

**Daralma Gösteren Damar Boyunca Akan Biyomanyetik Akışkan  
Modelinin Sonlu ve Sınır Elemanları Yöntemleri ile Çözümü**

**Proje No: 111T269**

Prof. Dr. Münevver Tezer-Sezgin  
Doç. Dr. Canan Bozkaya  
Arş. Gör. Önder Türk

KASIM 2013

ANKARA

# ÖNSÖZ

Bu çalışmada, son yılların en kuvvetli sayısal yöntemleri olan sonlu elemanlar ve sınır elemanları metodları kullanılarak, biyomanyetik akışkanların ani daralma gösteren kanallar içerisindeki akımı incelenmektedir. Akışkanın en genel haliyle elektrikçe iletken, dışarıdan uygulanan manyetik alan tesiri ile manyetizasyona uğrayan, dinamik viskoziteye sahip olduğu kabul edilmekte, ve zamana bağlı ısı değişimi de dikkate alınmaktadır. Bu fiziksel varsayımlara en uygun olan ve ani daralmalara maruz kalabilen damarlardaki kan, akışkan olarak seçilecektir. Kan içerisinde bulunan ve hemoglobin molekülleri içeren kırmızı kan hücreleri manyetize olabilmeye özelliğine sahiptir. Projenin amacı, gerçek kan akımı model problemini düzensiz daralmaların görüldüğü kanal içerisinde çözmektir. Bu çözüm için sınır elemanları yönteminin değişken sınırlı problemlere uygunluğundan ve küçük boyutlu sistemler ile sonuçlanmasından, sonlu elemanlar yönteminin ise doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerini efektif olarak çözebilme özelliğinden yararlanılmaktadır. Proje kapsamında elde edilen sonuçlar uluslararası konferanslarda sunulmuş ve bu sonuçlar üç ayrı makale olarak hazırlanarak uluslararası hakemli dergilere gönderilmiştir. Bu makalelerden iki tanesi basılmış, bir tanesi ise hakem değerlendirilmesinde bulunmaktadır. Bu proje TÜBİTAK tarafından 111T269 nolu proje adı altında iki yıl süreyle desteklenmiştir.

# İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ .....	ii
İÇİNDEKİLER .....	iii
ŞEKİL LİSTESİ .....	v
ÖZET .....	vii
ABSTRACT .....	viii

## BÖLÜM

1 GİRİŞ .....	1
1.1 Biyomanyetik Akış Denklemleri .....	2
1.2 Literatür Özeti .....	5
1.3 Proje Rapor Planı .....	7
2 DÜZ KANAL BOYUNCA BİOMANYETİK SIVI AKIŞI .....	8
2.1 Zamandan Bağımsız ve Elektrikçe İletken Olmayan Biyomanyetik Sıvı Akışı Denklemleri .....	9
2.1.1 Vortisite Sınır Koşullarının Bulunması .....	10
2.2 Nümerik Çözüm Yöntemleri .....	11
2.2.1 Karşılıklı Sınır Elemanları Metodunun (DRBEM) Zamandan Bağımsız Biy- omanyetik Sıvı Akış Problemine Uygulanışı .....	12
2.2.2 Sonlu Elemanlar Metodunun (FEM) Zamandan Bağımsız Biyomanyetik Sıvı Akış Problemine Uygulanışı .....	16
2.2.3 Sonlu Elemanlar Metodunun Zamana Bağlı ve Elektrikçe İletken Olmayan Biyomanyetik Sıvı Akış Problemlerine Uygulanışı .....	20
2.3 Sayısal Sonuçlar .....	21
2.3.1 Problem 1: Zamandan Bağımsız ve Elektrikçe İletken Olmayan Biyomanyetik Sıvı Akışı .....	22
2.3.2 Problem 2: Zamana Bağlı ve Elektrikçe İletken Olmayan Biyomanyetik Sıvı Akışı .....	29
2.3.3 Problem 3: Zamana Bağlı ve Elektrikçe İletken Biyomanyetik Sıvı Akışı ..	32

3	DARALMALI KANAL BOYUNCA BİYOMANYETİK SIVI AKIŞI .....	36
3.1	Biyomanyetik Akış Denklemleri ve Sonlu Elemanlar Sistemi .....	36
3.2	Vortisite Sınır Koşulları ve İteratif Çözüm .....	38
3.3	Test Problemleri ve Sayısal Sonuçlar .....	39
3.3.1	Problem 1: Simetrik Daralmalı Kanalda Biyomanyetik Sıvı Akışı .....	40
3.3.2	Problem 2: Düzensiz Daralmalı Kanalda Biyomanyetik Sıvı Akışı .....	46
3.3.3	Problem 3: Düzensiz Çoklu Daralma İçeren Kanalda Biyomanyetik Sıvı Akışı .....	51
4	SONUÇ .....	56
	KAYNAKLAR .....	58
	EKLER .....	61

# ŞEKİL LİSTESİ

1.1	Düzensiz daralma içeren kanal konfigürasyonu ve sınır koşulları. . . . .	3
2.1	Problem konfigürasyonu ve sınır koşulları. . . . .	10
2.2	Vortisite sınır koşulu hesaplanmasında kullanılan noktalar . . . . .	11
2.3	Problem 1. Manyetik alanın stream fonksiyonu, vortisite ve ısı eşeğrileri üzerindeki etkisi (DRBEM): $Re = 50$ , (a) $Mn = 115$ , (b) $Mn = 215$ , (c) $Mn = 315$ . . . . .	23
2.4	Problem 1. Stream fonksiyonu, vortisite ve ısı eşeğrileri $Re = 150$ , $Mn = 115$ : (a) DRBEM, (b) FEM. . . . .	24
2.5	Problem 1. Nusselt sayısı, $Re = 150$ , $Mn = 115$ (a) alt plaka, $y = 0$ , (b) üst plaka, $y = 1.0$ . . . . .	25
2.6	Problem 1. 480-eleman kullanılarak ayrıklaştırılan problem bölgesi . . . . .	26
2.7	Problem 1. Stream fonksiyonu, vortisite ve ısı eşeğrileri (FEM): $Re = 250$ , $Mn = 0$ . . . . .	26
2.8	Problem 1. Manyetik alanın stream fonksiyonu, vortisite ve ısı eşeğrileri üzerindeki etkisi (FEM): $Re = 250$ , (a) $Mn = 115$ , (b) $Mn = 215$ , (c) $Mn = 315$ . . . . .	27
2.9	Problem 1: Nusselt sayısı, $Re = 250$ (a) alt plaka, $y = 0$ , (b) üst plaka, $y = 1.0$ . . . . .	28
2.10	Problem 2. Stream fonksiyonu, vortisite ve ısı eşeğrilerinin zamana göre değişimi $Re = 100$ , $Mn = 1312$ (FEM): (a) $t = 0.2$ , (b) $t = 1.0$ , (c) $t = 5.0$ . . . . .	30
2.11	Problem 2. Stream fonksiyonu, vortisite ve ısı eşeğrileri (FEM): (a) $Re = 50$ , $Mn = 5250$ , (b) $Re = 20$ , $Mn = 32813$ , (c) $Re = 10$ , $Mn = 131250$ . . . . .	31
2.12	Problem 3. Manyetik alan yoğunluğunun stream, vortisite ve ısı eşeğrileri üzerindeki etkisi, $Re = 100$ (FEM): (a) $Mn_F = 82$ , $Mn_M = 0.025$ , (b) $Mn_F = 164$ , $Mn_M = 0.1$ . . . . .	35
3.1	Problem 1. %40 daralma içeren kanal ve manyetik alan eşeğrileri. . . . .	40
3.2	Problem 1. %40 daralma içeren problem bölgesinin örnek ayrıklaştırılması. . . . .	41
3.3	Problem 1. %60 daralma içeren kanal ve manyetik alan eşeğrileri. . . . .	41
3.4	Problem 1. %60 daralma içeren problem bölgesinin örnek ayrıklaştırılması . . . . .	41
3.5	Problem 1. Manyetik alan yoğunluğu ve 40% daralmanın stream, vortisite ve ısı eşeğrileri üzerindeki etkileri, $Re = 100$ : (a) $Mn_F = Mn_M = 0$ , (b) $Mn_F = 82$ , $Mn_M = 0.025$ , (c) $Mn_F = 164$ , $Mn_M = 0.1$ . . . . .	42
3.6	Problem 1. Manyetik alan yoğunluğu ve 60% daralmanın stream, vortisite ve ısı eşeğrileri üzerindeki etkileri, $Re = 100$ : (a) $Mn_F = Mn_M = 0$ , (b) $Mn_F = 82$ , $Mn_M = 0.025$ , (c) $Mn_F = 164$ , $Mn_M = 0.1$ . . . . .	43
3.7	Problem 1. Manyetik alan yoğunluğu ve 60% daralmanın stream, vortisite ve ısı eşeğrileri üzerindeki etkileri, $Re = 100$ : (a) $Mn_F = 656$ , $Mn_M = 1.2$ , (b) $Mn_F = 1312$ , $Mn_M = 6.4$ . . . . .	44
3.8	Problem 1. Stream, vortisite ve ısı eşeğrilerinin 60% daralımlı kanalda zamana bağlı değişimi, $Re = 100$ , $Mn_F = 82$ , $Mn_M = 0.025$ : (a) $t = 0.4$ , (b) $t = 1.0$ , (c) $t = 1.25$ , (c) $t = 3.0$ . . . . .	44

3.9	Problem 1. Nusselt sayısı, $Re = 100$ : (a) alt duvar (b) üst duvar. . . . .	45
3.10	Problem 1. Shear parametresi, $Re = 100$ : (a) alt duvar (b) üst duvar. . . . .	45
3.11	Problem 2. Simetrik olmayan daralma içeren kanal ve manyetik alan eşeğrileri. . . . .	46
3.12	Problem 2. Simetrik olmayan daralma içeren kanalın örnek ayrıklaştırılması. . . . .	47
3.13	Problem 2. Stream, vortisite ve ısı eşeğrileri, $Re = 100$ , $Mn_F = 0$ , $Mn_M = 0$ . . . . .	47
3.14	Problem 2. Manyetik alan kaynağı yerinin stream, vortisite ve ısı eşeğrileri üzerindeki etkisi, $Re = 100$ , $Mn_F = 82$ , $Mn_M = 0.025$ : (a) $a = 1.0$ , (b) $a = 2.5$ , (c) $a = 3.0$ . . . . .	48
3.15	Problem 2. Manyetik alan kaynağı yerinin stream, vortisite ve ısı eşeğrileri üzerindeki etkisi, $Re = 100$ , $Mn_F = 656$ , $Mn_M = 1.2$ : (a) $a = 1.0$ , (b) $a = 3.0$ . . . . .	49
3.16	Problem 2. Manyetik alan yoğunluğunun stream, vortisite ve ısı eşeğrileri üzerindeki etkisi, $Re = 100$ , $a = 3.0$ : (a) $Mn_F = 0$ , $Mn_M = 0$ , (b) $Mn_F = 82$ , $Mn_M = 0.025$ , (c) $Mn_F = 164$ , $Mn_M = 0.1$ , (d) $Mn_F = 656$ , $Mn_M = 1.2$ . . . . .	50
3.17	Problem 3. Çoklu daralma içeren kanal ve manyetik alan eşeğrileri. . . . .	52
3.18	Problem 3. Çoklu daralma içeren kanalın örnek ayrıklaştırılması. . . . .	52
3.19	Problem 3. Stream fonksiyonu eşeğrileri, $Re = 100$ : (a) $Mn_F = 0$ , $Mn_M = 0$ , (b) $Mn_F = 82$ , $Mn_M = 0.025$ , (c) $Mn_F = 164$ , $Mn_M = 0.1$ , (d) $Mn_F = 656$ , $Mn_M = 1.2$ , (e) $Mn_F = 1312$ , $Mn_M = 6.4$ . . . . .	53
3.20	Problem 3. Vortisite eşeğrileri, $Re = 100$ : (a) $Mn_F = 0$ , $Mn_M = 0$ , (b) $Mn_F = 82$ , $Mn_M = 0.025$ , (c) $Mn_F = 164$ , $Mn_M = 0.1$ , (d) $Mn_F = 656$ , $Mn_M = 1.2$ , (e) $Mn_F = 1312$ , $Mn_M = 6.4$ . . . . .	54
3.21	Problem 3. Isı eşeğrileri, $Re = 100$ : (a) $Mn_F = 0$ , $Mn_M = 0$ , (b) $Mn_F = 82$ , $Mn_M = 0.025$ , (c) $Mn_F = 164$ , $Mn_M = 0.1$ , (d) $Mn_F = 656$ , $Mn_M = 1.2$ , (e) $Mn_F = 1312$ , $Mn_M = 6.4$ . . . . .	54

## ÖZET

Bu projede değişken manyetik alan etkisinde ve ani daralma gösteren damarlar boyunca akan, ısı transferinin de dikkate alındığı biyomanyetik akışkan modelinin nümerik çözümleri elde edilmiştir. En karakteristik biyomanyetik akışkan kandır. Kan, olgun kırmızı kan hücrelerinde bulunan demir oksit formundaki hemoglobin, hücrelerarası protein ve hücre zarı arasındaki karmaşık etkileşimden dolayı, bir manyetik akışkan gibi davranmaktadır (dış bir manyetik alan etkisi ile manyetize olabilmektedir). Damarlarda kanın pıhtılaşması bazen kısmi bazen de tam damar tıkanmasına (stenosis) neden olmakta ve bu durum tehlikeli patolojik rahatsızlıklarla (felç, kalp krizi v.s.) sonuçlanmaktadır. Uygulanan manyetik alan etkisi ile daralma içeren damarlarda kan akışını ve ısısını ayarlamak mümkün olmaktadır. Daralan bölgede kanın basınç dağılımı, akış direnci, vortex oluşumu ve kan akışı ayrımı, bu fiziksel durumu tanımlayan matematiksel modelin dikkatli çözümü ile mümkün olmaktadır. Bu çalışmada, Newtonian ve elektrikçe iletken biyomanyetik akışkan olarak alınan kan modeli, düzensiz daralma gösteren damar içerisinde kanın ısı transferi de eklenerek çözülmektedir. Nümerik yöntem olarak sonlu elemanlar ve sınır elemanları metodları kullanılmakta ve dış manyetik alan damar çeperine yakın yerleştirilen bir mıknatıs ile elde edilmektedir. Sınır elemanları yönteminin değişken sınırlı bölgelere uygulanabilirliğinden ve küçük boyutlu sistemler vermesinden yararlanılmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi ise daralan bölgeyi çok sayıda küçük eleman kullanarak ayrıklaştırabilmektedir. Her iki yöntem de denklemleri ardışık olarak stream fonksiyonu, vortisite ve sıcaklık bilinmeyenleri cinsinden çözmektedir. Daralma sonucunda akış profilinde meydana gelen önemli değişiklikler stream fonksiyonu, vortisite ve ısı eğeğrileri ile gösterilmiştir. Noktasal kaynaktan uygulanan manyetik alanın şiddeti arttıkça, manyetik kaynağın yakın çevresinde oluşan vorteksin uzunluğunun arttığı, diğer yandan biyoakışkan hızının bu bölgede azaldığı görülmektedir. Şiddetli daralmanın sebep olduğu kan akışı direnci damar dışına uygun bir noktaya yerleştirilen manyetik alan kaynağı ile kaldırılabilir.

**Anahtar Kelimeler:** Sonlu elemanlar yöntemi, sınır elemanları yöntemi, biyomanyetik akışkan (kan).

## ABSTRACT

In this project, numerical solutions of biomagnetic fluid flow and heat transfer are obtained through stenosed arteries under the influence of a spatially varying magnetic field. The most characteristic biomagnetic fluid is blood. Blood behaves as a magnetic fluid due to the complex interaction of the intercellular protein, cell membrane and the hemoglobin, a form of iron oxides which are present in the mature red blood cells (it can be magnetized under the effect of an external magnetic field). A significant pathological condition (diseases such as stroke, heart attack, etc.) results from the formation of clots in the blood vessels (stenosis) that may cause a partial or complete blood blockage. It is possible to alter blood flow and its temperature in the stenosed artery with the effect of imposed magnetic field. The pressure distribution, the resistance of the flow, formation of vortices and separation of the blood flow require careful solution of the flow of biomagnetic fluid through stenotic area. In this study, a blood model which is the flow of a Newtonian and electrically conducting biomagnetic fluid is solved in an irregularly stenosed artery. As numerical method, both the finite element and boundary element methods are used, and the external magnetic field is created with a magnet placed at a point close to the blood artery. Boundary element method is suitable to discretize only the boundary and especially the variable boundary in the stenosis, and gives considerably small sized algebraic systems to be solved. On the other hand, finite element method has the capacity of discretizing the stenosed region by using a very fine mesh. Both methods solve the equations iteratively in terms of stream function, vorticity and temperature unknowns. Major changes in the flow pattern of biomagnetic fluid flow in a stenosis are given in terms of streamlines, vorticity contours and isotherms. It is shown that, as the intensity of the magnetic field obtained from a nodal source magnet increases, the length of the vortex after the source increases, however, the speed of the biomagnetic fluid decreases in this region. The effect of the major stenosis (blood blockage) can be eliminated by placing a magnet outside of the artery in a suitable point.

**Keywords:** Finite element method, boundary element method, biomagnetic fluid (blood).

# BÖLÜM 1

## GİRİŞ

Bu projede, dışarıdan uygulanan bir manyetik alanın daralma içeren damarlardaki kan akışı üzerindeki etkisi çalışılmaktadır. Damar boyunca akan, ısı transferinin de dikkate alındığı biyomanyetik akışkan (manyetik alan tesiri ile manyetize olabilen akışkan) modelinin nümerik çözümleri incelenmektedir. Biyomanyetik akışkanlar dinamiği (BAD), biyolojik akışkanların manyetik alan etkisindeki akımını inceleyen, ferrohüdrodinamik ve magnetohüdrodinamik ilkelerine dayalı oldukça yeni bir çalışma alanıdır. Kan, en karakteristik biyomanyetik akışkan olup elektrikçe iletken ve aynı zamanda manyetizasyon özelliğe sahiptir. Kan, olgun kırmızı kan hücrelerinde bulunan demir oksit formundaki hemoglobin, hücrelerarası protein ve hücre zarı arasındaki karmaşık etkileşimden dolayı, bir manyetik akışkan gibi davranmaktadır. Kan, insan vücudunda ısı dağılımını ayarlamakta, oksijen ve besinleri hücrelere ulaştırmakta, karbondioksit ve kirli maddeleri atmakta önemli rol oynamaktadır. Biyomanyetik akışkanlar dinamiğinin tıp alanındaki en önemli uygulamalarından birisi, ani daralma gösteren damardaki (stenosed artery) kan akışının ve ısısının dış bir manyetik alan tesiri ile değiştirilebilmesidir.

Kan damarlarındaki daralmalar damar çeperlerinde bazı maddelerin (yağ v.s.) birikimi ile oluşmaktadır. Damarda kanın pıhtılaşması da bazen kısmi bazen de tam damar tıkanmasına neden olmakta, ve bu durum tehlikeli patolojik rahatsızlıklarla (felç, kalp krizi, v.s.) sonuçlanmaktadır. Daralmış bölgeler zaman zaman kan akışını tamamen bloke edip diğer hayati organlara ve hücrelere oksijenin taşınmasını önleyerek ciddi tıbbi müdahalelere gereksinim yaratmaktadır. Damarların daralmış bölgelerindeki engeli kaldırmak için yaygınlıkla kullanılan yöntem stent takarak damar tıkanıklığını açmaktır. Büyük başarı ile sonuçlanan stent uygulamalarında, stent takılan bölgenin yeniden daralması ve kanın pıhtı atması ihtimali hala bulunmaktadır. Dışarıdan uygulanan manyetik alanın ise kanın akış hızı ve profilini değiştirebildiği, kandaki ısı transferi üzerinde de etkili olduğu bilinmektedir. Bu nedenle, bu projede biyomanyetik akışkan akımının bilhassa daralma gösteren damar boyunca dış manyetik alandan nasıl etkilendiği, akış hızının hangi parametrelere bağlı olarak arttığı veya azaldığı, kanın hız dağılımının ısı transferi ile olan ilişkisi çalışılmaktadır. Manyetik alanın, kanın daralma bölgesindeki akışının direncini azalttığı, diğer bir anlatımla kanın daralan bölgede akış hızını artırdığı ve bu artışın manyetik alanın intensitesinin (yoğunluğunun) artması ile doğru orantılı olduğu gözlemlenmektedir.

İnsan vücudundaki kan akışı ve ısı transferi fiziksel fenomeninin matematiksel modellenmesi, biyomanyetik akışkanların yarıçapı dar ve sınırları düzensiz olan silindirik borulardaki akımı ve ısı değişimi ile yapılmaktadır. Tipik biyomanyetik akışkan olan gerçek kan modelinde, kanın elektrikçe iletken olduğu (electrically conducting), daralmaların kılcal damarlarda dahi olabile-

ceği (non-Newtonian akışkan) ve dışarıdaki manyetik alan etkisi ile kan içerisinde de indüklenmiş manyetik alan (induced magnetic field) oluşabileceği düşünülmelidir. Kan ısısının ve hızının zamana göre değişimi de incelenmelidir. Bu projede, dışarıdan uygulanan manyetik alanın, ani ve düzensiz daralma gösteren bir ana damar içindeki kan akışı ve ısı transferi üzerindeki etkisi çalışılacağı için kanın Newtonian akışkan olduğu varsayılacaktır. Ayrıca kanın manyetik geçirgenlik parametresinin düşük (manyetik Reynolds sayısı ihmal edilebilecek kadar küçük) olması nedeniyle, kan içerisinde oluşabilecek indüklenmiş manyetik alan gözardı edilecektir.

Böylece, projede en genel hali ile biyomanyetik akışkanın viskoz, sıkıştırılmaz, Newtonian ve elektrikçe iletken olduğu, ve akımının iki boyutlu, laminer, zamana bağımlı olup düzensiz daralma gösteren damar içerisinde bulunduğu kabul edilmiştir. Damarın enine kesiti olan, sonsuz uzunluktaki iki paralel levha arasındaki kanal, problem bölgesi olarak seçilmiştir. Ancak nümerik çözümler kanalın sonlu uzunluktaki bir parçası alınarak elde edilmiştir. Kanın kanalın bir ucundan girip diğer ucundan çıktığı, bu aralıkta düzensiz bir daralma ile karşılaştığı düşünülmüştür. Ayrıca damarın dış bölgesinde, daralma bölgesine yakın bir noktada manyetik alanın uygulandığı düşünülerek kan akışı ve ısısı üzerinde manyetik alanın etkileri çalışılmıştır. Daralma bölgesindeki kanın hız ve ısı profilleri çizilerek manyetik kaynağın uygun yere yerleştirilmesi ile kan akışındaki direncin azaldığı (kanın kolay aktığı) gösterilmiştir. Bu fiziksel duruma karşılık gelen matematiksel model kanın hızını ve ısısını içeren kısmi diferensiyel denklemler olup, kanaldaki fiziksel duruma karşılık gelen sınır şartları ile birlikte çözülmek durumundadır. Denklemler lineer olmayan terimler içerdiği için nümerik olarak çözülmekte ve nümerik yöntem olarak da sonlu elemanlar ve sınır elemanları metodları kullanılmaktadır. Problem parametrelerinin yüksek değerlerinden ve damardaki düzensiz daralma olan bölgeden kaynaklanan zorluklar bu iki nümerik yöntemin avantajlarından yararlanılarak giderilmekte ve uygun olan metod seçilmektedir (sınır elemanları metodunun yalnız sınırı ayırıklaştırarak küçük boyutlu sistemlerle sonuçlanması, sonlu elemanlar metodunun düzensiz sınırlı daralma bölgesinde çok sayıda ve problem bölgesi geometrisine uygun elemanlar kullanabilmesi gibi). Sonlu elemanlar metodu ile uygulamalarda, çoklu ve düzensiz daralma içeren kanal bölgesinde FreeFem++ programı lineer eleman ayırıklaştırılması kuadratik eleman için geliştirilerek kullanılmıştır.

## 1.1 Biyomanyetik Akış Denklemleri

Projede, biyomanyetik akışkan akım ve ısı transferi denklemleri daralma içeren kanallarda çözülmektedir. Denklemler, en genel halde, dış (noktasal) manyetik alan etkisini ve akışkanın elektrikçe iletkenlik ve manyetik alanı geçirgenlik özelliklerini içermektedir. İki boyutlu, laminer, sıkıştırılmaz akış modelinde biyoakışkan olarak kan ele alınmıştır. Kanın; homojen, Newtonian, elektrikçe iletken ve manyetize olabildiği, hızının zamana bağlı ve ısı transferi ile etkileşimli olduğu kabul edilmektedir. Bu varsayımlar sonucu kan akışını tanımlayan denklemler, süreklilik, momentum ve enerji denklemleri olup, dışarıdan uygulanan manyetik alana ait terimler (kuvvetler) denklemlere Maxwell denklemleri ve Ohm's kanunu ile eklenmiştir (Tzirtzilakis,

2008a,b). Bu şekilde elde edilen denklemler aşağıda verilmektedir:

Süreklilik denklemi:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0. \quad (1.1)$$

Momentum denklemleri:

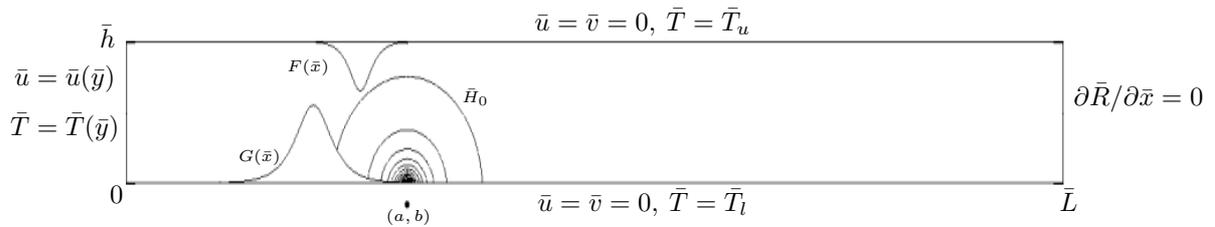
$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \bar{\mu}_0 \bar{M} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}} - \bar{\sigma} \bar{B}^2 \bar{u} + \bar{\mu} \nabla^2 \bar{u} \quad (1.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \bar{\mu}_0 \bar{M} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{y}} + \bar{\mu} \nabla^2 \bar{v}.$$

Enerji denklemi:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \bar{c}_p \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) + \bar{\mu}_0 \bar{T} \frac{\partial \bar{M}}{\partial \bar{T}} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{y}} \right) - \bar{\sigma} \bar{B}^2 \bar{u}^2 \\ = \bar{k} \nabla^2 \bar{T} + \bar{\mu} \left[ 2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Yukarıdaki denklemlerde  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  akışkanın boyutlu hız bileşenleri,  $\bar{p}$  basınç,  $\bar{T}$  akışkanın ısı,  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{\sigma}$  ve  $\bar{\mu}$  sırasıyla akışkanın yoğunluğu, elektrik geçirgenlik katsayısı ve dinamik viskozitesidir.  $\bar{\mu}_0$ ,  $\bar{c}_p$  ve  $\bar{k}$  boşluğun manyetik geçirgenlik katsayısını (magnetic permeability), sabit basınçta akışkanın belirgin sıcaklığını (specific heat at constant pressure) ve ısısal geçirgenliğini (thermal conductivity) göstermektedir.  $\nabla^2 = \partial^2/\partial \bar{x}^2 + \partial^2/\partial \bar{y}^2$  iki-boyutlu Laplace operatorüdür.  $\bar{H}$  dışarıdaki manyetik alanın şiddeti (intensity) ve  $\bar{B} = \bar{\mu}_0 \bar{H}$  olup  $\bar{M} = \bar{K} \bar{H} (\bar{T}_c - \bar{T})$  ( $\bar{K}$  sabit,  $\bar{T}_c$  Curie sıcaklığı) akışkanın manyetizasyonunu vermektedir. Denklemler  $(\bar{u}, \bar{v})$  hız bileşenleri ve  $\bar{T}$  sıcaklık bilinmeyenini için çözülecektir.



Şekil 1.1: Düzensiz daralma içeren kanal konfigürasyonu ve sınır koşulları.

Paralel iki plaka arasında akan kan akışı modeli için uygun sınır koşulları (kanalın düzensiz daralma içerdiği durumda) (Şekil 1.1)

$$\begin{aligned} \text{Girişte } \bar{x} = 0, 0 \leq \bar{y} \leq \bar{h} & : \bar{u} = \bar{u}(\bar{y}), \bar{v} = 0, \bar{T} = \bar{T}(\bar{y}) \\ \text{Çıkışta } \bar{x} = \bar{L}, 0 \leq \bar{y} \leq \bar{h} & : \partial(\bar{R})/\partial \bar{x} = 0 \\ \text{Üst plakada } \bar{y} = F(\bar{x}), 0 \leq \bar{x} \leq \bar{L} & : \bar{u} = 0, \bar{v} = 0, \bar{T} = \bar{T}_u \\ \text{Alt plakada } \bar{y} = G(\bar{x}), 0 \leq \bar{x} \leq \bar{L} & : \bar{u} = 0, \bar{v} = 0, \bar{T} = \bar{T}_l. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Burada  $\bar{u}(\bar{y})$ ,  $\bar{T}(\bar{y})$  girişteki parabolik hız ve ısı profilleridir, kanal çıkışında  $\bar{R}$  ise  $\bar{T}$ ,  $\bar{u}$  ya da  $\bar{v}$  için kullanılmıştır. Alt ve üst plakaların sabit ısı değerleri sırasıyla  $\bar{T}_l$  ve  $\bar{T}_u$  ile gösterilmiştir. Şekil 1.1' deki  $F(\bar{x})$  ve  $G(\bar{x})$  fonksiyonları daralan üst ve alt sınırları tanımlamaktadır.

