

Proje Numarası: MISAG JULICH 04

Plastisite İçin Hasar Kavramının
Modellenmesi

Türk Araştırma Grubu

Grup Yöneticisi: Doç.Dr. Uğurhan Akyüz
Grup Yrd. Yöneticisi: Prof.Dr.-Ing. A.Erman Tekkaya
Araştırmacı: Celal Soyarslan, Yüksek Mühendis

Alman Araştırma Grubu

Grup Yöneticisi: Prof.Dr.-Ing.Dipl.-Wirtsch.-Ing. Peter Groche
Araştırmacı: Dipl.-Ing Thomas Rathmann

2007
ANKARA

Önsöz

Bu proje ile, sonlu metal plastisitesi için hasar kavramının modellenmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda bir grup deneysel çalışma yapılmış, sonuçlar geniş bir literatür çalışması ile desteklenerek malzeme modelleri oluşturulmuş, ve bu modeller ticari sonlu elemanlar paketlerinde kullanılacak etkin formlara sokulmuştur.

Bu formlarda, hasarla eşleşmiş ısı etkileri de barındıran hiperelastik-(visko)plastik bir formülasyon, asal eksenlerde Öklidyen bir çerçevede, yerel ve entegral ortalamaya dayalı yerel olmayan yapıları ile işlenmektedir. Buluntular, proje sonuç raporunda ayrıntıları ile anlatılmaktadır.

Bu proje, MISAG JULICH 04 kodu ile, TÜBİTAK ile Almanya Jülich Araştırma Merkezi Arasındaki İşbirliği Çerçevesinde Araştırma Projeleri Destekleme Programı kapsamında desteklenmiştir.

İçindekiler

0.1	Giriş	1
0.2	Termodinamik Çatı	4
0.2.1	Hasarla Eşleşmiş Çarpmalı Hiperelastik Plastisite	4
0.2.2	Isıl-Eşlemeli Formülasyon	5
0.2.3	İzotermal Formülasyon	8
0.2.4	Model Probleme Uygulama	9
0.2.5	Zamana Bağlı Hasar Değişim Formları	12
0.3	Sayısal İmplementasyon	15
0.3.1	Sonlu Elemanlar Formülasyonu	15
0.3.2	Algoritmik Yapının Oluşturulması	16
0.3.3	Eşzamanlı Çözüm Yaklaşımı	19
0.3.4	Basamaklı Çözüm Yaklaşımı	24
0.3.5	Algoritmik Olarak Tutarlı Malzeme Tanjantı	26
0.4	Yapının Yerel Olmayan Eklentilerle Zenginleştirilmesi	28
0.4.1	Entegral Ortalama ile Düzenleme	31
0.5	Uygulama Problemleri	32
0.5.1	Eksenel Simetrik Çubuğun Boyun Vermesi	32
0.5.2	Düzlem Birim Şekil Değiştirmede Çekme ile Yerleşme Problemi	36
0.5.3	Çentikli Eksenel Simetrik Parçanın Çekme Altındaki Davranışı	37
0.5.4	İleriye Çubuk Akıtma ve Sayısal Kırık Eldesi	41
0.6	Sonuçlar ve İleride Yapılması Planlanan Çalışmalar	47

Tablo Listesi

1	1B çekme altındaki bara ait malzeme parametreleri	29
2	Eksenel simetrik barın malzeme parametreleri	33

Şekil Listesi

1	1B çubuk problem geometrisi ve sınır koşulları	29
2	Ağa bağlı değişim gösteren yük-yer değiştirme diyagramları . . .	29
3	Ağa bağlı yerleşmiş olan birim şekil değiştirmeler, $\Delta u=0.0064$ mm	30
4	Ağırlık fonksiyonlarının dağılımları	32
5	Ekselen simetrik olarak modellenmiş çeyreğin sınır koşulları ve geometrisi	33
6	20x10 aksenal simetrik ağ	34
7	Hasarla eşleşmiş ve eşleşmemiş analizler için yük-yer değiştirme eğrileri	34
8	Hasar dağılımı, $\Delta u=5.8752$	35
9	Eşlenik plastik birim şekil değiştirme dağılımları, (üst) hasarla eşleşmiş model, (alt) hasarla eşleşmemiş model, $\Delta u=5.8752$. . .	35
10	Deforme olmuş ağlar (üst) hasarla eşleşmiş model, (alt) hasarla eşleşmemiş model, $\Delta u=5.8752$	36
11	Analiz edilen, (üst) 20x10, (orta) 40x20, (alt) 60x30	37
12	Yük-yer değiştirme eğrileri, (sol) hasarla eşleşmiş ve eşleşmemiş sonuçlar (60x30), (sağ) hasarla eşleşmiş farklı ağı sonuçlar	37
13	Hasar dağılımları $\Delta u=3.840$, (üst) 20x10, (orta) 40x20, (alt) 60x30	38
14	Eşlenik plastik gerilme dağılımları $\Delta u=3.840$, (üst) 20x10, (orta) 40x20, (alt) 60x30	39
15	Eşlenik plastik genleme dağılımları (60x30) $\Delta u=3.840$, (üst) hasarla eşleşmiş model, (alt) hasarla eşleşmemiş model	40
16	Ağ deformasyonları (60x30) $\Delta u=3.840$, (üst) hasarla eşleşmiş model, (alt) hasarla eşleşmemiş model	40
17	Modelde işlenen çentikli geometrinin 3B çizimi	41
18	Geometri ve sınır koşulları	41
19	yerel olmayan ortalamalarda kullanılan simetri koşulları	41
20	Farklı eleman sayılarına sahip Model A, B ve C. (A. 326, B. 687 ve C.2754 elemanlıdır.)	42
21	Model C, Hasar dağılımları, analiz basamağı 8, 20, 45 ve 90, yerel olmayan Model	43
22	Model A, B ve C'de meydana gelen eleman deformasyonları . . .	44
23	Merkezi hatta uzunluk boyunca hasar evrimi Model C, a. yerel formülasyon, b. yerel olmayan formülasyon.	44

24	Merkezi hatta yarıçap boyunca hasar evrimi Model C, a. yerel formülasyon, b. yerel olmayan formülasyon.	45
25	Merkezi hatta uzunluk boyunca hasar dağılımları, Model A, B ve C, a. yerel formülasyon, b. yerel olmayan formülasyon.	45
26	Merkezi hatta yarıçap boyunca hasar dağılımları, Model A, B ve C, a. yerel formülasyon, b. yerel olmayan formülasyon.	46
27	İlk çevron oluşumunu tetikleyen hasar birikimi	46
28	Periyodik olarak elde edilen çevronlar	47
29	Kırıklı yapıdaki hasar dağılımı	47
30	Kırıklı yapıdaki eşlenik plastik birim şekil değiştirme dağılımı . .	48

Öz

Hasarla eşleşmiş ısı etkileri de barındıran hiperelastik-(visko)plastik bir formülasyon, asal eksenlerde, Öklidyen bir çerçevede, yerel ve entegral ortalamaya dayalı yerel olmayan yapıları ile sunulmuştur. Birleşik fonksiyonel yapı, plastisite ve hasar ana denklem formlarında bir kısıtlama öngörmemektedir. Buna göre, tek bir akma fonksiyonu ile eşleşmiş geniş bir plastisite ve hasar model yelpazesi yapıya eklenebilir. Halihazırda, Lemaitre tipi bir model, üç değişmezli model, ve üç-eksenli model olmak üzere, örnek olarak üç adet hasar modeli sunulmuştur. Gösterilmiştir ki, asal eksen formülasyonları sadece sonlu plastisite çözümlerini tensörel türevlerden sayıl türevlere dönüştürmekle kalmamakta, asal iz düşümlerle çözümlenebilen aktif-pasif hasar evriminin formüle edilmesinde de elverişlilik sağlamaktadır. Doruk sonrası tepkinin düzenlenmesinde kullanılan yerel olmayan formülasyonda, hasar artışlarının referans yapılamışa ait hacimde ortalamasına ve malzeme uzunluk birimi boyunca yumuşatılmasına başvurulmuştur. Tek yanlı hasar evrim formülasyonu asal eksenlerdeki pratiklik ve etkinliği vurgulanarak yapılmıştır. Bununla beraber yerel entegrasyon prosedürleri, bütün denklem setinin önce ikiye ve nihayetinde bire indirgenerek çözümü özetlenmiştir. Ayrıca elastik kestirim-hasarlı plastik düzeltim (eş-zamanlı hasar ve plastisite çözüm metodu) ve elastik kestirim-plastik düzeltim-hasar hesabı (ekzamanlı hasar ve plastisite çözüm metodu) anlatılmıştır. Tutarlı malzeme tanjantı türetilmiştir. Modeller malzeme altyordamları olarak kodlanmıştır. Yerel formların etkinlik ve kestirim performansı ve yerel olmayan formların yerelleşmeyi önleme özellikleri, bir grup test problemi üzerinde çalışılmıştır.

