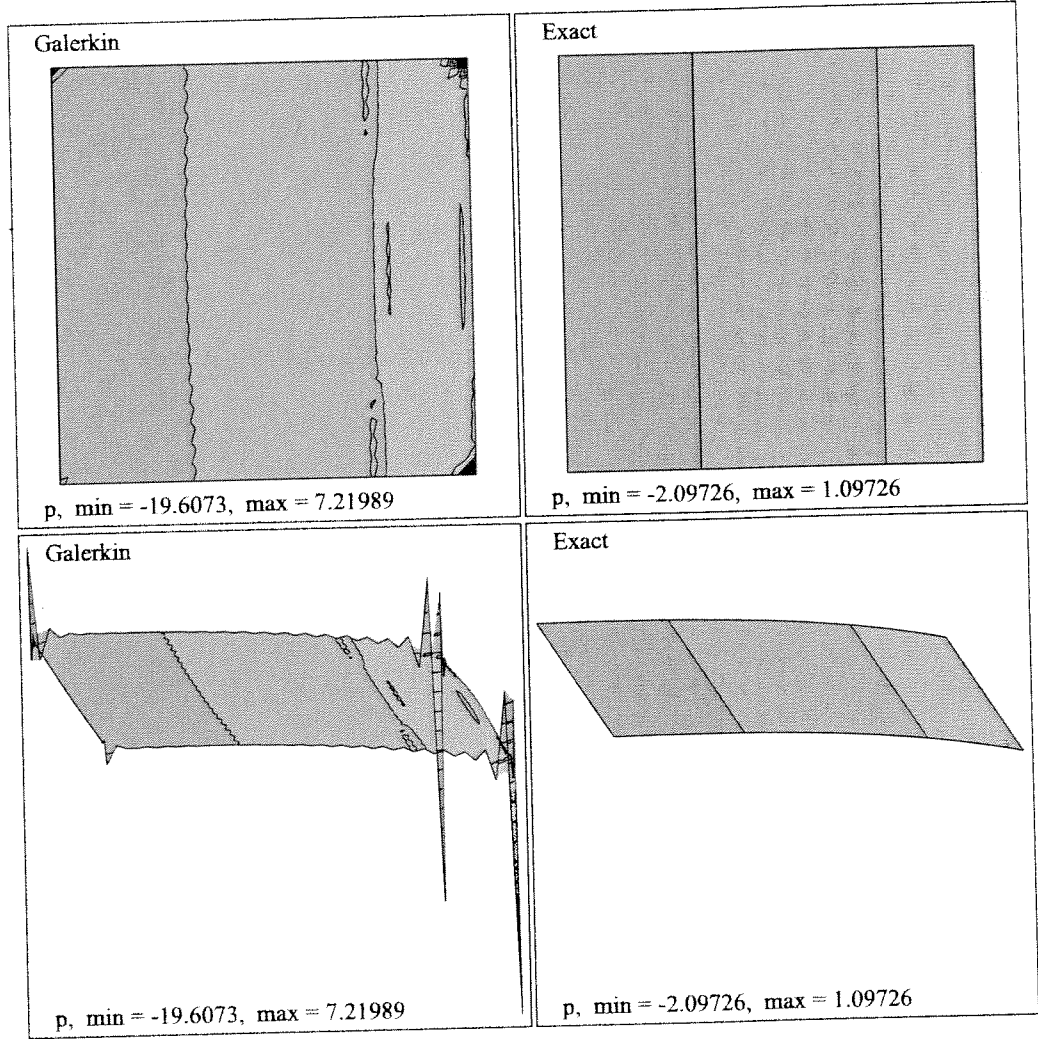
fonksiyonları ile tanımlanan örnek problem çözülmektedir. Denklemde yer alan  $C$  herhangi bir sabit olmasına rağmen, basınç ( $p$ ) için

$$\int_{\Omega} p = 0$$

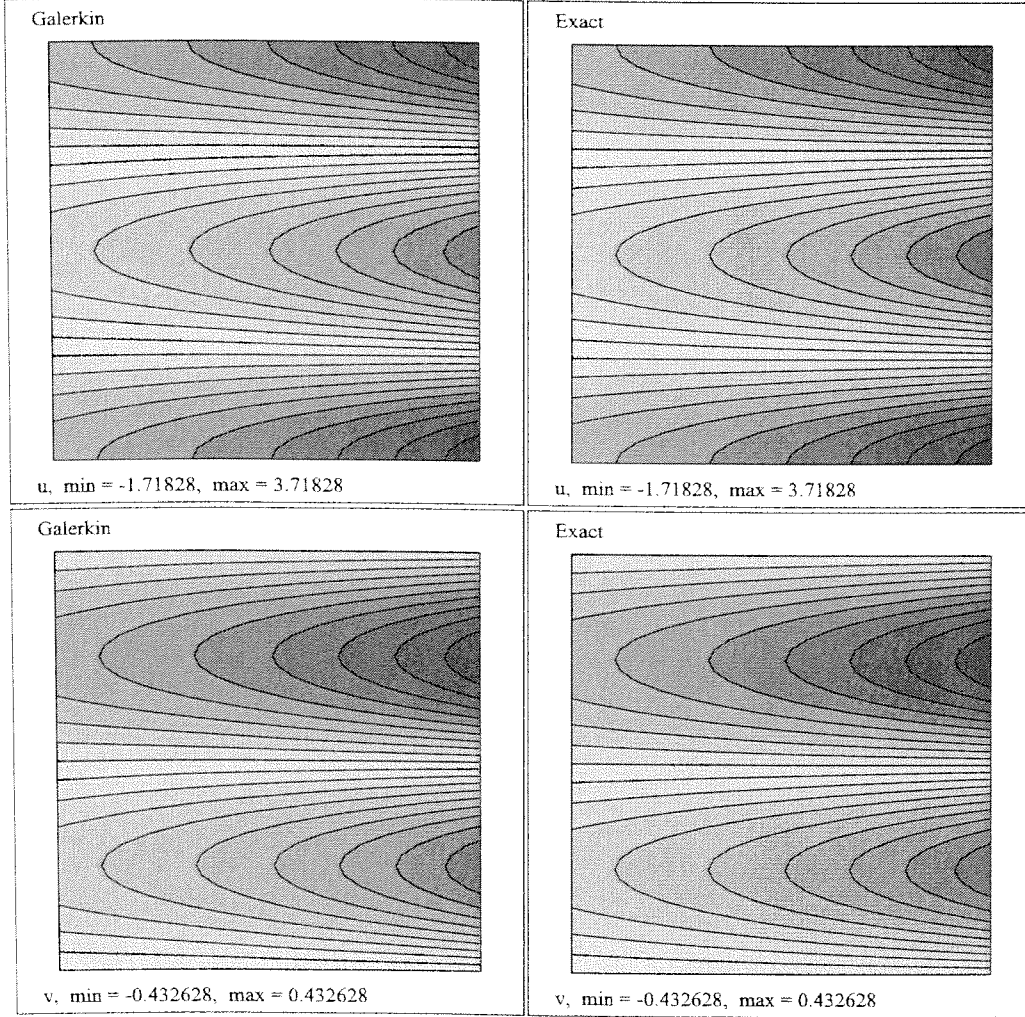
koşulu uygulanmalı ve  $C = 1.0972640247327$  olarak alınmalıdır.