Manyetik alan vektörünün  $\bar{x}$  ve  $\bar{y}$  bileşenleri,  $\vec{H} = (\bar{H}_x, \bar{H}_y)$ , sırasıyla

$$\bar{H}_x = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{\bar{y} - \bar{b}}{(\bar{x} - \bar{a})^2 + (\bar{y} - \bar{b})^2}, \quad \bar{H}_y = -\frac{\gamma}{2\pi} \frac{\bar{x} - \bar{a}}{(\bar{x} - \bar{a})^2 + (\bar{y} - \bar{b})^2} \quad (1.5)$$

olarak verilmektedir. Burada  $(\bar{a}, \bar{b})$  manyetik alan kaynağının yerleştirildiği noktadır ve  $\bar{\gamma}$  manyetik alanın mıknatısdaki kuvvet katsayısıdır. Dolayısıyla manyetik alan yoğunluğu  $\vec{H}$  aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\vec{H} = (\bar{H}_x + \bar{H}_y)^{1/2} = \frac{\bar{\gamma}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(\bar{x} - \bar{a})^2 + (\bar{y} - \bar{b})^2}}. \quad (1.6)$$

Biyomanyetik akış denklemleri (1.1)-(1.3),

$$x = \frac{\bar{x}}{\bar{h}}, y = \frac{\bar{y}}{\bar{h}}, t = \frac{\bar{t}\bar{\mu}}{\bar{\rho}\bar{h}^2}, u = \frac{\bar{u}}{\bar{u}_r}, v = \frac{\bar{v}}{\bar{u}_r}, p = \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}\bar{u}_r^2}, H = \frac{\bar{H}}{\bar{H}_r}, T = \frac{\bar{T} - \bar{T}_1}{\bar{T}_2 - \bar{T}_1} \quad (1.7)$$

boyutsuz değişkenleri kullanarak boyutsuzlaştırılır. Burada  $\bar{u}_r$  akışkanın kanal girişindeki maksimum hızıdır ve  $\bar{H}_r = \bar{H}(\bar{a}, \bar{b})$ ,  $(\bar{a}, \bar{b})$  noktasındaki manyetik alan kuvveti olarak verilir. Diğer yandan  $\bar{T}_1$  alt ve üst plakanın sıcaklığını,  $\bar{T}_2$  ise akışkanın sıcaklığını göstermektedir. Sistemin iki-boyutlu olması nedeniyle sayısal çözüm için, temel denklemler (1.1)-(1.3) boyutsuz stream fonksiyonu-vortisite-ısı formulasyonuna dönüştürülebilmektedir. Boyutsuz stream  $\psi(x, y)$  ve vortisite  $w(x, y)$  fonksiyonları hız bileşenleri ile süreklilik denklemini ve vortisite vektörünün  $z$ -bileşenini sağlayacak şekilde verilmektedir:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, w = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.8)$$

Böylece, (1.1-1.3) denklemleri yeni bilinmeyenler olan stream, vortisite ve ısı fonksiyonları türünden aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$\nabla^2 \psi = -w \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} = & \nabla^2 w - Re \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} + Mn_F Re H \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} \right\} \\ & + Mn_M \frac{\partial}{\partial y} \left( H^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} = & \frac{1}{Pr} \nabla^2 T - Re \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} + Mn_F Re Ec H (\varepsilon + T) \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} \\ & + Mn_M Ec H^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + Ec \left\{ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Boyutsuz parametreler Reynolds sayısı  $Re$ , Prandtl sayısı  $Pr$ , Eckert sayısı  $Ec$  ve ısı sayısı

$\varepsilon$ ,

$$Re = \frac{h \rho u_r}{\mu}, \quad Pr = \frac{c_p \mu}{k}, \quad Ec = \frac{u_r^2}{c_p (T_2 - T_1)}, \quad \varepsilon = \frac{T_1}{T_2 - T_1} \quad (1.12)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Ferrohidrodinamik prensiplerden ileri gelen manyetik alan sayısı  $Mn_F$  ve magnetohidrodinamik ilkelerden ileri gelen manyetik alan sayısı  $Mn_M$  boyutsuz olup aşağıdaki gibi verilmiştir (Tzirtzilakis, 2008a)

$$Mn_F = \frac{\mu_0 H_r^2 K (T_2 - T_1)}{\rho u_r^2}, \quad Mn_M = \frac{\mu_0^2 H_r^2 h^2 \sigma}{\mu} = Ha^2. \quad (1.13)$$

Yukarıdaki ifadelerde  $h$ , paralel iki plaka arasındaki uzaklık,  $K$  bir sabit sayı ve  $Ha$  Hartmann sayısıdır. (1.9)-(1.11) nolu denklemler stream fonksiyonu  $\psi$ , vortisite  $w$  ve kanın sıcaklığı  $T$  bilinmeyenleri ile birlikte ardışık olarak çözülürken,  $\psi$  ve  $T$  sınır değerleri Şekil 1.1' de verilen  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  ve  $\bar{T}$  sınır değerlerinden elde edilir. Vortisite sınır değerlerinin hesaplanması ilerideki bölümlerde ayrıntılı olarak verilmektedir (Bölüm 2.1.1 ve Bölüm 3.2).

## 1.2 Literatür Özeti

Biyomanyetik akışkanlar dinamiği, manyetik alan tesiri altındaki biyolojik akışkanların dinamiğini incelemektedir. BAD ferrohidrodinamik (FHD) ve magnetohidrodinamik (MHD) ilkelerine dayalı yeni bir araştırma sahasıdır. Öyle ki, biyoakışkan manyetik alan tesirinde FHD ve MHD prensiplerine uyumlu olarak akar. Dominant kuvvetler manyetizasyon ve Lorentz kuvvetleridir (Tzirtzilakis, 2005). BAD problemlerinin biyomühendislik ve tıp sahasında birçok uygulamaları olduğundan, bu alan son yıllarda pek çok araştırmacının ilgi odağı olmaktadır. Bu uygulamalar arasında, hücre ayrıştırılmasında manyetik aletlerin kullanılması, manyetik parçacıklar kullanarak ilaçların hedeflenen hücrelere ulaştırılması, kan akışının hızlandırılması, tümörleri ve kanama bölgelerini besleyen damarlara miknatıslar ile müdahale edilmesi sayılabilir (Newbower, 1973; Rosensweig, 1987; Haik vd., 1999; Ganguly vd., 2005; Voltairas vd., 2002).

Sud ve Sekhon (1989), damarlardaki kan akışı ve uygulanan manyetik alan arasındaki etkileşimini çalışarak kanın hızının manyetik alan tesiri ile azaldığını göstermişlerdir. Kinouchi vd. (1996), Lorentz kuvvetini Navier-Stokes denklemlerine ekleyerek yaptıkları çalışmada, uygulanan manyetik alan etkisinin çoğalmasıyla ana damarlardaki kan miktarının ve hızının %5 civarında düştüğünü göstermişlerdir. Daralmış bir ana damarda kan akışı direncinin üzerinde manyetik alan etkisini Bali ve Awasthi (2007) analiz etmişler, ve kan damarı bölgesini iki boyutlu, aksisimetrik kabul edip kanın da elektrik iletkenliğini çok küçük kabul ederek, bazı analitik özel çözümler geliştirmişlerdir. Krashan ve Haik (2006) damardaki ani daralmaların yanı sıra damar dışında belli noktalara yerleştirilen magnetler ile oluşan manyetik alanın, kan akışında önemli değişikliklere neden olduğunu gözlemlemişlerdir. Papadopoulos ve Tzirtzilakis (2004) kan akışını kıvrımlı kare bir bölgede manyetik alan altında sonlu farklar yöntemi ile çözmüş, ve bilhassa eksen hızının kuvvetli manyetik alan tarafından etkilendiğini görmüşlerdir. Bu çalışmalarında kan modeli sabit viskozite ve elektrikçe iletken olmayacak şekilde seçilmiştir. Diğer bir çalışmada, Tzirtzilakis (2005) elektrikçe iletkenliği de ilave ederek yine sonlu farklar yöntemi ile sonuçlar sunmuştur. Tzirtzilakis vd. (2004), Loukopoulos ve Tzirtzilakis (2004) ve Tzirtzilakis (2008b) biyoakışkan (kan) çözüm bölgesini dikdörtgen kesit alarak, kan için sabit

viskozite ve elektriği iletmeyen halleri kabul ederek, sonlu farklar veya pseudotransient nümerik yöntemler ile çözümler üretmişlerdir. Sonlu farklar yönteminde 70000 civarında ayrılaşmış nokta kullanılmıştır. Kenjeres (2008) ve Tzirtzilakis (2008a) sonlu hacim ve sonlu farklar yöntemleri ile sabit viskozite (Newtonian), elektrikçe iletken (conducting) kan modeli denklemlerini dıştan uygulanan manyetik bir alan tesirinde çözmüştür. Kenjeres, dairesel kesitli kanal modelini ele almış, Tzirtzilakis ise yine dikdörtgen kesitli fakat daralma gösteren damar modelini incelemiştir. Her iki çalışmada da kan akışının manyetik alandan oldukça etkilendiği gözlemlenmiştir. Kenjeres, bu tekniğin istenilen ilacın hedeflenen yere ulaştırılmasında kullanılabileceğini belirtmektedir. Li ve Huang (2010) gerçek kan akışkan modeline (değişken viskoziteye sahip ve elektrikçe iletken) sonlu hacim yöntemi ile çözüm getirmiştir. Kan damarına dışarıdaki belli bir noktadan manyetik alan uygulanmış ve damarda simetrik bir daralma farzedilmiştir. Isı transferini de göz önüne alarak daralma bölgesinde kan akışındaki ve ısındaki değişimler gösterilmiştir.

Değişik geometrik bölgeler üzerinde tanımlanan biyomanyetik akışkan akım problemi, farklı nümerik yöntemler kullanılarak da çözülmüştür. Örneğin Haik vd. (2001); Loukopoulos ve Tzirtzilakis (2004); Tzirtzilakis (2005); Rusli vd. (2012) çalışmalarında sonlu farklar yöntemini (FDM) kullanırken, Neofytou ve Drikakis (2003); Krashan ve Haik (2006) ve Kenjeres (2008) sonlu hacim metodunu kullanmışlardır. Diğer taraftan Li vd. (2012) daralmış damar içerisinde akan kan akış modeli için novel gradient smoothing metodunu uygulamıştır. Bu çalışmalarında, ardışık çözümün stabil ve efektif olabilmesi için karşılıklı zaman adım (dual time stepping) ve nokta-kapalı beş-kademe (point-implicit five-stage) Runge-Kutta yöntemleri uygulanmıştır. Son olarak Ikbal (2012), genel Oldroyd-Bmodel ile karakterize edilmiş viskoelastik kan akım probleminin sayısal çözümü için hacim kontrolüne bağlı sonlu farklar (control volume-based finite-difference) metodunu kullanmıştır.

Sonlu elemanlar metodu (FEM) akışkanlar mekaniği problemlerini karışık geometrili bölgelerde çözmekte çok gelişmiş ve efektif bir nümerik yöntem olarak bilinmektedir. Problem bölgesi yeterli sayıda eleman alınarak ayrıştırıldığında, sonlu elemanlar yöntemi sonlu farklar ve sonlu hacim yöntemlerine göre daha hassas sonuçlar vermektedir. Bhargava vd. (2010) mikropolar, elektrikçe iletken olmayan biyomanyetik akışkanı iki-boyutlu bölgede sonlu elemanlar metodu ile incelemişlerdir. Dıştaki manyetik alanın ve mikropolaritideki artışın akışkan hızını azalttığı görülmüştür. Gay ve Zhang (2009) sağlıklı, daralmış ve stent takılmış damarlardaki kan akışı denklemlerini (manyetik alan etkisi olmaksızın) sonlu elemanlar yöntemi ile çözmüşlerdir.

Bu projede sonlu elemanlar yöntemi öncelikle iki düz paralel plaka arasında akan iki-boyutlu biyomanyetik akışkan problemine uygulanmıştır (Tezer-Sezgin vd., 2013). Burada kullanılan FEM formülasyonu geliştirilerek, simetrik daralmanın meydana geldiği kanal içerisinde akan biyomanyetik akış problemi de çözülmüştür (Türk vd., 2013). Son olarak, sonlu elemanlar yöntemi düzensiz daralmanın meydana geldiği kanal içerisinde akan en genel biyomanyetik akışkan modelinin çözümünde kullanılmıştır. Ayrıca, bu projede iki düz paralel plaka arasında akan iki-boyutlu elektrikçe iletken ve zamana bağlı olmayan biyomanyetik akışkan problemi,

sınır elemanları metodu (BEM) kullanılarak da çözülmüştür. Sınır elemanları metodu problem bölgesinin yalnız sınırını ayırttığı için diğer bütün bölge ayırıştırma yöntemlerine göre çok daha ekonomik (bilgisayar hafızası ve zamanı kullanma yönünden) bir yöntemdir. Akışkanlar mekaniği problemlerine yaygınlıkla uygulanmasına karşın biyomanyetik akışkan (kan) modellerinin çözümünde bilgimiz dahilinde ilk kez bu projede kullanılmış durumdadır.

### 1.3 Proje Rapor Planı

Giriş bölümünde (Bölüm 1) biyomanyetik akışkan akımının fiziksel özellikleri ve matematiksel modellenmesi verilmektedir. Ayrıca diğer araştırmacıların problem çözümüne yaptıkları katkılar özetlenmiştir.

Bölüm 2' de biyoakışkan akım ve ısı denklemleri iki paralel plaka arasındaki düz bir kanal içerisinde çözülmüştür. Ayrıca biyoakışkan (kan) başlangıç olarak elektrikçe iletken alınmamıştır. Denklemler zamandan bağımsız alınarak hem sınır elemanları hem de sonlu elemanlar yöntemleri ile sonuçlar elde edilmiştir (Bölüm 2.2). Bölüm 2.3.2'de bilinmeyenlerin ( $\psi$ ,  $w$ ,  $T$ ) zamana bağımlı olduğu farzedilerek denklemlerin zaman türevleri sonlu farklar yöntemi ile ayırıştırılarak sonuçlar ara zaman seviyelerinde de bulunmuştur. Bölüm 2.3.3'de ise kan elektrikçe iletken alınarak (1.9)-(1.11) denklemleri çözülmekte ve kanın hızı ve ısısının, manyetik kaynak etkisi ile değişimleri gösterilmektedir.

Bölüm 3' de dışarıdan uygulanan manyetik alan etkisindeki genel biyoakışkan akım ve ısı transferi denklemleri ((1.9)-(1.11)) düzenli ve düzensiz farklı daralma türleri içeren kanallar içerisinde sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmektedir. Vortisite sınır koşullarının hesaplanması ve düzensiz daralma içeren kanal bölgelerine özgü yinelemeleli çözüm stratejisi Bölüm 3.2'de verilmektedir. Çözüm bölgeleri; simetrik daralma içeren kanal (Bölüm 3.3.1), düzensiz daralma içeren kanal (Bölüm 3.3.2) ve düzensiz çoklu daralma içeren kanal (Bölüm 3.3.3) olmak üzere üç farklı problem incelenmektedir. Her bir problemde başlangıçta kanal içerisindeki salt daralma etkisini incelemek amacıyla manyetik alan etkisi içermeyen denklemler çözülmekte, daha sonra manyetik alan etkisiyle birlikte hız ve ısı profilleri analizleri genişletilmektedir.

Son olarak, bu projede çözülen bütün test problemlerinden elde edilen bulgular ve yapılan araştırmaların analizleri sonuç bölümünde (Bölüm 4) verilmektedir.

## BÖLÜM 2

# DÜZ KANAL BOYUNCA BİYOMANYETİK SIVI AKIŞI

Bu bölümde, dışarıdan uygulanan bir manyetik alan etkisinde düz kanal boyunca akan, ısı transferinin de dikkate alındığı biyomanyetik akışkan modelinin nümerik çözümleri incelenmiştir. En önemli biyomanyetik akışkan kan olup manyetik alandan nasıl etkilendiği ve akış hızının hangi parametrelere bağlı olarak arttığı araştırılmıştır. Dışarıdan uygulanan manyetik alanın kandaki ısı transferi üzerinde de etkili olduğu görülmüş ve kanın hız dağılımı ısı transferi ile birlikte çalışılmıştır. Biyomanyetik akış modelini tanımlayan en genel denklemler Bölüm 1.1' de verilmiştir. Bu ilk bölümde yalnız dışarıdan uygulanan manyetik alanın kanın akış hızı ve ısı değişimi üzerindeki etkileri üzerinde yoğunlaşmış, bu nedenle matematiksel modellemede bazı basitleştirmelere gidilmiştir. Öyle ki,

- (i) kanın elektrikçe iletken olmadığı,
- (ii) kanın akışı ve ısı değişiminin zamandan bağımsız olduğu,
- (iii) kan içerisinde indüklenmiş manyetik alanın oluşmadığı
- (iv) kan akışının çok dar damarlarda düşünülmediği (Newtonian akış)
- (v) damar çeperlerinde düzensizlik (daralma v.s.) bulunmadığı

varsayımları kabul edilerek sadece dışarıdan uygulanan manyetik alanın kanın hızı ve ısı üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Bu varsayımlar doğrultusunda elde edilen genel denklemler Bölüm 2.1' de verilmiştir. Bu denklemler hem sınır elemanları hem de sonlu elemanlar yöntemleri kullanılarak ayrıklaştırılmış ve iki metodun da biyomanyetik akışkan denklemlerine uygulanışı Bölüm 2.2' de ayrıntılı olarak verilmiştir. Son olarak nümerik sonuçlar kısmında, Bölüm 2.3, üç farklı test problemi ele alınmış ve elde edilen sonuçlar grafiksel olarak verilmiştir. İlk problemde yukarıda verilen tüm varsayımların dikkate alındığı indirgenmiş biyomanyetik akışkan problemi sınır ve sonlu elemanlar yöntemleriyle çözülmüştür. İkinci problem de ise (ii). varsayım kaldırılarak kan akışı ve ısı değişiminin zamana bağlı olduğu düşünölmüş ve bu problem sonlu elemanlar metodu kullanılarak çözülmüştür. Üçüncü problemde (i). varsayım da kaldırılmış ve gerçek kan akışı modeline daha uygun olan kanın elektrikçe iletken olduğu durum ele alınmıştır. Bu problemin çözümünde de sonlu elemanlar metodu kullanılmıştır. Her üç problemde de biyomanyetik akışkanın düz bir kanal (iki paralel plaka arası) içerisinde aktığı ve kanal çeperlerinde herhangi bir daralmanın olmadığı düşünölmüştür. Daralmanın göröldüğü en genel biyomanyetik kan akımı modeli Bölüm 3'de incelenecektir.

## 2.1 Zamandan Bağımsız ve Elektrikçe İletken Olmayan Biyomanyetik Sıvı Akışı Denklemleri

Bu çalışmanın hedefi dışarıdan uygulanan manyetik alanın kanın hızı ve ısısı üzerindeki etkisini bulmak ve dolayısıyla matematiksel modellemede çıkan lineer olmayan hız ve ısı denklemlerini nümerik olarak çözümlenip, manyetik alanın yoğunluk değişimi ile kan akışı ve ısı transfer değişimlerini grafiksel olarak göstermektir. Elektrikçe iletken olmayan, zamandan bağımsız kan akışının iki boyutlu, laminer (düzgün katmanlar halinde akış), sıkıştırılmaz ve viskoz olduğu düşünülerek akımın iki paralel plaka arasında olduğu kabul edilmektedir. Bu varsayımlar altında Bölüm 1.1’ de verilen (1.1)-(1.3) nolu boyutlu süreklilik-momentum-enerji denklemleri, (1.7) denkleminde verilen boyutsuz değişkenleri kullanılarak boyutsuzlaştırılır. Ancak burada, alt ve üst duvar sıcaklıkları farklı olduğundan boyutsuzlaştırma işlemi  $T = \frac{\bar{T}_u - \bar{T}}{\bar{T}_u - \bar{T}_l}$  kullanılarak yapılmıştır. Dolayısıyla (1.12) nolu formüllerde verilen boyutsuz parametrelerin tanımında  $T_1 = T_l$ ,  $T_2 = T_u$  olmaktadır. Böylece zamana bağlı olmayan boyutsuz denklemler aşağıdaki formu alır, (Loukopoulos ve Tzirtzilakis, 2004)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{Re} \nabla^2 u = \frac{\partial p}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - Mn_F TH \frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.2)$$

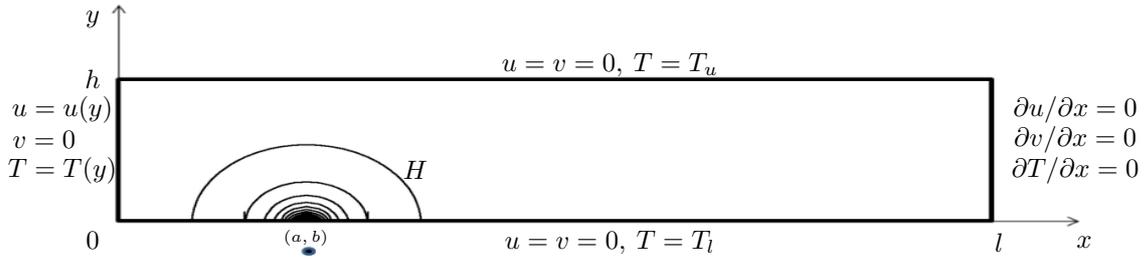
$$\frac{1}{Re} \nabla^2 v = \frac{\partial p}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - Mn_F TH \frac{\partial H}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 T = Pr Re (u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}) + Pr Ec [2(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + 2(\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})^2] \\ + Mn_F Pr Re Ec H (\varepsilon - T) (u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Burada  $u$ ,  $v$ ,  $p$  ve  $T$  sırasıyla boyutsuz  $x$ - ve  $y$ -hız bileşenleri, akışkanın basıncı ve ısısıdır. Boyutsuz manyetik alan yoğunluğu  $H$

$$H(x, y) = \frac{b}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \quad (2.4)$$

denkleme indirgenir. Burada  $(a, b)$  manyetik alan kaynağının yerleştirildiği noktadır. Biyomanyetik akış problemin boyutsuzlaştırma işleminde ortaya çıkan Reynolds sayısı  $Re$ , Prandtl sayısı  $Pr$ , Eckert sayısı  $Ec$  ve ısı sayısı  $\varepsilon$ , (1.12) nolu denklemde verilmiştir. Diğer yandan ferrohüdrodinamik prensiplerinden ileri gelen manyetik alan sayısı  $Mn_F$  ise denklem (1.13)’ de tanımlanmıştır. Manyetik sayısı,  $Mn_F = 0$ , olduğu durumda ise problem bir kanal içerisinde akan, ısıya bağlı sıradan hidrodinamik akışkan problemine indirgenmektedir. Bu bölümde genel olarak biyomanyetik akışkan kan modelinde manyetik alan sayısı  $Mn_M$  yer almadığından, ferrohüdrodinamik prensibinden kaynaklanan manyetik alan sayısının notasyonu  $Mn_F$  yerine basitçe



Şekil 2.1: Problem konfigürasyonu ve sınır koşulları.

$Mn$  kullanılacaktır. Problem konfigürasyonu ve boyutsuzlaştırılmış sınır koşulları Şekil 2.1' de gösterilmiştir.

Zamandan bağımsız (2.1)-(2.3) nolu süreklilik-momentum-enerji denklemleri, hız bileşenlerinin stream ve vortisite cinsinden ifade edildiği (1.8) nolu formül kullanılarak stream, vortisite ve ısı fonksiyonları türünden aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \psi &= -w \\
 \nabla^2 w &= Re \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} + MnReH \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} \right\} \\
 \nabla^2 T &= PrRe \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} + MnPrReEcH(\varepsilon - T) \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} \\
 &\quad + PrEc \left\{ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

(2.5) nolu denklem sisteminin tek çözümünün olabilmesi için, bilinmeyenler olan stream, vortisite ve ısı fonksiyonlarının uygun sınır şartlarının verilmiş olması gerekmektedir (denklem-ler ve sınır şartları ile problem iyi konumlu olmalıdır). Bu çalışmada, bütün değişkenlerin kanal çıkışında  $x'$  ten bağımsız olduğu (kanal çıkış şartı) kabul edilmiş,  $R = \psi, w, T$  olmak üzere  $\partial R / \partial x = 0$  koşulu alınmıştır. Stream ve ısı fonksiyonlarına ait giriş sınır şartları ile alt ve üst duvarlardaki sınır şartları ve vortisite fonksiyonuna ait giriş şartı her bir problem için ilgili bölümlerde ayrıca belirtilmiştir. Diğer yandan vortisite ( $w$ ) için alt ve üst duvarlarda sınır şartları doğal olarak var olmadığından, bu sınır koşulları stream fonksiyonunun problem bölgesindeki değerleri ile Taylor serisi açılımı kullanılarak elde edilecektir.

### 2.1.1 Vortisite Sınır Koşullarının Bulunması

Problemi modelleyen denklemler, stream-vortisite-ısı fonksiyonları cinsinden yazıldığında, yukarıda da bahsedildiği üzere vortisite için alt ve üst sınır bölgelerinde sınır koşulları bilinmemektedir. Bu durumda vortisite sınır koşulları genellikle stream fonksiyonunun iç bölgedeki değerleri kullanılarak Taylor serisi yardımıyla hesaplanır. Bu çalışmada, problem bölgesi  $x$ -yönünde ve

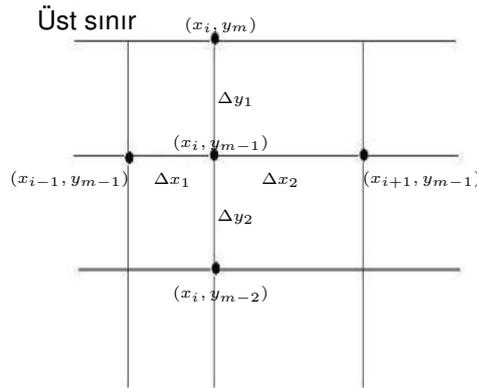
$y$ -yönünde eşit olmayan aralıklarla elemanlara bölünmüştür. Bunun için herhangi bir sınır noktasında  $x$ -yönünde  $(\Delta x_1, \Delta x_2)$  ve  $y$ -yönünde  $(\Delta y_1, \Delta y_2)$  uzaklıklarında yer alan dört noktadaki stream fonksiyonu değerleri kullanılarak vortisite sınır değerleri hesaplanmıştır (Şekil 2.2). Vortisite için  $(x_i, y_m)$  noktasındaki sınır koşulu,  $(x_{i-1}, y_{m-1})$ ,  $(x_i, y_{m-1})$ ,  $(x_{i+1}, y_{m-1})$  ve  $(x_i, y_{m-2})$  noktalarındaki stream fonksiyonu değerlerinin kullanıldığı en genel

$$\omega_{i,m} = a_1\psi_{i-1,m-1} + a_2\psi_{i,m-1} + a_3\psi_{i+1,m-1} + a_4\psi_{i,m-2} \quad (2.6)$$

formülünden  $(\nabla^2\psi = -\omega)$  yararlanılarak hesaplanmıştır. Buradaki  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  ve  $a_4$  katsayıları aşağıda verilmiştir:

$$a_1 = \frac{-2}{\Delta x_1(\Delta x_1 + \Delta x_2)}, \quad a_2 = \frac{2}{\Delta x_1\Delta x_2} + \frac{2}{\Delta y_2(2\Delta y_1 + \Delta y_2)}, \quad (2.7)$$

$$a_3 = \frac{-2}{\Delta x_2(\Delta x_1 + \Delta x_2)}, \quad a_4 = \frac{-2}{\Delta y_2(2\Delta y_1 + \Delta y_2)}.$$



Şekil 2.2: Vortisite sınır koşulu hesaplanmasında kullanılan noktalar

## 2.2 Nümerik Çözüm Yöntemleri

İki paralel plaka arasında ve manyetik alan etkisinde, elektrikçe iletken olmayan biyomanyetik akışkan akım denklemleri (2.5) hem sonlu elemanlar hem de sınır elemanları metodları kullanılarak çözülmüştür. Sonlu elemanlar metodunun hassas çözüm vermesinden, sınır elemanları metodunun ise küçük boyutlu lineer sistemler vererek bilgisayar zamanı ve hafızası bakımından ekonomik ve hızlı sonuç verme avantajlarından yararlanılmıştır. Sınır elemanları metodunda, denklemlerde lineer olmayan terimleri sağ taraf fonksiyonu gibi kabul eden ve Laplace denkleminin temel çözümünü kullanan karşılıklı sınır elemanları metodu (DRBEM) kullanılmıştır. Her iki metodun karşılaştırılması nümerik sonuçlar kısmında Bölüm 2.3.1 (Problem 1)'de ayrıntılı olarak verilmiştir.

## 2.2.1 Karşılıklı Sınır Elemanları Metodunun (DRBEM) Zamandan Bağımsız Biyomanyetik Sıvı Akış Problemine Uygulanışı

Biyomanyetik akışkan modeli, Denklem (2.5)' de verildiği üzere stream, vortisite ve ısı fonksiyonlarını içeren lineer olmayan kuple denklemlerdir ve bu denklemler ardışık olarak çözülecektir. İlk olarak stream fonksiyonu denklemini vortisite için bir başlangıç değeri verilerek karşılıklı sınır elemanları metodu ile çözülür. Böylece stream fonksiyonunun değerleri hem problemin tanımlandığı bölgenin içinde hem de bölgenin sınırlarında elde edilir. Bu değerler, bir takım radyal baz fonksiyonlarının yardımı (polinom tipinde) ile stream fonksiyonun türev değerlerinin hesaplanmasında kullanılır. Bu türev değerleri vortisite denklemine yerleştirildiğinde ve ısı için bir başlangıç değeri verildiğinde, vortisite denklemini doğrusallaştır ve yine DRBEM metodu kullanılarak çözülür. Vortisite değerleri elde edildikten sonra, aynı şekilde, ısı denklemini de lineer denkleme indirgenir ve yine DRBEM kullanılarak çözülür. Bu işlem ardışık iki iterasyonda elde edilen stream, vortisite ve ısı fonksiyonlarının değerleri arasındaki fark belli bir toleranstan az olana kadar devam ettirilir.

Karşılıklı sınır elemanları metodunun amacı problem bölgesinde tanımlanan denklemleri sadece sınır integralleri içeren integral denklemlerine indirgemektir (Brebbia vd., 1992). Bunun için sistem (2.5)' de Laplace terimi dışındaki bütün terimler eşitliklerin sağ tarafına alınır ve homojen olmayan sağ taraf fonksiyonu olarak değerlendirilir. Böylece, sistem (2.5)'deki denklemler Laplace fonksiyonunun iki boyutlu temel çözümü,  $u^* = \frac{1}{2\pi} \ln(1/r)$ , ile çarpıldıktan ve "Green's second identity" uygulandıktan sonra hem sınır hem de tüm bölge üzerinde tanımlı integral denklemlerine indirgenirler, (Brebbia vd., 1992):

$$c_i \psi_i + \int_{\Gamma} (q^* \psi - u^* \frac{\partial \psi}{\partial n}) d\Gamma = - \int_{\Omega} (-w) u^* d\Omega \quad (2.8)$$

$$c_i w_i + \int_{\Gamma} (q^* w - u^* \frac{\partial w}{\partial n}) d\Gamma = - \int_{\Omega} \left( Re \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right. \quad (2.9)$$

$$\left. + Mn Re H \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right) u^* d\Omega$$

$$c_i T_i + \int_{\Gamma} (q^* T - u^* \frac{\partial T}{\partial n}) d\Gamma = - \int_{\Omega} \left\{ Pr Re \left( \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right. \quad (2.10)$$

$$\left. + Mn Pr Re Ec H (\varepsilon - T) \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right.$$

$$\left. + Pr Ec \left( \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right\} u^* d\Omega .$$

Burada  $i$  indisi kaynak noktasını,  $q^* = \partial u^* / \partial n$ , ve  $\Gamma$  problemin tanımlandığı  $\Omega$  bölgesinin sınırını göstermektedir. Sabit bir sayı olan  $c_i = \theta_i / 2\pi$  ve  $\theta_i$  ise kaynak noktasındaki iç açı olarak tanımlanmaktadır.

Sağ taraftaki alan integrallerini, sınır integrallerine dönüştürebilmek için (2.8), (2.9) ve (2.10) nolu denklemlerin her iki tarafına da uygulanacak olan bir yaklaşım (approximation) tanıtılır.