Abstract

A framework for damage coupled thermo-coupled hyperelastic-(visco)plasticity is presented in *principal axes* in an *Euclidean* setting with *local* basis together with its *nonlocal* extension based on *integral averaging*. The unified functional framework for the governing functions of plasticity and damage does not assume particular restrictions on the forms. This gives rise to implementation a broad range of damage and plasticity models, strongly coupled through a single yield surface. Accordingly three possible damage rate equations are proposed which are a Lemaitre variant, three invariant and triaxial dependent damage models. It is shown that, principal axes formulation provides convenience in active-passive damage evolutionary conditions which depends on eigen-projections besides finite hyperelastic-plastic framework, reducing tensorial differentials to simple differentials with respect to scalars. Nonlocal extension supplied the regularization of the post peak response where *damage increments* are *materially* averaged and smoothed over a *material length scale*. *Unilateral damage evolutionary forms* are given with special emphasis on the practicality and efficiency of formulations in principal axes. Moreover local integration procedures are summarized starting from a full equation set which are simplified step by step initially to two and finally to one. Also different operator split methodologies such as elastic predictor-damage plastic corrector (simultaneous plastic-damage solution scheme) and elastic predictor-plastic corrector-damage deteriorator (staggered plastic-damage solution scheme) are given. To this end regarding consistent material moduli are derived. The models are implemented as user defined material subroutines. The efficiency and the predictive performances of the local and localization limitation property of the nonlocal formulations are studied with a set of sample problems.

0.1 Giriş

Katılar mekaniğinde yumuşama mekanizmaları plastisite ve hasar ile modellenir. Plastisite kayma düzlemlerindeki şebeke hareketlerini ele alırken hasar ise mikro-boşluk ve mikro-kırıkların uygulanan yükler altındaki oluşumu, büyümesi ve birleşerek makro-kırıkları oluşturması sürecini çalışır. Malzeme aşınımını sağlayan mekanizmalarla ilgili geniş bir bilgi Lin et al. [2005]'te verilmektedir. Halihazırdaki çalışmada, bu baskın mekanizmalardan (mobil dislokasyon, kavite oluşumu, kavite büyümesi, süperplastik boşluk büyümesi, sünek boşluk büyümesi, kırılmalı sünek boşluk büyümesi), plastisite etkilenimli soğuk işlemede sünek boşluk oluşumu ele alınacaktır.

Metal şekillendirme işlemlerinde amaç malzemenin biçimlenme rezervlerini tüketmemektir. Aksi halde malzemenin fiziksel özellikleri bozulmakta ve kırıklar oluşarak defekte olmuş ürün elde edilmektedir. Şekillendirme tasarımı, aşırı hasar oluşumunu engelleyici işlem kinematığının belirlenmesini, kuvvet ve gerilmelerin kestirimini öngörür. Bu da malzeme zayıflamasına ait mikro-mekanizma bilgisini gerektirir.

Sünek malzeme hasarı kapsamında, makro-kırıkların oluşumuna kadar geçen ve yukarıda değinilen üç aşamalı zayıflama şu şekilde açıklanmaktadır. Gerilme konsantrasyonları etkisi ile ikincil tanecikler ya da katışıklıklar etrafında plastik akmayla birlikte matris ayrılmasından ötürü mikro-boşluklar oluşur. Bu boşluklar, halihazırda varolanlarla birlikte pozitif hidrostatik gerilmeler altında büyür ve bu büyüme boşlukların birleşimi ve makro-kırıkların oluşumuna dek devam eder. Mekanizma, basınç gerilme alanlarının şekil değiştirme kapasitesini artırmasını ve üç eksenli gerilmelerin ise prematür kırıkların oluşumuna sebep olmasını açıklamaktadır, Rice ve Tracey [1969] ve Plancak [1990]. Literatürde, açıklanan bu hasar mekanizması üç farklı yaklaşımla çalışılmaktadır: Kırılma Mekaniği (KM), Mikro-tabanlı Hasar Mekaniği (MHM) ve Sürekli Ortamlar Hasar Mekaniği (SOHM).

KM de bir birikmiş plastik iş sınırı ele alınır. Literatürde çeşitli kırılma kriterleri önerilmiştir. Oyane kriteri, Oyane [1972], Freudenthal kriteri, Freudenthal [1950], Cockroft Latham kriteri, Cockroft ve Latham [1968] ve Brozzo kriteri, Brozzo et al. [1972], bunlardan birkaçıdır. Buna göre önerilen limit plastik iş değeri aşıldığında kırık oluşur. Bu eşleşmesiz yapı, kriterlerin halihazırdaki nümerik çözüm metodlarına kolayca eklenilebilmesini sağlamaktadır. Sisteme eşlemeli sistemlerde görüleceği gibi eşzamanlı sağlanması gereken denklemler eklenmemektedir. Bunun yanısıra, aşamalı bir yumuşama davranışının görülmemesi nümerik yapının stabil kalmasını sağlamaktadır. Bu avantajlara rağmen aynı eşleşmesiz yapı dezavantajın da kaynağını oluşturur. Şekil değiştirme-hasar eşleşmesizliği malzeme bozulmasının aşamalı yapısını yansıtmaktan yoksundur. Başka bir deyişle, kırılmaya dek, ne malzemenin direngenliği ne de yük boşaltmadaki elastik rijitliği azalmaktadır. Dolayısı ile çözüm konvansiyonel plastisite ile elde edilenlerden ayrılmamaktadır. Bu fiziksel olarak gerçek davranışı yansıtmaktan uzaktır.

MHM modelleri, izole edilmiş, ideal boşluk, kırık ya da ikincil faz içeren birim hücrelerin analizinden türetilmiştir. Birebir yansıtılan mikro-mekanik

davranış, analizlerde kullanılabilme üzere makro-ölçeğe matematiksel homojenizasyon prosedürü ile aktarılır. Gurson'un hasar modeli, Gurson [1977], boşluklu rijit plastik bir matris yapısı ile modellenmiş, sıklıkla kullanılan MHM modellerinden biridir. Bu modelde sunulan modifiye edilmiş plastik potansiyelle, homojenize davranış boşluklu bir plastisite teorisine denk gelmektedir. Fiziksel olarak aşırı hasar göstergesi, boşluk-hacim oranıdır. Tvergaard ve Needleman [1984], bu modeli boşluk birleşimindeki hasar ivmelenmesini de içerecek şekilde genişletmiş ve günümüzde Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN) modeli olarak bilinen formu geliştirmiştir. Sıklıkla kullanılan MHM modellerinden biri de termodinamik olarak tutarlı bir altyapıya sahip Rousselier modelidir, Rousselier [1987]. MHM modellerinin avantajları arasında, formülasyonlarının mikro-mekanik motivasyonu ile fiziksel yapıyı aktarmadaki başarıları yatmaktadır. Fakat literatürde not edilmiş çeşitli dezavantajları da yok değildir. Malzeme parametrelerinin bulunması pratiklikten uzak olmaktadır¹. Modellerin genellikle boşluklu plastisite olarak adlandırdığımız ve hidrostatik gerilme etkilerini öne çıkartan yapısı kayma gerilmeleri tarafından domine edilen hasar mekanizmalarını yansıtamamaktadır, Hamblin [2001]. Hasarla beraber akma mevkisindeki daralma yansıtılabile bile elastik rijitlik bundan etkilenmemektedir. Bunun yanı sıra, yerel geleneksel formülasyonlarda, doruk sonrası malzeme tepkisinin nümerik çözümlenmesinde, ağa bağlılık, ve yerleşme problemleri görülmektedir. Son olarak, formülasyonların mikro-mekanik olarak türetilmesi, farklı mikro-yapıların davranışını yansıtmak konusunda bir engel oluşturmakta ve bileşik bir hasar modeli söz konusu olamamaktadır.