Şekiller (5.1),(5.2) ve (5.3) görüldüğü gibi, hız ve manyetik alan bileşenleri için elde edilen sayısal sonuçlar teorik sonuçlarla uyumlu olsa da basınç için elde edilen sayısal sonuçlarda salınımlar olduğu gözlemlenmektedir.

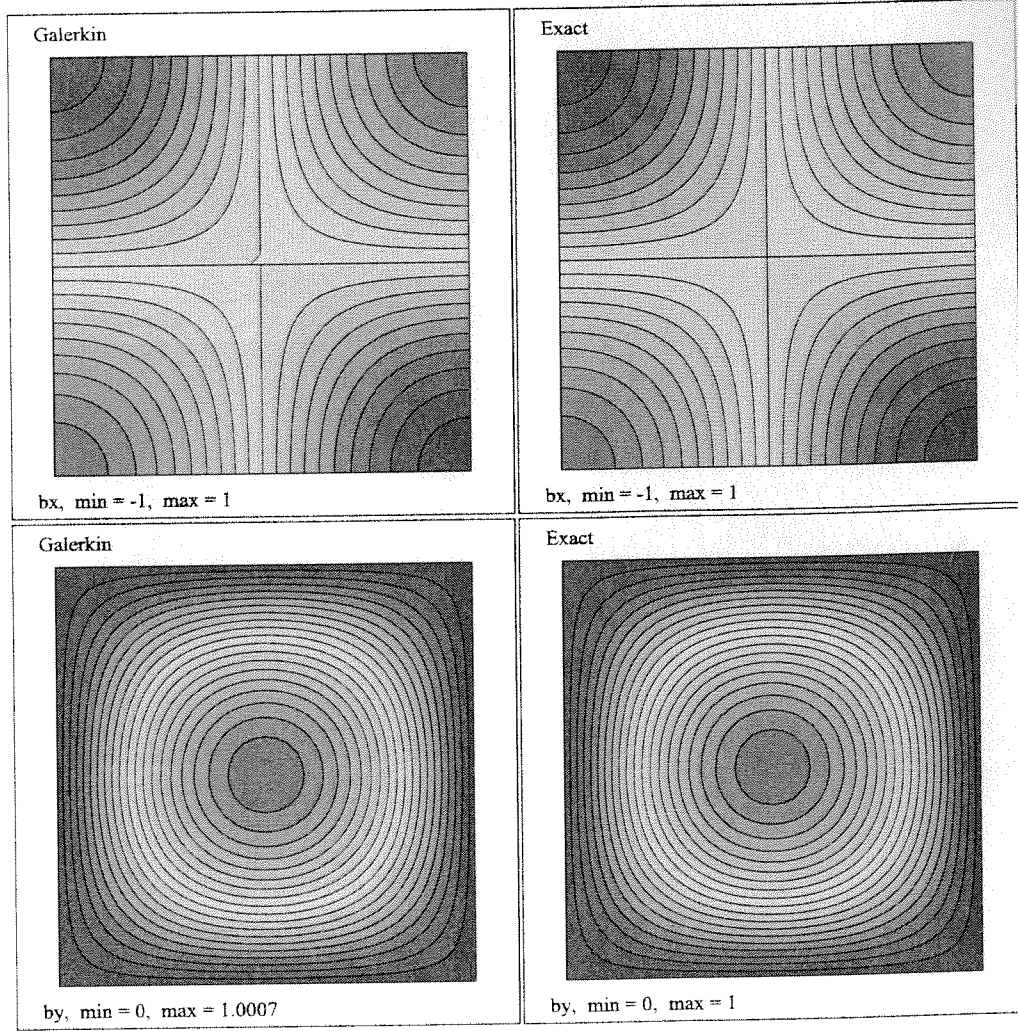
Aynı problem Babuska-Brezzi koşulunun sağlandığı, basınç için birinci dereceden, hız ve manyetik alan bileşenleri için ikinci dereceden baz fonksiyonlarının kullanıldığı Q2-Q2-Q1 kombinasyonu ile çözüldüğünde, Şekil (5.4)'den de görüleceği üzere, basınçta oluşan osilasyonların ortadan kalktığı ve teorik çözümle olan yakınsaklığı gözlemlenmektedir.