Buradaki temel fikir sağ tarafta yer alan tüm terimleri bir takım radyal baz fonksiyonlarının ağırlıklı toplamları cinsinden ifade etmektir. Böylece, denklem (2.8), (2.9) ve (2.10)' ün sağ taraf fonksiyonları sırasıyla

$$b_1 = -w = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j(x, y) \quad (2.11)$$

$$b_2 = Re\left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + MnReH\left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x}\right) = \sum_{j=1}^{N+L} \beta_j f_j(x, y) \quad (2.12)$$

ve

$$b_3 = PrRe\left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + MnPrReEcH(\varepsilon - T)\left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \quad (2.13)$$

$$+ PrEc\left(\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right)^2\right) = \sum_{j=1}^{N+L} \gamma_j f_j(x, y)$$

şeklinde ifade edilir. Yukarıdaki sonlu toplam formülleri, sadece geometriye bağlı radyal baz (koordinat) fonksiyonlarını,  $f_j$ , içermektedir ve dahası bu fonksiyonlar ile özel (particular) çözümler,  $\hat{u}_j$ , birbirlerine  $\nabla^2 \hat{u}_j = f_j$  denklemi ile bağlantılıdır, (Brebbia vd., 1992). Bu özel çözümler baz fonksiyonlarının geriye doğru integrallerini alarak elde edilir. Denklemlerde yer alan  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$  ve  $\gamma_j$ , sonradan belirlenecek olan sabit katsayılardır.  $N$  ve  $L$  sırasıyla sınır ve iç nokta sayılarını göstermektedir. Radyal baz fonksiyonlarının bu şekilde tanıtılması sonucunda, denklemlerin sağ tarafı da Laplace operatörü ile temel çözümün çarpımına dönüşmüştür. Böylece DRBEM fikrinin aynı şekilde sağ tarafa da uygulanması ile sadece sınır integrallerini içeren integral denklemleri

$$c_i \psi_i + \int_{\Gamma} (q^* \psi - u^* \frac{\partial \psi}{\partial n}) d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left[ c_i \hat{u}_{ji} + \int_{\Gamma} (q^* \hat{u}_j - u^* \hat{q}_j) d\Gamma \right] \quad (2.14)$$

$$c_i w_i + \int_{\Gamma} (q^* w - u^* \frac{\partial w}{\partial n}) d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \beta_j \left[ c_i \hat{u}_{ji} + \int_{\Gamma} (q^* \hat{u}_j - u^* \hat{q}_j) d\Gamma \right] \quad (2.15)$$

$$c_i T_i + \int_{\Gamma} (q^* T - u^* \frac{\partial T}{\partial n}) d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \gamma_j \left[ c_i \hat{u}_{ji} + \int_{\Gamma} (q^* \hat{u}_j - u^* \hat{q}_j) d\Gamma \right] \quad (2.16)$$

elde edilir. Burada  $\hat{q}$  özel çözümün normal türevi,  $\hat{q} = \partial \hat{u}_j / \partial n$  göstermektedir.

Stream, vortisite ve ısı fonksiyonları ve bunların normal türevleri sınırda  $N$  tane lineer eleman kullanılarak ayrıştırıldığında ( $\Gamma$  sınırı  $N$  tane lineer  $\Gamma_j$  elemanına bölündüğünde), (2.14)-(2.16) denklemlerinin matris-vektör formları sırasıyla

$$H\psi - G \frac{\partial \psi}{\partial n} = (H\hat{U} - G\hat{Q})\alpha, \quad (2.17)$$

$$(Hw - G \frac{\partial w}{\partial n}) = (H\hat{U} - G\hat{Q})\beta \quad (2.18)$$

ve

$$(HT - G \frac{\partial T}{\partial n}) = (H\hat{U} - G\hat{Q})\gamma \quad (2.19)$$

ayrıklaştırılmış sistemleri ile ifade edilir.  $H$  ve  $G$  matrislerinin bileşenleri, sırasıyla  $u^*$  ve  $g^*$  fonksiyonlarının her bir sınır elemanı üzerinde integrali alınarak hesaplanır. Bu bileşenler

$$H_{ij} = c_i \delta_{ij} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln\left(\frac{1}{r}\right) \right) d\Gamma_j, \quad H_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N H_{ij}$$

$$G_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma_j, \quad G_{ii} = \frac{l}{2\pi} (\ln(2/l) + 1)$$

olarak verilmektedir. Burada  $r$ ,  $i$ -noktası ile  $j$ -elemanı arasındaki uzaklık,  $l$  elemanın uzunluğu ve  $\delta_{ij}$  Kronecker delta fonksiyonudur.  $\hat{U}$  ve  $\hat{Q}$  matrisleri, sırasıyla  $\hat{u}_j$  ve  $\hat{q}_j$  vektörlerini sütun olarak elde edilen matrislerdir. (2.11)-(2.13) denklemlerindeki sağ taraf fonksiyonları  $b_1$ ,  $b_2$  ve  $b_3$ 'ün  $N + L$  sınır ve iç noktalarında kolokasyonu ile elde edilen  $F\alpha = b_1$ ,  $F\beta = b_2$  ve  $F\gamma = b_3$  sistemlerinden  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$  vektörleri hesaplanır ve (2.17)-(2.19) sistemlerinde yerleştirilir. Sonuçta elde edilen matris-vektör sistemleri aşağıda verilmektedir.

$$H\psi - G \frac{\partial \psi}{\partial n} = (H\hat{U} - G\hat{Q})F^{-1}\{-w\}, \quad (2.20)$$

$$(Hw - G \frac{\partial w}{\partial n}) = (H\hat{U} - G\hat{Q})F^{-1} \left\{ Re\left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + Mn ReH\left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x}\right) \right\} \quad (2.21)$$

ve

$$(HT - G \frac{\partial T}{\partial n}) = (H\hat{U} - G\hat{Q})F^{-1} \left\{ Pr Re\left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + Mn Pr Re Ec H(\varepsilon - T)\left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + Pr Ec\left(\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right)^2 \right) \right\}. \quad (2.22)$$

Burada  $F$ , boyutu  $(N + L) \times (N + L)$  olan ve koordinat  $f_j$  fonksiyonlarını sütun olarak alan matristir. Bu denklemler lineer olmayan ve kuple denklemlerdir. Bu yüzden, çözüm için ardışık (iterative) bir prosedüre ihtiyaç duyulmaktadır. Bu ardışık prosedür (2.20)-(2.22) sistemlerini her iterasyonda lineer sistem denklemlerine indirgemektedir.

*Ardışık çözüm prosedürü:*

- (i) Çözüme vortisite ve ısı fonksiyonları için birer başlangıç değeri alınarak başlanır, şöyle ki  $w^0$ ,  $T^0$  başlangıç vektörleri kullanılır.
- (ii) Stream fonksiyon sistemi (2.20),  $w = w^0$  alınarak çözülür. Vortisitenin bu başlangıç değeri ile sağ taraf sabit bir vektör olur. Dahası sınır koşullarının eklenmesi ile bir lineer denklem sistemi,  $A\tilde{\psi} = b$ , oluşur. Bu sistemde  $\tilde{\psi}$  vektörü, stream fonksiyonunun ve türevinin sınır değerlerini ve stream fonksiyonunun iç noktalardaki değerini içermektedir.

- (iii) Stream fonksiyonunun hem sınır hem de iç noktadaki değerleri  $A\tilde{\psi} = b$  sistemi çözülerek elde edilir. Türev değerlerinin bulunmasında ise yine koordinat fonksiyonları,  $f_j$ , kullanılır. Stream fonksiyonu koordinat fonksiyonlarının ağırlıklı toplamı olarak yazılır, şöyle ki,

$$\psi = \sum_{j=1}^{N+L} \tilde{\alpha}_j f_j(x, y) .$$

Burada  $\tilde{\alpha}_j$  bilinmeyen katsayılarıdır ve bu denklem  $\psi = F\tilde{\alpha}$  şeklinde yeniden yazılabilir. Böylece stream fonksiyonunun  $x$  ve  $y$ -türevleri sırasıyla şöyle hesaplanır:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1} \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} F^{-1} \psi .$$

Bu türev değerleri vortisite ve ısı denklemlerinin çözümünde kullanılacaktır.

- (iv) Vortisite denklemi (2.21)'in çözümü için öncelikle  $T = T^0$  alınır ve madde (iii)' te bulunan stream fonksiyonunun türev değerleri kullanılır. Dahası, vortisite ve ısı fonksiyonları yine koordinat fonksiyonları,  $f_j$ , cinsinden ifade edilir, yani

$$w = \sum_{j=1}^{N+L} \tilde{\beta}_j f_j(x, y), \quad T = \sum_{j=1}^{N+L} \tilde{\gamma}_j f_j(x, y) .$$

Burada  $\tilde{\beta}_j$  ve  $\tilde{\gamma}_j$  bilinmeyen katsayılarıdır ve bu denklemler  $w = F\tilde{\beta}$  ve  $T = F\tilde{\gamma}$  şeklinde de yazılabilir. Böylece, vortisite ve ısı fonksiyonlarının  $x$  ve  $y$ -türevleri sırasıyla şöyle hesaplanır:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1} w, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} F^{-1} w, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1} T, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} F^{-1} T .$$

Bu konveksiyon terimleri Denklem (2.21)'de yerine yerleştirildiğinde, bir lineer denklem sistemi

$$\tilde{H}w - G \frac{\partial w}{\partial n} = Cr_0 \quad (2.23)$$

elde edilir. Bu denklemde  $\tilde{H} = H + ReCR_1 + ReCR_2$ ,  $C = -(H\hat{U} - G\hat{Q})F^{-1}$ ,  $R_1 = u \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1}$ ,  $R_2 = v \frac{\partial F}{\partial y} F^{-1}$  ve sağ taraf bilinen vektörü  $r_0$  aşağıdaki gibidir,

$$r_0 = MnReCH \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} F^{-1} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1} \right) T^0 .$$

Sınır koşullarının da eklenmesi ve bilinmeyen vektörünün yeniden sıralanması ile yeni bir lineer denklem sistemi,  $\tilde{A}\tilde{w} = \tilde{b}$ , oluşur. Bu sistem çözüldüğünde, vortisite fonksiyonunun hem sınır hem de iç noktalarındaki değerleri  $\tilde{w}$  vektörü olarak elde edilir. Akışkanlar dinamiğinde genel olarak vortisite fonksiyonunun sınır değerleri açık olarak verilmez. Ancak bu sınır değerleri,  $\nabla^2 \psi = -w$ , denkleminin Taylor seri açılımı yapılarak ve stream fonksiyonun içeriden belli sayıda değeri alınarak Bölüm 2.1.1' deki gibi hesaplanmıştır.

- (v) Madde (iv)' de yapılan işlemlerin aynısı (2.22) nolu ısı denklemine de uygulanır. Böylece, denklem (2.22)

$$\tilde{H}T - G \frac{\partial T}{\partial n} = Cr_1 \quad (2.24)$$

lineer denkleme indirgenir. Bu denklemde  $\tilde{H} = H + ReCR_1 + ReCR_2$ ,  $C = -(H\hat{U} - G\hat{Q})F^{-1}$ ,  $R_1 = Pr u \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1}$ ,  $R_2 = Pr v \frac{\partial F}{\partial y} F^{-1}$  ve sağ taraf bilinen vektörü,

$$r_1 = MnPrReEcCH(u \frac{\partial H}{\partial x} - v \frac{\partial H}{\partial y})(\varepsilon - T^0)$$

$$+ PrEcC((\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} F^{-1} \psi^0 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} F^{-1} \psi^0)^2 + 4(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} F^{-1} \psi^0)^2)$$

olarak tanımlanır. Burada  $\psi^0$  değerleri madde (ii)' de elde edilmiş olan değerlerdir. Sınır koşullarının da eklenmesi ve bilinmeyen vektörünün yeniden sıralanması ile bir lineer denklem sistemi,  $\tilde{A}\tilde{T} = \tilde{b}$ , oluşur. Bu sistemde  $\tilde{T}$  vektörü, ısı fonksiyonunun ve normal türevinin sınır değerlerini ve ısı fonksiyonunun iç noktalarındaki değerlerini içermektedir.

- (vi) Son olarak, (ii)-(v) adımlarını iki ardışık iterasyonda elde edilen  $N + L$  noktadaki stream, vortisite ve ısı değerleri arasındaki fark belli bir toleransa ( $10^{-6}$ ) ulaşana kadar tekrarlanır ve belirlenen toleransa ulaşıncaya kadar iterasyon durdurulur.

## 2.2.2 Sonlu Elemanlar Metodunun (FEM) Zamandan Bağımsız Biyomanyetik Sıvı Akış Problemine Uygulanışı

Bu bölümde, zamana bağlı olmayan biyomanyetik akım denklemleri (2.5) için sonlu elemanlar metodu (FEM) formülasyonu verilecektir. FEM, düzgün olmayan geometriye sahip problemlerde, karmaşık sınır koşullarına sahip problemlerde ve lineer olmayan problemlerde diğer metodlara kıyasla hassas çözüm verme yönünden üstünlük sağlayan bir yöntemdir. Sonlu elemanlar metodunda temel fikir, sürekli fonksiyonları bölgesel sürekli fonksiyonlar (genellikle polinomlar) ile temsil etmektir. Böylece eleman içerisinde hesaplanması istenen bilinmeyen değeri o elemanın noktalarındaki (nodlardaki) değerler kullanılarak interpolasyon ile bulunur. Bu nedenle sonlu elemanlar metodunda bilinmeyen ve hesaplanması istenen uzay türevleri nodlardaki değerlerdir. Bu yöntemde, ilk olarak problem bölgesi elemanlara bölünür (sonlu elemanlar). Bu elemanlar metodunun uygulanışına ve problemin fiziğine uygun olarak üçgen, dörtgen veya herhangi bir basit geometrik şekil olabilmektedir. Denklemin ağırlaştırılmış formülasyonu elde edilir. Bunun için denklem bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılıp problem bölgesinde integrali alınıp sıfıra eşitlenir. Elemanlar üzerinde bilinmeyen çözüm için yaklaşım fonksiyonları (genellikle polinomlar) oluşturulur. Diferansiyel denklemlerin eleman seviyesinde integral denklemlerine çevrilmesinden sonra, eleman nodlarındaki değerler cinsinden tekrar birleştirilerek (assembly) problem bölgesi için ayrıklaştırılmış matris-vektör denklemleri elde edilir. Problemden tanımlanan sınır değerler empoze edilerek en son elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülür ve böylece bilinmeyen nodlardaki değerleri hesaplanmış olur (Reddy, 2006).

İlk olarak (2.5) sistemindeki her üç denklem de ele alınarak bu denklemlerin eleman bölgelerine indirgenmiş formu bir örnek eleman ( $A_e$ ) üzerinde elde edilecektir. İndirgenmiş form elde etmek için öncelikle denklemler birer ağırlık fonksiyonu ( $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ) ile çarpılır. Buradaki ağırlık fonksiyonlarının,  $x$  ve  $y$ 'ye göre türevlenebilir olduğu kabul edilmektedir. Daha sonra eleman üzerinde integral alınır:

$$\begin{aligned}
& \int \int_{A_e} \omega_1 (\nabla^2 \psi + w) dA_e = 0 \\
& \int \int_{A_e} \omega_2 \left( \nabla^2 w - Re \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} - MnReH \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} \right\} \right) dA_e = 0 \\
& \int \int_{A_e} \omega_3 \left( \nabla^2 T - PrRe \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} - MnPrReEcH(\varepsilon - T) \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} \right. \\
& \left. - PrEc \left\{ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right) dA_e = 0.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Gradient (Divergence) teoremi kullanılarak (2.25)'deki denklemlerin indirgenmiş formu aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur:

Stream fonksiyonu için indirgenmiş form denklemi:

$$- \int \int_{A_e} \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dA_e + \int \int_{A_e} \omega_1 w dA_e + \int_{\partial A_e} \omega_1 \frac{\partial \psi}{\partial n} ds = 0 \tag{2.26}$$

Vortisite fonksiyonu için indirgenmiş form denklemi:

$$\begin{aligned}
& - \int \int_{A_e} \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dA_e + MnRe \int \int_{A_e} \omega_2 H \left( \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) dA_e \\
& + Re \int \int_{A_e} \omega_2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dA_e + \int_{\partial A_e} \omega_2 \frac{\partial w}{\partial n} ds = 0
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Isı fonksiyonu için indirgenmiş form denklemi:

$$\begin{aligned}
& \int \int_{A_e} \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) dA_e + PrRe \int \int_{A_e} \omega_3 \left( \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dA_e \\
& + MnPrReEc \int \int_{A_e} \omega_3 H(\varepsilon - T) \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dA_e \\
& + PrEc \int \int_{A_e} \omega_3 \left\{ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dA_e - \int_{\partial A_e} \omega_3 \frac{\partial T}{\partial n} ds = 0.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Gradient teoremi kullanıldığında oluşan (2.26), (2.27) ve (2.28) denklemlerindeki sınır integralleri, Dirichlet sınır koşulu verilen durumlarda şekil fonksiyonlarının sınırlarda tanım gereği 0 olmasından, Neumann sınır koşulu verilen durumda ise homojen Neumann sınır şartı ( $\partial R/\partial x =$

0) olması nedeniyle 0 olmaktadır. Bu çalışmadaki ısı denkleminde stream fonksiyonu, ikinci dereceden türevler içermektedir. Bu durum, bilinmeyenler için, en azından stream fonksiyonu için, ikinci dereceden (kuadratik) yaklaşım fonksiyonları kullanımı gerektirmektedir. Kuadratik şekil fonksiyonları kullanıldığında, herhangi bir 'e' elemanı üzerinde tanımlanan  $\psi^e(x, y)$ ,  $w^e(x, y)$  and  $T^e(x, y)$  yaklaşım fonksiyonları ikinci dereceden polinom olarak alınmaktadır.

$\psi^e(x, y)$ ,  $w^e(x, y)$  ve  $T^e(x, y)$  fonksiyonları noktasal  $\psi_i^e$ ,  $w_i^e$  ve  $T_i^e$  değerleri kullanılarak

$$\psi^e(x, y) = \sum_{i=1}^6 N_i^e(x, y)\psi_i^e, \quad w^e(x, y) = \sum_{i=1}^6 N_i^e(x, y)w_i^e, \quad T^e(x, y) = \sum_{i=1}^6 N_i^e(x, y)T_i^e \quad (2.29)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada şekil fonksiyonları (shape ya da trial functions)  $N_i^e$  ( $i = 1, \dots, 6$ ), alan koordinatları üzerinden aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$N_1^e = \xi_1(2\xi_1 - 1), \quad N_2^e = \xi_2(2\xi_2 - 1), \quad N_3^e = \xi_3(2\xi_3 - 1) \quad (2.30)$$

$$N_4^e = 4\xi_1\xi_2, \quad N_5^e = 4\xi_2\xi_3, \quad N_6^e = 4\xi_1\xi_3.$$

Buradaki  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  ve  $\xi_3$  fonksiyonları lineer yaklaşım ele alındığında kullanılan birinci dereceden  $\xi_i = A_i/A_e$ ,  $i = 1, 2, 3$  olmak üzere alan koordinatlarıyla hesaplanan lineer şekil fonksiyonlarıdır. Burada  $A_e$  üçgenin alanı,  $A_i$  ise üçgenin ağırlık merkezi ile  $i$ 'inci nod köşesinin birleştirilmesi sonucunda elde edilen üçgensel bölgenin alanıdır.

Galerkin yaklaşımı ele alındığında, ağırlık fonksiyonları  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , şekil fonksiyonları ile aynı alınır. Yukarıda tanımlanan kuadratik şekil fonksiyonları indirgenmiş (2.26, 2.27 ve 2.28) denklemlerinde yerine konulursa, sınır integralleri de düşürülerek aşağıdaki eleman integral denklemleri elde edilir:

Stream fonksiyonu denklemi:

$$-\int \int_{A_e} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dA_e + \int \int_{A_e} N_i w dA_e = 0. \quad (2.31)$$

Vortisite fonksiyonu denklemi:

$$-\int \int_{A_e} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dA_e + MnRe \int \int_{A_e} N_i H \left( \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) dA_e \quad (2.32)$$

$$+ Re \int \int_{A_e} N_i \left( \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dA_e = 0$$

Isı fonksiyonu denklemi:

$$\int \int_{A_e} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) dA_e + PrRe \int \int_{A_e} N_i \left( \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dA_e \quad (2.33)$$

$$+ MnPrReEc \int \int_{A_e} N_i H (\varepsilon - T) \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dA_e$$

$$+ PrEc \int \int_{A_e} N_i \left\{ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dA_e = 0$$

Bir eleman üzerinde tanımlanmış integral denklemleri (2.31)- (2.33), integraller alındıktan sonra o eleman için  $6 \times 6$  matris-vektör denklemlerine dönüşür. Bütün elemanlar için birleştirme (assembly) işleminden sonra problem bölgesindeki toplam nokta sayısı boyutunda aşağıda verilen matris-vektör denklemleri elde edilir

$$[K] \{\psi\} = [M] \{w\} \quad (2.34)$$

$$- [K] \{w\} - Re [A] \{w\} = MnRe \{F_3\} \quad (2.35)$$

$$- [K] \{T\} - PrRe [A] \{T\} + MnPrReEc [A_3] \{T\} = MnPrReEc \{F_1\} + PrEc \{F_2\}. \quad (2.36)$$

Buradaki matrisler,

$$\begin{aligned} [K] &= \sum_{e=1}^{M_e} \int_{A_e} \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) dA_e \\ [A] &= \sum_{e=1}^{M_e} \int_{A_e} N_i^e \left[ \left( \sum_{k=1}^6 \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \psi_k^e \right) \frac{\partial N_j^e}{\partial x} - \left( \sum_{k=1}^6 \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \psi_k^e \right) \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right] dA_e \\ [A_3] &= \sum_{e=1}^{M_e} \int_{A_e} N_i^e \left[ \sum_{k=1}^6 \left( \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \psi_k^e \right) \sum_{l=1}^6 \left( N_l^e H_l^e \frac{\partial H_l^e}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^6 \left( \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \psi_k^e \right) \sum_{l=1}^6 \left( N_l^e H_l^e \frac{\partial H_l^e}{\partial y} \right) \right] N_j^e dA_e \\ [M] &= \sum_{e=1}^{M_e} \int_{A_e} N_i^e N_j^e dA_e, \quad i, j = 1, \dots, 6 \end{aligned} \quad (2.37)$$

şeklinde ve sağ taraf vektörleri de aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} \{F_1\} &= \sum_{e=1}^{M_e} \int_{A_e} \left[ \sum_{k=1}^6 \left( \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \psi_k^e \right) \sum_{l=1}^6 \left( N_l^e H_l^e \frac{\partial H_l^e}{\partial x} \right) - \sum_{k=1}^6 \left( \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \psi_k^e \right) \sum_{l=1}^6 \left( N_l^e H_l^e \frac{\partial H_l^e}{\partial y} \right) \right] N_i^e dA_e \\ \{F_2\} &= \sum_{e=1}^{M_e} \int_{A_e} \left[ \left( \sum_{l=1}^6 \frac{\partial^2 N_k^e}{\partial y^2} \psi_k^e - \sum_{l=1}^6 \frac{\partial^2 N_k^e}{\partial x^2} \psi_k^e \right)^2 + 4 \left( \sum_{l=1}^6 \frac{\partial^2 N_k^e}{\partial x \partial y} \psi_k^e \right)^2 \right] N_i^e dA_e \\ \{F_3\} &= \sum_{e=1}^{M_e} \int_{A_e} \left[ \sum_{k=1}^6 \left( \frac{\partial N_k^e}{\partial y} T_k^e \right) \sum_{l=1}^6 \left( N_l^e H_l^e \frac{\partial H_l^e}{\partial x} \right) - \sum_{k=1}^6 \left( \frac{\partial N_k^e}{\partial x} T_k^e \right) \sum_{l=1}^6 \left( N_l^e H_l^e \frac{\partial H_l^e}{\partial y} \right) \right] N_i^e dA_e, \\ &i = 1, \dots, 6. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Burada  $\sum_{e=1}^{M_e}$  toplamı bütün problem bölgesindeki elemanlarının noktasal değerlerinin birleşmesini (assembly) göstermektedir. Elde edilen (2.34), (2.35) ve (2.36) nolu cebirsel denklemler lineer olmayan terimler içerdiği için ardışık olarak tarafımızca yazılan bir MATLAB kodu ile çözülür. Öncelikle, vortisite için bir başlangıç değeri alınarak stream fonksiyonu denklemi (2.34) çözülür. (2.7) nolu denklemde verilen formül ile vortisite sınır koşulları hesaplanır, ve bunlar vortisite denkleminin (2.35) çözümünde kullanılır. Son olarak hesaplanan stream fonksiyonu ve vortisite değerleri (2.36) nolu denklemin çözümünde kullanılır ve karşılık gelen ısı değerleri hesaplanır. Bu işlem iki ardışık iterasyonda problem bölgesindeki bütün nodlar için stream, vortisite ve ısı değerleri arasındaki fark belli bir toleransa ( $10^{-6}$ ) ulaşana kadar tekrarlanır ve belirlenen toleransa ulaşıncaya iterasyon durdurulur.

### 2.2.3 Sonlu Elemanlar Metodunun Zamana Bağlı ve Elektrikçe İletken Olmayan Biyomanyetik Sıvı Akış Problemlerine Uygulanışı

Bu bölümde, zamana bağlı elektrikçe iletken olmayan biyomanyetik kan akışı ve ısı transferi denklemleri için FEM formulasyonu verilecektir. Zamandan bağımsız biyomanyetik akış denklemlerine (2.5) zaman türevlerinin eklenmesi ile zamana bağlı denklemler elde edilmektedir. Böylece, zamana bağlı temel denklemler boyutsuzlaştırılmış olarak, stream fonksiyonu, vortisite ve ısı fonksiyonu türünden aşağıdaki şekilde verilmiştir (kanın elektrikçe iletken olmadığı varsayıldığında Bölüm 1' de verilen (1.9)-(1.11) nolu denklemler aşağıdaki forma indirgenir), (Tzirtzilakis, 2008b):

$$\nabla^2 \psi = -w$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla^2 w - Re \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} + MnReH \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} \right\}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T - Re \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} + MnReEcH(\varepsilon + T) \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} \quad (2.39)$$

$$+ Ec \left\{ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\}.$$

Zamana bağlı stream, vortisite ve ısı yaklaşım fonksiyonları bir eleman boyunca

$$\psi(x, y, t) \approx \sum_{j=1}^6 \psi_j^e(t) N_j^e(x, y), \quad w(x, y, t) \approx \sum_{j=1}^6 w_j^e(t) N_j^e(x, y), \quad T(x, y, t) \approx \sum_{j=1}^6 T_j^e(t) N_j^e(x, y) \quad (2.40)$$

şeklinde alınmıştır. Burada  $\psi_j^e(t)$ ,  $w_j^e(t)$  ve  $T_j^e(t)$ ;  $(x_j, y_j, t)$  noktasında verilen zamana bağlı noktasal değerlerdir ve önceden verildiği üzere  $N_j^e(x, y)$  fonksiyonları bir eleman üzerindeki şekil fonksiyonlarıdır. Genel denklemler, zamana bağlı olmayan durumda olduğu gibi, Galerkin yaklaşımı doğrultusunda şekil fonksiyonları ile çarpılıp, divergence teoremi uygulanınca Laplace

terimindeki türev dereceleri azalmaktadır. Elde edilen eleman matrisleri tüm elemanlar için birleşme işlemi gerçekleştirildikten sonra matris-vektör formunda aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$[K] \{\psi\} = [M] \{w\} \quad (2.41)$$

$$[M] \{\dot{w}\} + [K] \{w\} + Re[A] \{w\} = MnRe \{F_3\} \quad (2.42)$$

$$[M] \{\dot{T}\} + \frac{1}{Pr} [K] \{T\} + Re[A] \{T\} - MnReEc[A_3] \{T\} = MnReEc\epsilon \{F_1\} + Ec \{F_2\}. \quad (2.43)$$

Denklemlerdeki nokta ‘.’ noktasal  $w$  ve  $T$  değerleri için zaman türevini göstermektedir. Denklem sistemi (2.41)-(2.43) zamana bağlı türevler içerdiğinden, denklemlerin zaman integrasyonunda, koşulsuz stabil olan geri farklar (backward difference) integrasyonu yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemde zaman türevi

$$\dot{f}_{s+1} = \frac{f_{s+1} - f_s}{\Delta t}$$

formülü kullanılarak açılır. Sonuç olarak zamana bağlı (2.41)-(2.43) nolu denklemlerinin zamana göre ayrıklaştırılmış FEM cebirsel denklemleri aşağıdaki şekilde olur:

$$[K] \{\psi\}_{s+1} = [M] \{w\}_s$$

$$[\hat{K}_1] \{w\}_{s+1} = \{\hat{F}_1\} \quad (2.44)$$

$$[\hat{K}_2] \{T\}_{s+1} = \{\hat{F}_2\}.$$

Yukarıdaki eşitliklerin sol tarafında yer alan matrisler

$$[\hat{K}_1] = [M] + \Delta t[K] + \Delta t Re[A] \quad (2.45)$$

$$[\hat{K}_2] = [M] + \frac{\Delta t}{Pr} [K] + \Delta t Re[A] - \Delta t MnReEc[A_3]$$

şeklinde, sağ taraf vektörleri  $\{\hat{F}_1\}$  ve  $\{\hat{F}_2\}$  ise

$$\{\hat{F}_1\} = \Delta t MnRe \{F_3\} + [M] \{w\}_s$$

$$\{\hat{F}_2\} = \Delta t MnReEc\epsilon \{F_1\} + \Delta t Ec \{F_2\} + [M] \{T\}_s$$

şeklinde tanımlanmıştır. Buradaki  $K$ ,  $A$ ,  $M$ ,  $A_3$  matrisleri ile  $F_1$ ,  $F_2$  ve  $F_3$  vektörlerin tanımları Bölüm 2.2.2’ de ((2.37)-(2.38)) verilmiştir. Yukarıda verilen cebirsel denklemler Bölüm 2.2.2’ de ayrıntıları verilen ardışık yöntem kullanılarak ve zaman türevlerinin de eklenmesi ile geliştirilen sparse solver fonksiyonu içeren MATLAB programıyla çözülmektedir.

## 2.3 Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde, düz bir kanal içerisinde üç farklı biyomanyetik akışkan problemi ele alınmış ve elde edilen sonuçlar stream fonksiyonu, vortisite ve ısı eşeğirileri türünden gösterilmiştir. Prob-

lem 2.3.1' de zamandan bağımsız, elektrikçe iletken olmayan biyomanyetik akışkan ve ısı transferi denklemleri sınır ve sonlu elemanlar yöntemleriyle çözülmüştür. Problem 2.3.2'de ise kan akışı ve ısı değişiminin zamana bağlı olduğu düşünülmüş ve bu problem çözümünde sonlu elemanlar metodu kullanılmıştır. Son problemde, Problem 2.3.3, kanın elektrikçe iletken olduğu kabul edilerek elde edilen ve yine zaman türevi içeren denklemler sonlu elemanlar metoduyla çözülmüştür. Kullanılan fiziksel parametre değerleri, sınır koşulları, eleman sayıları ve zaman adımları her bir problem için ilgili bölümde ayrıca belirtilmiştir.

### 2.3.1 Problem 1: Zamandan Bağımsız ve Elektrikçe İletken Olmayan Biyomanyetik Sıvı Akışı

Bu problemde, iki plaka arasında akan ve dışarıdan uygulanan noktasal manyetik alan kaynağının etkisinde olan zamandan bağımsız elektrikçe iletken olmayan biyomanyetik sıvı akışı incelenmiştir. Genel denklemleri (2.5) nolu sistemde verilen bu problemin çözümü iki efektif nümerik method olan karşılıklı sınır ve sonlu elemanlar metodları (DRBEM ve FEM) kullanılarak çözülmüştür. Her iki yöntemden elde edilen sonuçlar sırasıyla verilecek, ve belli bir durum için de sonuçlar karşılaştırılacaktır.