SOHM, ters çevrilemez mikro-yapısal zayıflamaları, şekil değiştirme ile eşlemeli bir iç değişkeni temsil eden matematiksel yapı ışığında formüle eder. Yaklaşımın kökleri Kachanov [1958] ve Rabotnov [1968]'un erken çalışmalarına kadar gitmektedir. Bu çalışmalarda sürünmeye bağlı metal kopmaları için efektif gerilme kavramı sunulmuştur. Lemaitre hasar modeli, Lemaitre [1971], sıklıkla kullanılan SOHM modellerindendir. Günümüze dek SOHM modelleri sonlu şekil değiştirme, anizotropi, ısıl etkiler, yerel olmayan eklentileri içerecek biçimde geliştirilmişlerdir. SOHM modelleri, hem kabul edilebilir gerilme uzayındaki daralmayı hem de elastik rijitlikteki azalmayı yansıtabilmektedir. Doruk sonrası yumuşama davranışı, bu modellerde de sınır değer probleminin sayısal çözümünde güçlük çıkarmakta, denklemlerde statik problemler için ovalliğin dinamik problemler içinse hiperbolikliğin kaybına yol açmaktadır.

Halihazırdaki çalışmada izotropik hasar ele alınmıştır. Bu kabul tesadüfi ve istatistiksel olarak homojen dağılımlı, şekilli ve doğrultulu mikro-boşluk topluluğuna işaret eder. Pratikte, homojen ve izotropik bir yapıda bile malzeme davranışının hasara bağlı anizotropik ve homojen olmayan bir şekle büründüğü görülür, Krajcinovic [1996]. Buna göre, izotropi kabulü ile bu detaylar ortadan kaldırılmaktadır. Her ne kadar matematiksel kısıtlamalar açısından da anizotropik model daha genel bir yapıyı ifade etse de, ele alınan metal plastisitesi ve sünek hasar için izotropi kabulü birçok uygulamada yeterli

¹Malzeme parametrelerinin kalibrasyonu, 3 parametrelili Rousselier modeli için nispeten daha kolaydır.

ve pratik bir çözüm sağlamaktadır. Yine de akılda bulundurulmalıdır ki, nisbi olmayan yükleme koşullarında anizotropi içeren modellerin kullanımı daha doğru bir yaklaşımdır, Lemaitre [1996].

Günümüze dek oluşturulmuş görüngüsel ve mikro-mekanik hasar modelleri için literatür olgun denebilecek bir seviyeye ulaşmıştır. Okuyucu konu ile ilgili daha geniş bilgiyi şu kaynaklarda bulabilir, Lemaitre [1996], Krajcinovic [1996], Skrzypek ve Ganczarski [1998], Lemaitre ve Desmorat [2005]. Lemaitre ve Chaboche [1990], Doghri [2000], Chaboche [2003], Saanouni ve Chaboche [2003].

Bu çalışmada amaç, *Öklidyen* bir formda, kuvvetli bir sonlu şekil değiştirmeli hiperelastik-(visko) plastisite ile eşleşmiş yerel bir izotropik hasar modeli sunmaktır. Formülasyonlar asal-eksenlerde türetilmiş ve integral ortalamasına bağlı yerel olmayan eklentilerle desteklenmiştir.

Bu amaç doğrultusunda, efektif gerilme kavramı, Kachanov [1958] ve Rabotnov [1968], ve birim şekil değiştirme eşlenikliği prensibi, Lemaitre [1971], kullanılarak tek bir plastik akma fonksiyonu ile, kuvvetle eşlenmiş plastisite-hasar modeli oluşturulmuştur. Bu yaklaşımın doğal sonucu hasarın her zaman için kesinlikle plastik akma ile beraber oluşma zorunluluğudur ki sünek hasar için bu kabul gerçekçidir.

Yumuşama rejimlerinin sayısal çözümleri daha önce de değinildiği gibi tekil olmayan, ağa dayalı sonuçlar doğurmaktadır. Bunun etkisi ile hasar çözüm ağının sıkılaştırılması ile yakınsama olmaksızın daha da dar alanlara yerleşmektedir, Jirásek ve Bazant [2001]. Bununla beraber ters çevrimsiz işlemlerde enerji tüketilmemektedir ki bu fiziksel olarak kabul edilemez, Borino et al. [2003]. Ağa duyarlılıkla ilgili örnekleri okur Jirásek [2006]'te bulabilir. Literatürde bu davranışın sağaltımında farklı metodlar kullanılmaktadır. Bunlar gradyan formülasyonlar, viskoz düzenleme metodları ve entegral yerel olmayan formülasyonlardır. Bu metodların detaylı bir araştırması için de Borst et al. [1999]'a başvurulabilir. Halihazırdaki çalışmada, yerel olmayan entegral ortalamalı bir tekniğe başvurulmuştur.

Sıralananlar haricinde, çalışmanın sayısal olarak çekici ve bahse değer özellikleri şunlardır:

- Uygulanan asal eksenler formülasyonu, sadece, tensör türevlerini sıradan sayısal türevlere indirgeyerek, sonlu hiperelastik-plastisite denklemlerinin türetilmesini kolaylaştırmamış, (Ibrahimbegović [1999]), bunun yanı sıra asal gerilme ya da birim şekil değiştirme iz düşümlerini gerektiren aktif-pasif hasar evriminin türetimini basitleştirmiş ve pratikleştirmiştir.
- Model problem her ne kadar J_2 plastisitesi ile eşleşmiş Lemaitre tipi bir hasar modeli olarak seçilmiş de olsa, plastisite ve hasar için kullanılan fonksiyonel formlar konusunda herhangi bir sınırlama söz konusu değildir. Buna göre Lemaitre modeli gibi termodinamik olarak formal bir türetimi olan hasar modellerinin yanı sıra, literatürde kullanılan farklı şekillerde türetilmiş (mesela ampirik) hasar modelleri de termodinamiğin ikinci prensibini ihlal etmeyerek bu yapı içerisinde kullanılabilir. Raporda olası formlara yer verilmektedir.

- Yerel olmayan ortalamalı formülasyon, sadece sonlu elemanlar çözüm basamaklarının sonunda hasar evrim formuna tatbik edilmiş bu da sayısal olarak pratik ve etkili bir çözüm oluşturmuştur Drabek [2005], Drabek ve Böhm [2005] and Drabek ve Böhm [2006].

Raporun kalan kısmı şu şekilde özetlenebilir. Termodinamik bir tutarlılıkla ısı eşlemeli ve ayrıca izotermal olarak türetilmiş yerel bünye denklemlerin türetimi bölüm 0.2'de verilmektedir. Model bir problem olarak, bölüm 0.2.4'te J_2 plastisitesi sunulmaktadır. Hasar formları ile ilgili ele alınan yapı bölüm 0.2.5'te detaylandırılmaktadır. Sayısal çözümlemeye ait detaylar (algoritmik formlar ve tutarlı elasto-plastik-hasar tanjantının türetimi) bölüm 0.3'tedir. Böylece yerel kısım tamamlanmaktadır. Hasar artışlarının entegral yumuşatmasına dayanan yerel olmayan formlar Bölüm 0.4'te verilmektedir. Örnek problem çözümleri Bölüm 0.5'te bulunabilir. Sonuçlar ise Bölüm 0.6'dadır.