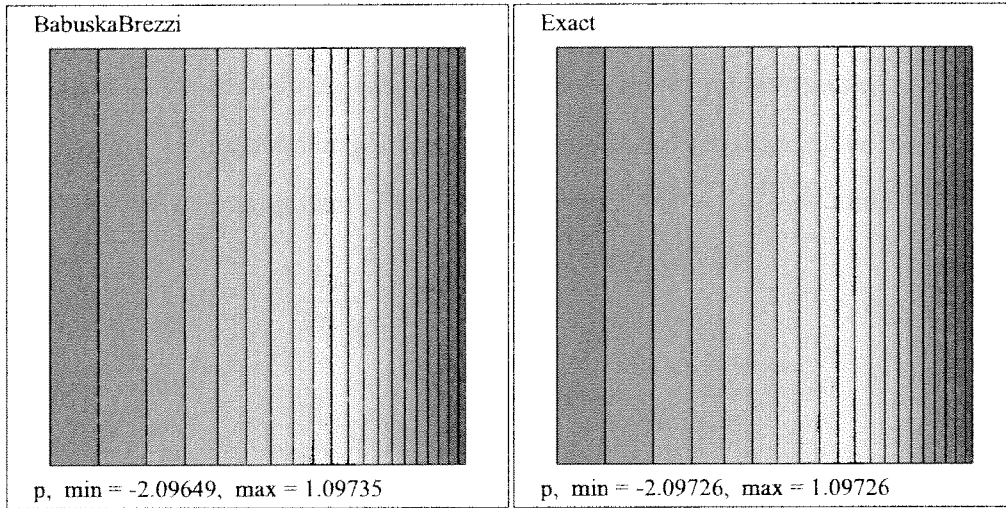
Şekil 5.1: Basınç eğrileri ve grafiklerinin standart Galerkin yöntemi ve teorik sonuçlarla kıyaslaması



Şekil 5.2: Hız bileşen (u,v) eğrilerinin standart Galerkin yöntemi ve teorik sonuçlarla kıyaslaması



Şekil 5.3: Manyetik alan bileşen( $B_x, B_y$ ) eğrilerinin standart Galerkin yöntemi ve teorik sonuçlarla kıyaslaması



Şekil 5.4: Basınç için sayısal (Babuska-Brezzi koşulu altında) ve teorik sonuçlar

## 5.2 Stabilized(SUPG) Formulation of MHD Equations

Navier-Stokes denklemlerinin SUPG formülasyonundan yararlanarak, magnetohidrodinamik denklemleri için SUPG türündeki stabilizasyon formülü aşağıdaki şekilde yazılabilir [30]

$$\begin{aligned}
 B(\mathbf{u}_h, \mathbf{B}_h, p_h; \mathbf{v}_h, \mathbf{C}_h, q_h) = & \\
 & ((\nabla \mathbf{u}_h) \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \epsilon (\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h) - (p_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) + S(\mathbf{B}_h \times (\nabla \times \mathbf{B}_h), \mathbf{v}_h) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \\
 & - (\nabla \times (\mathbf{u}_h \times \mathbf{B}_h), \mathbf{C}_h) + \eta (\nabla \mathbf{B}_h, \nabla \mathbf{C}_h) - (\mathbf{g}, \mathbf{C}_h) - (q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h) + \\
 & \tau_u [(\nabla \mathbf{u}_h) \mathbf{u}_h + \nabla p_h + S \mathbf{B}_h \times (\nabla \times \mathbf{B}_h) - \mathbf{f}] \cdot [(\nabla \mathbf{v}_h) \mathbf{u}_h - \nabla q_h + S \mathbf{B}_h \times (\nabla \times \mathbf{C}_h)] + \\
 & \tau_B [-\nabla \times (\mathbf{u}_h \times \mathbf{B}_h) - \mathbf{g}] \cdot [-\nabla \times (\mathbf{u}_h \times \mathbf{C}_h)] = 0.
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Denkleminde yer alan ilk iki satır, standart Galerkin formülasyonundan, diğer iki satır ise stabilizasyon terimlerinden gelmektedir. Denkleminde yer alan  $\tau_u$  ve  $\tau_B$  stabilizasyon katsayıları  $h_K$ ,  $K$  elemanın çapı,  $Pe_K$  Péclet sayısı,  $Pe_K = \frac{|\mathbf{u}|_K h_K}{6\epsilon}$  alınarak

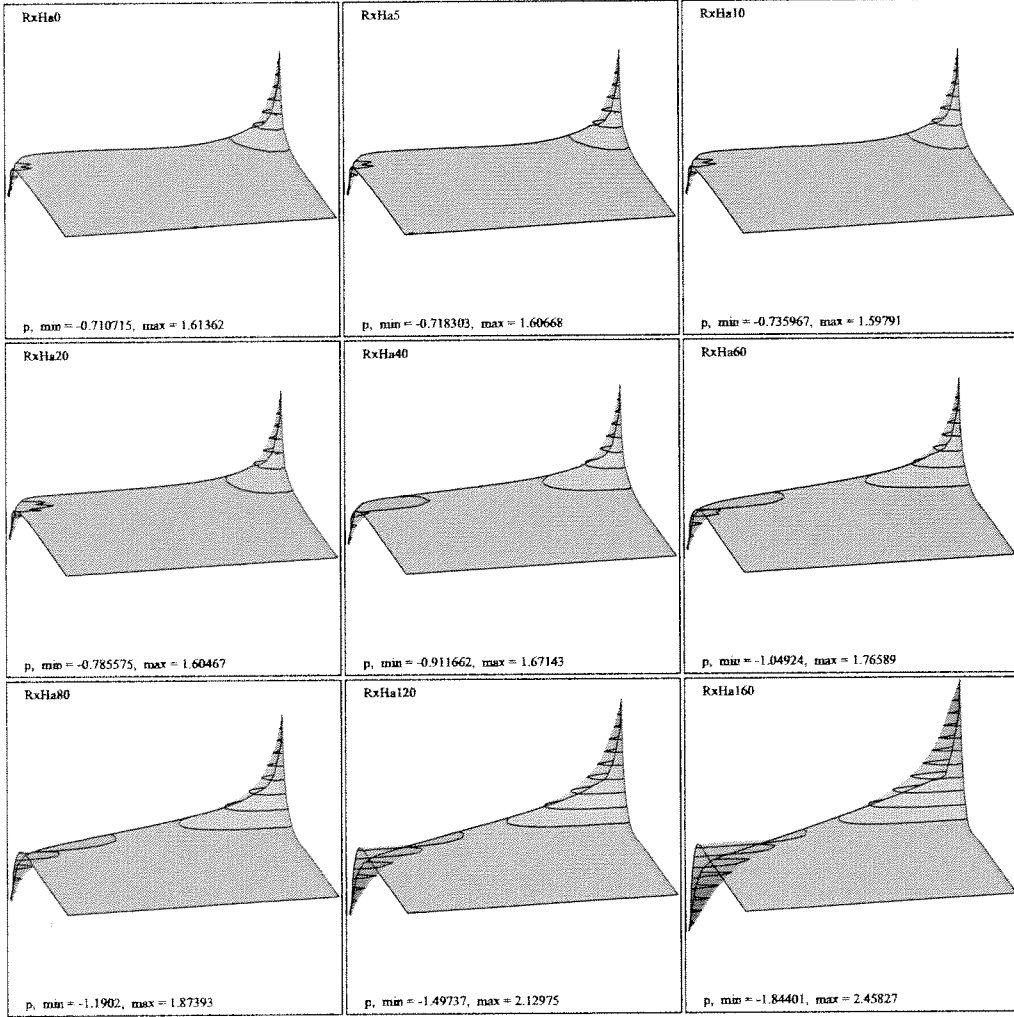
$$\tau_u = \begin{cases} \frac{h_K}{2|\mathbf{u}|_K} & \text{if } Pe_k \geq 1 \\ \frac{h_K^2}{12\epsilon} & \text{if } Pe_k < 1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \tau_B = \frac{h_K^2}{2\eta} \tag{5.13}$$