Problemde akışkan kan olarak düşünülmüş ve parametreler gerçek kan akışı modeline uygun olarak alınmıştır. Şöyle ki,  $\bar{\rho} = 1050 \text{ kg/m}^3$ ,  $\bar{\mu} = 3.2 \times 10^{-3} \text{ kg/ms}$ ,  $\bar{u}_r = 3.81 \times 10^{-2}$ . Plakalar arasındaki uzaklık  $\bar{h} = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$  ve  $\bar{L}/\bar{h} = 10$  olarak alınmıştır. Denklemlerin çözümünde  $Pr = 20$ ,  $\varepsilon = 8$ ,  $Ec = 2.476 \times 10^{-6}$  alınmış ve nümerik simülasyonlar Reynolds sayısı sabit tutularak ( $Re = 50$  DRBEM,  $Re = 150$  DRBEM ve FEM, ve  $Re = 250$  FEM için) farklı manyetik sayıları için test edilmiştir. Problemin tanımlandığı bölge Şekil 2.1' de gösterilmiştir. Burada  $(a, b)$  noktasal manyetik alan kaynağının yerleştirildiği noktadır ve testlerde  $(a, b) = (2.5, -0.05)$ ,  $L = 10$  ve  $h = 1$  olarak alınmıştır.

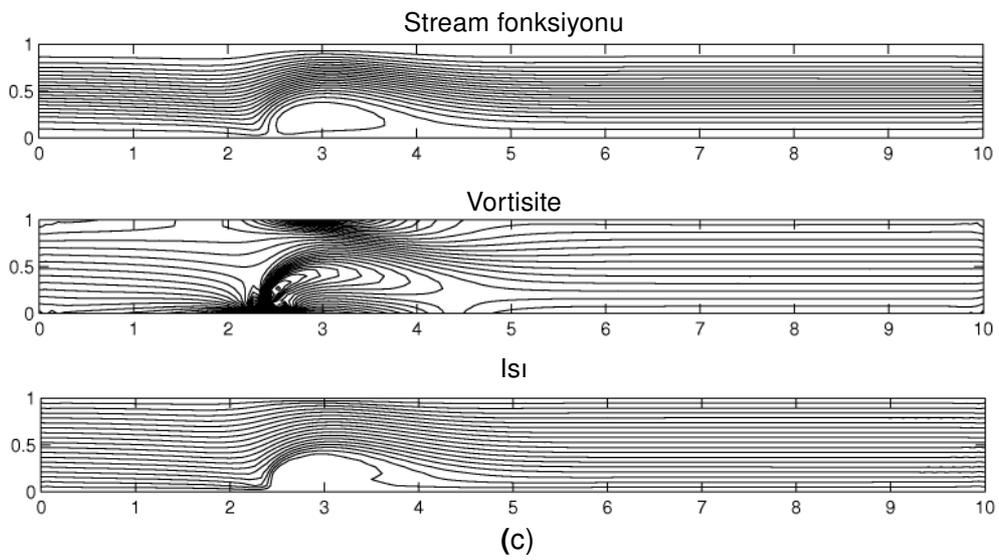
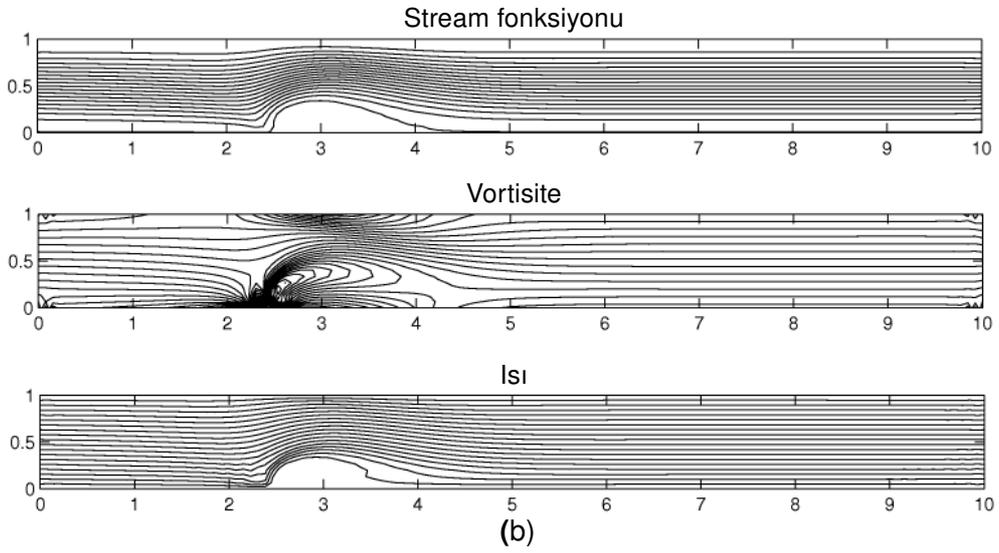
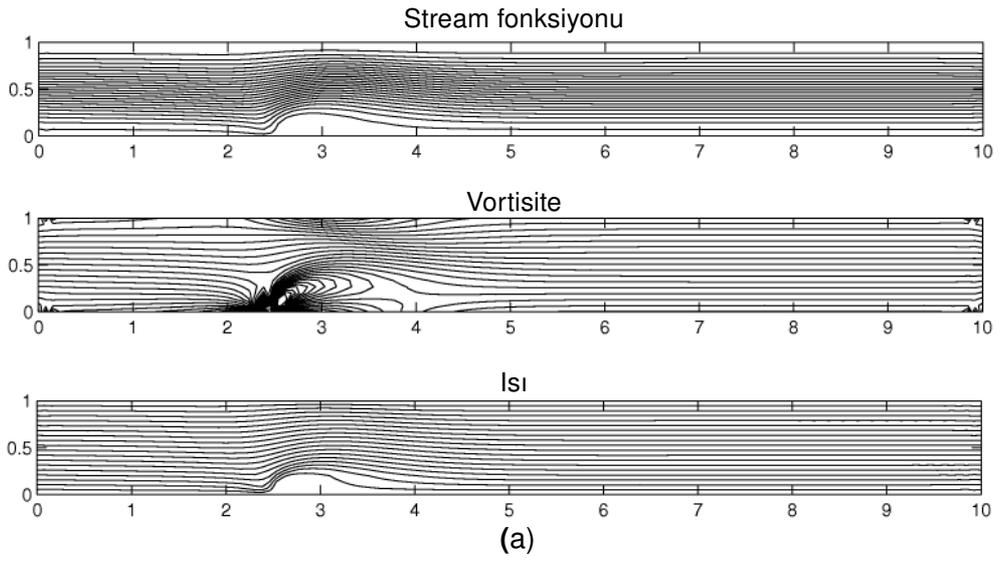
Biyomanyetik akışkan modeli (2.5)' in çözülebilmesi için stream, vortisite ve ısı fonksiyonları için uygun sınır şartlarının verilmesi gerekmektedir. Buna göre, bütün değişkenlerin, kanal çıkışında  $x'$  ten bağımsız olduğu kabul edilmiştir, şöyle ki  $\partial\psi/\partial x = 0$ ,  $\partial w/\partial x = 0$ ,  $\partial T/\partial x = 0$ . Stream ve ısı fonksiyonlarının sınır koşulları

$$\begin{aligned} \psi(0, y) &= 2y^2 - (4/3)y^3, \quad \psi(x, 0) = 0, \quad \psi(x, 1) = 2/3; \\ T(0, y) &= 1 - y, \quad T(x, 0) = 1, \quad T(x, 1) = 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

olarak alınmıştır. Diğer yandan vortisite sınır şartları Bölüm 2.1.1' de anlatıldığı üzere (2.7) formülü kullanılarak bulunur.

#### DRBEM Sonuçları:

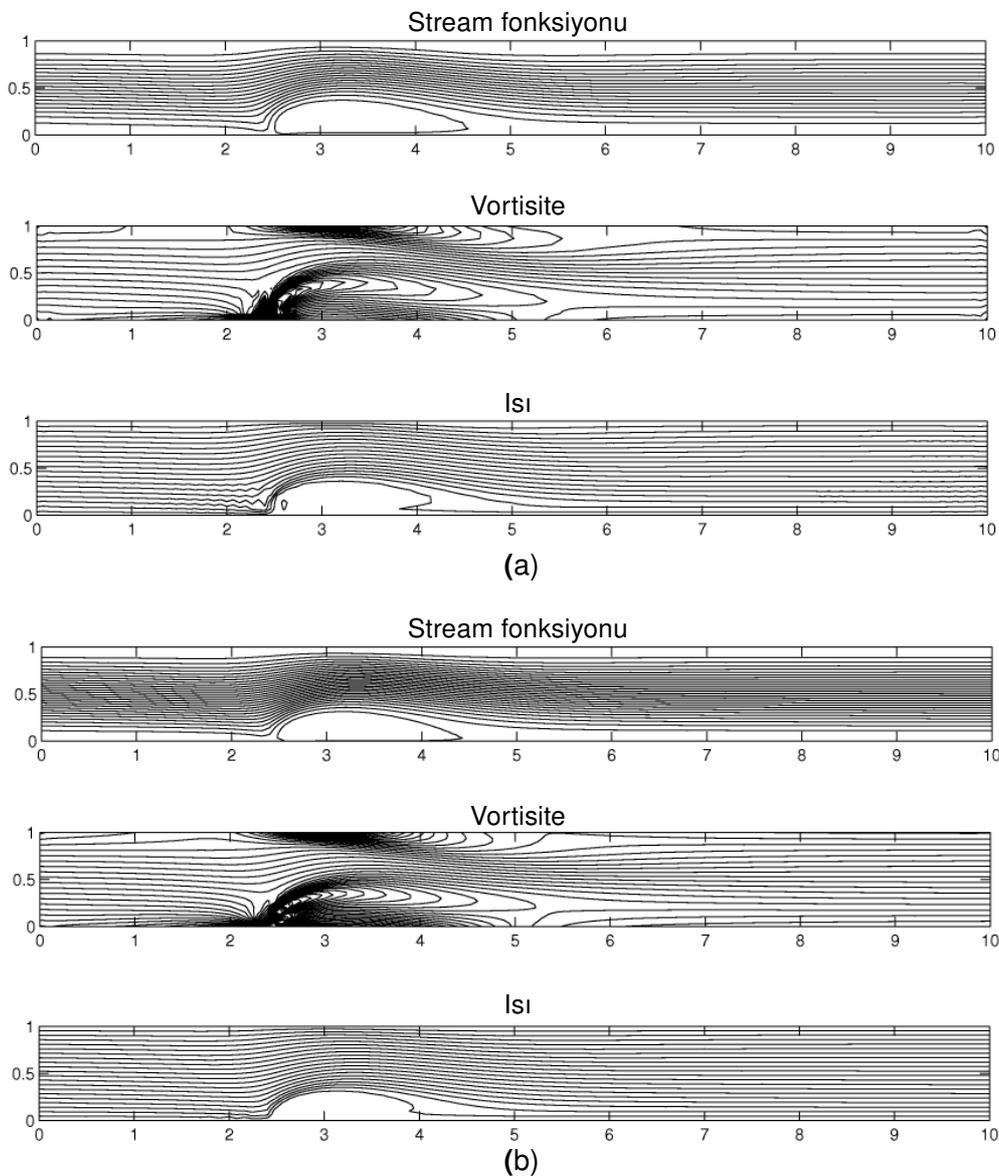
Yukarıda tanımlanan problem bölgesinin sınırları farklı Reynolds-manyetik sayı kombinasyonları,  $Re = 50-Mn = 115, 215$ ,  $Re = 50-Mn = 315$  ve  $Re = 150-Mn = 115$ , için sırasıyla  $N = 290$ ,  $N = 330$  ve  $N = 330$  sayıda eşit aralıklı lineer sınır elemanları kullanılarak ayrıştırılmıştır. Tahmin edildiği üzere Reynolds ve manyetik sayıları arttıkça daha iyi sonuçlar elde



Şekil 2.3: Problem 1. Manyetik alanın stream fonksiyonu, vortisite ve ısı eşeğrileri üzerindeki etkisi (DRBEM):  $Re = 50$ , (a)  $Mn = 115$ , (b)  $Mn = 215$ , (c)  $Mn = 315$ .

edebilmek için daha çok sayıda sınır elamanı alınmalıdır. Hesaplamalarda koordinat fonksiyonları  $f = 1 + r$  olarak alınmıştır.

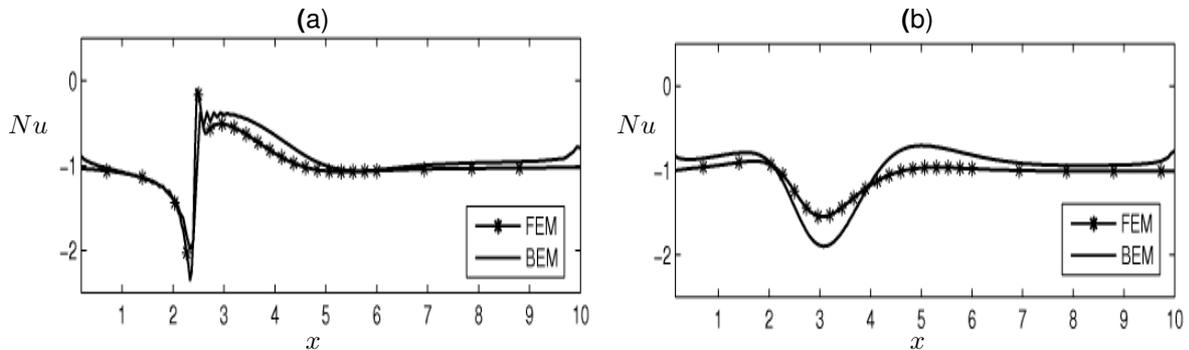
Şekil 2.3' de stream fonksiyonu-vortisite-ısı eşeğrileri sırasıyla (a)  $Mn = 115$ , (b)  $Mn = 215$  ve (c)  $Mn = 315$  manyetik sayıları için sabit bir Reynolds sayısında,  $Re = 50$ , çizilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi noktasal manyetik kaynağın çevresinde alt plaka boyunca, bütün değişkenler için, bir vorteks oluşumuna neden olmaktadır. Bu durum, fiziksel olarak vorteks bölgelerinde akımın durgunlaştığını ve yön değiştirdiğini, akışkanın ısısının da değişmediğini göstermektedir. Dahası, bu noktasal kaynaktan uygulanan manyetik alanın şiddeti arttıkça oluşan vorteksin boyutu  $x$  ve  $y$ -eksenleri boyunca genişlemektedir. Dolayısıyla, durgun akış bölgesi genişlemekte, akışkan ısı da yükselerek alt plakanın ısısına yaklaşmaktadır. Diğer yandan Reynolds



Şekil 2.4: Problem 1. Stream fonksiyonu, vortisite ve ısı eşeğrileri  $Re = 150$ ,  $Mn = 115$ : (a) DRBEM, (b) FEM.

sayısının akışkanın kanal boyunca gösterdiği karakteristiği üzerindeki etkisini görebilmek için manyetik sayısı  $Mn = 115$ ' de tutularak Reynolds sayısı  $Re = 150$ ' e çıkarılmış ve elde edilen sonuçlar stream fonksiyonu-vortisite-ısı eşeğrileri olarak Şekil 2.4(a)' da gösterilmiştir. Aynı manyetik sayısını ihtiva eden Şekil 2.3(a) ile karşılaştırıldığında, Reynolds sayısı büyüdükçe magnet çevresindeki vorteks oluşumu daha da belirgin hale gelmektedir. Öyle ki, vorteks uzunluğu, hem stream fonksiyonu hem de ısı eşeğrilerinde, alt plaka boyunca genişlemiştir. Bu sonuçlar literatürde verilen diğer sonuçlarla (Loukopoulos ve Tzirtzilakis, 2004) uyum içindedir. Sınır ve sonlu elemanlar metodlarının niteliksel karşılaştırılması için aynı parametre değerleri için sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçlar da Şekil 2.4(b)' de verilmiştir. Her iki metod sonuçları genel olarak tüm problem bölgesinde ve özellikle manyetik alan kaynağının çevresinde uyum içerisindedir. Ancak kanal çıkışında sonlu elemanlar yöntemi, karşılıklı elemanlar yöntemine göre daha düzgün sonuç vermektedir. Sınır elemanları yönteminde  $Re = 150$  değeri için çözüm davranışında kanal çıkışının alt ve üst köşelerinde küçük sapmalar görülmüştür. Bu fiziksel olarak beklenen bir davranış değildir. Bu durumun koordinat matrisi  $F'$  nin elemanlarında çok küçük ve çok büyük değerlerin birlikte bulunmasından kaynaklandığı ve tersini alırken hassasiyet kaybının olduğu düşünülmektedir. Ayrıca köşe noktalarında sınır koşullarında ani değişiklik meydana gelmesi de bir etken olarak düşünülmektedir. Ancak bu sapmalar magnetin etkisinden uzak bir noktada olduğu için akış ve ısı profillerinin genel davranışında bir etki yaratmamaktadır. Köşelerde meydana gelen bu sapmalar daha fazla sayıda eleman kullanılarak giderilebilir, ancak karşılıklı sınır elemanları yönteminin avantajı bölge ayrıklaştırma metodlarına kıyasla daha az sayıda elemanla hassas sonuçlar elde etmektir. Öyle ki, Reynolds sayısı  $Re = 150$  durumunda yapılan nümerik simülasyonlarda aynı hassasiyette sonuçlar elde edebilmek için FEM' de 1350 kuadratik sonlu eleman, DRBEM' de ise 330 lineer sınır elemanı kullanılmıştır.

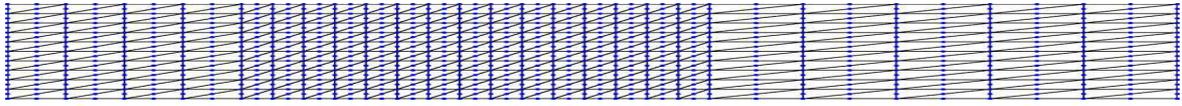
Bu iki metodun niceliksel bir karşılaştırılması da,  $Re = 150$  ve  $Mn = 115$  durumu için, Nusselt sayısı türünden verilmiştir. Alt plaka  $y = 0$  ve üst plaka  $y = 1$  boyunca meydana gelen Nusselt sayısı değişimi,  $Nu = \frac{\partial T}{\partial y}|_{y=0,1}$ , sırasıyla Şekil 2.5(a) ve Şekil 2.5(b)' de gösterilmiştir. Magnet çevresinde ve kanal çıkışı köşelerinde küçük farklar olmasına rağmen kanal genelinde sonuçlar uyum içindedir.



Şekil 2.5: Problem 1. Nusselt sayısı,  $Re = 150$ ,  $Mn = 115$  (a) alt plaka,  $y = 0$ , (b) üst plaka,  $y = 1.0$ .

## FEM Sonuçları:

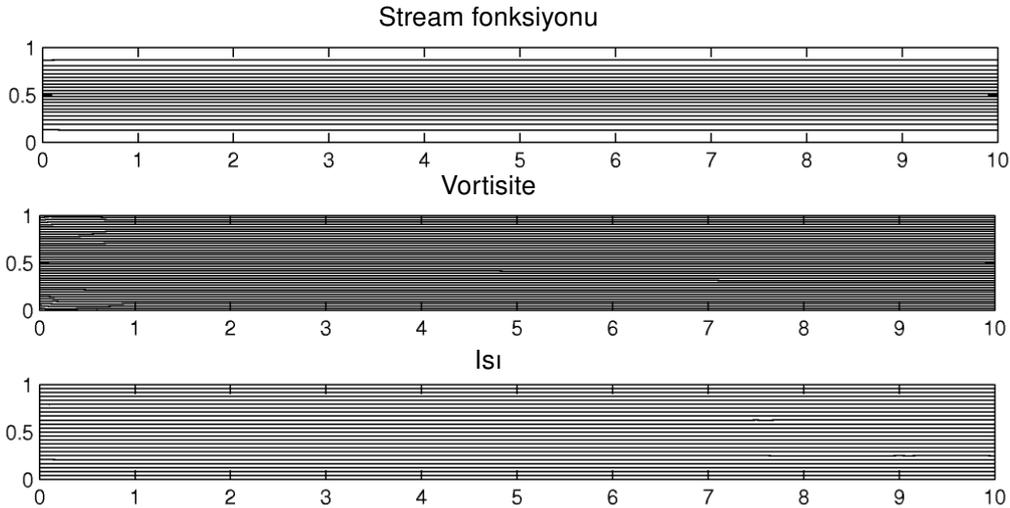
Bu kısımda, iki paralel plaka arasında, dışarıdan uygulanan manyetik alan etkisinde biyomanyetik sıvı akışı denklemleri (2.5) sonlu elemanlar yöntemiyle çözülmüştür. Problem bölgesi sonlu elemanlara bölünürken kuadratik tipte üçgen elemanlar kullanılmış, böylece her üçgensel elemanın köşeleri ve kenarların orta noktaları olmak üzere 6 nokta (nod) alınmıştır. Manyetik alan kaynağı  $x = 2.5$  apsisli noktaya konulduğundan problemin karakteristik özelliğinin bu bölgede olacağı, kaynaktan uzak bölgelerde akışın olağan bir profile yakın olacağı öngörülmektedir. Bu nedenle problem bölgesi daha çok fiziksel değişiklik beklenen  $x = 2$  ile  $x = 6$  arasında daha fazla, diğer bölgelerde bu bölgeye oranla daha az eleman olarak ayrıştırılmıştır. Şekil 2.6, 480 eleman alınarak yapılan örnek bir bölge ayrıklaştırılmasını göstermektedir. Sayısal simülasyon-



Şekil 2.6: Problem 1. 480-eleman kullanılarak ayrıklaştırılan problem bölgesi

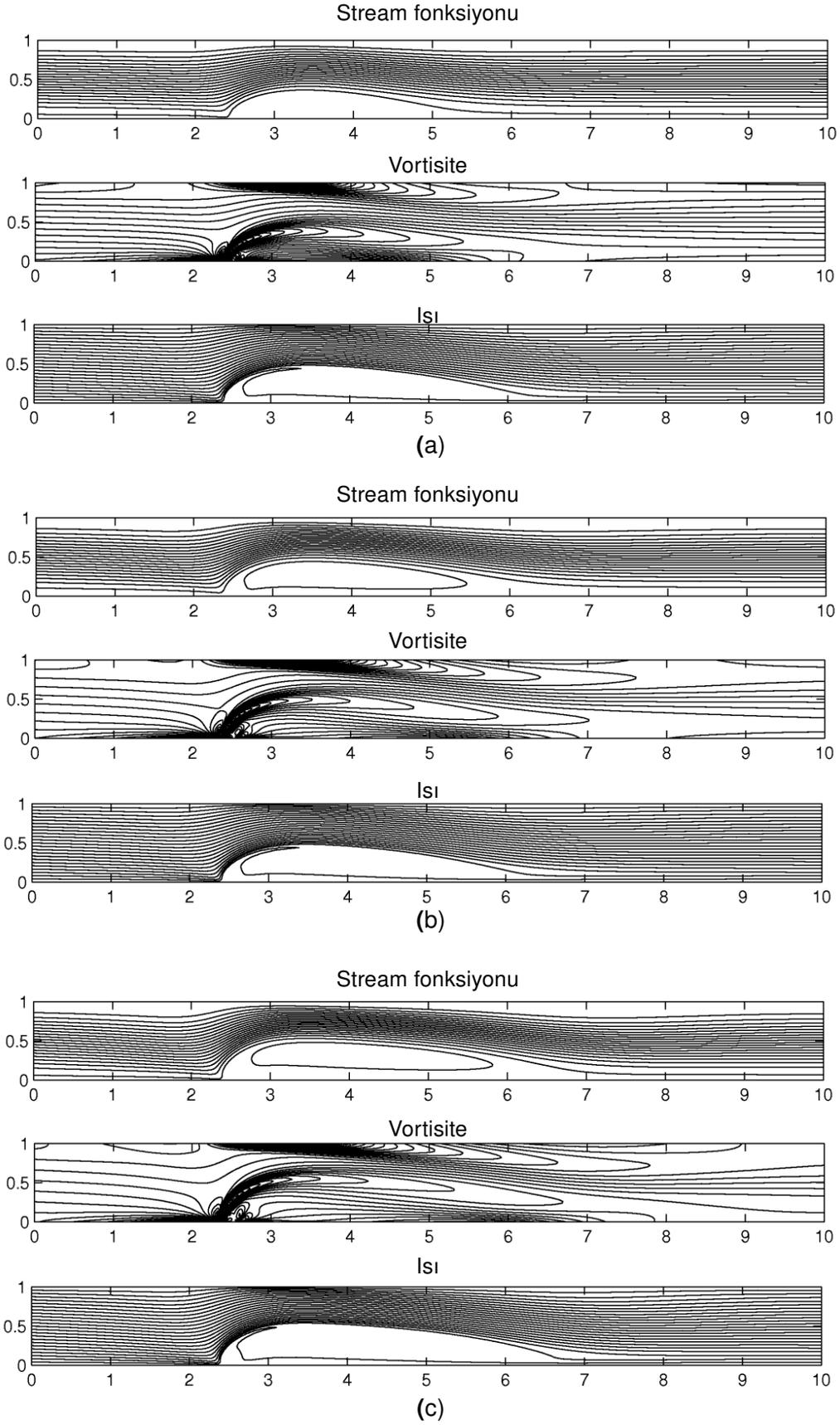
larda, problem bölgesinin ayrıklaştırılmasında 3750 kuadratik tipte üçgen eleman kullanılmıştır.

Biyomanyetik sıvı akışı problemlerinde belirleyici karakteristik parametre  $Mn$  manyetik sayısıdır.  $Mn = 0$  durumunda problem, kanal boyunca ısı transferi ve hidrodinamik akış problemine indirgenir (Şekil 2.7). Şekil 2.7' den görüldüğü üzere manyetik alan etkisi olmadığı durumda sıvı akışı ve ısı transferi tüm kanal boyunca düz bir profil göstermektedir. Dışarıdan uygulanan



Şekil 2.7: Problem 1. Stream fonksiyonu, vortisite ve ısı eşeğrileri (FEM):  $Re = 250$ ,  $Mn = 0$ .

noktasal manyetik alan kaynağının stream, vortisite ve ısı profilleri üzerindeki etkisini anlayabilmek için Reynolds sayısı sabit tutularak,  $Re = 250$  (gerçek kan akışı modeline uygun  $Re$ ), farklı manyetik sayı değerleri  $Mn = 115$ ,  $Mn = 215$  ve  $Mn = 315$  test edilmiştir.  $Re$  sayısı sabitken  $Mn$  sayısını arttırmak,  $(a, b) = (2.5, -0.05)$  noktasında uygulanan manyetik alanın

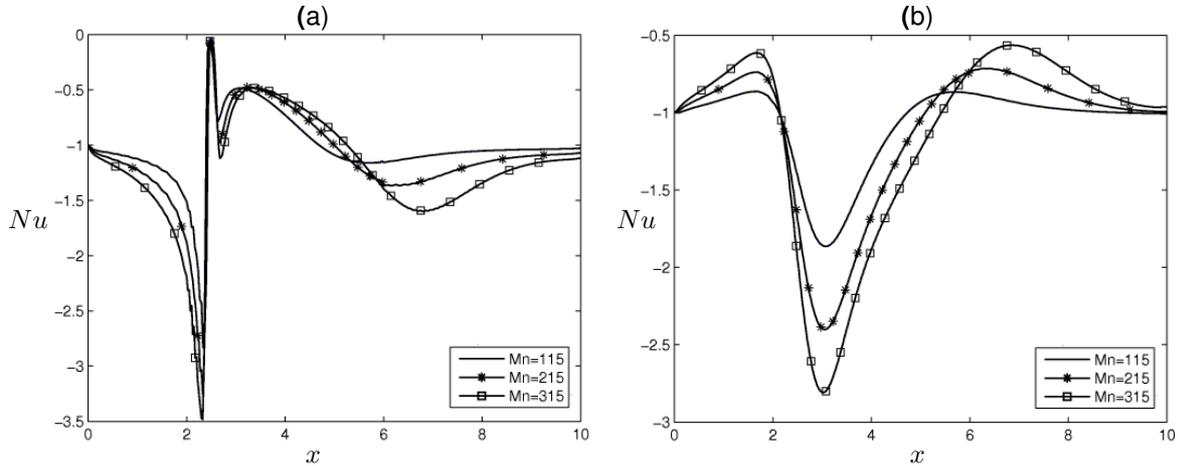


Şekil 2.8: Problem 1. Manyetik alanın stream fonksiyonu, vortisite ve ısı eşeğrileri üzerindeki etkisi (FEM):  $Re = 250$ , (a)  $Mn = 115$ , (b)  $Mn = 215$ , (c)  $Mn = 315$ .

şiddetini veya alt ve üst duvarlardaki ısı farkını arttırmak anlamına gelmektedir.

Şekil 2.8' de stream fonksiyonu, vortisite ve ısı eşeğrileri  $Re = 250$  sayısı ve sırasıyla (a)  $Mn = 115$ , (b)  $Mn = 215$  ve (c)  $Mn = 315$  için çizilmiştir. Bu grafiklerde, problem bölgesinde akış eşeğrilerinde manyetik alan yerleştirilen bölgede bir vorteks oluşumu görülmektedir. Ayrıca, manyetik alan yerleştiren noktaya yakın yerlerde manyetik alanın intensitesi arttıkça ısı değerinin arttığı gözlenmektedir. Buna ek olarak,  $Mn$  sayı değerinin artması ile bu dönme etkisi ve ısı değişimi belirgin bir artış göstermiş ve alt plaka boyunca  $x$ -yönünde bir yayılım meydana gelmiştir. Tüm manyetik sayı testlerinde, stream fonksiyonu, vortisite ve ısı eşeğrileri manyetik alan kaynağının yerleştirildiği bölge civarında şekil değişikliğine uğrarken, manyetik alanın etkisi kanal çıkışına doğru azalmakta ve eşeğriler kanal girişindeki davranışına çok yakın bir profil göstermektedir. Sonuç olarak, dışarıdan uygulanan manyetik alanın biyomanyetik sıvının akışını ve ısısını dikkate değer bir şekilde etkilediği görülmektedir.

Şekil 2.9, aynı parametre değerlerinde Nusselt sayısının sırasıyla (a) alt plaka,  $y = 0$  ve (b) üst plaka,  $y = 1.0$  boyunca değişimini göstermektedir. Manyetik alan kaynağının bulunduğu  $x = 2.5$  noktasında Nusselt sayısı aniden değişmektedir. Öyle ki, alt plakada Nusselt sayısı  $x = 2.5$  noktasında minimum değerini alırken, üst plakada maksimum değerini almaktadır. Manyetik sayısının artmasıyla, Nusselt sayısının minimum değeri (mutlak değerce) her iki plaka için artış göstermektedir. Ayrıca, alt plakanın çıkış bölgesinde  $Nu$  sayısı, özellikle yüksek  $Mn$  sayılarında, başlangıç değerine ulaşamazken, üst duvarda ulaşmaktadır. Bu sonuçlar (Loukopoulos ve Tzirtzakis, 2004)' de verilen sonuçlarla uyum içerisindedir.



Şekil 2.9: Problem 1: Nusselt sayısı,  $Re = 250$  (a) alt plaka,  $y = 0$ , (b) üst plaka,  $y = 1.0$ .

Sonuç olarak bu problemde, elektrikçe iletken olmayan zamandan bağımsız Newtonian kan akış modeli ele alınmış ve dışarıdan uygulanan manyetik alanın düz damarlardaki kanın akış hızı ve ısı değişimi üzerindeki etkileri incelenmiştir. Denklemlerin çözümünde sonlu elemanlar ve sınır elemanları olmak üzere iki nümerik yöntem kullanılmış ve elde edilen sonuçlar stream fonksiyonu-vortisite-ısı eşeğrileri olarak çizilmiştir. Bu grafikler dışarıdan uygulanan noktasal manyetik kaynağın kanın akımı üzerindeki etkilerini net olarak göstermektedir. Şöyle ki,

manyetik kaynağın yerleştirildiği nokta civarında vorteks oluşumu gözlenmekte ve bu vorteksin yoğunluğu manyetik kaynağın gücü ile doğru orantılı olarak artmaktadır. Sonlu elemanlar metodu ile sınır elemanları metoduna göre daha hassas sonuçlar elde edilmiştir. Ancak, sınır elemanları metodunda sadece problem bölgesinin sınırları ayrıklaştırıldığı için programlamada sonlu elemanlar yöntemine kıyasla daha az hafızaya ve işlem süresine ihtiyaç duyulmuştur.