0.2 Termodinamik Çatı

0.2.1 Hasarla Eşleşmiş Çarpmalı Hiperelastik Plastisite

\mathbf{F} şekil değiştirme gradyeni, \mathfrak{B}_0 referans cismi, \mathbf{X} ve \mathbf{x} malzemeye noktasının referans ve güncel pozisyonları olsun. $\varphi : \mathfrak{B}_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ konfigürasyonu belirtirken, $\mathbf{F} \doteq \partial_{\mathbf{X}} \mathbf{x}$ ve $\mathbf{x} \doteq \varphi(\mathbf{X}, t)$ geçerlidir. Lee [1969]'nin önerdiği ve çarpmalı kinematik olarak bilinen yöntem, sonlu birim şekil değiştirmelerde, Denklem 1'de verildiği gibi, şekil değiştirme gradyeninin, elastik, \mathbf{F}^e , ve plastik, \mathbf{F}^p , şekil değiştirme gradyenleri olarak çarpmalı ayrımını öngörür. Bu yapı tekli-kristaller için mikro-mekanik olarak onaylanmıştır, Asaro [1983], ve çoklu-kristaller için de geçerliliğini korumaktadır.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \bullet \mathbf{F}^p \quad (1)$$

Bu formülasyonun sayısal modellenmesi ile ilgili ayrıntılar, Simó [1992] ve Simó ve Hughes [1998]'de bulunabilir. Sonlu (visko)plastisitenin manifold ve Öklidyen yaklaşımları ile, asal eksen formülasyonu, Ibrahimbegović [1994], Ibrahimbegović [1999] ve Ibrahimbegović ve Chorfi [2000] kaynaklarında ve bu kaynakların referans listelerinde bulunabilir.

Çarpmalı kinematik içeren formülasyonun hasarla eşleşmiş çeşitleri üzerine çalışmalara örnek olarak, Steinmann et al. [1994], Ju [1990], Mediavilla et al. [2006], Engelen [2005] verilebilir. Bu yapılar termodinamik temellerine göre çeşitlilik gösterebilirler. örneğin plastisite ve hasar eşleşmesi karakteri serbest enerji düzeyinde olacağı gibi evrim denklemleri seviyesinde de olabilir. Ayrıca kullanılan denklik prensipleri ya da hasar değişkeninin matematiksel yapısı da nihai denklemlerin yapısını ve matematiksel modelin davranışını derinden etkilemektedir. Seçilen formların avantaj ve dezavantajlarına Skrzypek ve Ganczarski [1998] ve Ganczarski ve Barwacz [2004] kaynaklarında genişçe yer verilmektedir.

Bu çalışmada tek yüzeyli plastisite üzerinden eşleşmiş hasar modeli seçilmiştir. Bu model, sünek koşullarda uygunluk gösteren bir biçimde,

plastik akma haricinde bir hasar oluşumuna izin vermez. Lemaitre [1996] ve içsel değişkenli termodinamik ilkeler takip edilerek, etkin toplam serbest enerji, $\tilde{\Psi}$, etkin elastik serbest enerji, Ψ^e , ve plastik serbest enerji, Ψ^p , toplamı biçiminde ifade edilebilir. $D \in [0, 1]$, sayıl hasar değişkenini ifade etmektedir. Öyle ki, $D = 0$ hasarsız mükemmel malzemeyi, $D = 1$ ise kopma durumunu belirtir. İzotropik hasar formülasyonu, malzeme simetrisini değiştirmemektedir. Bu yapıda hasar, elastisite ile hal eşlemesi, plastisite ile ise kinematik eşleme halindedir. Bu önermenin fiziksel temelleri Lemaitre [1996]'da bulunabilir.

0.2.2 Isıl-Eşlemeli Formülasyon

Bu bölümde hasarla eşleşmiş lineer olmayan izotropik pekleşmeli ve ısıl yumuşamalı termo-plastisite denklemleri kurulacaktır. Ele alınan fonksiyonel yapıda hasar evrim denklemleri için genel bir form önerilmiştir. Bu forma, Lämmer ve Tsakmakis [2000]'te çalışılmış olan termodinamik bazlı evrim formları eklenilebileceği gibi, Mediavilla et al. [2006]'da verilen kırılma kriteri bazlı termodinamik türetmeden yoksun hasar formları da eklenilebilir. Sonlu plastisitenin çözümlenmesinde, Simó [1992] takip edilmiştir. Çarpmalı formülasyondaki ara ve güncel konfigürasyonlar, hasarın da içerilmesi ile etkin ve nominal halleri ile değerlendirilmektedir. Bu noktanın önemi, anizotropinin modellenmesinde daha bariz açığa çıkar. Anizotropi ile, hal değişkenleri bir konfigürasyondan bir diğerine hasar etki tensörleri vasıtası ile transfer edilirler. İzotropi kabulü ile bu tensörel formlar basit sayıl işlemlere dönmektedir. Denge denklemleri nominal gerilme uzayında sağlanmaktadır, plastik akma ise malzemenin zarar görmemiş etkin altyapısında kendini gösterir. Bir başka deyişle, plastisiteye ait uygunluk koşulu etkin konfigürasyonda çözümlenir.

Isıl-eşlemeli sonlu plastisitede, ısıl alanların ve mekanik alanların birbirleri üzerinde karşılıklı etkileri sözkonusudur. Bunlar elastik ve plastik şekil değiştirmelerle oluşabilecek elastik ve elastik olmayan ısınma, ısıl birim şekil değiştirme, ısıl yumuşama gibi etkilerdir, Simó ve Miehe [1992]. Bu çalışmanın motivasyonlarından biri de bu etkilerin hasar kapsamında da değerlendirilebileceği bir yapı formüle etmektir.

Bunu başarmak için, öncelikle aşağıdaki elastisite ile hasar arasındaki hal eşlemesini gösteren mekanik serbest enerji denklemi kabul edilecektir,

$$\Psi(\mathbf{b}^e, \alpha, D) = \Psi^e(\mathbf{b}^e, D) + \Psi^p(\alpha) \quad (2)$$

Burada \mathbf{b}^e sol Cauchy-Green şekil değiştirme tensörüdür. α ve D ise plastik ve hasar birim genleme tipi değişkenlerdir. Daha ayrıntılı tanımlamak gerekirse, α eşlenik plastik birim şekil değiştirmeyi ifade eder. Hasarlı elastik serbest enerji tanımı, hasarsız kısım ($\tilde{\Psi}^e$, üzerinden şu şekilde tanımlanabilir,

$$\Psi^e = (1 - D) \tilde{\Psi}^e \quad (3)$$

Termodinamik çatının ısıl etkileri de kapsamı yolunda şu denklem önerilebilir,

$$\Psi(\mathbf{b}^e, \alpha, D, \theta) = \Psi^e(\mathbf{b}^e, D) + \Psi^p(\alpha) + \Psi^{td}(\mathbf{b}^e, D, \theta) + \Psi^t(\theta) \quad (4)$$

Burada ısı genleşme etkilerini işaret eden ısı-genleşme potansiyeli, Ψ^{td} tarafından, saf ısı potansiyel ise, Ψ^t tarafından gösterilmektedir. Ψ^{td} potansiyelinin hasarsız biçimi ($\tilde{\Psi}^{td}$) için,

$$\Psi^{td} = (1 - D) \tilde{\Psi}^{td} \quad (5)$$

yazılabilir. Buna göre, serbest enerji fonksiyonunu, sadece sıcaklık, sadece hiperelastik, sadece plastik şekilde yapılara bölünmüştür. Bu önerme temelinde plastik akma mekanizmasının şebeke yapısını etkilememesi kabulü yatmaktadır. Literatürde potansiyellerle ilgili bir çok form önerilmiştir. Model problem bölümünde, bu aşamada genel olarak verilen yapılar çeşitli formülasyonlarla tanımlanacaktır.