eşitlikleri ile hesaplanır.

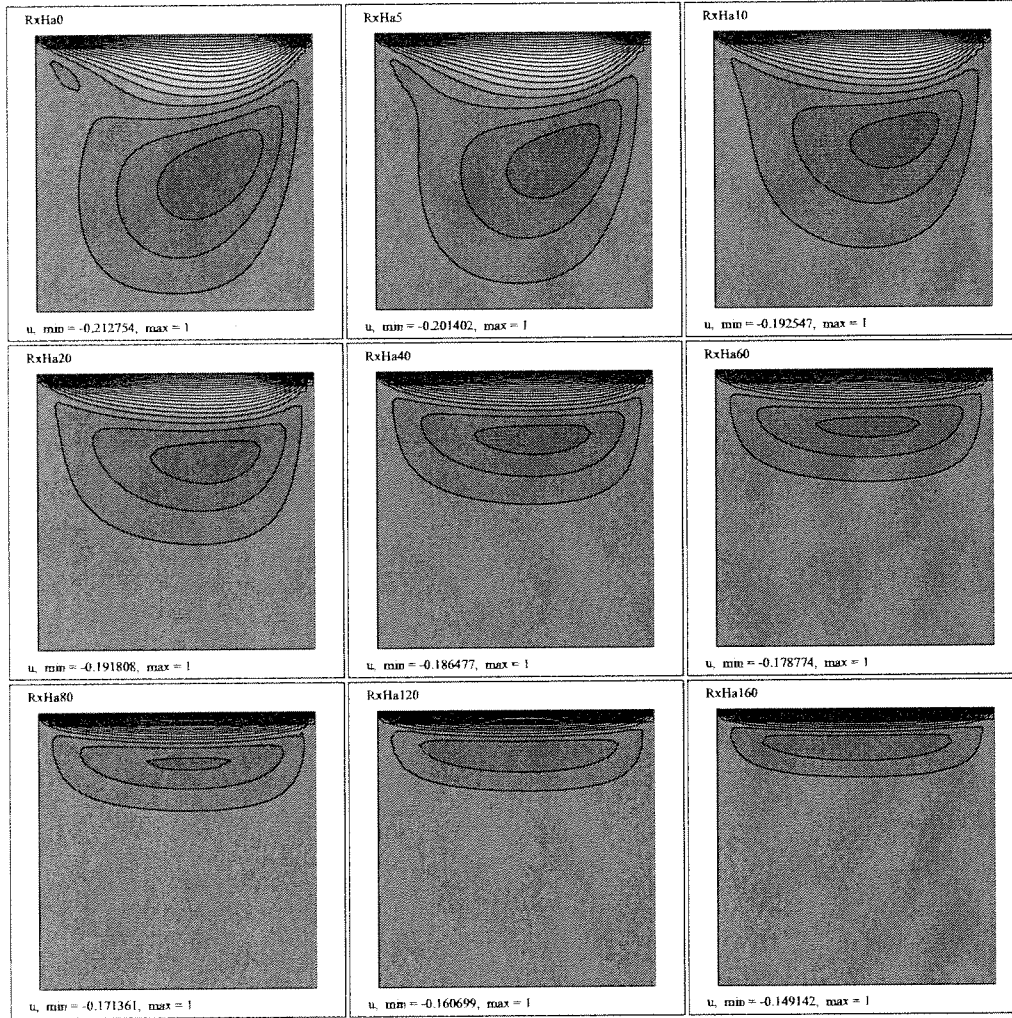
### 5.2.1 Örnek

Cavity akım problemi  $Re = 400$ ,  $Rem = 40$  sabit olmak üzere değişik Hartmann sayıları ( $Ha = 0, 5, 10, 20, 40, 60, 80, 120, 160$ ) için manyetik alan akımının  $+x$  ve  $+y$  yönlerinde uygulandığı iki farklı durumlarda, Hartmann sayısı değiştikçe basınçta ve hız bileşimindeki ( $u$ ) değişimler de sırası ile (5.5), (5.6), (5.7) ve (5.8) şekillerinde görülmektedir. Özellikle  $+y$  yönünde uygulanan manyetik alanda, Hartmann sayısı arttıkça, akımın tamamı ile üst bölgeye yoğunlaştığı açıkça gözlemlenmektedir.