### 2.3.2 Problem 2: Zamana Bağlı ve Elektrikçe İletken Olmayan Biyomanyetik Sıvı Akışı

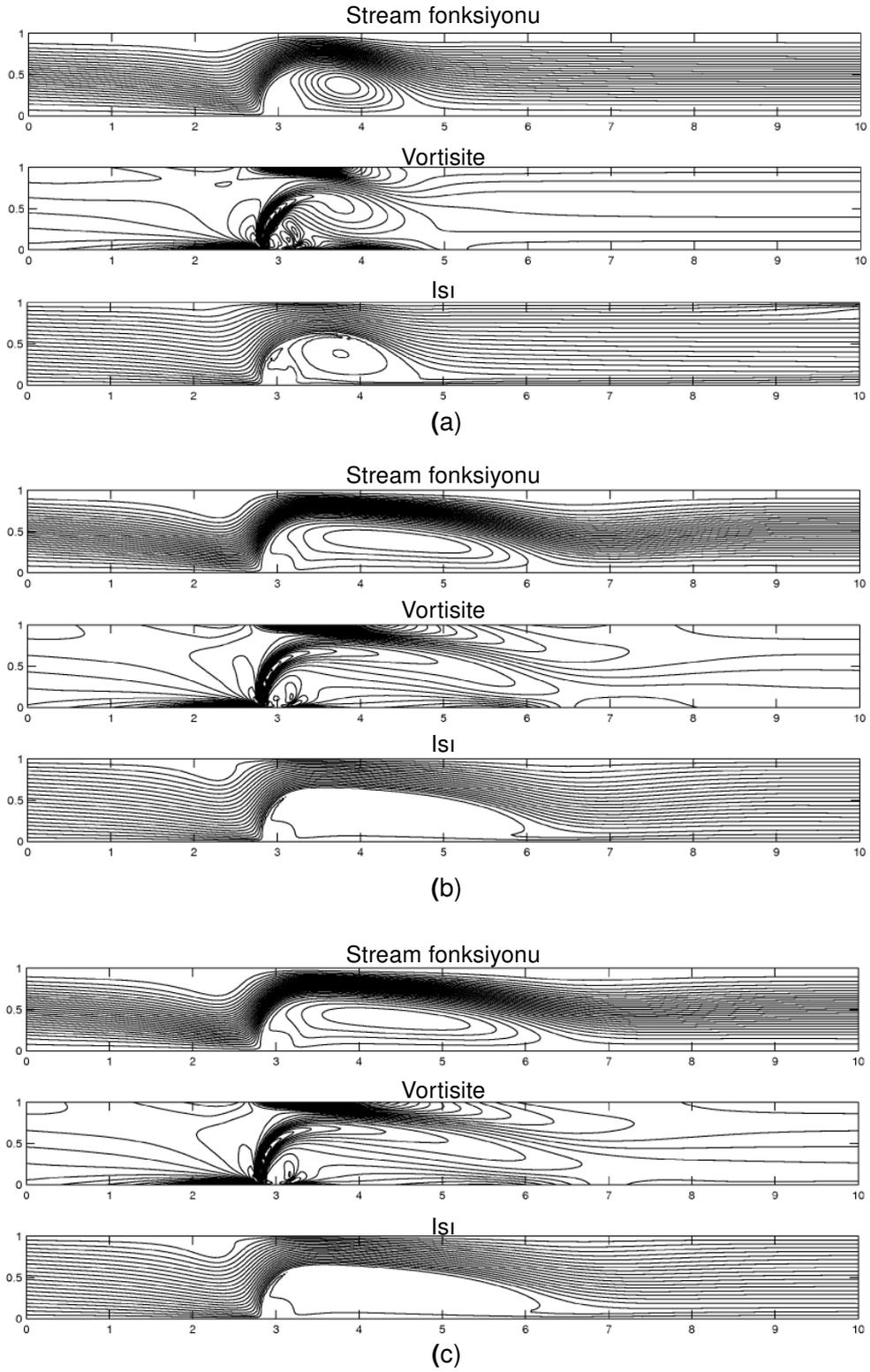
Bu problemde, düz bir kanal boyunca olduğu kabul edilen iki paralel plaka arasında viskoz, iki boyutlu, sıkıştırılmaz ve elektrikçe iletken olmayan akışkanın, zamana bağlı, vortisite, stream fonksiyonu ve ısı fonksiyonu bilinmeyenleri ile verilen biyomanyetik akım denklemleri (2.39) çözülecektir. Problemin çözümü için gerekli olan sınır koşulları aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} \psi(0, y) &= 2y^2 - (4/3)y^3, \psi(x, 0) = 0, \psi(x, 1) = 2/3 \\ T(0, y) &= y, T(x, 0) = 0, T(x, 1) = 1, \\ w(0, y) &= 8y - 4, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x = 10. \end{aligned} \quad (2.47)$$

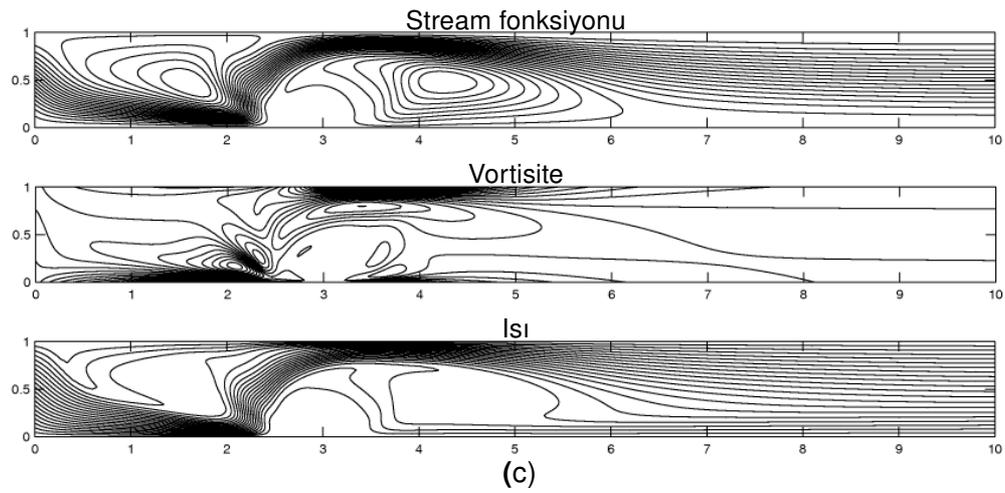
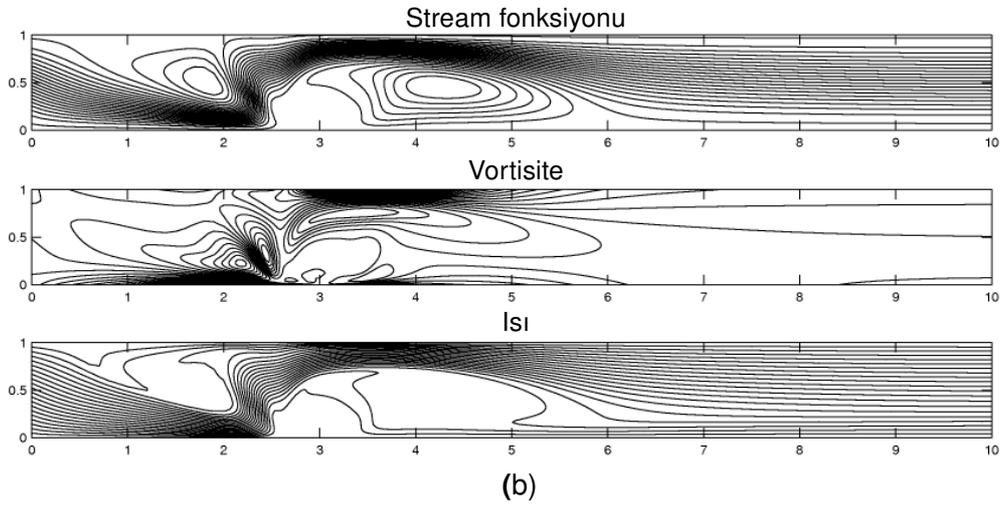
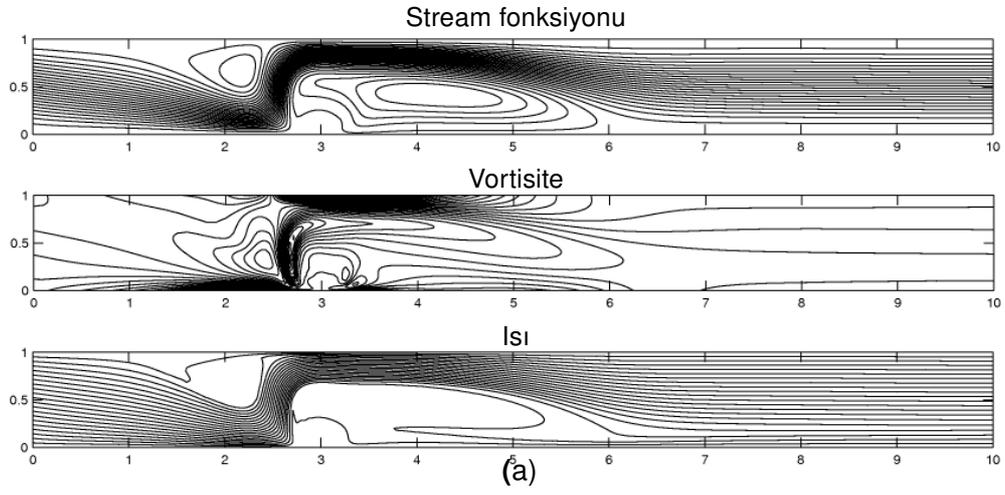
Manyetik alan kaynağı  $(a, b) = (3, -0.05)$  noktasına yerleştirilmiştir. Problemin çözümünde, kan akış modeline uygun olarak  $Pr = 25$ ,  $Ec = 7.43 \times 10^{-7}$ ,  $\varepsilon = 9$  olarak alınmıştır (Tzirtzilakis, 2008b). Nümerik simulasyonlarda yüksek manyetik sayıları  $Mn = 1312, 5250, 32813$  ve  $131250$  ve bunlara sırasıyla karşılık gelen Reynolds sayıları  $Re = 100, 50, 20$  ve  $10$  kullanılmıştır. Zaman ilerlemesinde  $Mn = 1312, 5250$ , ve  $32813$  sayıları için  $\Delta t = 10^{-3}$  alınırken, en yüksek manyetik sayısı  $Mn = 131250$  için  $\Delta t = 10^{-4}$  alınmıştır. Ayrıca, problem bölgesinin ayrıklaştırılmasında  $Mn = 1312$  ve  $5250$  sayıları için  $4250$  kuadratik üçgen eleman alınırken, daha yüksek manyetik sayıları  $Mn = 32813$  ve  $131250$  için  $4750$  sonlu eleman kullanılmıştır.

Şekil 2.10 manyetik alanın stream, vortisite ve ısı eşeğrileri üzerindeki etkisini, (a)  $t = 0.2$  ve (b)  $t = 1.0$  zaman seviyelerinde ve son olarak durağan evrede (steady-state) (c)  $t = 5$  sabit  $Re = 100$  ve  $Mn = 1312$  sayıları için göstermektedir. En erken zaman seviyesi  $t = 0.2$ ' de magnet civarında hem stream hem de ısı profillerinde küçük bir vorteks oluşmaktadır. Buna ek olarak, magnet çevresinde vortisite profilinde belirgin bir deformasyon meydana gelmektedir. Zaman ilerledikçe oluşan vorteksin boyu yatay olarak  $x = 6$  noktasına kadar uzamakta ve durağan evreye ulaşıldığı  $t = 5$  zamanında sabitlenmektedir.

Şekil 2.11' de sırası ile ((a)  $Re = 50, Mn = 5250$ ), ((b)  $Re = 20, Mn = 32813$ ) ve ((c)  $Re = 10, Mn = 131250$ ) değerleri için stream, vortisite ve ısı fonksiyonlarının durağan evredeki eşeğrileri gösterilmektedir. Bu grafiklerde dışarıdan uygulanan manyetik alanın ( $x = 3$  apsisli noktada) kan akışını görünür şekilde etkilediği gözlenmektedir. Öyle ki, manyetik alan kaynağının bulunduğu nokta civarında stream, vortisite ve ısı eşeğrileri profillerinde vorteksler oluşmaktadır. Reynolds sayısı ( $Re$ ) azalırken manyetik sayısının ( $Mn$ ) artması özellikle stream fonksiyonu



Şekil 2.10: Problem 2. Stream fonksiyonu, vortisite ve ısı eşeğrilerinin zamana göre değişimi  $Re = 100$ ,  $Mn = 1312$  (FEM): (a)  $t = 0.2$ , (b)  $t = 1.0$ , (c)  $t = 5.0$ .



Şekil 2.11: Problem 2. Stream fonksiyonu, vortisite ve ısı eşeğrileri (FEM): (a)  $Re = 50$ ,  $Mn = 5250$ , (b)  $Re = 20$ ,  $Mn = 32813$ , (c)  $Re = 10$ ,  $Mn = 131250$ .

profilinde damarın üst duvarına yakın ve  $x = 3$  apsisi noktanın hemen öncesinde ikincil bir vorteksin oluşmasına neden olmaktadır. Bu vorteksin genişliği manyetik sayısı ile doğru orantılı olarak artmaktadır. Bu durum ısı eşeğirlerinde de gözlenmektedir. Bu problemde kanalın üst duvarı sıcak, alt duvarı soğuk olarak alındığından, alt duvar boyunca ve özellikle manyetik alanın etkisinin görüldüğü birincil vorteks bölgesinde sıcaklığın diğer bölgelere göre daha az olduğu gözlenmektedir. Diğer taraftan, kanalın giriş bölgesinde, ikincil vorteksin oluşumunu takiben bu bölgede kanın sıcaklığı artmaktadır. Bu durum, manyetik sayısı arttırıldığında her iki vorteksin büyümesi ile daha belirgin hale gelmektedir. Isı profili manyetik alan etkisinin azaldığı kanal çıkışına yakın bölgelerde, vortekslerin oluştuğu bölgelerden farklı bir yapı göstermektedir. Kanal çıkışına yakın bu bölgelerdeki profil tüm manyetik sayıları için soğuk alt duvardan sıcak üst duvara düzgün bir yayılma şeklindedir.

### 2.3.3 Problem 3: Zamana Bağlı ve Elektrikçe İletken Biyomanyetik Sıvı Akışı

Bu problemde, düz bir kanal boyunca akan zamana bağlı biyomanyetik kan akışı ve ısı transferi ele alınacaktır. Denklemler en genel halde, manyetik alan etkisi ve kanın elektrikçe iletkenlik etkisini içermektedir. İki boyutlu, laminar, sıkıştırılamaz akış modelinde biyoakışkan olarak ele alınan kanın homojen, Newtonian ve elektrikçe iletken olduğu düşünülmüştür. Bu varsayımlar sonucu zamana bağlı temel denklemler boyutsuzlaştırılmış olarak, stream fonksiyonu, vortisite fonksiyonu ve ısı fonksiyonu türünden Bölüm 1.1'de (1.9)-(1.11) nolu denklemlerde verildiği üzere aşağıdaki formdadır, (Tzirtzilakis, 2008b):

$$\nabla^2 \psi = -w,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla^2 w - Re \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} + Mn_F Re H \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} \right\} + Mn_M \frac{\partial}{\partial y} \left( H^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T - Re \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} + Mn_F Re Ec H (\varepsilon + T) \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\}$$

$$+ Mn_M Ec H^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + Ec \left\{ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\}.$$

(2.48)

Problemin sayısal çözümünde stream, vortisite ve ısı fonksiyonları için sınır şartları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} \psi(0, y) &= 2y^2 - (4/3)y^3, \psi(x, 0) = 0, \psi(x, 1) = 2/3 \\ T(0, y) &= 4y(1 - y), T(x, 0) = 0, T(x, 1) = 0, \\ w(0, y) &= 8y - 4, \end{aligned} \quad (2.49)$$

Diğer yandan vortisite ( $w$ ) sınır şartları doğal olarak var olmadığından, vortisite için alt ve üst duvarlarda sınır koşulu Bölüm 2.1.1 anlatıldığı gibi stream fonksiyonunun problem bölgesindeki değerlerinden yararlanılarak Taylor serisi açılımı kullanılarak elde edilmiştir.

Denklemler sistemi (2.48)'ya konum koordinatlarına göre sonlu elemanlar, zaman değişkenine göre Bölüm 2.2.3' de verilen geri fark integrasyon yöntemi uygulandığında elde edilen ayrıklaştırılmış FEM cebirsel denklemleri aşağıda verilmektedir. Bu denklemlerinin çıkarımı Bölüm 2.2.3' de ayrıntılı şekilde anlatılmıştır.

$$[K] \{\psi\}_{s+1} = [M] \{w\}_s \quad (2.50)$$

$$[\hat{K}_1] \{w\}_{s+1} = \{\hat{F}_1\} \quad (2.51)$$

$$[\hat{K}_2] \{T\}_{s+1} = \{\hat{F}_2\} \quad (2.52)$$

Burada  $s$  zaman seviyesini göstermektedir. Yukarıdaki eşitliklerin sol tarafında yer alan matrisler

$$[\hat{K}_1] = [M] + \Delta t[K] + \Delta t Re[A]_{s+1}, \quad (2.53)$$

$$[\hat{K}_2] = [M] + \frac{\Delta t}{Pr}[K] + \Delta t Re[A]_{s+1} - \Delta t Mn_F Re Ec[A_3]_{s+1}, \quad (2.54)$$

şeklinde, sağ taraf vektörleri ise

$$\{\hat{F}_1\} = [M] \{w\}_s + \Delta t Mn_F Re \{F_3\}_s + \Delta t Mn_M \{F_4\}_{s+1}, \quad (2.55)$$

$$\{\hat{F}_2\} = [M] \{T\}_s + \Delta t Mn_F Re Ec \{F_1\}_{s+1} + \Delta t Mn_M Ec \{F_5\}_{s+1} + \Delta t Ec \{F_2\}_{s+1} \quad (2.56)$$

şeklinde elde edilmiştir.

Buradaki matrisler aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$[K] = \sum_{e=1}^{M_e} \int_{A_e} \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) dA_e$$

$$[A] = \sum_{e=1}^{M_e} \int_{A_e} N_i^e \left[ \left( \sum_{k=1}^6 \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \psi_k^e \right) \frac{\partial N_j^e}{\partial x} - \left( \sum_{k=1}^6 \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \psi_k^e \right) \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right] dA_e$$

$$[A_3] = \sum_{e=1}^{M_e} \int_{A_e} N_i^e \left[ \sum_{k=1}^6 \left( \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \psi_k^e \right) \sum_{l=1}^6 (N_l^e H_l^e \frac{\partial H_l^e}{\partial x}) - \sum_{k=1}^6 \left( \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \psi_k^e \right) \sum_{l=1}^6 (N_l^e H_l^e \frac{\partial H_l^e}{\partial y}) \right] N_j^e dA_e$$

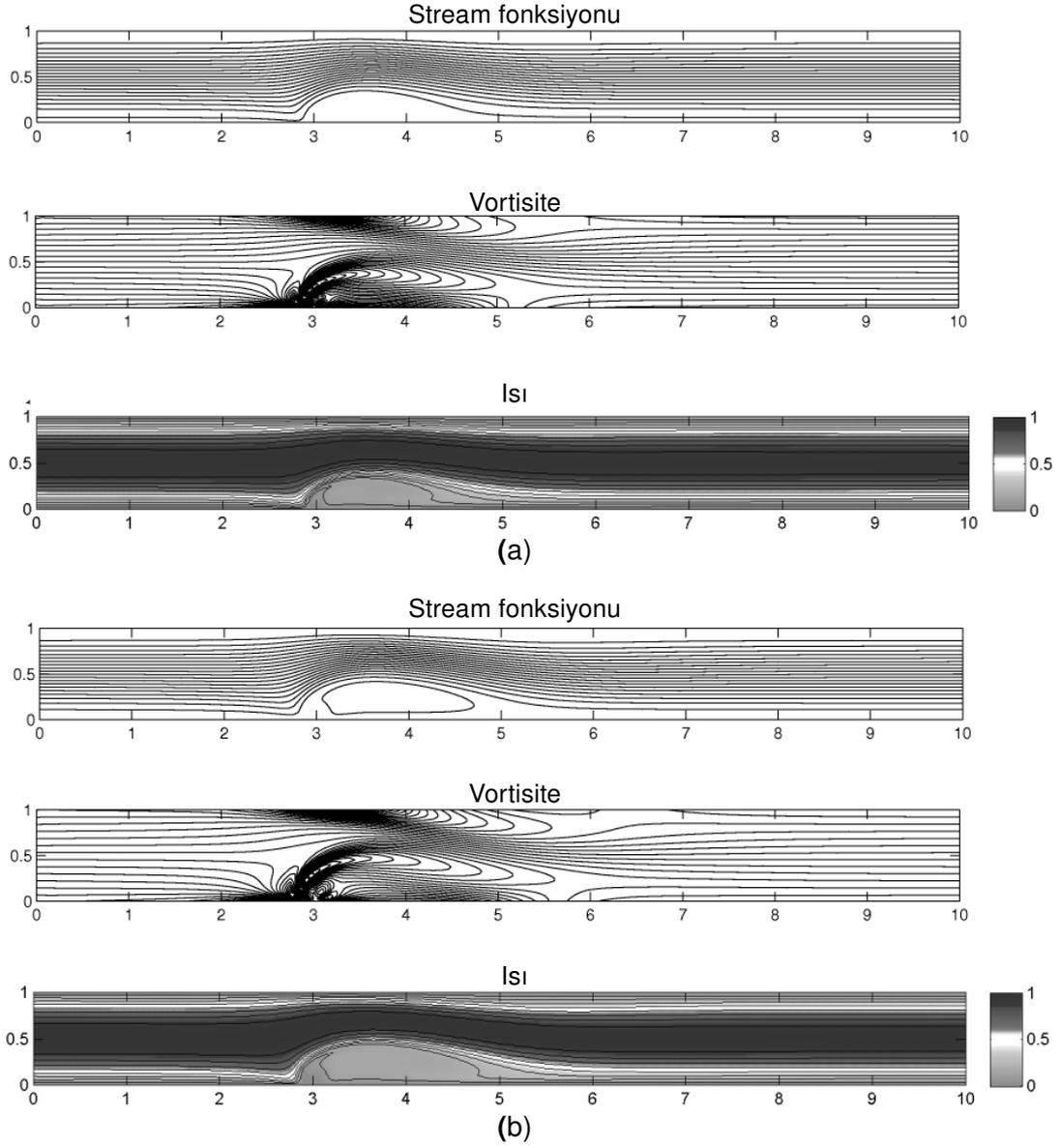
$$[M] = \sum_{e=1}^{M_e} \int_{A_e} N_i^e N_j^e dA_e, \quad i, j = 1, \dots, 6$$

Vortisite ve ısı denklemlerinin sağ taraf vektörleri aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
\{F_1\} &= \sum_{e=1}^{M_e} \int_{A_e} \left[ \sum_{k=1}^6 \left( \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \psi_k^e \right) \sum_{l=1}^6 \left( N_l^e H_l^e \frac{\partial H_l^e}{\partial x} \right) - \sum_{k=1}^6 \left( \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \psi_k^e \right) \sum_{l=1}^6 \left( N_l^e H_l^e \frac{\partial H_l^e}{\partial y} \right) \right] N_i^e dA_e \\
\{F_2\} &= \sum_{e=1}^{M_e} \int_{A_e} \left[ \left( \sum_{l=1}^6 \frac{\partial^2 N_k^e}{\partial y^2} \psi_k^e - \sum_{l=1}^6 \frac{\partial^2 N_k^e}{\partial x^2} \psi_k^e \right)^2 + 4 \left( \sum_{l=1}^6 \frac{\partial^2 N_k^e}{\partial x \partial y} \psi_k^e \right)^2 \right] N_i^e dA_e \\
\{F_3\} &= \sum_{e=1}^{M_e} \int_{A_e} \left[ \sum_{k=1}^6 \left( \frac{\partial N_k^e}{\partial y} T_k^e \right) \sum_{l=1}^6 \left( N_l^e H_l^e \frac{\partial H_l^e}{\partial x} \right) - \sum_{k=1}^6 \left( \frac{\partial N_k^e}{\partial x} T_k^e \right) \sum_{l=1}^6 \left( N_l^e H_l^e \frac{\partial H_l^e}{\partial y} \right) \right] N_i^e dA_e \\
\{F_4\} &= \sum_{e=1}^{M_e} \int_{A_e} \left[ \sum_{k=1}^6 \left( \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \psi_k^e \right) \sum_{l=1}^6 \left( N_l^e \frac{\partial (H_l^e)^2}{\partial y} \right) + \sum_{k=1}^6 \left( \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \psi_k^e \right) \sum_{l=1}^6 \left( N_l^e (H_l^e)^2 \right) \right] N_i^e dA_e \\
\{F_5\} &= \sum_{e=1}^{M_e} \int_{A_e} \left( \sum_{k=1}^6 \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \psi_k^e \right)^2 \left( \sum_{l=1}^6 N_l^e (H_l^e)^2 \right) N_i^e dA_e, \quad i = 1, \dots, 6.
\end{aligned}$$

Nümerik hesaplamalarda  $Pr = 25$ ,  $Ec = 1.49 \times 10^{-8}$  ve  $\varepsilon = 77.5$  olarak alınmış, noktasal manyetik alan kaynağı  $(a, b) = (3, -0.05)$  noktasına yerleştirilmiştir. Çözüm bölgesi  $L = 10$  ve  $h = 1$  alınarak belirlenmiştir. Akımın karakteristik davranışının manyetik kaynak yakınlığında ve/veya daralmanın olduğu bölge civarında olacağı beklendiğinden, bu bölge ( $x = 2$  ve  $x = 6$  arasındaki bölge) diğer kısımlara göre daha fazla eleman kullanılarak ayrıklaştırılmıştır. Çözüm bölgesinin ayrıklaştırılmasında 2800 kuadratik eleman kullanılmıştır. Zaman yönündeki ayrıklaştırılma da ise  $\Delta t = 0.001$  alınmıştır.

Şekil 2.12 (a)  $Mn_F = 82$ ,  $Mn_M = 0.025$  ve (b)  $Mn_F = 164$ ,  $Mn_M = 0.1$  değerleri için stream, vortisite ve ısı fonksiyonlarının durağan evredeki eşeğrilerini, sabit Reynolds sayısı  $Re = 100$  için iki plaka arasındaki düz kanal içerisinde göstermektedir. Görüldüğü üzere, manyetik alanın konulduğu nokta civarında stream, vortisite ve ısı eşeğrileri profillerinde vorteksler oluşmaktadır. Manyetik alan yoğunluğunun artması ile vorteks uzunluğu yatay olarak alt plaka boyunca uzanmakta ve ısı profili için de durağan vorteks bölgesi genişlemekte, akışkanın sıcaklığı alt plaka sıcaklığına düşmektedir. Diğer yandan, manyetik alanın etkisinin azaldığı kanal çıkışında stream, vortisite ve ısı fonksiyonlarının eşeğrileri kanal girişindeki profillerini almaktadır.



Şekil 2.12: Problem 3. Manyetik alan yoğunluğunun stream, vortisite ve ısı eşeğrileri üzerindeki etkisi,  $Re = 100$  (FEM): (a)  $Mn_F = 82$ ,  $Mn_M = 0.025$ , (b)  $Mn_F = 164$ ,  $Mn_M = 0.1$ .

## BÖLÜM 3

# DARALMALI KANAL BOYUNCA BİYOMANYETİK SIVI AKIŞI

Bu bölümde, genel biyomanyetik zamana bağlı kan akışı ve ısı transferi denklemleri farklı nitelikte daralmalar içeren kanallar üzerinde çözülecektir. Denklemler sonlu elemanlar yöntemi ile çözülecek, zamana göre türevlerinin sayısallaştırılmasında ise geri fark yöntemi kullanılacaktır. Biyomanyetik akışkan akış profili ve ısı transferi problemi üç farklı karakterde daralma içeren kanal üzerinde ele alınacaktır. Birinci problemde sıvı akışının gerçekleştiği kanal içinde oluşan simetrik bir daralma varsayılacak, ikinci problemde düzensiz bir daralma içeren kanal içerisinde çözüm incelenecek, üçüncü problemde ise çözüm bölgesi birden fazla düzensiz daralma içeren kanal olarak alınacaktır. Genel biyomanyetik akışkan denklemleri, ilk olarak kanal içinde meydana gelen daralmanın sıvı akışı ve ısı iletimi üzerindeki etkisini araştırmak amacıyla manyetik terimler düşürülerek indirgenmiş olarak ele alınacaktır. Kanal içerisinde meydana gelen farklı daralma durumlarının akış profili üzerindeki etkileri incelendikten sonra, manyetik alan etkisi eklenerek araştırma genişletilecektir.

### 3.1 Biyomanyetik Akış Denklemleri ve Sonlu Elemanlar Sistemi

İki boyutlu, laminar, sıkıştırılmaz akış modelinde biyoakışkan olarak kan ele alınmış, kanın homojen, Newtonian ve elektrikçe iletken olduğu düşünülmüştür. Bu varsayımlar sonucu zamana bağlı temel denklemler Bölüm 1.1 'de verildiği gibi boyutsuz olarak, stream fonksiyonu, vortisite fonksiyonu ve ısı fonksiyonu cinsinden aşağıda gösterilmektedir.

$$\nabla^2\psi = -w,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla^2 w - Re \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} + Mn_F Re H \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} \right\} + Mn_M \frac{\partial}{\partial y} \left( H^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T - Re \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} + Mn_F Re Ec H (\epsilon + T) \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\}$$

$$+ Mn_M Ec H^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + Ec \left\{ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\}.$$

(3.1)

Denklemler sistemi (3.1)'e konum koordinatlarına göre sonlu elemanlar, zaman değişkenine göre Bölüm 2.2.3' de verilen geri fark integrasyon yöntemi uygulandığında elde edilen ayrıklaştırılmış FEM cebirsel denklemleri aşağıda verilen şekilde olmaktadır.

$$[K] \{\psi\}_{s+1} = [M] \{w\}_s \quad (3.2)$$

$$[\hat{K}_1] \{w\}_{s+1} = \{\hat{F}_1\} \quad (3.3)$$

$$[\hat{K}_2] \{T\}_{s+1} = \{\hat{F}_2\} \quad (3.4)$$

Burada  $s$  zaman seviyesini belirtmekte, eşitliklerin sol tarafında yer alan matrisler

$$[\hat{K}_1] = [M] + \Delta t[K] + \Delta t Re[A]_{s+1}, \quad (3.5)$$

$$[\hat{K}_2] = [M] + \frac{\Delta t}{Pr}[K] + \Delta t Re[A]_{s+1} - \Delta t Mn_F Re Ec[A_3]_{s+1}, \quad (3.6)$$

şeklinde, sağ taraf vektörleri ise

$$\{\hat{F}_1\} = [M] \{w\}_s + \Delta t Mn_F Re \{F_3\}_s + \Delta t Mn_M \{F_4\}_{s+1}, \quad (3.7)$$

$$\{\hat{F}_2\} = [M] \{T\}_s + \Delta t Mn_F Re Ec \{F_1\}_{s+1} + \Delta t Mn_M Ec \{F_5\}_{s+1} + \Delta t Ec \{F_2\}_{s+1} \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu denklemlerin elde edilmiş prosedürü Bölüm 2.2.3' de detaylı şekilde anlatılmış, matrisler ile sağ taraf vektörlerinin tanımları aynı bölümde verilmiştir.