Termodinamiğin ikinci yasasına göre, yerel gerilme gücü ile yerel serbest enerji değişim hızının farkı pozitif olmalıdır. Bu yasa matematiksel olarak şu şekilde formüle edilir,

$$\Omega = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \partial_t \Psi - \frac{1}{\theta} \mathbf{q}^t \bullet \mathbf{g} \geq 0 \quad (6)$$

öyle ki $\partial_t(\cdot) = \partial(\cdot)/\partial t$. Ω termomekanik kaybı göstermektedir. $\boldsymbol{\tau}$ Kirchoff gerilmelerini ifade eder ve bunun iş bileşiği şekil değiştirme tensörü uzamsal hız $\mathbf{d} \doteq \text{sym}[\mathbf{l}]$ ile ifade edilir. $\mathbf{l} \doteq \partial_t \mathbf{F} \bullet \mathbf{F}^{-1}$ uzamsal hız gradyenidir. \mathbf{q}^t ve \mathbf{g} sırası ile ısı yayılımını ve sıcaklık gradyenini, yani $\nabla \theta$, gösterir. Bu aşamada, termomekanik kayıp ifadesini, yerel termomekanik (Clasusius-Planck formu), Ω^{ltm} , ve iletici ısı (Fourier formu), Ω^{ct} olarak ikiye bölmek olasıdır.

$$\Omega = \Omega^{ltm} + \Omega^{ct} \geq 0 \quad (7)$$

Burada

$$\Omega^{ltm} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \partial_t \Psi \geq 0 \quad (8)$$

$$\Omega^{ct} = -\frac{1}{\theta} \mathbf{q}^t \bullet \mathbf{g} \geq 0 \quad (9)$$

dır. Yerel formun açılımıyla,

$$\Omega^{ltm} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \partial_t \Psi^e - \partial_t \Psi^p - \partial_t \Psi^{td} - \partial_t \Psi^t \geq 0 \quad (10)$$

İkili değişkenlerin bünye denklemleri, şu şekilde türetilir,

$$\boldsymbol{\tau} = 2(1 - D) \partial_{\mathbf{b}^e} (\tilde{\Psi}^e + \Psi^{td}) \bullet \mathbf{b}^e \quad (11)$$

$$\mathbf{q} = -\partial_{\alpha} \Omega = -\partial_{\alpha} \Psi^p \quad (12)$$

$$\mathbf{Y}^d = -\partial_D \Omega = \tilde{\Psi}^e + \tilde{\Psi}^{td} \quad (13)$$

$$\eta = -\partial_{\theta} \Omega = \partial_{\theta} \Psi^{td} + \partial_{\theta} \Psi^t \quad (14)$$

\mathbf{q} akma yüzeyinin gerilme uzayındaki genişlemesini verir ve izotropik pekleşmeden sorumlu gerilme tipi değişkendir. \mathbf{Y}_d ise elastik birim şekil değiştirme enerjisi salınımı şeklinde ifade edilebilecek hasar bileşke değişkendir. Bu şekildeki bir

formülasyon Lemaitre hasar modeli ile uyum içerisindedir. Ayrıca, η entropiyi ifade eder. Bu buluntuları Clausius-Duhem eşitsizliğinde yerine koyarsak, aşağıda görülen kayıp potansiyelini elde ederiz,

$$\begin{aligned} \Omega^{ltm} = -\boldsymbol{\tau} : \left[\frac{1}{2} \mathcal{L}_v \mathbf{b}^e \bullet \mathbf{b}^{e,-1} \right] + [-\partial_\alpha \Psi^p] \partial_t \alpha + [-\partial_D \Omega] \partial_t D \\ + [-\partial_\theta \Omega] \partial_t \theta \geq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

ya da aynı şekilde,

$$\Omega^{ltm} = -\boldsymbol{\tau} : \left[\frac{1}{2} \mathcal{L}_v \mathbf{b}^e \bullet \mathbf{b}^{e,-1} \right] + q \partial_t \alpha + Y^d \partial_t D + \eta \partial_t \theta \geq 0 \quad (16)$$

burada $\mathcal{L}_v(\bullet)$, (\bullet) 'ın objektif Lie türevini ifade eder, Marsden ve Hughes [1994]. Hasarla eşleşmemiş plastisiteye ait evrimsel denklemlerin türetiminde maksimum plastik kayıp yasası, Hill [1950], Lubliner [1984], kullanılabilir. Bu çalışmada aynı yapı elastik olmayan kayıp için kullanılacak ve nihayetinde normalite koşullarına ulaşılacaktır. Buna göre, Fransız ekolu takip edilerek bileşenleri plastik potansiyel, $\tilde{\phi}$, ve hasar kayıp potansiyeli, ϕ^d , olan birleşik bir yükleme fonksiyonu, ϕ^t , tanımlanabilir,

$$\phi^t(\tilde{\boldsymbol{\tau}}, q, Y; D, \theta) = \tilde{\phi}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}, q; \theta) + \phi^d(Y; D) \quad (17)$$

Burada dikkat edilmesi gereken hususlardan biri plastik potansiyel tanımının, $\tilde{\phi}$, hasarsız malzeme alt-yapısında, etkin Kirchhoff gerilmeleri, $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$, cinsinden kuruluyor olmasıdır ($\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau}/(1-D)$).

Bu şekilde eldeki problem, bir matematiksel optimizasyon problemine dönüştürülür ve Lagrange çarpanları metodu ile çözümlenebilir,

$$\mathcal{L}(\dot{\gamma}, \boldsymbol{\tau}, q, Y; D, \theta) = \Omega + \phi^t(\tilde{\boldsymbol{\tau}}, q, Y; D, \theta) \geq 0 \quad (18)$$

Burada $\dot{\gamma}$ Lagrange çarpanıdır. Çözüm metodu bir grup durağanlık hali öngörür. Bu doğrultuda akma ve diğer değişkenlere ait evrim denklemleri türetilir, Maugin [1992],

$$\partial_{\boldsymbol{\tau}} \mathcal{L} = 0, \Rightarrow \mathcal{L}_v \mathbf{b}^e = -2 \frac{\dot{\gamma}}{(1-D)} \partial_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} \tilde{\phi} \bullet \mathbf{b}^e \quad (19)$$

İzotropik pekleşme birim şekil değiştirme benzeri değişkeninin evrim denklemi,

$$\partial_q \mathcal{L} = 0, \Rightarrow \partial_t \alpha = \dot{\gamma} \partial_q \tilde{\phi} \quad (20)$$

ve hasarın evrim denklemi şöyle bulunur,

$$\partial_Y \mathcal{L} = 0, \Rightarrow \partial_t D = \dot{\gamma} \partial_{Y^a} \phi^d \quad (21)$$

Verilen (19), (20) ve (21) formları geleneksel ilişkiyel evrim denklemleridir. Bütünsellik adına, Karush-Kuhn-Tucker yükleme koşulları, şu şekilde verilebilir.

$$\tilde{\phi} \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\gamma} \tilde{\phi} = 0 \quad (22)$$

Denklem (21)'de verilen, hasara ait zamana bağlı değişim formunun genelleştirilmesi, özelleştirilmiş bir hasar potansiyeli sunmaksızın, müşterek bir hasar evrim formuna imkan verir,

$$\dot{D} = \dot{\gamma} g, \quad \text{öyle ki } g = g(D, Y) \quad (23)$$

Burada $g = \partial_{Y^d} \phi^D$ dir. Görüldüğü gibi bu fonksiyonel yaklaşım farklı hasar formlarının ele alınmasına olanak tanımaktadır. Fonksiyonel olarak literatürde üstel fonksiyonlar kullanılmaktadır, Rice ve Tracey [1969] ve Ju [1990]. Termodinamik formalizm içerisinde, Y değişkeni daha önce türetilen Y^d 'yi ifade eder. Fakat termodinamik formalizm izlenmeyerek de bu değişken için farklı gerilmeye dayalı formlar kullanmak mümkündür. Görülmektedir ki bu önerme, kırılma kriteri tabanlılar da dahil olmak üzere, literatürdeki bir çok hasar modeline uyum sağlamaktadır.