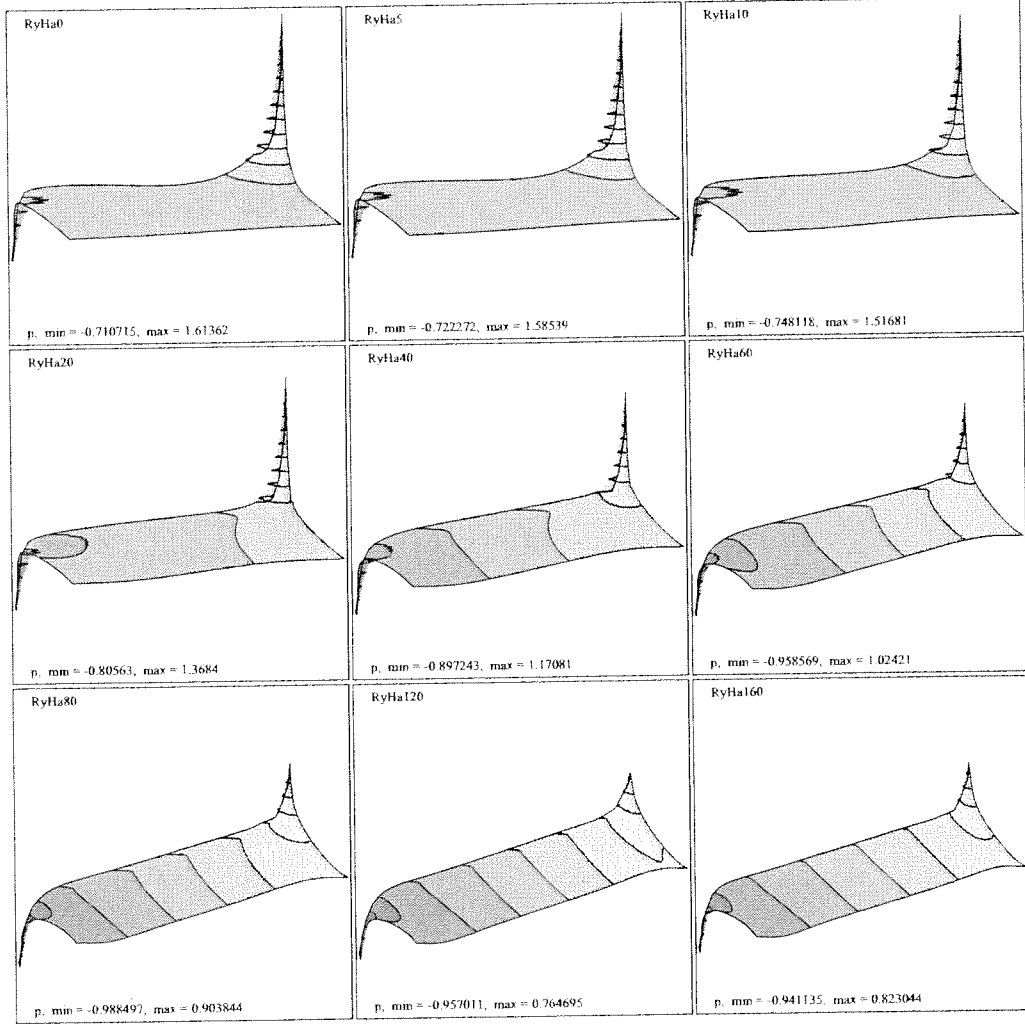




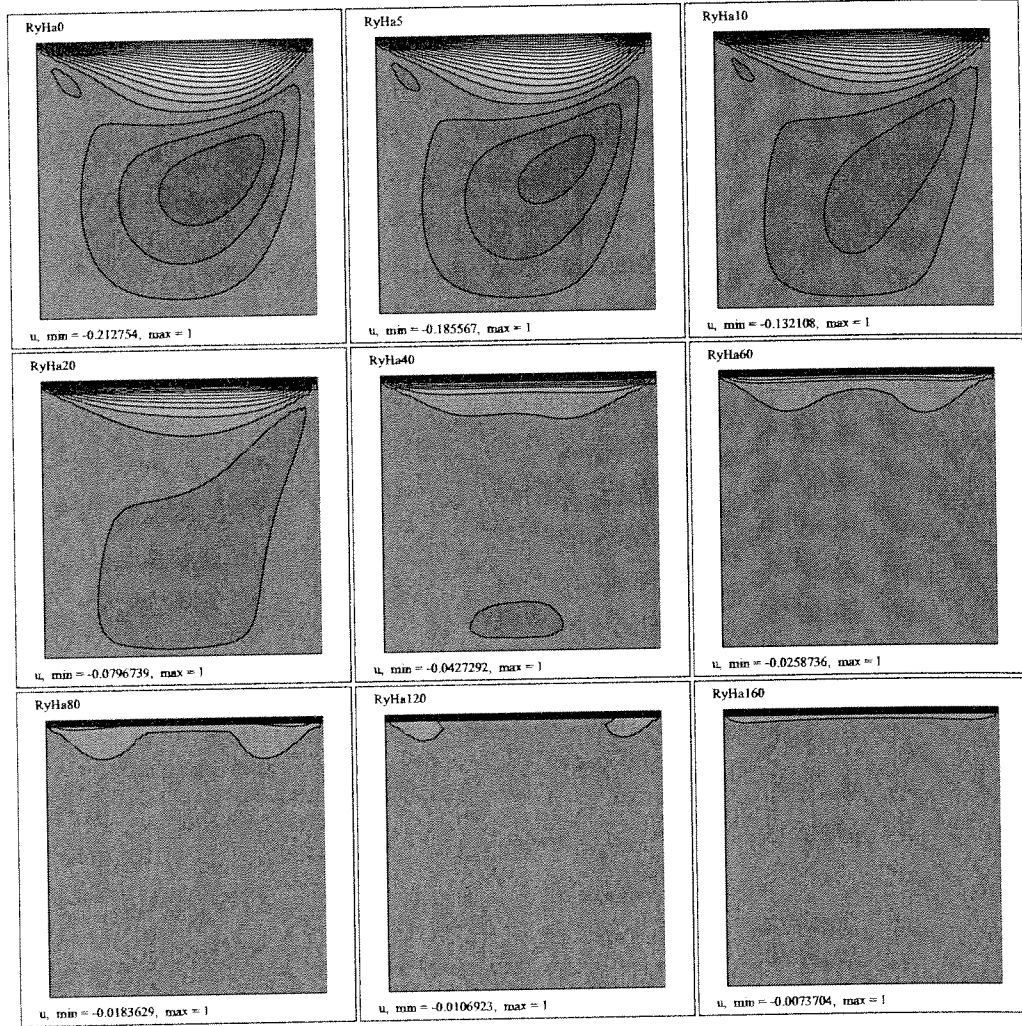
Şekil 5.5: Manyetik alan  $+z$  yönünde, basınç grafiği