Sonlu elemanlar yönteminde temel aşamalardan biri problem bölgesinin ayrıklaştırılmasıdır. Bu bölümdeki problemler üç farklı bölge üzerinde çözülmüş ve bu bölgeler farklı fonksiyonlar kullanılarak tanımlanmıştır. Bu nedenle problem bölgelerinin ayrıklaştırılma şekilleri her problem için ilgili bölümde ayrıca belirtilecektir. Denklemler  $x = 0$  ile  $x = 10$  ve  $y = 0$  ile  $y = 1$  doğruları arasında kalan dikdörtgensel bölge içinde farklı yapılarda daralma içeren kanallar üzerinde çözülecektir. Bu bölgeler  $0 \leq x \leq 10$  olmak üzere alt sınır  $y_1(x)$  ve üst sınır  $y_2(x)$  fonksiyonları tanımlanarak oluşturulmuştur. Sınır şartları, girişte hız bileşenleri için -sınır katmanları tam gelişmiş (fully developed)- şartı gereğince stream fonksiyonu parabolik profil, (dolayısıyla) vortisite lineer profil, ısı ise parabolik profil olacak şekilde alınmıştır. Alt ve üst duvarda hız bileşenleri için -katı sınırda sıfır hızlı akışkan (no-slip)- koşulu ve sabit sıcaklık koşulu kabul edilmiştir. Kanal çıkışında bütün değişkenlerin  $x'$  ten bağımsız olduğu (kanal çıkış şartı) kabul edilmiş,  $R = \psi, w, T$  olmak üzere  $\partial R / \partial x = 0$  koşulu alınmıştır. Bu şartlar altında stream ve ısı

fonksiyonları ile vortisite için giriş ve çıkış sınır şartları

Giriş ( $x = 0, 0 \leq y \leq 1$ ) :

$$\psi = 2y^2 - (4/3)y^3, \quad T = 4y(1 - y), \quad \omega = 8y - 4$$

Çıkış ( $x = 10, 0 \leq y \leq 1$ ) :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$$

(3.9)

Alt Duvar ( $y = y_1(x), 0 \leq x \leq 10$ ) :

$$\psi = 0, \quad T = 0$$

Üst Duvar ( $y = y_2(x), 0 \leq x \leq 10$ ) :

$$\psi = 2/3, \quad T = 0$$

şeklinde alınmıştır. Vortisite için alt ve üst duvar sınır şartları bir sonraki kısımda anlatılmaktadır.

### 3.2 Vortisite Sınır Koşulları ve İteratif Çözüm

Bu çalışmada ele alınan ısı transferi ile birlikte biyomanyetik akışı modelleyen denklemler, stream-vortisite-ısı fonksiyonları türünden yazıldığında vortisite için alt ve üst sınır bölgelerinde sınır koşulları doğal olarak bilinmemektedir. Bu sınır şartlarının hesaplanması akışkanlar mekaniği literatüründe çözüm karakteristiğini belirleyen önemli bir fenomen oluşturmaktadır. Bu hesaplamalarda problemin fiziğine uygun kriterler ile çözüm bölgesinin ayrıklaştırılması önemli bir faktör oluşturmakta, çözümlerde bu faktörlere göre değişen çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Bu bölümde çözülen birinci problemde (Problem 1) çözüm bölgesi simetrik daralma içeren kanal olarak alınmakta, ve çözüm bölgesinin ayrıklaştırılması sonucunda nodlar düzenli şekilde yerleştirildiğinden vortisite sınır koşulları (alt ve üst duvar) Bölüm 2.1.1' de verilen yöntem ile hesaplanmaktadır. Ancak, Problem 2 ve Problem 3'de ele alınan çözüm bölgelerinde alt ve üst sınır eğrileri düzensiz profillerle belirlendiğinden, ayrıklaştırma sonucunda nodlar değişken aralıklı olarak yerleştirilmektedir. Bu yapılandırmada düzensiz yerleşen nodlar ile vortisite sınır koşulları hesaplanmasında Bölüm 2.1.1' de verilen yöntemi kullanmak mümkün olmamaktadır. Bu nedenle, Problem 2 ve Problem 3 bölgeleri üzerinde vortisite sınır şartları, stream fonksiyonu değerleri kullanılarak sonlu elemanlar yöntemi yaklaşımıyla hesaplanmakta ve hesaplamada (Comini vd., 1994) referansında anlatılan yaklaşım izlenmektedir. Bu çözüm yönteminde vortisite sınır değerleri stream fonksiyonu denklemi esas alınarak FEM yaklaşımıyla elde edilmektedir. Bu yaklaşımda (3.2)-(3.4) nolu sistemler ardışık (iterative) olarak çözülmektedir. Öncelikle  $t = s$  zaman seviyesinde vortisite değerlerinin tüm bölgede bilindiği varsayılmaktadır. Vortisitenin bilinen değerleri ve stream fonksiyonunun sınır koşulları kullanılarak (3.2) nolu denklem

$$[K] \{\psi\}_{s+1} = [M] \{w\}_s \quad (3.10)$$

stream fonksiyonu için çözülür. Böylece stream fonksiyonu  $t = (s + 1)$ 'inci zaman seviyesinde hesaplanmış olur. Daha sonra (3.10) nolu denklem, bilinen stream fonksiyonu değerleri ve vortisitenin giriş sınır koşulları ile çıkış sınır koşulları kullanılarak bu kez vortisite için

$$[M] \{w\}_{s+1} = [K] \{\psi\}_{s+1} \quad (3.11)$$

şeklinde çözülür. Burada (3.11) nolu denklem çözümü yalnızca vortisitenin alt ve üst duvarlardaki sınır koşullarını  $t = (s + 1)$ 'inci zaman seviyesinde bulmak için yapılan çözümdür. Bir başka deyişle, bu denklem vortisitenin tüm bölge üzerinde değil, sadece alt ve üst duvarlarda tek olarak belirlenebilmesi için çözülmektedir. Çözüm sürecinin bu aşamasında,  $t = (s + 1)$ 'inci seviyesinde, stream fonksiyonu tüm bölge üzerinde bilinmekte olup, ayrıca vortisitenin bütün sınır koşulları elde edilmiş durumdadır. Bilinen bu değerler kullanılarak (3.3) nolu denklem çözülür ve vortisitenin yeni zaman seviyesinde tüm bölgedeki değerleri hesaplanmış olur. Stream fonksiyonu ve vortisite değerleri kullanılarak (3.4) nolu denklem de çözülür ve sıcaklık fonksiyonu hesaplanır. Böylece  $(s + 1)$ 'inci seviyede bütün bilinmeyen değerler hesaplanmış olur. Bu yinelemeye, tüm bilinmeyenler için bütün bölge nodları üzerinde ardışık iki çözüm arasındaki fark, önceden belirlenmiş toleranstan küçük oluncaya kadar devam edilir. Bu şartı sağlayan çözümler kararlı hal veya durağan evre (steady-state) sonuçları olarak kabul edilmektedir.

### 3.3 Test Problemleri ve Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde ele alınan tüm test problemlerinde, ilk önce kanalda meydana gelen daralmanın biyoakışkan üzerindeki salt etkisini görebilmek için manyetik alan tesirinin yok sayıldığı model problemi çözülmektedir. Manyetik alan etkisinde olmayan akış rejimi, (3.1) nolu denklem sisteminde manyetik alan sayıları  $Mn_F = 0$  ve  $Mn_M = 0$  alınarak tanımlanmakta ve indirgenmiş denklemler

$$\nabla^2 \psi = -w,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla^2 w - Re \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\}, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T - Re \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} + Ec \left\{ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\}$$

şeklini almaktadır.

Biyomanyetik akışkan akışı ve ısı transferi modelinde, hem manyetik alan etkisinin yer aldığı (3.1) nolu denklem sistemi hem de manyetik alan etkisi içermeyen (3.12) nolu denklem sistemi sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmektedir. Zaman türevleri geri fark yöntemi ile sayısallaştırılmış, sayısal adım aralığı (time step)  $\Delta t = 0.001$  alınmıştır. Sınır koşulları (3.9) nolu formüllerle verilmiş, vortisite sınır koşullarının hesaplanması ve tekrarlamalı çözüm yöntemleri Bölüm 3.2' de anlatılmıştır.

Sayısal çözümler üç farklı fiziksel bölge üzerinde stream fonksiyonu, vortisite ve ısı eşeğri-leri türünden verilmektedir. Problemlerde fiziksel parametreler, Bölüm 2.3.3' de olduğu gibi  $Pr = 25$ ,  $Ec = 1.49 \times 10^{-8}$  ve  $\varepsilon = 77.5$  olarak alınmıştır. Yinelemeli çözümler  $Mn_F = Mn_M = 0$  durumunda stream fonksiyonu, vortisite ve ısı fonksiyonu için başlangıç değerleri 0 alınarak başlatılmıştır. Diğer manyetik alan sayılarında başlangıç değeri olarak, daha küçük manyetik alan sayıları için elde edilen durağan evre sonuçları kullanılmıştır. Bu nedenle çözüm bölgesinin ayrıklaştırılmasında kullanılan kuadratik eleman sayısı her bir problem için sabit olarak alınmıştır. Çözüm bölgesinin ayrıklaştırılmasında kullanılan kuadratik eleman sayısı, dışarıdan uygulanan manyetik alan kaynağının yeri ve ardışık iterasyonları sonlandıran kararlı hal toleransı her bir problem için ayrıca belirtilmiştir.

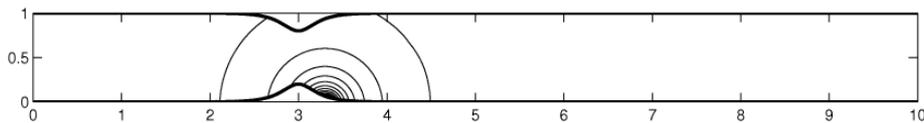
### 3.3.1 Problem 1: Simetrik Daralmalı Kanalda Biyomanyetik Sıvı Akışı

Bu problemde zamana bağlı, kan akışı ve ısı transferi denklemleri simetrik daralma içerisinde kanal üzerinde çözülecektir. Biyoakışkan ısı transferi denklemleri öncelikle manyetik alan etki içermeyecek şekilde (Denklemler 3.12) daha sonra manyetik alan etkisi içeren şekilde (Denklemler 3.1) çözülecektir. Problem çözüm bölgesi aşağıda verilen alt sınır,  $y_1$ , ve üst sınır,  $y_2$ , fonksiyonları

$$y_1 = A_1 \sec h(6(x - x_1)), \quad 0 \leq x \leq 10,$$

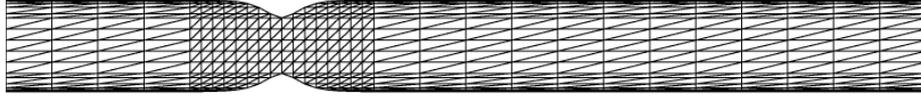
$$y_2 = 1 - A_2 \sec h(6(x - x_2)), \quad 0 \leq x \leq 10$$

ile tanımlanmıştır. Alt ve üst sınır eğrilerindeki boğulmaların tepe noktaları simetrik daralma elde etmek amacıyla  $x_1 = x_2 = 3$  olarak alınmıştır. Manyetik alan kaynağı daralma sonrasında alt duvarın çok yakınındaki  $(a, b) = (3.3, -0.05)$  noktasına yerleştirilmiştir. Kanaldaki daralma (boğulma) derecesi  $A_1$  ve  $A_2$  pozitif sayılarının yardımıyla belirlenmektedir. Bu çalışmada, kanal üzerinde %40 ve %60 dereceli iki farklı simetrik daralma durumu incelenmiş, %40 daralma için  $A_1 = A_2 = 0.2$  ve %60 daralma için  $A_1 = A_2 = 0.3$  değerleri kullanılmıştır. Bu problemde ele alınan kanalın alt ve üst sınır fonksiyonlardaki simetri, problem bölgesinin tarafımızdan yazılan bir MATLAB kodu ile ayrıklaştırılmasına olanak sağlamaktadır. Bu değerlere uygun olarak problem bölgeleri ve manyetik alan eşeğrileri %40 simetrik daralma içeren kanal için Şekil 3.1'de, %60 simetrik daralma içeren kanal için ise Şekil 3.3'de gösterilmektedir. Problem böl-



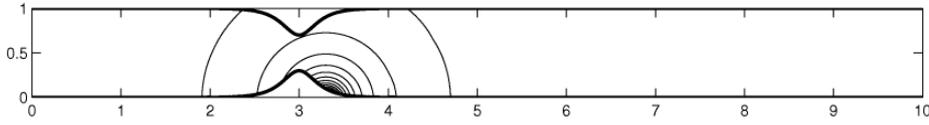
Şekil 3.1: Problem 1. %40 daralma içeren kanal ve manyetik alan eşeğrileri.

geleri,  $x$ - ve  $y$ - eksenleri boyunca homojen olmayan ancak sistematik aralıklarla farklı sayıda elemanlara bölünmüş, ayrıca nodlar sınır eğrilerine dik doğrular üzerine gelecek şekilde yerleştirilmiştir. Homojen olmayan dağılım, problem bölgesinin sınırlara yakın ve daralma bölgesi



Şekil 3.2: Problem 1. %40 daralma içeren problem bölgesinin örnek ayrıklaştırılması.

boyunca diğer bölgelere göre daha fazla eleman alınmasından kaynaklanmaktadır. Şekil 3.2 ve Şekil 3.4 sırasıyla %40 ve %60 daralma içeren kanal bölgelerinin 1088 eleman kullanılan örnek ayrıklaştırmalarını göstermektedir. Yinelemeli çözümler durağan evre toleransı  $10^{-6}$  alınarak sonlandırılmıştır. Stream, vortisite ve ısı fonksiyonlarının farklı manyetik alan sayıları için eşeğrileri  $M_e = 5840$  kuadratik eleman kullanılarak elde edilmiştir.

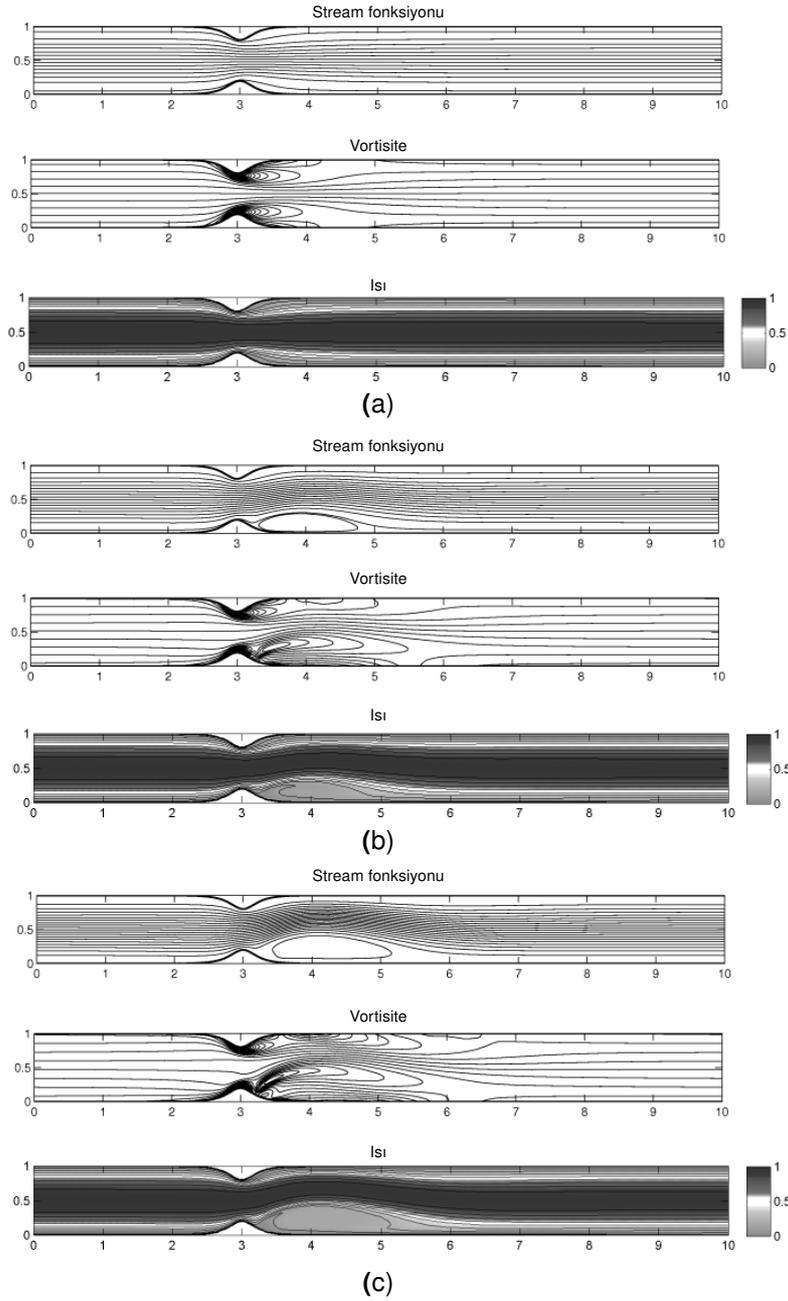


Şekil 3.3: Problem 1. %60 daralma içeren kanal ve manyetik alan eşeğrileri.



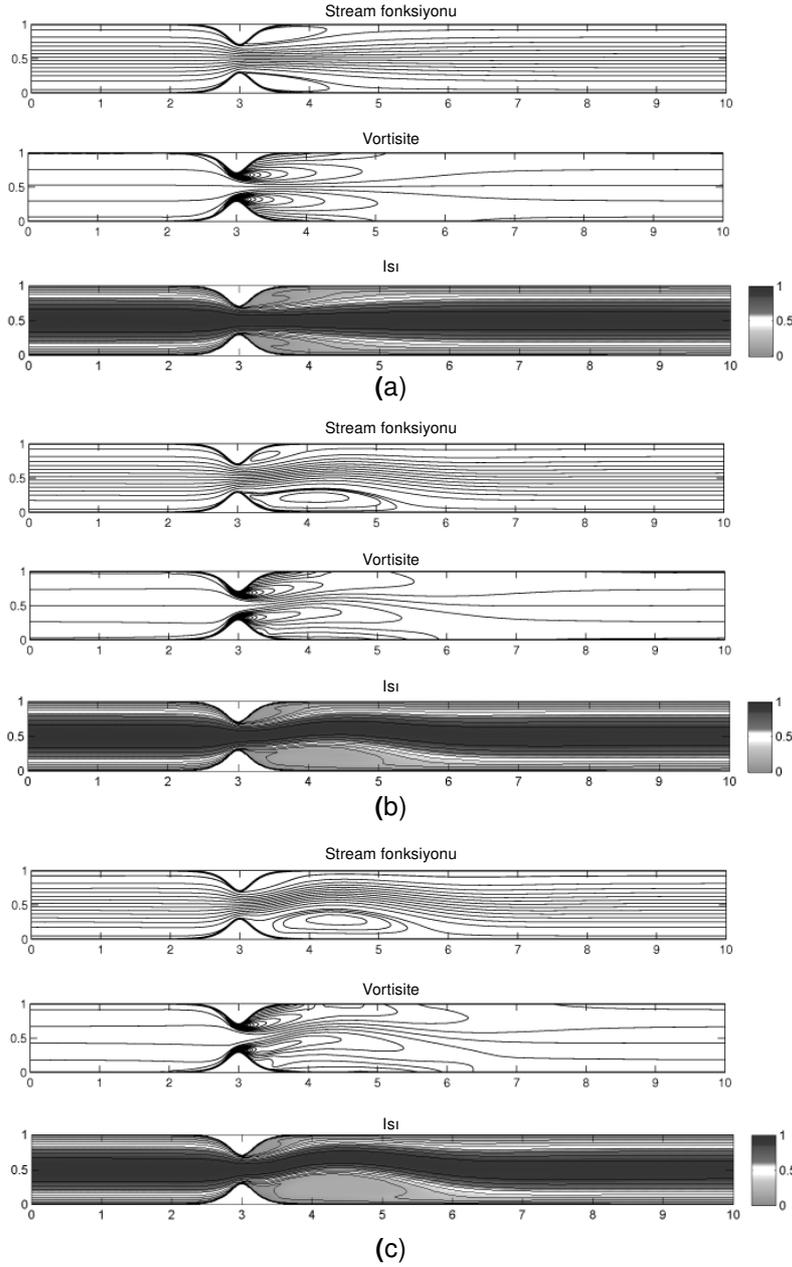
Şekil 3.4: Problem 1. %60 daralma içeren problem bölgesinin örnek ayrıklaştırılması

Şekil 3.5 ve Şekil 3.6 stream, vortisite ve ısı fonksiyonlarının durağan evredeki eşeğrilerini sırasıyla 40% ve 60% daralmanın olduğu kanallarda saf hidrodinamik akış durumu (a)  $Mn_F = Mn_M = 0$ , ve biyomanyetik akış durumları (b)  $Mn_F = 82$ ,  $Mn_M = 0.025$ , (c)  $Mn_F = 164$ ,  $Mn_M = 0.1$  için göstermektedir. Şekil 3.5(a)-3.6(a)'da görüldüğü üzere, daralmanın etkisiyle stream, vortisite ve ısı eşeğrilerinin düz akış şekli bozulmuştur. Vortisite eşeğrilerinde daralmanın hemen sonrasında iki simetrik vorteks oluşumu dikkat çekerken, stream ve ısı eşeğrilerinde çok az değişim gözlenmektedir. Diğer taraftan, manyetik alan etkisinin olmadığı durumda daralmanın derecesinin artması ile vorteks yoğunluğu ve uzunluğu artmaktadır. Bunlara ek olarak, daralmanın derecesinin artmasıyla, sadece vortisite profilinde değil aynı zamanda stream fonksiyonu ve ısı profillerinde de iki simetrik vorteks oluşumu meydana gelmektedir (bakınız Şekil 3.5(a)-Şekil 3.6(a)). Öyle ki, damardaki daralma akım ve ısı için durgun bölgelere neden olmaktadır. Şekil 3.5 ve Şekil 3.6'de manyetik alan etkisiyle birlikte bütün bilinmeyenlerin eşeğrilerinde simetrimin bozulduğunu gözlenmektedir. Manyetik alan sayıları arttırıldıkça alt duvarda oluşan vorteksler giderek büyümekte, buna paralel olarak üst duvar yakınındaki vorteksler küçülmektedir. Manyetik alan kaynağı %60 daralma içeren kanal üzerinde, %40 daralma içeren kanala göre akışkan akış profillerini ve ısı transferini daha belirgin ölçülerde etkilemektedir. Yüksek manyetik alan sayılarının akış profili üzerindeki etkilerini araştırmak amacıyla %60 daralma içeren kanal üzerinde sayısal çözümler elde edilmiş, Şekil



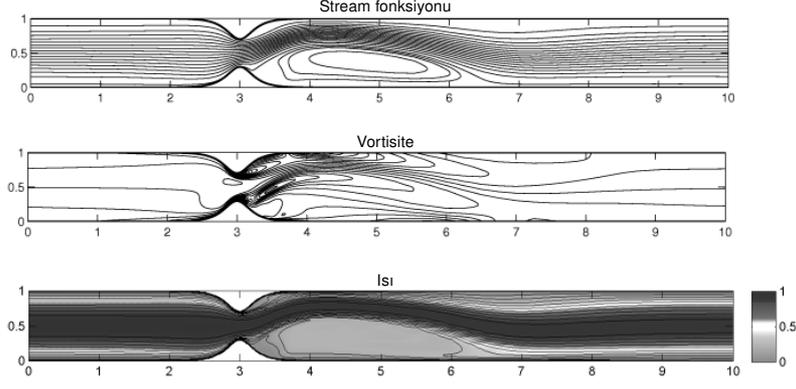
Şekil 3.5: Problem 1. Manyetik alan yoğunluğu ve 40% daralmanın stream, vortisite ve ısı eşeğrileri üzerindeki etkileri,  $Re = 100$ : (a)  $Mn_F = Mn_M = 0$ , (b)  $Mn_F = 82$ ,  $Mn_M = 0.025$ , (c)  $Mn_F = 164$ ,  $Mn_M = 0.1$ .

3.7'de (a)  $Mn_F = 656$ ,  $Mn_M = 1.2$  ve (b)  $Mn_F = 1312$ ,  $Mn_M = 6.4$  değerleri sonucunda elde edilen stream, vortisite ve ısı eşeğrileri gösterilmiştir. Bu şekilde, manyetik alan şiddetinin artırılmasının beklenildiği gibi manyetik alan kaynağının yerleştiği alt duvar bölgesindeki vorteksi genişlettiği vortisitede ek girdaplar oluşturduğu ve vorteks bölgesinin genişlemesiyle alt duvar sıcaklığının düştüğü gözlenmektedir. Daralmanın etkisiyle oluşan üst bölge vorteksinin manyetik alan etkisinin artmasıyla alt duvara yakın majör vorteksin genişlemesi sonucunda giderek küçülmekte olduğu gözlenmektedir. Manyetik alan kaynağı ve daralma bölgesinden

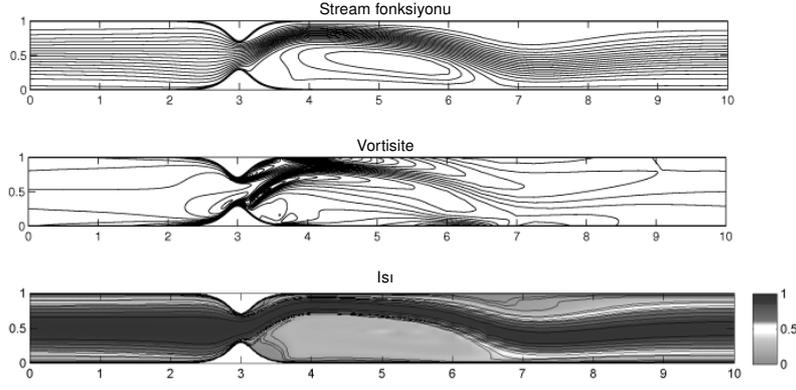


Şekil 3.6: Problem 1. Manyetik alan yoğunluğu ve 60% daralmanın stream, vortisite ve ısı eşeğrileri üzerindeki etkileri,  $Re = 100$ : (a)  $Mn_F = Mn_M = 0$ , (b)  $Mn_F = 82$ ,  $Mn_M = 0.025$ , (c)  $Mn_F = 164$ ,  $Mn_M = 0.1$ .

uzaklaşıp kanal çıkışına yaklaştıkça stream, vortisite ve ısı eşeğrileri kanal girişindeki profillerini tekrar kazanmaktadır. Bu sonuçlar, Tzirtzilakis' in çalışmasında (Tzirtzilakis, 2008a) elde ettiği sonuçlar ile uyum içerisindedir. Stream, vortisite ve ısı eşeğrilerinin zamana göre değişimi %60 daralma içeren kanal üzerinde  $Re = 100$  ve  $Mn_F = 82$ - $Mn_M = 0.025$  değerleri durumunda incelenmiştir. Şekil 3.8 (a)  $t = 0.4$ , (b)  $t = 1.0$ , (c)  $t = 1.25$  ve (d)  $t = 3.0$  zaman evrelerinde bilinmeyenlerin eşeğrilerini göstermektedir. Bu grafiklerde, ilk zaman evrelerinden itibaren manyetik alan kaynağının alt duvar bölgesinde bir vorteks oluşturduğu, bu vorteksin za-

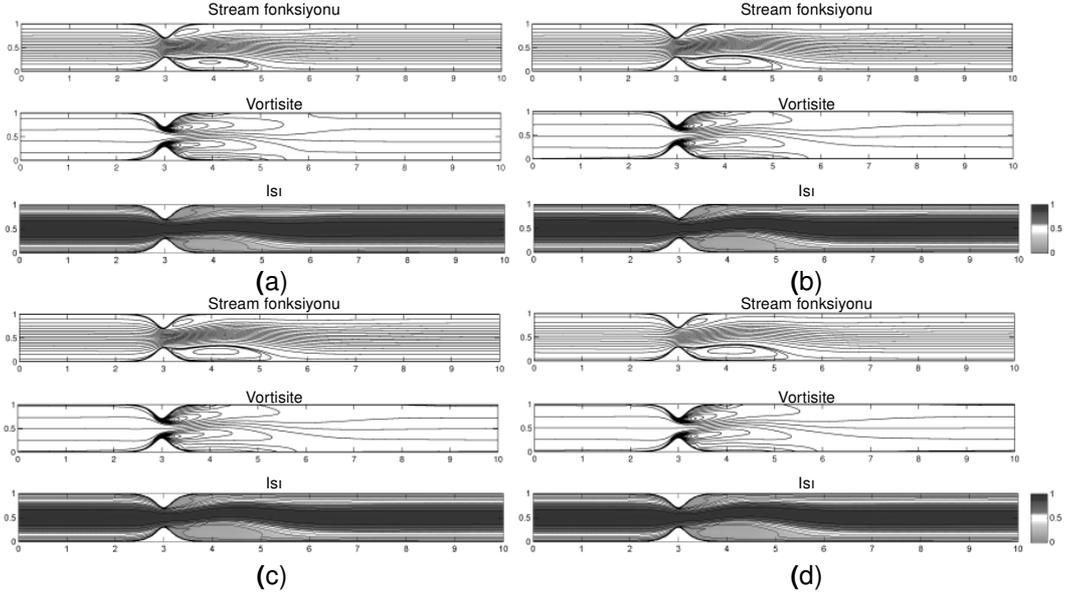


(a)



(b)

Şekil 3.7: Problem 1. Manyetik alan yoğunluğu ve 60% daralmanın stream, vortisite ve ısı eşeğrileri üzerindeki etkileri,  $Re = 100$ : (a)  $Mn_F = 656$ ,  $Mn_M = 1.2$ , (b)  $Mn_F = 1312$ ,  $Mn_M = 6.4$ .