Viskoz Düzenleme

Zamandan bağımsız formülasyonda, $\dot{\gamma}$ 'ın bulunması, $\partial_t \tilde{\phi} = 0$, eşitliği ile sağlanır. Visko-plastik formülasyonda ise farklı bir yöntem izlenir. Örneğin, Perzyna tipi basit viskoz model ele alınırsa, viskoplastik çarpan tanımı, $\dot{\gamma}^{vp}$, şu şekilde bulunur,

$$\dot{\gamma}^{vp} = \frac{\langle \tilde{\phi} \rangle^m}{\eta} \quad (24)$$

burada $\tilde{\phi}$ akma potansiyelini, η akışkanlık katsayısını, $\langle \cdot \rangle$ ise Macaulay çerçevesini ifade eder, $\langle x \rangle \doteq 1/2 (x + |x|)$. Buna göre, etkin gerilme uzayında türetilen, viskoz akma kuralı şöyledir,

$$\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e = -2 \frac{1}{(1-D)} \frac{\langle \tilde{\phi} \rangle}{\eta} \partial_{\tilde{\tau}} \tilde{\phi} \bullet \mathbf{b}^e \quad (25)$$

0.2.3 İzotermal Formülasyon

Izotermal formülasyon için, hasarlı toplam serbest enerji şu şekilde ifade edilebilir,

$$\Psi(\mathbf{b}^e, \alpha, D) = \Psi^e(\mathbf{b}^e, D) + \Psi^p(\alpha) \quad (26)$$

Termodinamiğin ikinci ilkesinin uygulanması ile,

$$\Omega = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \partial_t \Psi^e - \partial_t \Psi^p \geq 0 \quad (27)$$

bünye denklemleri elde edilir,

$$\boldsymbol{\tau} = 2(1-D) \partial_{\mathbf{b}^e} \tilde{\Psi}^e \bullet \mathbf{b}^e, \quad q = -\partial_{\alpha} \Omega = -\partial_{\alpha} \Psi^p, \quad Y^d = -\partial_D \Omega = \tilde{\Psi}^e \quad (28)$$

Bulutuların Clausius-Planck eşitsizliğinde tekrar kullanılması ile, aşağıdaki kayıp potansiyeli denklemini elde ederiz

$$\Omega = -\tau : \left[\frac{1}{2} \mathcal{L}_v \mathbf{b}^e \bullet \mathbf{b}^{e,-1} \right] + q \partial_t \alpha + Y^d \partial_t D \geq 0 \quad (29)$$

Daha önce, ısıl eşlemeli bölümde de gösterildiği gibi, plastisite ve hasar bileşenlerinden oluşan bir elastik olmayan potansiyel önerisi ile,

$$\phi^t(\tilde{\tau}, q, Y; D) = \tilde{\phi}(\tilde{\tau}, q) + \phi^d(Y; D) \quad (30)$$

optimizasyon problemini oluşturabilir ve çözümde kullanılacak Lagrange fonksiyonelimizi tanımlayabiliriz,

$$\mathcal{L}(\dot{\gamma}, \tau, q, Y; D) = \Omega + \phi^t(\tilde{\tau}, q, Y; D) \geq 0 \quad (31)$$

Buna göre, izotermal akma kuralı bulunabilir,

$$\partial_{\tau} \mathcal{L} = 0, \Rightarrow \mathcal{L}_v \mathbf{b}^e = -2 \frac{\dot{\gamma}}{(1-D)} \partial_{\tilde{\tau}} \tilde{\phi} \bullet \mathbf{b}^e \quad (32)$$

Diğer formülasyonlar, ısıl eşlemeli türetilenlerle denktir. Bu nedenle burada tekrarlanmasına gerek duyulmamıştır.

0.2.4 Model Probleme Uygulama

Isıl Eşlemeli Formlar

Takip eden satırlarda, şu ana kadar verilen teorik altyapı özel bir model üzerinde çözümlenecektir. Bu model asal eksenlerde türetilmiş, logaritmik birim şekil değiştirmeye ikinci derece denklemlerle bağlanan bir hiperelastik potansiyel ve J_2 (visko)plastisitesini içermektedir. Hasar formu için Lemaitre tipi bir form yarı-tekyönlü olarak ele alınmıştır. Simó ve Miehe [1992] tarafından önerilen ısıl-genleşme potansiyeli kullanılmıştır. Fourier kayıp potansiyeli için Fourier ısı akış denklemini veren kanonik bir form yeterli görülmüştür.

Öncelikle, etkin hiperelastik potansiyeli, $\tilde{\Psi}^e$, etkin hacimsel, $\tilde{\Psi}^{e,vol}$, ve etkin deviyatorik, $\tilde{\Psi}^{e,dev}$, olarak ayırırsak,

$$\tilde{\Psi}^e = \tilde{\Psi}^{e,vol} + \tilde{\Psi}^{e,dev} \quad (33)$$

hacimsel kısmı elastik Jacobian, $J^e = \det[\mathbf{F}^e]$, cinsinden ifade edebilir ve deviyatorik kısmı ise asal deviyatorik elastik logaritmik birim şekil değiştirmenin, $\bar{\epsilon}_i^e$; ($i = 1, 2, 3$), bir fonksiyonu olarak yazabiliriz,

$$\tilde{\Psi}^{e,vol} = \tilde{\Psi}^{e,vol}(J^e), \quad \tilde{\Psi}^{e,dev} = \tilde{\Psi}^{e,dev}(\bar{\epsilon}_1^e, \bar{\epsilon}_2^e, \bar{\epsilon}_3^e) \quad (34)$$

$\bar{\epsilon}_i^e$ asal toplam elastik logaritmik birim şekil değiştirmeyi ifade ederken, $\bar{\epsilon}_i^e = \epsilon_i^e - \log[J^e]/3$ ve $\log[J^e] = \epsilon_1^e + \epsilon_2^e + \epsilon_3^e$ tanımları geçerlidir. Ayrıca, hiperelastik potansiyel bileşenleri sonsuz küçüklükte birim şekil değiştirme teorisi ile de bağdaşan şu formlarda seçilebilir,

$$\tilde{\Psi}^{e,vol} = \frac{1}{2} H \log[J^e]^2, \quad \tilde{\Psi}^{e,dev} = \mu \log[\bar{\lambda}^e] : \log[\bar{\lambda}^e] \quad (35)$$

Burada H ve μ , elastik malzeme sabitleri olup, sırası ile sıkıştırılabilme katsayısını ve kesme modülünü ifade eder. Ayrıca, λ^e elastik çekme tensörünü, λ^e ise onun deviyatorik kısmını ifade eder. Bu denklemler asal elastik logaritmik birim şekil değiştirmeler cinsinden ifade edilirse,

$$\tilde{\Psi}^{e,vol} = \frac{1}{2} H [\epsilon_1^e + \epsilon_2^e + \epsilon_3^e]^2, \quad \tilde{\Psi}^{e,dev} = \mu [\bar{\epsilon}_1^{e,2} + \bar{\epsilon}_2^{e,2} + \bar{\epsilon}_3^{e,2}] \quad (36)$$

Etkin ısı-genleşme potansiyeli, plastik sıkıştırılmazlık ilkesi de kullanılarak şu şekilde ifade edilebilir,

$$\tilde{\Psi}^{td} = \tilde{\Psi}^{td}(J^e, \theta), \quad \tilde{\Psi}^{td} = -3\alpha^t \frac{\log[J^e]}{J^e} (\theta - \theta_0) \quad (37)$$

Burada α^t ve θ_0 sırası ile termal genleşme katsayısını ve referans sıcaklığı ifade etmektedir. Termal potansiyel şu şekilde verilebilir,

$$\Psi^t = C_v \left\{ (\theta - \theta_0) - \theta \log \left[\frac{\theta}{\theta_0} \right] \right\} \quad (38)$$

burada C_v özgül ısı kapasitesini ifade eder ki burada sıcaklıktan bağımsız olduğu kabul edilmiştir.