Şekil 5.6: Manyetik alan  $+x$  yönünde, hız  $u$  bileşen eğrileri



Şekil 5.7: Manyetik alan  $+y$  yönünde, basınç grafiği



Şekil 5.8: Manyetik alan  $+y$  yönünde, hız  $u$  bileşen eğrileri

## BÖLÜM 6

### SONUÇ

Bu projede, nükleer füzyon cihazlarında meydana gelen plazmanın konfigürasyonunu temsil eden Grad-Shafranov denkleminin değişik sayısal yöntemlerle çözümü üzerinde duruldu. Sınır elemanları yönteminin, sadece problemin tanımlandığı sınırları ayırıklaştırması ve gerçek nükleer füzyon reaktörlerinde, plazmanın sınırları değişken olduğundan dolayı, Grad-Shafranov denkleminin çözümü ilk olarak sınır elemanları yöntemi ile verildi. Metodun mukayesesi açısından, GS denkleminin sonlu elemanlar yöntemi ve diferansiyel kuadratür yöntemi ile de formülasyonları ayrı ayrı verilip, uygulama olarak diktörtgen plazma, D-şeklinde plazma ve Solov'ev türü plazma problemleri için sayısal sonuçlar elde edilip karşılaştırmalar yapılmıştır. Elde edilen sonuçların, literatürdeki diğer sonuçlarla uyumluluğu gözlemlenmiştir [38]. Genel sonuç olarak, diktörtgen plazma problemi için diferansiyel kuadratür, D-şeklindeki plazma için sonlu elemanlar ve Solov'ev türü plazma problemleri için ise sınır elemanları yönteminin avantajlı olduğu tespit edilmiştir.

Aksi-simetrik koordinatlarda, Grad-Shafranov denkleminin manyetik flux türünden magnetohidrodinamik denklemlerinden elde edilebileceği göz önünde bulundurularak, çalışmanın geri kalan bölümünde en genel hali ile magnetohidrodinamik denklemlerinin çözümü üzerinde durulmuştur. Denklemlerde bulunan doğrusal olmayan terimlerden dolayı, doğrusal olmayan pek çok mühendislik probleminde uygulama avantajı olan sonlu elemanlar yöntemi sayısal yöntem olarak seçilmiştir. Başlangıç aşamasında momentum ve süreklilik denklemlerinden oluşan Navier-Stokes denklemlerinin çözümü üzerinde duruldu. Denklemlerin birleşik formülasyonununundan kaynaklanan özellikten dolayı, standart Galerkin türü sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçlarda basınç değerleri için kararlı olmayan salınımları olduğu gözlemlendi. Bu sorunu giderebilmek için uygun baz uzaylarının seçimi ile veya stabilize edilmiş sonlu elemanlar yöntemleri ile yakınsak sonuçlar

elde edildi. Zaman bağımlı Navier-Stokes denklemlerinin, zaman bileşeni yönünde de sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözümü elde edildi.

Projenin son aşamasında, bir önceki aşamada çözümü elde edilen Navier-Stokes denklemlerinden ve stabilize edilmiş sonlu elemanlar yöntemlerinden yararlanarak magneto-hidrokinamik denklemlerinin, sonlu elemanlar yöntemi ile formülasyonu ve örnek problemler üzerinde çözümü yapıldı. Sonuçlarda özellikle Hartmann sayısının değişiminin akımın hızı üzerindeki etkisi net bir şekilde görülmektedir.

Plazma problemleri ve akım problemleri için, problemin bölgesine ve yapısına göre uygun bir sayısal yöntem seçildiğinde, yakınsak ve kararlı çözümler elde edilebilir.

## KAYNAKÇA

- [1] Babuska I. The finite element method with Lagrangian multipliers. *Numer.Math.*; **20**:179–192, 1973.
- [2] Baiocchi C, Brezzi F, Franca LP. Virtual bubbles and the Galerkin-least-squares method. *CMAME*; **105**:125-141, 1993.
- [3] Beliën AJC, Poedts S, Goedbloed JP. Two dimensional equilibrium in coronal magneto-static flux tubes: an accurate equilibrium solver. *Computer Phys. Commun.*; **106**: 21–38, 1997.
- [4] Biros G, Ying L, Zorin D. An embedded boundary integral solver for the unsteady incompressible Navier-Stokes equations. New York University, Computer Science, Technical Reports, TR2003-838, November 2002.
- [5] Brezzi F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers. *RAIRO Ser. Rouge*; **8**:129–151, 1974.
- [6] Brezzi F, Hughes TJR, Marini LD, Russo A, Suli E. A priori error analysis of residual-free bubbles for advection-diffusion problems. *SIAM J. Numer. Anal.*; **36**:1933–1948, 1999.
- [7] Brezzi F, Franca LP, Hughes TJR, Russo A. Stabilization techniques and subgrid scales capturing. *In the Proceedings of the Conference “State of the Art in Numerical Analysis”*, York, England, April 1-4, 1996.
- [8] Brezzi F, Franca LP, Hughes TJR, Russo A. *b f g*. *CMAME*; **145**:329–339, 1997.
- [9] Brezzi F, Franca LP, Russo A. Further considerations on residual-free bubbles for advective-diffusive equations. *CMAME*; **166**:25-33, 1998.
- [10] Brezzi F, Marini LD, Russo A. Applications of the pseudo residual-free bubbles to the stabilization of convection-diffusion problems. *CMAME*; **166**:51–63, 1998.