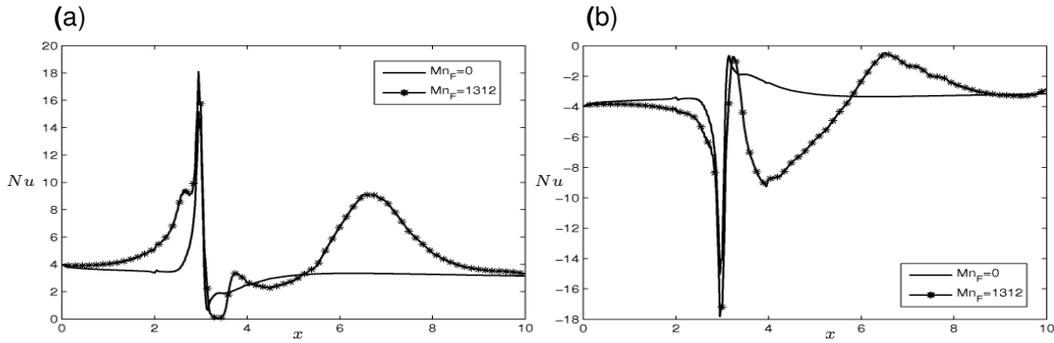
(c)

(d)

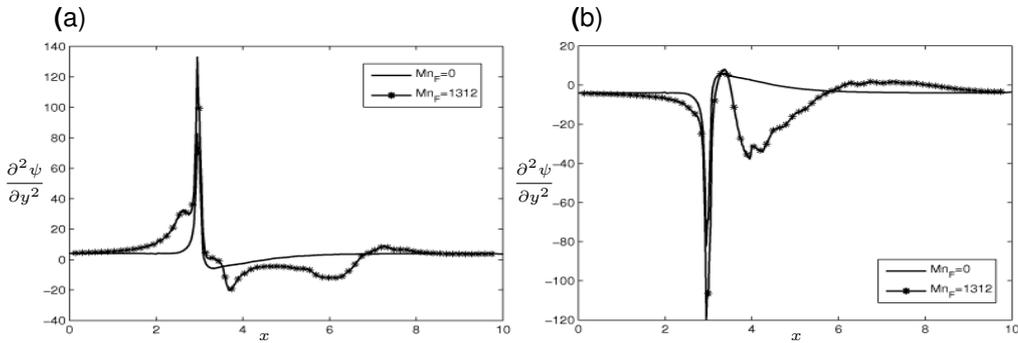
Şekil 3.8: Problem 1. Stream, vortisite ve ısı eşeğrilerinin 60% daralmalı kanalda zamana bağlı değişimi,  $Re = 100$ ,  $Mn_F = 82$ ,  $Mn_M = 0.025$ : (a)  $t = 0.4$ , (b)  $t = 1.0$ , (c)  $t = 1.25$ , (d)  $t = 3.0$ .

man ilerleyişiyle birlikte genişlediği gözlenmektedir. Giriş profilleri ile manyetik alan ve daralma uzağındaki çıkış profilleri zamana bağlı olarak değişim göstermemektedir. Akışkan akışı ve ısı

transferinin  $10^{-6}$  olarak alınan toleransa göre  $t = 3$  zamanında durağan evreye geldiği gözlenmektedir. Bu problemde ayrıca %60 daralma durumunda  $Re = 100$  ve  $Mn_F = Mn_M = 0$  ve  $Mn_F = 656$ ,  $Mn_M = 1.2$  durumu için, alt plaka ve üst plaka boyunca meydana gelen Nusselt sayısı değişimi, ( $Nu = \frac{\partial T}{\partial y}$ ) ve Shear parametresi değişimi ( $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ ) hesaplanmıştır. Sonuçlar Nusselt sayısı değişimi için alt duvar Şekil 3.9(a) ve üst duvar Şekil 3.9(b)'de, Shear parametresi için alt duvar Şekil 3.10(a) ve üst duvar Şekil 3.10(b)'de gösterilmiştir. Nusselt sayısı ve Shear parametresi grafiklerinde ekstremum (alt duvarda en yüksek, üst duvarda en düşük) değerleri daralmanın tepe noktasında ( $x = 3$  doğrusu üzerinde) meydana gelmektedir.  $Mn_F = 656$ ,  $Mn_M = 1.2$  durumunda bu ekstremum değerler  $Mn_F = Mn_M = 0$  durumuna göre mutlak değerce artış göstermekle beraber, Nusselt sayısı ve Shear parametresi değişimindeki major etkenin kanal içinde meydana gelen daralma olduğu görülmektedir. Manyetik alan uygulanmasıyla birlikte bu değişimlerde salınımlar gözlenmekte ve bu salınımlar manyetik alan kaynağının bulunduğu noktadan sonraki bölgede belirgin halde olmaktadır. Nusselt sayısı ve Shear parametresi değişimleriyle ilgili elde edilen bu sonuçlar, (Tzirtzilakis, 2008a) çalışmasında verilen sonuçlarla oldukça iyi uyum içindedir.



Şekil 3.9: Problem 1. Nusselt sayısı,  $Re = 100$ : (a) alt duvar (b) üst duvar.



Şekil 3.10: Problem 1. Shear parametresi,  $Re = 100$ : (a) alt duvar (b) üst duvar.

### 3.3.2 Problem 2: Düzensiz Daralmalı Kanalda Biyomanyetik Sıvı Akışı

Bu problemde, (3.1) nolu denklem sistemi düzensiz (simetrik olmayan) daralma içeren bir kanal bölgesinde çözülecektir. Manyetik alan etkisi içermeyen (3.12) nolu denklemler öncelikli olarak çözülmüştür. Dışarıdan uygulanan manyetik alan yoğunluğunun ve yerleştirildiği noktanın sıvı akışı üzerindeki etkisi incelenmiştir. Vortisitenin alt ve üst duvarlardaki değerleri Bölüm 3.2' de anlatılan ardışık-tekrarlama metodu ile elde edilmiş, kararlı hal durumu için tolerans  $10^{-4}$  olarak belirlenmiştir.

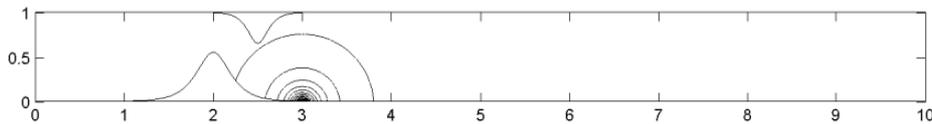
Daralma içeren kanal bölgesinin alt duvarı

$$y_1 = A_1 \sec h(B_1(x - x_1)), 0 \leq x \leq L$$

ve üst duvarı

$$y_2 = 1 - A_2 \sec h(B_2(x - x_2)), 0 \leq x \leq L$$

fonksiyonlarıyla tanımlanmıştır. Bu fonksiyonlar birinci problemde kullanılan sınır tanım fonksiyonlarının genel hali olup, fonksiyon tanımında kullanılan katsayılar bu problem için kanalda simetrik olmayan daralma bölgesi oluşturacak şekilde düzenlenmiştir. Kanaldaki daralma derecesini belirleyen  $A_1$  ve  $A_2$  pozitif sayıları  $A_1 = 0.55$  ve  $A_2 = 0.35$  alınmıştır. Daralmanın en yoğun olarak meydana gelen tepe noktalarının yerleri alt duvarda  $x_1 = 2$  ve üst duvarda  $x_2 = 2.5$  olarak alınmıştır. Daralan bölgenin uzunluğunu kontrol eden  $B_1$  ve  $B_2$  katsayıları ise  $B_1 = 6$  ve  $B_2 = 10$  alınarak belirlenmiştir. Bu katsayılarla elde edilen problem bölgesi ile temsili olarak  $(a, b) = (3, -0.05)$  noktasına yerleştirilen manyetik alan kaynağının oluşturduğu eşeğriler Şekil 3.11' de gösterilmiştir.



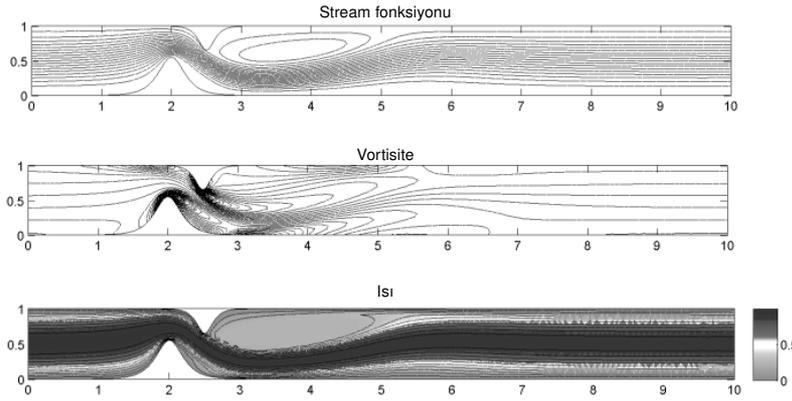
Şekil 3.11: Problem 2. Simetrik olmayan daralma içeren kanal ve manyetik alan eşeğrileri.

Problem 1 için tarafımızca yazılmış program ile yapılan ayrıklaştırma metodu simetrik olmayan daralma içeren bölgelerde uygun olmamaktadır. Bu nedenle, düzensiz daralma içeren bölgelerde ayrıklaştırma işlemi FreeFem++ adlı ücretsiz program ile yapılmıştır. Bu program, fonksiyonlarla tanımlanan çözüm bölgesini lineer (3 noktalı) elemanlara bölmektedir. Ancak, bu çalışmada çözülen denklemlerdeki lineer olmayan terimlerde bulunan ikinci dereceden konum türevlerinin yaklaşımı için sonlu elemanlar yönteminde kuadratik (6 noktalı) elemanlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle, FreeFem++ programından elde edilen eleman-köşe koordinat dataları tarafımızca yazılan kodla kuadratik eleman datalarına dönüştürülmüş ve bölge ayrıklaştırma işlemi bu şekilde kuadratik elemanlar ile tamamlanmıştır. Simetrik olmayan daralma içeren problem bölgesinin 948 eleman kullanılarak yapılmış örnek bir ayrıklaştırılması Şekil 3.12' de gösterilmektedir. Stream, vortisite ve ısı fonksiyonlarının farklı manyetik alan sayıları için eşeğrileri  $M_e = 9574$  kuadratik eleman kullanılarak elde edilmiştir.



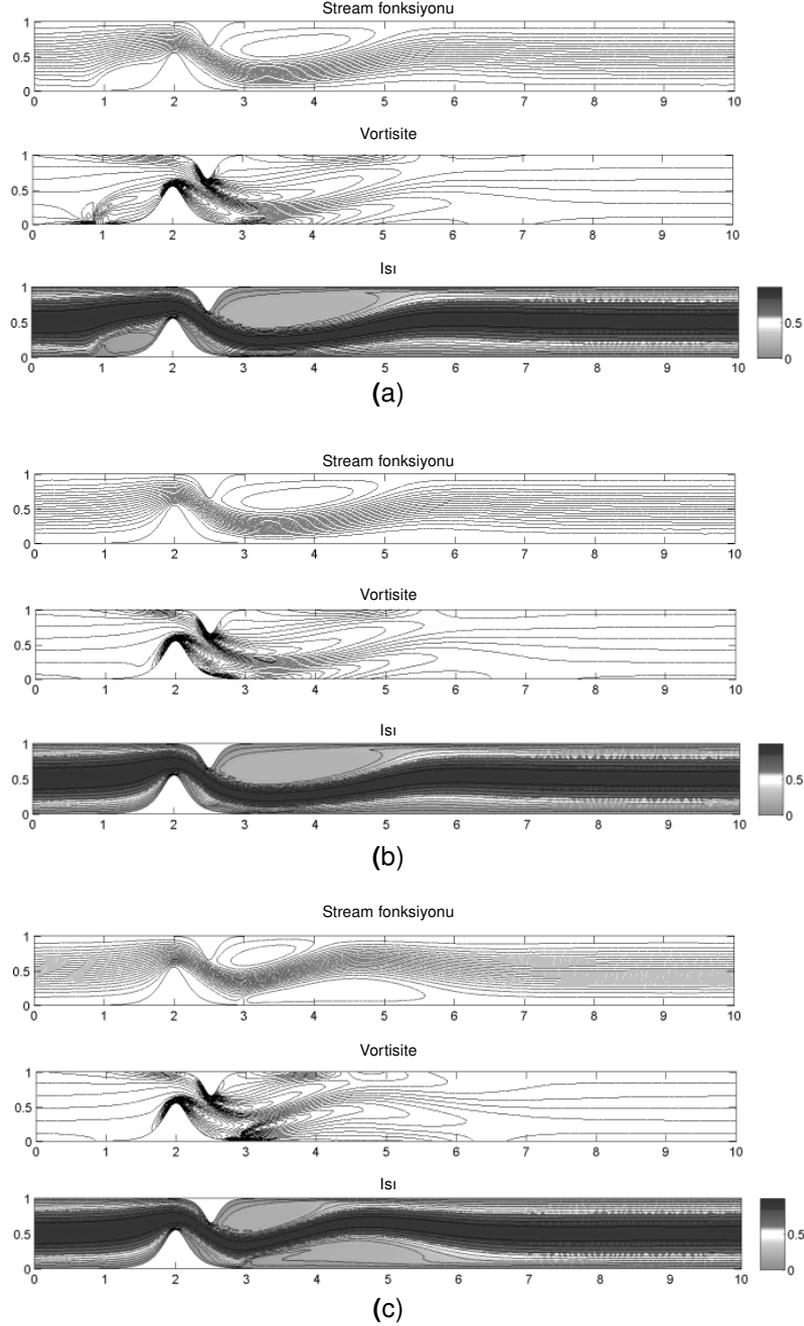
Şekil 3.12: Problem 2. Simetrik olmayan daralma içeren kanalın örnek ayrıklaştırılması.

Düzensiz daralmanın akış üzerindeki etkisini görebilmek amacıyla ilk önce saf hidrodinamik akış ( $Mn_F = Mn_M = 0$ ) durumu incelenmiştir. Şekil 3.13 saf hidrodinamik akış durumunda stream, vortisite ve ısı fonksiyonlarının durağan evredeki eşeğrilerini düzensiz daralmanın meydana geldiği kanal içerisinde, sabit Reynolds sayısı  $Re = 100$  için göstermektedir. Düzensiz daralmanın etkisiyle, simetrik daralma probleminde olduğu gibi, daralma sonrasında özellikle stream fonksiyonu ve ısı profillerinde bir vorteks oluşumu gözlenmektedir. Ancak, bu vorteks oluşumu Problem 1' deki gibi simetrik değil (bakınız Şekil 3.5(a) ve Şekil 3.6(a) ), sadece üst duvar boyunca uzanan tek büyük bir vorteksten ibarettir. Alt duvardaki daralma daha önce oluştuğu ve daralma derecesi daha yüksek olduğu için biyoakışkanı alt plakaya itmekte ve üst plaka boyunca durgun bir alan oluşturmaktadır.



Şekil 3.13: Problem 2. Stream, vortisite ve ısı eşeğrileri,  $Re = 100$ ,  $Mn_F = 0$ ,  $Mn_M = 0$ .

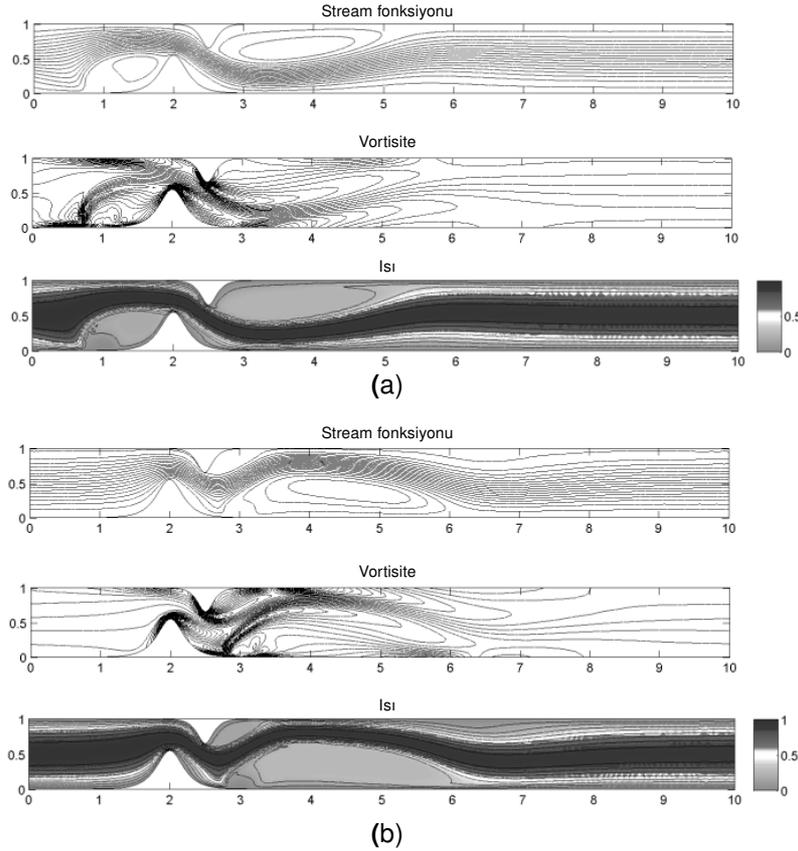
Şekil 3.14 manyetik alan kaynağının yerinin akış üzerindeki etkisini sabit manyetik alan sayıları  $Mn_F = 82$ ,  $Mn_M = 0.025$  için sırasıyla (a) daralmanın başladığı  $(a, b) = (1, -0.05)$  noktasında, (b) üst duvarda meydana gelen daralmanın tepe noktasıyla aynı apsisli  $(a, b) = (2.5, -0.05)$ , ve (c) daralmanın sona erdiği  $(a, b) = (3, -0.05)$  noktasında göstermektedir. Şekil 3.13 ile karşılaştırıldığında, manyetik alan kaynağı  $(a, b) = (1, -0.05)$  noktasına konulduğunda, bu noktada stream fonksiyonu, vortisite ve ısı eşeğrilerinde küçük vorteksler oluştuğu görülmektedir. Manyetik alan kaynağının bu noktaya konulmasının daralmadan sonra gözle görülür bir etki yaratmadığı gözlemlenmiştir. Manyetik alan kaynağı  $(a, b) = (2.5, -0.05)$  noktasına alındığında manyetik alanın  $Mn_F = 82$ ,  $Mn_M = 0.025$  değerleri için akış üzerinde önemli bir etki oluşturmadığı gözlenmektedir. Bu durumun, kaynağın etki alanının çoğunlukla problem bölgesinin dışında kalmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Manyetik alan kaynağı  $(a, b) = (3, -0.05)$  noktasına konulduğunda ise, stream fonksiyonu, vortisite ve ısı eşeğri-



Şekil 3.14: Problem 2. Manyetik alan kaynağı yerinin stream, vortisite ve ısı eşeğrileri üzerindeki etkisi,  $Re = 100$ ,  $Mn_F = 82$ ,  $Mn_M = 0.025$ : (a)  $a = 1.0$ , (b)  $a = 2.5$ , (c)  $a = 3.0$ .

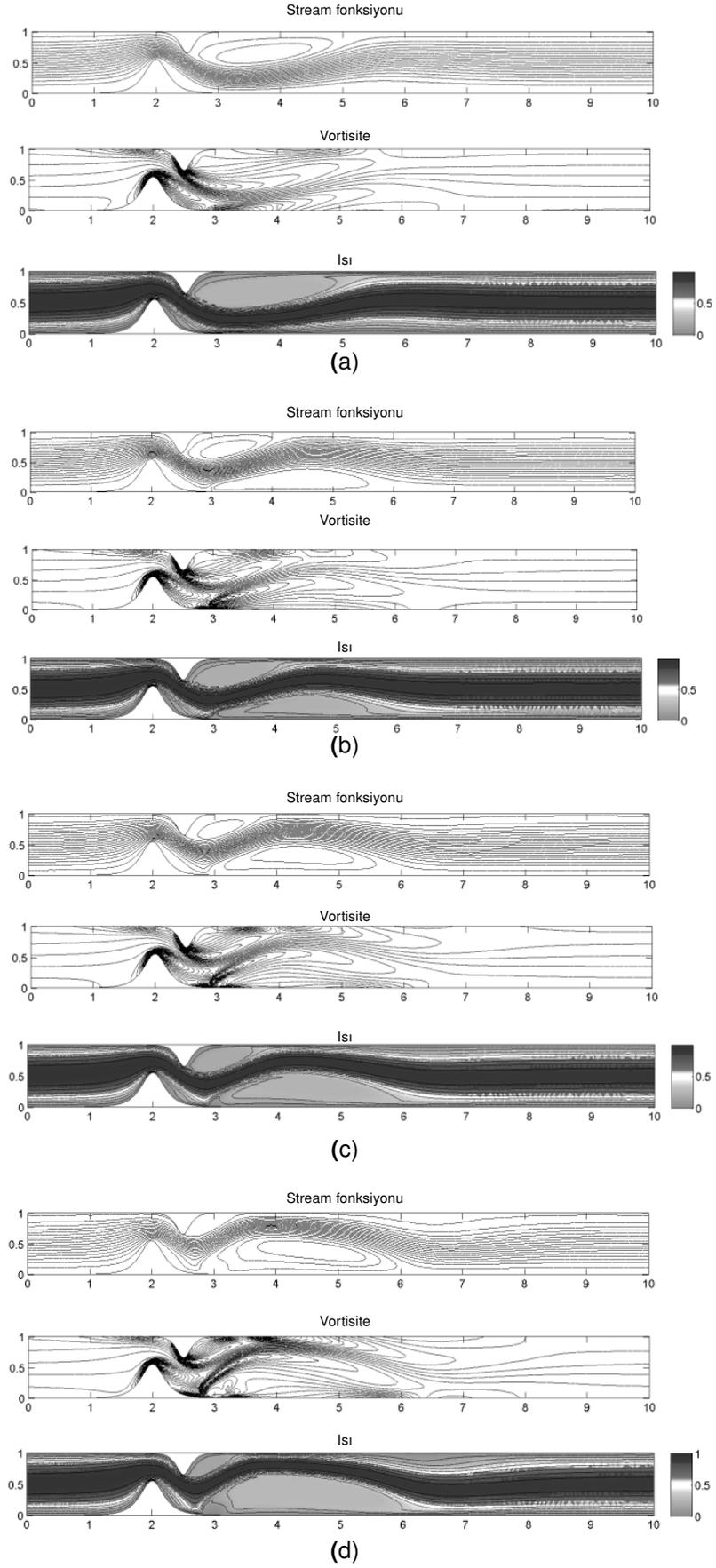
lerinde alt duvar boyunca büyük bir vorteks oluşmaktadır. Bu vorteksin oluşmasıyla beraber sıvı akışı üst duvara doğru kaymakta ve burada daralmanın etkisiyle meydana gelen vorteksin küçülmesine neden olmaktadır. Aynı zamanda daralmadan kaynaklanan kan akışına direnç azalmakta ve daralan bölgede kan akışı kolaylaşmaktadır. Daralmanın etkisiyle üst duvarda oluşan soğuk vorteks bölgesinin manyetik alan etkisiyle yukarı doğru itilen sıvı akışıyla beraber ısınarak küçüldüğü görülmektedir. Manyetik alanın ve daralmanın etkisinin azaldığı kanal çıkışında stream, vortisite ve ısı fonksiyonlarının eşeğrileri daha önce çözülen problemlerde olduğu gibi kanal girişindeki profillerini almaktadır.

Şekil 3.15 yüksek manyetik alan yoğunluğu ( $Mn_F = 656$ ,  $Mn_M = 1.2$ ) için manyetik alan kaynağı yerinin akış üzerindeki etkisini göstermektedir. Manyetik alan yoğunluğunun artması ile beklenildiği gibi kaynak civarında oluşan vorteksler Şekil 3.14(a) ve (c)'deki vortekslerle büyümektedir. Manyetik alan kaynağının  $(a, b) = (1, -0.05)$  noktasına konulması, yüksek  $Mn_F$ ,  $Mn_M$  değerleri için de daralmadan sonraki akış profilinde önemli bir değişiklik meydana getirmemektedir. Manyetik alan kaynağının  $(a, b) = (3, -0.05)$  noktasına konulması, daralmandan kaynaklanan üst vorteksi küçültmekte ve böylece daralmanın akış üzerindeki etkisini oldukça azaltmaktadır.



Şekil 3.15: Problem 2. Manyetik alan kaynağı yerinin stream, vortisite ve ısı eşeğirleri üzerindeki etkisi,  $Re = 100$ ,  $Mn_F = 656$ ,  $Mn_M = 1.2$ : (a)  $a = 1.0$ , (b)  $a = 3.0$ .

Manyetik alan kaynağının yeri sabit ( $(a, b) = (3, -0.05)$ ) tutularak, manyetik alan yoğunluğundaki artışın akış profili üzerindeki etkisini incelemek üzere Şekil 3.16' da (a)  $Mn_F = 0$ ,  $Mn_M = 0$ , (b)  $Mn_F = 82$ ,  $Mn_M = 0.025$ , (c)  $Mn_F = 164$ ,  $Mn_M = 0.1$  ve (d)  $Mn_F = 656$ ,  $Mn_M = 1.2$  değerleri için stream fonksiyonu-vortisite-ısı eşeğirleri çizilmiştir. Daralmanın hemen sonrasında konulan manyetik alan kaynağı küçük  $Mn_F$ ,  $Mn_M$  değerlerinden itibaren oluşan vortekslerle akış profilini etkilemeye başlamaktadır.  $Mn_F$ ,  $Mn_M$  değerleri büyüdükçe mıknaş sonrasında oluşan vorteksler  $y$  yönünde genişlemekte ve daralmanın etkisiyle üst duvarda oluşan vorteksi yukarı doğru itererek küçültmektedir. Manyetik alan yoğunluğunun ısı üzerindeki etkisi, akış profilindeki değişime paralel olacak şekilde kaynak civarında gözlenmektedir. Daralmanın etkisiyle, alt duvara yakın bölgede oluşan sıcaklık artışı manyetik alan etkisiyle



Şekil 3.16: Problem 2. Manyetik alan yoğunluğunun stream, vortisite ve ısı eşeğirleri üzerindeki etkisi,  $Re = 100$ ,  $a = 3.0$ : (a)  $Mn_F = 0$ ,  $Mn_M = 0$ , (b)  $Mn_F = 82$ ,  $Mn_M = 0.025$ , (c)  $Mn_F = 164$ ,  $Mn_M = 0.1$ , (d)  $Mn_F = 656$ ,  $Mn_M = 1.2$ .

üst duvara doğru yönelmektedir. Stream fonksiyonu-vortisite-ısı eşeğirleri, bütün  $Mn_F$ ,  $Mn_M$  değerleri için daralma ve manyetik alan etkisinin azalmasıyla çıkışa doğru girişteki profillerini kazanmaktadır.

### 3.3.3 Problem 3: Düzensiz Çoklu Daralma İçeren Kanalda Biyomanyetik Sıvı Akışı

Bu problemde, dışarıdan uygulanan manyetik alan etkisinde biyomanyetik sıvı akışı problemi, birden fazla düzenli/düzensiz daralma içeren kanal içinde çözülecektir. Burada ele alınan kanal, gerçeğe yakın şekilde meydana gelebilecek simetrik ve asimetrik daralmaların akışkan profili ve ısı transferi üzerindeki etkilerini incelemek amacıyla tarafımızdan tasarlanmıştır. Problem çözüm bölgesi öncelikli olarak giriş bölgesine yakın bölümde simetrik bir daralma gösterecek şekilde planlanmıştır. Bu birinci daralma kanalın orta bölümünden önce azalmakta ve kanal giriş şeklini almaktadır. Kanalın orta bölümünde düzensiz ve birinciden daha yüksek derecede bir daralma meydana gelmekte ve bu daraldan sonra kanal bir kez daha giriş şeklini almaktadır. Son olarak kanal, çıkış bölgesine yakın kısmında bir kez daha daralmakta ve giriş genişliğinden daha az genişlikte sonlanmaktadır. Bu konfigürasyon, kanalın alt duvar,  $y_1$ , ve üst duvar,  $y_2$ , eğrilerini aşağıdaki şekilde tanımlanarak elde edilmiştir:

$$y_1 = C_1 [1 - \cos(2\pi(x - D(x))/E(x))], \quad 0 \leq x \leq 10,$$

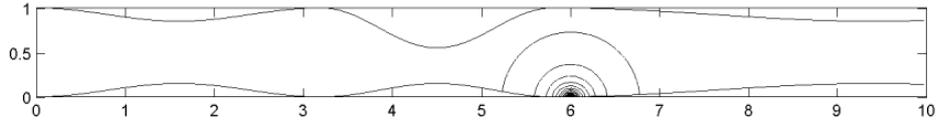
$$y_2 = 1 - C_2(x) [1 - \cos(2\pi(x - D(x))/E(x))], \quad 0 \leq x \leq 10.$$

Burada,  $C_1$  pozitif sabit sayısı  $C_1 = 0.075$  olarak alınmıştır.  $C_2$ ,  $D$  ve  $E$  daralma profillerini ve derecelerini etkileyen sabit değerli parçalı fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar aşağıda verilen şekilde tanımlanmıştır:

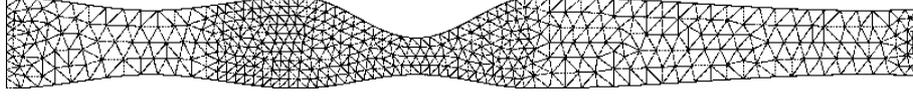
$$C_2(x) = \begin{cases} 0.075, & 5.8 < x \leq 10 \text{ ise} \\ 0.225, & 3.2 < x \leq 5.8 \text{ ise} \\ 0.075, & 0 \leq x \leq 3.2 \text{ ise} \end{cases}, \quad D(x) = \begin{cases} 5.8, & 5.8 < x \leq 10 \text{ ise} \\ 3.2, & 3.2 < x \leq 5.8 \text{ ise} \\ 0, & 0 \leq x \leq 3.2 \text{ ise} \end{cases},$$

$$E(x) = \begin{cases} 7.2, & 5.8 < x \leq 10 \text{ ise} \\ 2.6, & 3.2 < x \leq 5.8 \text{ ise} \\ 3.2, & 0 \leq x \leq 3.2 \text{ ise} \end{cases}.$$

Bu fonksiyonlar ile tanımlanan problem bölgesi Şekil 3.17' de gösterilmiştir. Bu problem bölgesi için de simetrik olmayan sınır profilleri nedeniyle Problem 2 için anlatılan ayrıklaştırma yöntemi kullanılmıştır. Benzer şekilde FreeFem++ programından elde edilen eleman-köşe koordinat dataları tarafımızca yazılan kodla kuadratik elemanlara dönüştürülmüştür. Simetrik olmayan daralma içeren bu problem bölgesinin 920 eleman kullanılarak örnek bir ayrıklaştırılması Şekil 3.18' de verilmiştir.



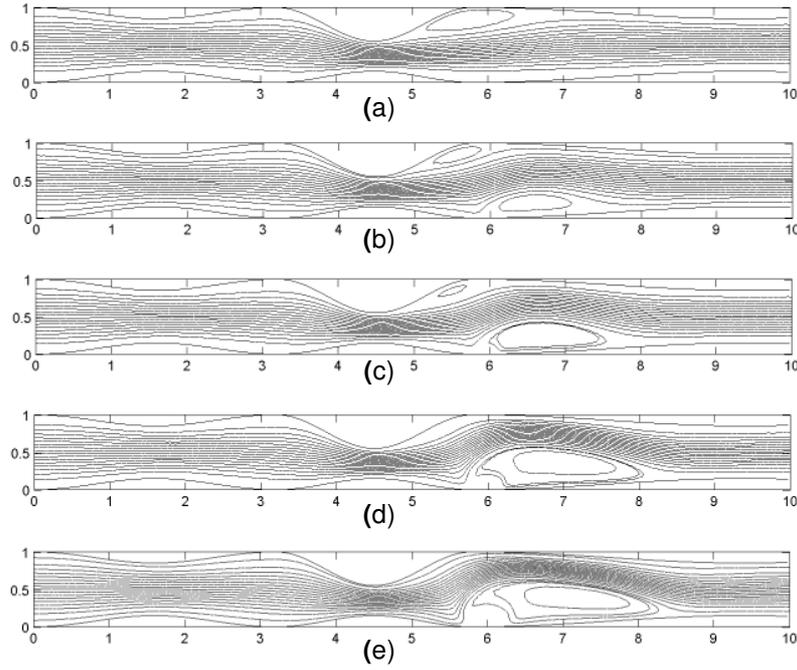
Şekil 3.17: Problem 3. Çoklu daralma içeren kanal ve manyetik alan eşeğrileri.



Şekil 3.18: Problem 3. Çoklu daralma içeren kanalın örnek ayrıklaştırılması.