Potansiyellerin tanımlarının ardından, ilgili hal denklemleri türetilebilir. Buna göre hacimsel Kirchhoff gerilmesi, p , ve deviyatorik Kirchhoff gerilmesi, \mathbf{s} , tanımları,

$$p = 2(1-D) (\partial_{J^e} \tilde{\Psi}^{e,vol} + \partial_{J^e} \tilde{\Psi}^{td}) \partial_{\mathbf{b}^e} J^e \bullet \mathbf{b}^e \quad (39)$$

$$\mathbf{s} = 2(1-D) \partial_{\mathbf{b}^e} \tilde{\Psi}^{e,dev} \bullet \mathbf{b}^e \quad (40)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{s} = \sum_{A=1}^3 s_A \mathbf{m}^A$ 'dır ve s_A ($A = 1, 2, 3$) bu tensörün asal-bileşenleri, yani asal deviyatorik Kirchhoff gerilmeleri, $\mathbf{m}^A = \boldsymbol{\nu}^A \otimes \boldsymbol{\nu}^A$, ($A = 1, 2, 3$) asal-bazları ve $\boldsymbol{\nu}^A$ ($A = 1, 2, 3$) ise asal-vektörleri ifade etmektedir, Türetmelerimizi asal eksenlerde ifade edersek aşağıdaki denklemleri elde ederiz,

$$p = (1-D) H \{ [\epsilon_1^e + \epsilon_2^e + \epsilon_3^e] - 3\alpha^t (\theta - \theta_0) \} \quad (41)$$

$$s_A = 2(1-D) \mu \bar{\epsilon}_A^e \quad (42)$$

Plastisiteye gelindiğinde, izotropik bir pekleşme potansiyeli tanımı, $\Psi^{p,iso}$, ile başlanırsa,

$$\Psi^p = \Psi^{p,iso}(\alpha) \quad (43)$$

Bu potansiyelin seçimi ile gerilme tipi izotropik pekleşme değişkenine ait hal denklemi, $q = -\partial_\alpha \Psi^{p,iso}$, açıklığa kavuşacaktır. $q = K'(\alpha)$ kullanılarak, $K'(\alpha)$ için literatürde önerilen bir çok form mevcuttur,

$$K'(\alpha) = \begin{cases} K\alpha, & \text{Doğrusal} \\ K\alpha + (K_\infty - K_0) (1 - \exp[-\delta\alpha]), & \text{Satürasyon} \\ \tau_0 [(c + \alpha) - 1], & \text{Swift} \\ K\alpha^n, & \text{Ramberg Osgood} \\ \tau_0 [\ln(c + \alpha) - 1], & \text{Logaritmik} \end{cases} \quad (44)$$

Burada $K(\theta)$ sıcaklığa bağlı doğrusal pekleşme katsayısını, $\tau_\infty(\theta)$ ve $\tau_0(\theta)$ ise sırası ile sıcaklığa bağlı çökeltme gerilmesini ve akma gerilmesini ifade etmektedir. λ yine pekleşmeye ait üstel fonksiyon katsayısıdır. c ve n yine plastisiteye ait malzeme parametreleridir. Isıl etkileri de barındıran etkin asal Kirchhoff gerilmeleri, $\tilde{\tau}_A$, ve sıcaklık, θ , formüle edilmiş, J_2 tipi akma potansiyelinin, $\tilde{\phi}(\tilde{\tau}_A, \theta)$, tanımını şu şekilde verilebilir,

$$\tilde{\phi}(\tilde{\tau}_A, \theta) \doteq \sqrt{\frac{2}{3}} (\tilde{\tau}_1^2 + \tilde{\tau}_2^2 + \tilde{\tau}_3^2 - \tilde{\tau}_1 \tilde{\tau}_2 - \tilde{\tau}_1 \tilde{\tau}_3 - \tilde{\tau}_2 \tilde{\tau}_3)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}} y(q, \theta) \leq 0 \quad (45)$$

Burada $y(q, \theta)$ termal etkileri de içeren pekleşme fonksiyonunu ifade etmektedir ve şöyle tanımlanır,

$$y(q, \theta) = \tau_0(\theta) + q \quad (46)$$

ve

$$\tau_0(\theta) = \tau_0 [1 - H^\theta(\theta - \theta_0)] \quad (47)$$

τ_0 hiç yüklenmemiş malzemenin ilk akma gerilmesini ifade eder. Önerilen plastik potansiyel kullanılarak diğer evrimsel formlar elde edilecektir,

$$\partial_{\tilde{\tau}} \tilde{\phi} = \sum_{A=1}^3 \tilde{n}_A \tilde{\mathbf{m}}^A, \text{ burada } \tilde{n}_A = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{\tau}_A} = \frac{\tilde{s}_A}{\|\tilde{\mathbf{s}}\|} \quad (48)$$

Burada dikkat edilmesi gereken hususlardan biri asal eksenlerin etkin ve homojenize gerilmeler için aynı olma durumudur, $\mathbf{m}^A \equiv \boldsymbol{\nu}^A \otimes \boldsymbol{\nu}^A \equiv \tilde{\mathbf{m}}^A \equiv \tilde{\boldsymbol{\nu}}^A \otimes \tilde{\boldsymbol{\nu}}^A$. Sayıl plastik genleme tipi değişkenin zamana bağlı değişim formu şu şekilde bulunabilir,

$$\partial_t \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma} \quad (49)$$

Hasara ait formülasyonla, Bölüm 0.2.2'te işlenecektir.

Izotermal Formlar

Izotermal formülasyonlar için termal etkileri barındıran potansiyeller ve fonksiyonlar üzerindeki ısıl etkilerin giderilmesi yeterlidir. Böylece basınç sıcaklıktan bağımsız olacağı gibi deviyatorik formun zaten sıcaklığa bağlı olmayan yapısı aynen devam eder,

$$p = (1 - D) H [\epsilon_1^e + \epsilon_2^e + \epsilon_3^e], \quad s_A = (1 - D) 2\mu \bar{\epsilon}_A^e \quad (50)$$

Buna göre J_2 akma potansiyeli şu şekilde tanımlanabilir,

$$\tilde{\phi}(\tilde{\tau}_A) \doteq \sqrt{\frac{2}{3}} (\tilde{\tau}_1^2 + \tilde{\tau}_2^2 + \tilde{\tau}_3^2 - \tilde{\tau}_1 \tilde{\tau}_2 - \tilde{\tau}_1 \tilde{\tau}_3 - \tilde{\tau}_2 \tilde{\tau}_3)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}} y(q) \leq 0 \quad (51)$$

Sıradaki bölümde hasar evrimsel formları ele alınmaktadır.