- [11] Brezzi F, Marini LD, Suli E. The residual-free bubbles for advection-diffusion problems: The general error analysis. *Numer. Math.*; **85**:31–47, 1998.
- [12] Behr MA, Franca LP, Tezduyar, TE. Stabilized finite element methods for the velocity-pressure-stress formulation of incompressible flows. *CMAME*; **104**:31-48, 1993.
- [13] Brezzi F, Marini LD, Russo A. On the choice of a stabilizing subgrid for convection-diffusion problems, *CMAME*; **194**: 127–148, 2005.
- [14] Brezzi F, Bristeau MO, Franca LP, Mallet M, Rogé G. A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions *CMAME*; **96**:117–129, 1992.
- [15] Brezzi F, Russo A. Choosing bubbles for advection-diffusion problems. *M3AS*; **4**:571–587, 1994.
- [16] Brooks AN, Hughes TJR. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *CMAME*; **32**:199–259, 1982.
- [17] Ciarlet PG. *The Finite Element Methods for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [18] Codina R, Silva NH. Stabilized finite element approximation of the stationary magneto-hydrodynamic equations. *Computational Mechanics*; **38**:344–355, 2006.
- [19] Dettmer W, Perić D. An analysis of the time integration algorithms for the finite element solutions of incompressible Navier-Stokes equations based on a stabilised formulation. *CMAME*; **192**:1117–1226, 2003.
- [20] Fornberg B. Computing steady incompressible flows past blunt bodies: A historical overview, *Numerical methods for fluid dynamics 4*, M.J. Baines and K.W. Morton, Clarendon Press, London;115–133, 1993.



- [21] Franca LP, Farhat C. Bubble functions prompt unusual stabilized finite element methods. *CMAME*; **123**:299–308, 1995.
- [22] Franca LP, Dutra do Carmo EG. The Galerkin Gradient Least-squares method. *CMAME*; **74**: 41–54, 1989.
- [23] Franca LP, Valentin F. On an improved unusual stabilized finite element method for the advective-reactive-diffusive equation, *CMAME*; **190(13-14)**: 1785–1800, 2000.
- [24] Franca LP, Frey SL, Hughes TJR. Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model, *CMAME*; **95**: 253–276, 1992.
- [25] Franca LP, Macedo AP. A Two-level finite element method and its application to the helmoltz equation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; **43**: 23–32, 1998.
- [26] Franca LP, Neslitürk A. On a two-level finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; **52**: 433–453, 2001.
- [27] Franca LP, Frey SL. Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations, *CMAME*; **99**: 209–233, 1992.
- [28] Franca LP, Nesliturk A, Stynes M. On the stability of residual-free bubbles for convection-diffusion problems and their approximation by a two-level finite element method. *CMAME*; **166**:35–49, 1998.
- [29] Galeão AC, Dutra do Carmo G. A consistent approximate upwind Petrov-Galerkin method for convection-dominated problems, *CMAME*; **68**: 83–95, 1988.
- [30] Gerbeau JF. A stabilized finite element method for the incompressible magnetohydrodynamic equations. *Numerische Mathematik*; **87**:83–111, 2000.
- [31] Hansbo P, Szepessy A. A velocity-pressure streamline diffusion finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations, *CMAME*; **84**:175–192, 1990.

- [32] Hasler U, Schneebeli A, Schötzau D. Mixed finite element approximation of incompressible MHD problems based on weighted regularization. *Applied Numerical Mathematics*; **51**:19–45, 2004.
- [33] Hauke G, Hughes TJR. A unified approach to compressible and incompressible flows. *CMAME*; **113**:389–395, 1994.
- [34] Hughes TJR, Franca LP, Hulbert GM. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/least squares method for advective-diffusive equations, *CMAME*; **73**: 173–189, 1989.
- [35] Hughes TJR. Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *CMAME*; **32**: 199–259, 1982.
- [36] Hughes TJR, Brooks AN. A multidimensional upwind schema with no crosswind diffusion, Finite Element Methods for Convection Dominated Flows, *ASME*; 19–35, 1979.
- [37] Hughes TJR. Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origin of stabilized methods. *CMAME*; **127**:387–401, 1995.
- [38] Itagaki M, Kamisawada J, Oikawa S. Boundary-only Integral Equation Approach Based on Polynomial Expansion of Plasma Current Profile to Solve the Grad-Shafranov Equation. *Nuclear Fusion*; **44**: 427–437, 2004.
- [39] Jardin, SC. A triangular finite element with first-derivative continuity applied to fusion MHD applications. *Jour. of Comput. Physics*; **200**:133–152, 2004.
- [40] John V, Matthies G, Rang J. A comparison of time-discretization/linearization approaches for the incompressible Navier-Stokes equations. *CMAME*; **195**:5995–6010, 2006.