Problem 2' de daralma içeren bir kanalda kan akışı üzerindeki en belirgin etkinin, manyetik kaynağın daralma bölgesinin sona erdiği noktaya yerleştirilmesiyle elde edildiği gözlenmiştir. Bu durum göz önüne alınarak mevcut kanal üzerinde noktasal manyetik alan kaynağı en yüksek dereceli daralma bölgesinin hemen sonrasına,  $(a, b) = (6, -0.05)$  noktasına yerleştirilmiştir. Şekil 3.18 ayrıca  $(a, b)$  noktasına yerleştirilen manyetik alan kaynağından elde edilen eşeğrileri de göstermektedir. Çözüm metodu ve vortisitenin alt ve üst duvarlardaki değerlerin hesaplanması Bölüm 3.2' de anlatılan ardışık-tekrarlama şeklindedir. Bu problemde kararlı hal durumu için tolerans  $10^{-4}$  olarak belirlenmiş, stream, vortisite ve ısı fonksiyonlarının farklı manyetik alan sayıları için eşeğrileri  $Me = 6970$  kuadratik eleman kullanılarak elde edilmiştir.

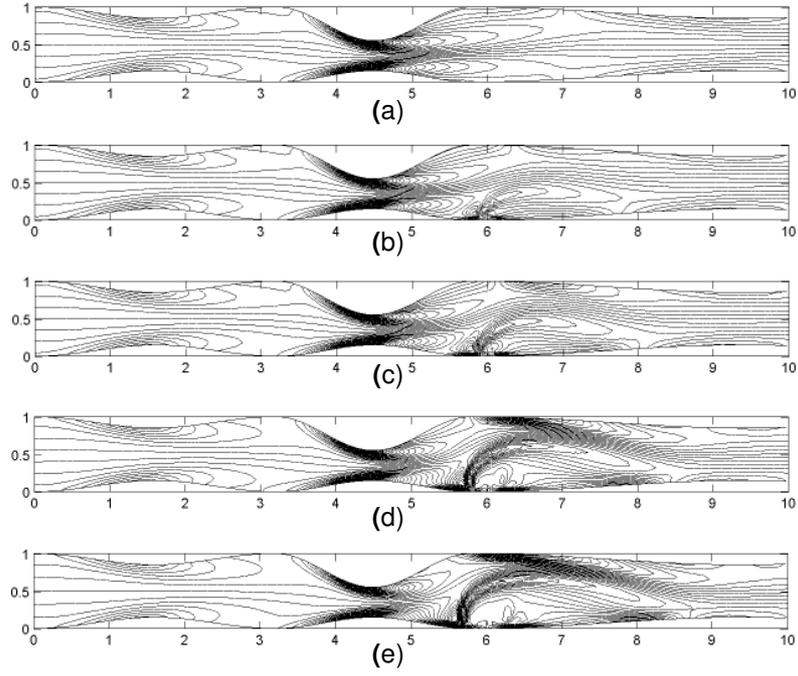
Şekil 3.19 stream fonksiyonu, Şekil 3.20 vortisite ve Şekil 3.21 ısı eşeğrilerini (a)  $Mn_F = 0$ ,  $Mn_M = 0$ , (b)  $Mn_F = 82$ ,  $Mn_M = 0.025$ , (c)  $Mn_F = 164$ ,  $Mn_M = 0.1$ , (d)  $Mn_F = 656$ ,  $Mn_M = 1.2$ , ve (e)  $Mn_F = 1312$ ,  $Mn_M = 6.4$  değerleri için göstermektedir. Bu şekillerden 3.19 (a), 3.20 (a) ve 3.21 (a) manyetik alan etkisi olmayan saf hidrodinamik akış durumunu göstermektedir. Burada düşük dereceli ilk daralmanın sıvı akış profili ve ısı transferi üzerinde önemli bir etki yaratmadığı, stream fonksiyon ve ısı eşeğrilerinin bu bölgede yaklaşık olarak giriş profillerinde olduğu gözlenmektedir. Orta bölgede yer alan ileri derece daralmanın stream fonksiyonu ve ısı eşeğrilerinin üzerinde daha etkili olduğu gözlenmektedir. Bu daralma sonrasında üst duvarda vorteks oluşmaktadır. Ayrıca bu vorteks bölgesinde sıcaklıkta azalma olduğu gözlenebilmektedir. Vortisite eşeğrilerinde ise birinci daralma sonrasında simetrik iki vorteks oluşumu dikkati çekerken, ikinci yüksek dereceli daralma sonrasında yoğunluğu ve uzunluğu öncekilere göre daha fazla ve simetrik olmayan iki vorteks oluşumu gözlenmektedir. Bu vortekslerden üst duvara yakın olanı alt duvar yakınında olandan daha uzun olduğu dikkat çekmektedir. Dışarıdan uygulanan manyetik alanın, stream fonksiyonu, vortisite ve ısı eşeğrileri üzerinde etkili olduğu görülmektedir. Bu etki, düşük manyetik alan sayılarından itibaren gözlenebilmekte, manyetik alan sayıları arttıkça belirginleşmektedir. Majör (ikinci) daralma bölgesinin hemen sonrasına yerleştirilen manyetik alan kaynağı, stream fonksiyonu eşeğrilerinde alt duvara yakın ikinci bir vorteks oluşturmakta, bu vorteksin oluşumuyla daralma etkisiyle meydana gelen üst vorteksin küçülmesine neden olmaktadır (Şekil 3.19 (a)-(e)). Manyetik alan yoğunluğunun artmasıyla alt vorteks uzunlukça ve genişlikçe büyümektedir. Buna paralel



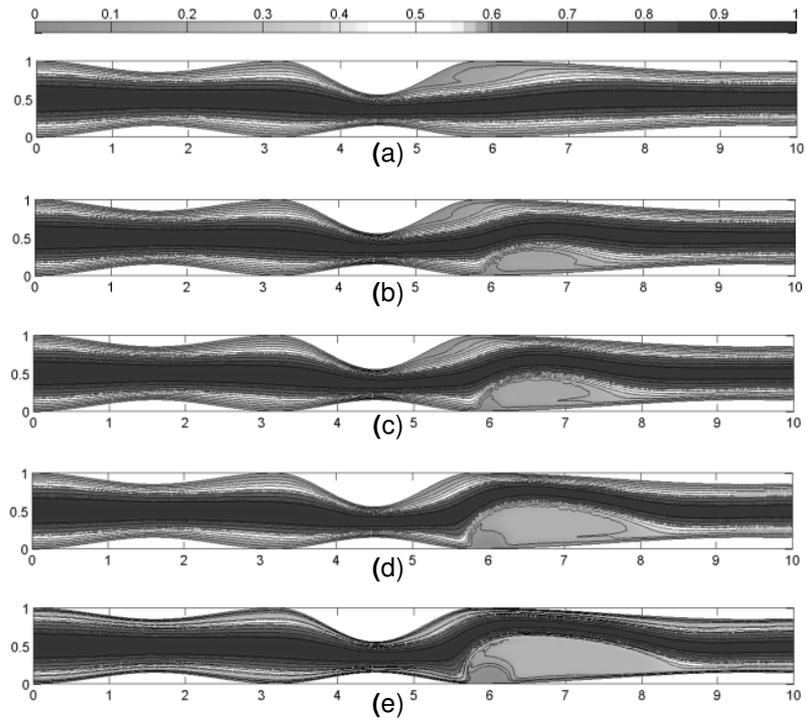
Şekil 3.19: Problem 3. Stream fonksiyonu eşeğrileri,  $Re = 100$ : (a)  $Mn_F = 0$ ,  $Mn_M = 0$ , (b)  $Mn_F = 82$ ,  $Mn_M = 0.025$ , (c)  $Mn_F = 164$ ,  $Mn_M = 0.1$ , (d)  $Mn_F = 656$ ,  $Mn_M = 1.2$ , (e)  $Mn_F = 1312$ ,  $Mn_M = 6.4$ .

olarak üst duvara yakın ilk vorteks küçülmekte ve giderek kaybolmaktadır. Şekil 3.19 (e), yüksek manyetik alan sayıları  $Mn_F = 1312$ ,  $Mn_M = 6.4$  durumunda stream fonksiyonu eşeğrilerinde alt vorteksin genişleyerek eşeğrileri yukarı doğru iterek, üst bölgedeki vorteksi tamamen yok ettiğini göstermektedir.

Şekil 3.21 (a)-(e) manyetik alanın ısı eşeğrilerinde, stream fonksiyonuna benzer etkiler oluşturduğunu ortaya koymaktadır. Akış profiline paralel şekilde, manyetik alan uygulanmasıyla birlikte manyetik alan kaynağının majör daralma sonrasında alt duvara yakın vorteks oluşturduğu, ayrıca manyetik alan sayılarının artmasıyla alt duvara yakın oluşan vorteksin uzunluk ve genişlikçe büyüyerek daralmadan kaynaklanan üst vorteksin küçülmesine neden olduğu gözlenmektedir. Grafik ayrıca, akışkanın sıcaklığının vorteks bölgelerinde diğer bölgelere oranla daha düşük olduğunu göstermektedir. Ayrıca, majör daralmanın etkisiyle alt duvara yakın bölgede artan sıcaklığın manyetik alan etkisiyle azalmaya başladığı, yüksek manyetik alan sayıları ile birlikte üst duvara yakın bölgedeki sıcaklığın giderek arttığı görülmektedir. Şekil 3.20 (a)-(e) incelendiğinde, vortisite eşeğrilerinde birinci daralmayla meydana gelen simetrik vortekslerde belirgin bir değişiklik olmadığı, ancak majör daralma bölgesindeki vortekslerin manyetik alan uygulanmasıyla önemli ölçüde etkilendiği gözlenmektedir. Düşük manyetik alan sayıları ( $Mn_F = 82$ ,  $Mn_M = 0.025$ ) ile birlikte vortisite eşeğrilerinde daralma etkisi vortekslerdeki simetrisinin bozulduğu, ayrıca alt duvara yakın üçüncü bir vorteksin olduğu gözlenmektedir. Manyetik alan sayılarının artırılmasıyla birlikte üst duvara yakın dördüncü bir vorteks oluşumu gözlenmektedir. Yüksek manyetik alan sayılarında alt duvar vorteksinin genişlik ve uzunlukça



Şekil 3.20: Problem 3. Vortisite eşeğrileri,  $Re = 100$ : (a)  $Mn_F = 0$ ,  $Mn_M = 0$ , (b)  $Mn_F = 82$ ,  $Mn_M = 0.025$ , (c)  $Mn_F = 164$ ,  $Mn_M = 0.1$ , (d)  $Mn_F = 656$ ,  $Mn_M = 1.2$ , (e)  $Mn_F = 1312$ ,  $Mn_M = 6.4$ .



Şekil 3.21: Problem 3. Isı eşeğrileri,  $Re = 100$ : (a)  $Mn_F = 0$ ,  $Mn_M = 0$ , (b)  $Mn_F = 82$ ,  $Mn_M = 0.025$ , (c)  $Mn_F = 164$ ,  $Mn_M = 0.1$ , (d)  $Mn_F = 656$ ,  $Mn_M = 1.2$ , (e)  $Mn_F = 1312$ ,  $Mn_M = 6.4$ .

büyüdüğü, üst duvara yakın oluşan üçüncü vorteksin de buna paralel olarak genişlediği gözlenmektedir. Kanalin orta bölgesinde meydana gelen majör daralma ve manyetik alan kaynağının akış profili ve ısı transferi üzerinde önemli değişikliklere yol açtığı, ancak daralmanın ve manyetik alan etkisinin azaldığı kanal çıkışına yakın bölgede stream fonksiyonu, vortisite ve ısı eşeğrilerinin tümünde giriştekine benzer profillerde olduğu dikkat çekmektedir. Sonuç olarak damar içerisinde derecesi en yüksek olan daralmanın etkisiyle üst duvarda oluşan durgun akım bölgesi, alt duvar yakınına (daralma sonrasına) yerleştirilen manyetik kaynak ile küçülerek kaybolmaktadır. Kan akışına olan direnç azalmaktadır. Aynı zamanda, manyetik kaynağın şiddetinin arttırılması alt durağan akım bölgesinin sıcaklığının azalmasını, üst duvara yakın bölgedeki akışkanın sıcaklığının ise artmasını sağlamaktadır.

## BÖLÜM 4

# SONUÇ

Bu projede, dışarıdan uygulanan manyetik alan etkisinde biyomanyetik sıvı akışı düz, simetrik ve simetrik olmayan çoklu daralmalar içeren kanallar içerisinde farklı parametre değerleri için nümerik olarak çözülmüş ve sonuçlar grafiksel olarak gösterilmiştir. İki-boyutlu, laminer, sıkıştırılamaz akış modelinde biyoakışkan olarak kan ele alınmış ve kanın homojen, viskoz, Newtonian ve elektrikçe iletken olduğu düşünülmüştür. İlk olarak dışarıdan uygulanan manyetik alanın daralmasız damarlardaki kanın akış hızı ve ısı değişimi üzerindeki salt etkisini incelemek amacıyla, zamandan bağımsız biyomanyetik akışkanın elektrikçe iletken olmadığı durum ele alınmıştır. Elde edilen denklemler sonlu ve sınır elemanları yöntemleri ile çözülmüş ve belli bir durum için iki yöntemin sonuçları niteliksel ve niceliksel olarak karşılaştırılmıştır. Sonlu elemanlar metodu ile sınır elemanları metoduna göre daha hassas sonuçlar elde edilmiştir. Ancak, sınır elemanları metodunda sadece problem bölgesinin sınırları ayrılaştırıldığı için programlamada sonlu elemanlar yöntemine kıyasla daha az hafızaya ve işlem süresine ihtiyaç duyulmaktadır. İkinci olarak, elektrikçe iletken biyomanyetik akışkanın, zamana bağlı akış modeli daralma içermeyen düz kanal içerisinde konum türevlerinde sonlu elemanlar, zaman türevinde geri fark yöntemleri kullanılarak çözülmüştür. Biyomanyetik akışkan profilin zamana bağlı değişimini incelemek amacıyla problem bilinmeyenlerin eşeğrileri farklı zaman seviyelerinde çizilmiştir. Ayrıca, çok yüksek değerler de içeren farklı manyetik sayıları için durağan evre eşeğrileri gösterilmiştir. Son olarak, genel biyomanyetik akışkan denklemleri düzenli ve düzensiz daralmalar içeren kanal içinde sonlu elemanlar yöntemiyle çözülmüştür. Kanalda meydana gelen daralmanın ve manyetik alan yoğunluğunun akış üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Her durumda, dışarıdan uygulanan noktasal manyetik kaynağın yerleştirildiği nokta civarında vorteks oluşumu gözlenmekte ve bu vorteksin yoğunluğu manyetik kaynağın gücü ile doğru orantılı olarak arttığı gözlenmiştir. Ek olarak, manyetik alan yoğunluğunun artırılması ile elektrikçe iletken olan kanın akış hızının azaldığı görülmektedir. Böylece manyetik alan kaynağı, kan akışını kontrol etmekte kullanılabilen ve dolayısıyla birçok tıp ve mühendislik uygulamalarına ışık tutabilmektedir. Manyetik alan kaynağının pozisyonuna bağlı olarak kan akış profilinde vorteksler oluşmakta ve bu vorteks bölgelerinde kan ısısında önemli artış ve azalmalar görülmektedir. Bu kan ısısı üzerindeki fiziksel değişimler ile kanserli hücrelerinin tespiti ve küçültülmesi veya yaraların tedavisi mümkün olabilmektedir.

Diğer yandan, daralmanın meydana geldiği damarlarda da daralmanın etkisiyle bir vorteks oluşmakta ve bu vorteks bölgesinde ters yönde bir akım meydana gelmektedir. Manyetik alan kaynağının konulması ve yoğunluğunun artırılması ile daralma ile ters yönde meydana gelen

bu akımın etkisi azalmakta ve kanın akış hızı bu bölgede artmaktadır. Böylece, manyetik alan yoğunluğunun artırılmasıyla daralan bölgeden kanın akışı kolaylaşmaktadır. Simetrik olmayan daralma durumunda, manyetik alan kaynağı konumunun etkisi daralmayı belirleyen parametrelere göre değişkenlik göstermektedir. Kan akışı üzerindeki daralmadan kaynaklanan direnç manyetik alan kaynağının daralma bölgesinin sona erdiği bir noktaya yerleştirilmesiyle azaltılmaktadır ve kan akışı kolaylaşmaktadır.

# KAYNAKLAR

- Bali, R. ve Awasthi, U. (2007). Effect of a magnetic field on the resistance to blood flow through stenotic artery. *Applied Mathematics and Computation*, 188:1635–1641.
- Bhargava, R., Beg, O. A., Sharma, S., ve Zueco, J. (2010). Finite element study of nonlinear two-dimensional deoxygenated biomagnetic micropolar flow. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15:1210–1223.
- Brebbia, C. A., Partridge, P. W., ve Wrobel, L. C. (1992). *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*. Computational Mechanics Publications, Southampton, Boston.
- Comini, G., Manzan, M., ve Nonino, C. (1994). Bio-magnetic fluid dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 19:513–525.
- Ganguly, R., Gaiind, A. P., Sen, S., ve Puri, I. K. (2005). Analyzing ferrofluid transport for magnetic drug targeting. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 289:331–334.
- Gay, M. ve Zhang, L. T. (2009). Numerical studies of blood flow in healthy, stenosed, and stented carotid arteries. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 61:453–472.
- Haik, Y., Pai, V., ve Chen, C. J. (1999). Development of magnetic device for cell separation. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 194:254–261.
- Haik, Y., Pai, V. M., ve Chen, C. J. (2001). Apparent viscosity of human blood in a high static magnetic field original research article. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 225(1-2):180–186.
- Ikbal, M. A. (2012). Viscoelastic blood flow through arterial stenosis-effect of variable viscosity. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47:888–894.
- Kenjeres, S. (2008). Numerical analysis of blood flow in realistic arteries subjected to strong non-uniform magnetic fields. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 29:752–764.
- Kinouchi, Y., Yamaguchi, H., ve Tenforde, T. S. (1996). Blood flow through human arterial system in the presence of a steady magnetic field. *Biomagnetics*, 17:21–32.
- Krashan, S. A. ve Haik, Y. (2006). Numerical simulation of biomagnetic fluid downstream an eccentric stenotic orifice. *Physics of Fluids*, 18:113601–1–113601–10.
- Li, E., Liu, G. R., Xu, G., Tan, V., ve He, Z. C. (2012). Numerical modeling and simulation of pulsatile blood flow in rigid vessel using gradient smoothing method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36:322–334.

- Li, J. ve Huang, H. (2010). Effect of magnetic field on blood flow and heat transfer through a stenosed artery. In *Proceedings of the 3rd Conference on Biomedical Engineering and Informatics*, pages 2028–2032.
- Loukopoulos, V. C. ve Tzirtzilakis, E. E. (2004). Biomagnetic channel flow in spatially varying magnetic field. *International Journal of Engineering Science*, 42:571–590.
- Neofytou, P. ve Drikakis, D. (2003). Effects of blood models on flows through a stenosis. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 43:597–635.
- Newbower, R. S. (1973). Magnetic fluids in the blood. *Magnetics, IEEE Transactions*, 9(3):447–450.
- Papadopoulos, P. K. ve Tzirtzilakis, E. E. (2004). Biomagnetic flow in a curved square duct under the influence of an applied magnetic field. *Physics of Fluids*, 16(8):2952–2962.
- Reddy, J. N. (2006). *An introduction to the finite element method*. The McGraw-Hill Companies, New York.
- Rosensweig, R. E. (1987). Magnetic fluids. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 19:437–461.
- Rusli, N., Hong, A. K. B., Kasiman, E. H., Yassin, A., ve Amin, N. (2012). Numerical computation of a two-dimensional biomagnetic channel flow. *International Journal of Modern Physics*, 9:178–192.
- Sud, V. K. ve Sekhon, G. S. (1989). Blood flow through human arterial system in the presence of a steady magnetic field. *Physics in Medicine and Biology*, 34(7):795–805.
- Tezer-Sezgin, M., Bozkaya, C., ve Türk, O. (2013). BEM and FEM based numerical simulations for biomagnetic fluid flow. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37:1127–1135.
- Türk, O., Tezer-Sezgin, M., ve Bozkaya, C. (2013). Finite element study of biomagnetic fluid flow in a symmetrically stenosed channel. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2013.06.037>.
- Tzirtzilakis, E. E. (2005). A mathematical model for blood flow in magnetic field. *Physics of Fluids*, 17:077103–1–077103–15.
- Tzirtzilakis, E. E. (2008a). Biomagnetic fluid flow in a channel with stenosis. *Physica D*, 237:66–81.
- Tzirtzilakis, E. E. (2008b). A simple numerical methodology for BFD problems using stream function vorticity formulation. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24:683–700.

Tzirtzilakis, E. E., Sakalis, V. D., Kafoussias, N. G., ve Hatzikonstantinou, P. M. (2004). Bio-magnetic fluid flow in a 3d rectangular duct. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 44:1279–1298.

Voltairas, P. A., Fotiadis, D. I., ve Michalis, L. K. (2002). Hydrodynamics of magnetic drug targeting. *Journal of Biomechanics*, 35:813–821.

## EKLER

Bu çalışmada, Newtonian, elektrikçe iletken ve zamana bağlı biyomanyetik akışkan modeli, değişken manyetik alan etkisinde ve ani daralma gösteren damar içerisinde akışkanın ısı transferi de dikkate alınarak, sonlu elemanlar ve sınır elemanları metodları ile çözülmektedir.

Projenin ilk altı aylık çalışma döneminde, biyomanyetik akışkanın zamandan bağımsız ve elektrikçe iletken olmadığı varsayılarak elde edilen basitleştirilmiş akış modeli daralmanın görülmeyeceği düz kanal içerisinde hem sonlu hem de sınır elemanlar yöntemleri kullanılarak çözülmüştür. Böylece, dışarıdan uygulanan manyetik alan yoğunluğunun akış üzerindeki salt etkisi incelenmiştir. Daha sonra, biyomanyetik akışkanın zamana bağlı olduğu denklemler ele alınmış ve bu denklemler sonlu elemanlar yöntemiyle ayrıklaştırılmıştır. İkinci altı aylık çalışma döneminde ise, zamana bağlı ve elektrikçe iletken olan en genel biyomanyetik akışkan modeli düz kanal ve simetrik daralmanın meydana geldiği kanal içerisinde sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Düzensiz daralmanın olduğu damar içerisinde akan genel biyomanyetik akışkan modeli ise üçüncü çalışma döneminde ele alınmış ve denklemler sonlu elemanlar yöntemiyle çözülmüştür. Hem dışarıdan uygulanan manyetik alan yoğunluğunu ve konumunun, hem de düzensiz daralmanın akışkan akımı ve ısısı üzerindeki etkisi incelenmiştir. İlk üç çalışma döneminde elde edilen nümerik sonuçlar, dördüncü çalışma döneminde makale formatında hazırlanarak dergilere sunulmuştur.

### Uluslararası Konferanslarda Sunulan Makaleler:

1. Türk, Ö., Tezer-Sezgin, M., and Bozkaya, C. (2012). *Biofluid flow in a channel with stenosis*. International Conference on Applied and Computational Mathematics (ICACM), Ankara, Turkey (September 3-6).
2. Tezer-Sezgin, M., Türk, Ö., and Bozkaya, C. (2012). *FEM solution to unsteady biomagnetic fluid flow in a channel*. BIOCOMP 2012 Mathematical Modeling and Computational Topics in Biosciences, Vietri sul Mare, Italy (June 4-8).
3. Bozkaya, C., Türk, Ö. and Tezer-Sezgin, M. (2012). *A numerical solution to biomagnetic channel flow with DRBEM*. BIOCOMP 2012 Mathematical Modeling and Computational Topics in Biosciences, Vietri sul Mare, Italy (June 4-8).
4. Türk, Ö., Tezer-Sezgin, M. and Bozkaya, C. (2012). *Biomagnetic fluid flow between parallel plates in the presence of magnetic field*. BIOCOMP 2012 Mathematical Modeling and Computational Topics in Biosciences, Vietri sul Mare, Italy (June 4-8).

#### **Uluslararası Hakemli Dergilerde Basılan Makaleler:**

1. Tezer-Sezgin, M., Türk, Ö., and Bozkaya, C. (2013). BEM and FEM based numerical simulations for biomagnetic fluid flow. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **37(9)**, 1127-1135.
2. Türk, Ö., Tezer-Sezgin, M., and Bozkaya, C. (in press). Finite element study of biomagnetic fluid flow in a symmetrically stenosed channel. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2013.06.037>

#### **Uluslararası Hakemli Dergilere Sunulan Makaleler:**

1. Bozkaya, C., Türk, Ö. and Tezer-Sezgin, M. (submitted). A finite element approach to biomagnetic fluid flow in irregularly stenosed channels. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.

## EKLER

Bu çalışmada, Newtonian, elektrikçe iletken ve zamana bağlı biyomanyetik akışkan modeli, değişken manyetik alan etkisinde ve ani daralma gösteren damar içerisinde akışkanın ısı transferi de dikkate alınarak, sonlu elemanlar ve sınır elemanları metodları ile çözülmektedir.

Projenin ilk altı aylık çalışma döneminde, biyomanyetik akışkanın zamandan bağımsız ve elektrikçe iletken olmadığı varsayılarak elde edilen basitleştirilmiş akış modeli daralmanın görülmüdüğü düz kanal içerisinde hem sonlu hem de sınır elemanlar yöntemleri kullanılarak çözülmüştür. Böylece, dışarıdan uygulanan manyetik alan yoğunluğunun akış üzerindeki salt etkisi incelenmiştir. Daha sonra, biyomanyetik akışkanın zamana bağlı olduğu denklemler ele alınmış ve bu denklemler sonlu elemanlar yöntemiyle ayrıklaştırılmıştır. İkinci altı aylık çalışma döneminde ise, zamana bağlı ve elektrikçe iletken olan en genel biyomanyetik akışkan modeli düz kanal ve simetrik daralmanın meydana geldiği kanal içerisinde sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Düzensiz daralmanın oluştuduğu damar içerisinde akan genel biyomanyetik akışkan modeli ise üçüncü çalışma döneminde ele alınmış ve denklemler sonlu elemanlar yöntemiyle çözülmüştür. Hem dışarıdan uygulanan manyetik alan yoğunluğunu ve konumunun, hem de düzensiz daralmanın akışkan akımı ve ısısı üzerindeki etkisi incelenmiştir. İlk üç çalışma döneminde elde edilen nümerik sonuçlar, dördüncü çalışma döneminde makale formatında hazırlanarak dergilere sunulmuştur.

### Uluslararası Konferanslarda Sunulan Makaleler:

1. Türk, Ö., Tezer-Sezgin, M., and Bozkaya, C. (2012). *Biofluid flow in a channel with stenosis*. International Conference on Applied and Computational Mathematics (ICACM), Ankara, Turkey (September 3-6).
2. Tezer-Sezgin, M., Türk, Ö., and Bozkaya, C. (2012). *FEM solution to unsteady biomagnetic fluid flow in a channel*. BIOCOMP 2012 Mathematical Modeling and Computational Topics in Biosciences, Vietri sul Mare, Italy (June 4-8).
3. Bozkaya, C., Türk, Ö. and Tezer-Sezgin, M. (2012). *A numerical solution to biomagnetic channel flow with DRBEM*. BIOCOMP 2012 Mathematical Modeling and Computational Topics in Biosciences, Vietri sul Mare, Italy (June 4-8).
4. Türk, Ö., Tezer-Sezgin, M. and Bozkaya, C. (2012). *Biomagnetic fluid flow between parallel plates in the presence of magnetic field*. BIOCOMP 2012 Mathematical Modeling and Computational Topics in Biosciences, Vietri sul Mare, Italy (June 4-8).

### **Uluslararası Hakemli Dergilerde Basılan Makaleler:**

1. Tezer-Sezgin, M., Türk, Ö., and Bozkaya, C. (2013). BEM and FEM based numerical simulations for biomagnetic fluid flow. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **37(9)**, 1127-1135.
2. Türk, Ö., Tezer-Sezgin, M., and Bozkaya, C. (in press). Finite element study of biomagnetic fluid flow in a symmetrically stenosed channel. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2013.06.037>

### **Uluslararası Hakemli Dergilere Sunulan Makaleler:**

1. Bozkaya, C., Türk, Ö. and Tezer-Sezgin, M. (submitted). A finite element approach to biomagnetic fluid flow in irregularly stenosed channels. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.

**TÜBİTAK**  
**PROJE ÖZET BİLGİ FORMU**

Proje Yürütücüsü:	Prof. Dr. MÜNEVVER TEZER
Proje No:	111T269
Proje Başlığı:	Daralma Gösteren Damar Boyunca Akan Biyomanyetik Akışkan (Kan) Modelinin Sonlu Ve Sınır Elemanları Yöntemleri İle Çözümü
Proje Türü:	Araştırma
Proje Süresi:	24
Araştırmacılar:	CANAN BOZKAYA
Danışmanlar:	
Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi:	ORTA DOĞU TEKNİK Ü. FEN F. MATEMATİK B.
Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri:	01/11/2011 - 01/11/2013
Onaylanan Bütçe:	69499.0
Harcanan Bütçe:	44575.34
Öz:	<p>Bu projede değişken manyetik alan etkisinde ve ani daralma gösteren damarlar boyunca akan, ısı transferinin de dikkate alındığı biyomanyetik akışkan modelinin nümerik çözümleri elde edilmiştir. En karakteristik biyomanyetik akışkan kandır. Kan, olgun kırmızı kan hücrelerinde bulunan demir oksit formundaki hemoglobin, hücrelerarası protein ve hücre zarı arasındaki karmaşık etkileşimden dolayı, bir manyetik akışkan gibi davranmaktadır (dış bir manyetik alan etkisi ile manyetize olabilmektedir). Damarlarda kanın pıhtılaşması bazen kısmi bazen de tam damar tıkanmasına (stenosis) neden olmakta ve bu durum tehlikeli patolojik rahatsızlıklarla (felç, kalp krizi v.s.) sonuçlanmaktadır. Uygulanan manyetik alan etkisi ile daralma içeren damarlarda kan akışını ve ısısını ayarlamak mümkün olmaktadır. Daralan bölgede kanın basınç dağılımı, akış direnci, vortex oluşumu ve kan akışı ayrımı, bu fiziksel durumu tanımlayan matematiksel modelin dikkatli çözümü ile mümkün olmaktadır. Bu çalışmada, Newtonian ve elektrikçe iletken biyomanyetik akışkan olarak alınan kan modeli, düzensiz daralma gösteren damar içerisinde kanın ısı transferi de eklenerek çözülmektedir. Nümerik yöntem olarak sonlu elemanlar ve sınır elemanları metodları kullanılmakta ve dış manyetik alan damar çeperine yakın yerleştirilen bir mıknatıs ile elde edilmektedir. Sınır elemanları yönteminin değişken sınırlı bölgelere uygulanabilirliğinden ve küçük boyutlu sistemler vermesinden yararlanılmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi ise daralan bölgeyi çok sayıda küçük eleman kullanarak ayrıklaştırabilmektedir. Her iki yöntem de denklemleri ardışık olarak stream fonksiyonu, vortisite ve sıcaklık bilinmeyenleri cinsinden çözmektedir. Daralma sonucunda akış profilinde meydana gelen önemli değişiklikler stream fonksiyonu, vortisite ve ısı eşeğrileri ile gösterilmiştir. Noktasal kaynaktan uygulanan manyetik alanın şiddeti arttıkça, manyetik kaynağın yakın çevresinde oluşan vorteksin uzunluğunun arttığı, diğer yandan biyoakışkan hızının bu bölgede azaldığı görülmektedir. Şiddetli daralmanın sebep olduğu kan akışı direnci damar dışına uygun bir noktaya yerleştirilen manyetik alan kaynağı ile kaldırılabilir.</p>
Anahtar Kelimeler:	Sonlu elemanlar yöntemi, sınır elemanları yöntemi, biyomanyetik akışkan (kan)
Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu Mu?:	Hayır