- [41] Johnson C, Nävert U, Pitkäranta J. Finite element methods for linear hyperbolic problem. *CMAME* ; **45**:285–312, 1984.
- [42] Kechkar N, Silvester DJ. Analysis of locally stabilised mixed finite element methods for the Stokes problem. *Math. Comp.*; **58**:1–10, 1992.
- [43] Kumamaru H, and Kodama S. Three-Dimensional Numerical Calculations on Liquid-Metal MHD Flow in field Inlet-Region.
- [44] Leuer JA, Schaffer MJ, Parks PB, Brown MR. Calculation of Free Boundary SSX Doublet Equilibria Using the Finite Element Method. *43rd APS/DPP Meeting*, California, 2001.
- [45] Liou J, Tezduyar T. Clustered element-by-element computations for fluid flow. *Parallel computational fluid dynamics: Implementations and results*, H.D. Simon, The MIT Press; 165–188, 1990.
- [46] MorkanK, Periaux J, Thomasset F (eds). Analysis of lamina flow over a backward facing step: A GAMM Workshop. Viewig: Wiesbaden, 1984.
- [47] Neslitürk, A. A Stabilizing subgrid for convection-diffusion problem, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*; **16(2)**: 211–231, 2006.
- [48] Neslitürk, A. Approximating the incompressible Navier Stokes equations using a two level finite element method, Ph.D. thesis, University of Colorado at Danver, 1999.
- [49] Oden JT, Wellford LC. Analysis of flow of viscous fluids by the finite element method. *AIAA J.*; **10**:1590–1599, 1972.
- [50] Reddy JN. *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, 1993.
- [51] Roos HG, Stynes M, Tobiska L. Numerical methods for singularly perturbed differential equations convection-diffusion and flow problems. *Springer Series in Computational Mechanics*, vol. **24**, Springer-Verlag, Berlin, New-York, 1996.

- [52] Russo A. Bubble Stabilization of Finite Element Methods for the Linearized Incompressible Navier-Stokes Equations. *CMAME*; **132**:335-343, 1996.
- [53] Salah NB, Soulaïmani A, Habashi WG. A finite element method for magnetohydrodynamics. *CMAME*; **190**:5867-5892, 2001.
- [54] Salah NB, Soulaïmani A, Habashi WG, Fortin M. A conservative stabilized finite element method for the magneto-hydrodynamic equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*; **29**:535-554, 1999.
- [55] Sangalli G. Global and local error analysis for the residual-free bubbles method applied to advection-dominated problems. *SIAM J. Numer. Anal.*; **38**:1496-1522, 2000.
- [56] Sawai S, Tsuchimoto M, Igarashi H, Honma T. Boundary Element Analysis of Free Boundary Field Reversed Configurations. *IEEE Transactions on Magnetics*; **26**(2):571-574, 1990.
- [57] Sheu TWH, Lin RK. Development of convection-diffusion-reaction magnetohydrodynamic solver on non-staggered grid. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*; **45**:1209-1233, 2004.
- [58] Silvester DJ, Kechkar N. Stabilized bilinear-constant velocity-pressure finite elements for the conjugate gradient solution of the Stokes problem. *CMAME*; **79**:71-86, 1990.
- [59] Shu C. *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*. Springer, Verlag London Berlin Heidelberg, 2000.
- [60] Shu C, Richards BE. Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Methods Fluids*; **15**:791-798, 1992.
- [61] Sohn JL. Evaluation of FIDAP on some classical laminar and turbulent benchmarks. *IJNMF*; **8**:1469-1490, 1988.
- [62] Taylor C, Hood P. A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique. *Comput. Fluids*; **1**:73-100, 1973.

- [63] Tezduyar TE, Shih R, Mittal S, Ray SE. Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements. *CMAME* ; **95**:221–242, 1992.
- [64] Tezer-Sezgin M, Dost S. On the Fundamental Solutions of the Axisymmetric Helmholtz-type Equations. *Applied Mathematical Modeling*; **17**:47–51, 1993.
- [65] Tezer-Sezgin M, Solution of MHD flow in a rectangular duct by differential quadrature method. *Computers and Fluids*; **33**: 533-547, 2004.
- [66] Van Dyke M. *An album of fluid motion*. The Parabolic Press: California, 1982.
- [67] Young DL, Tsai CC, Murugesan K, Fan CM, Chen CW. Time-dependent fundamental solutions for homogeneous diffusion problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*; **28**:1463–1473, 2004.

## EKLER

### Uluslararası Konferanslarda Sunulan Bildiriler

10-12 Temmuz 2006 tarihleri arasında Avusturya Graz şehrinde düzenlenen "IABEM-2006, International Association for Boundary Element Methods 2006" konferansında proje araştırmacılarından Selçuk Han AYDIN tarafından sunulan "Dual Reciprocity BEM Solution of Grad-Shafranov Equation for the Distribution of Magnetic Flux in Nuclear Fusion Devices" başlıklı bildiri ek olarak verilmektedir. Ayrıca bildirinin "extended abstract"ı konferansın bildiri kitapçığında basılmıştır (sayfa 97).

### Uluslararası Hakemli Dergilerde Kabul Edilen Makaleler

A. I. Neslitürk, S.H. Aydın, M. Tezer-Sezgin; Two-level finite element method with a stabilizing subgrid for the incompressible Navier-Stokes equations, International Journal For Numerical Methods In Fluids,

### Uluslararası Hakemli Dergilere Gönderilen Makaleler

Grad-Shafranov denkleminin sayısal yöntemlerle çözümü ve zaman bağımlı Navier-Stokes denklemlerinin stabilize edilmiş sonlu elemanlar yöntemleri ile çözümlerinden elde edilen sonuçlar iki ayrı çalışma olarak uluslararası hakemli dergilere gönderilmiştir. Gönderilen makaleler, hakemler tarafından değerlendirme aşamasındadır.

Gönderilen makalelerle ilgili bilgiler

- S. Han Aydın, M. Tezer-Sezgin; Numerical Solution of Grad-Shafranov Equation for the Distribution of Magnetic Flux in Nuclear Fusion Devices, An International Journal Computers and Fluids.
- S.H. Aydın, A. I. Neslitürk, M. Tezer-Sezgin; Stabilized FEM in space - FEM in time formulations for unsteady incompressible and magnetohydrodynamic flows, International Journal of Computational Fluid Dynamics

### Hazırlama Aşamasında Olan Makaleler

Magnetohidrodinamik (MHD) denklemlerinin stabilize edilmiş sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilmiş sonuçları yayınlamak üzere uluslararası hakemli dergiye gönderilecektir.