0.2.5 Zamana Bağlı Hasar Değişim Formları

Malzeme kırılma mekanizması, sünekliğini yani malzeme şekil değiştirme kabiliyetini düşüren üç eksenliliğe kuvvetle bağlıdır, Rice ve Tracey [1969], Bonora [1997] ve Bonora et al. [2005]. Kırılma üzerindeki gerilme etkileri Mackenzie et al. [1977], Hancock ve Brown [1977], Rice ve Tracey [1969] ve McClintock [1968]'de detaylı olarak açıklanmış ve üç eksenli etkinin önemi belirtilmiştir. Bunun yanısıra, Mediavilla [2005], boşluk oluşumunda hacimsel etkilerin yanısıra kayma (yani plastisite) etkilerinin de gözardı edilmemesi gerekliliğini belirtir. Bu özellikle gerilme konsantrasyonları ile birlikte boşlukların ortaya çıkışı aşamasında etkili bir mekanizmadır, ki matris ile ikincil faz tanecığı arasındaki ayrılmayı tetikler. Bu bilgiler ışığında, Dhar et al. [2000] ve Lämmer ve Tsakmakis [2000]'te verilen form kullanılmıştır. Buna göre $g(D, Y)$ fonksiyonu şu şekilde belirlenmiştir²,

$$g(D, Y) = a_0 + (a_1 + a_2 D) \frac{Y^n}{(1 - D)^q} \quad (52)$$

Burada, a_0 , a_1 , a_2 , n ve q malzemeye ait hasar parametreleridir. Lämmer ve Tsakmakis [2000]'de değinildiği gibi, Y 'nin seçimine göre, ki formal termodinamik bir yaklaşımla *elastik birim şekil değiştirme enerjisi*, Lemaitre [1996], ya da *toplam birim şekil değiştirme enerjisi*, Ju [1989.a], farklı formlar elde edilebilir. Hatta termodinamik bir türetim gözetmeksizin *üç değişmezli model*, Lemaitre ve Chaboche [1990], gibi modeller ve hatta varolan kırılma kriterlerinden türetilen hasar eşleniği modeller de bu fonksiyonel yapı içerisinde ele alınabilir. İlerleyen satırlarda türetmeler Lemaitre modeli takip edilerek, Y 'nin elastik şekil değiştirme enerjisi, üç gerilme değişmezinin toplamı ve iç eksenelliği temsil edecek şekilde ele alınmıştır. Tüm formülasyonlar asal eksenlerde gerçekleştirilmiştir. Buna göre şu genelleştirilmiş hasar evrim formu kullanılabilir,

$$\dot{D} = a_0 \dot{\gamma} + (a_1 + a_2 D) \frac{Y^n}{(1 - D)^q} \dot{\gamma} \quad (53)$$

Seçilen bu zamana bağlı değişim formunda ilk terim kesme etkisi altında plastisite ile boşluk oluşumunu, ikincisi ise bu boşluğun hacimsel etkiler altında büyümesini hedefler.

Lemaitre Hasar Modeli

Halihazırda asal eksenlerde bir türetme yapıldığı göz önüne alınarak hasar konjüğe değişkeni de Lemaitre modeli için asal gerilme ekseninde şu şekilde tanımlanabilir,

$$Y(\tilde{\tau}_A) = \frac{1 + \nu}{2E} (\tilde{\tau}_1^2 + \tilde{\tau}_2^2 + \tilde{\tau}_3^2) - \frac{9\nu}{2E} \tilde{p}^2 \quad (54)$$

²Dikkat edilmesi gereken husus bu fonksiyonel yaklaşımda farklı formlara da yer verilebileceğidir.

Burada, etkin hidrostatik gerilme, $\tilde{p} = (\tilde{\tau}_1 + \tilde{\tau}_2 + \tilde{\tau}_3)/3$, ile ifade edilmektedir. ν ve E Poisson oranını ve elastisite modülünü temsil eder. Bu form iç eksenlilik etkisini şu şekilde barındırır,

$$Y = \frac{\tilde{\tau}_{eq}^2 R_v}{2E} \quad (55)$$

burada R_v triksenellik fonksiyonunu ifade eder ve şöyle tanımlanır,

$$R_v = \frac{2}{3} (1 + \nu) + 3 (1 - 2\nu) \left(\frac{p}{\tau_{eq}} \right) \quad (56)$$

$\tilde{\tau}_{eq}$ eşlenik von Mises gerilmesini ifade etmektedir ve tanımı asal eksenlerde şu şekilde verilebilir, $\tilde{\tau}_{eq} = (\tilde{\tau}_1^2 + \tilde{\tau}_2^2 + \tilde{\tau}_3^2 - \tilde{\tau}_1 \tilde{\tau}_2 - \tilde{\tau}_1 \tilde{\tau}_3 - \tilde{\tau}_2 \tilde{\tau}_3)^{1/2}$. Fiziksel gerçekler göstermektedir ki hasar oluşumu çekme gerilmeleri altında ivmelenmekte basma gerilmeleri altında ise hatırı sayılır biçimde azalmaktadır. Bunun nedeni kırık kapanma etkisidir. Denklem (54) ile verilen form doğal olarak bu durumu yansıtmamakta çekme ve basma gerilmeleri arasında bir fark gözetmemektedir. Bu nedenle ekstra düzenlemelere ihtiyaç vardır. Asal eksenlerde formülasyonun etkinliği bu aşamada, yani yarı tek taraflı hasar evrimi formlarının uygulanmasında, sahneye çıkar. Buna göre aktif-pasif hasar evrim formları çekme gerilmeleri ile tam randımanlı olarak basma gerilmelerinde ise kısmen çalışmaktadır. Fakat üç boyutlu (3B) bir gerilme durumu için açıktır ki gerilmenin basma ya da çekme karakteri belirsizdir. Bunun çözümü için literatürde önerilen metod, spektral ayırım ile asal gerilmelerin tayinidir. Eldeki formülasyon halihazırda asal eksenlerde olduğundan, aktif-pasif hasar evrimi için doğal olarak donanmıştır ve ekstra bir çabayı gereksindirmemektedir. Buna göre elastik birim şekil değiştirme enerjisinin yarı tek taraflı olarak yeniden formüle edilmesi ile çıkan yapı, Y^+ , şu şekildedir, Lemaitre ve Desmorat [2005] ve Andrade Pires et al. [2004],

$$\begin{aligned} Y^+(\tau_A, D) &= \frac{1 + \nu}{2E(1 - D)^2} (\langle \tau_1 \rangle^2 + \langle \tau_2 \rangle^2 + \langle \tau_3 \rangle^2) - \frac{9\nu}{2E(1 - D)^2} \langle p \rangle^2 \\ &+ \frac{h(1 + \nu)}{2E(1 - hD)^2} (\langle -\tau_1 \rangle^2 + \langle -\tau_2 \rangle^2 + \langle -\tau_3 \rangle^2) \\ &- \frac{9\nu h}{2E(1 - hD)^2} \langle -p \rangle^2 \end{aligned} \quad (57)$$

Burada, $h \in [0, 1]$, kırık kapanma parametresini ifade etmektedir ve çelik için genellikle 0.2 olarak alınır, Lemaitre [1996]. $h = 0$ ve $h = 1$ gibi iki uç noktada sırası ile tam kırık kapanmalı ve kırık kapanmasız olarak çalışır. Bu çalışmada, $h = 0$, kabul edilecektir. Bu durumda,

$$Y^+(\tilde{\tau}_A) = \frac{1 + \nu}{2E} (\langle \tilde{\tau}_1 \rangle^2 + \langle \tilde{\tau}_2 \rangle^2 + \langle \tilde{\tau}_3 \rangle^2) - \frac{9\nu}{2E} \langle \tilde{p} \rangle^2 \quad (58)$$

Başka bir deyişle, asal basma gerilmelerinin hasar evrimine bir katkısı olmadığı varsayılmaktadır. Bununla birlikte, $g = g(D, Y^+)$, kabul edilmekte ve zamana bağlı değişim tanımları sonuçlandırılmaktadır.

Üç Değişmezli Hasar Modeli

Orjinal formu, Lemaitre ve Chaboche [1990]'de verilen bir formdur. Buna göre hasar yarı-bileşke değeri olarak gerilme tensörünün üç değişmezi toplamı kabul edilmiştir.

$$Y = \alpha J_0(\boldsymbol{\tau}) + \beta J_1(\boldsymbol{\tau}) + (1 - \alpha - \beta) J_2(\boldsymbol{\tau}) \quad (59)$$

Bu değişmezlerden, $J_0(\boldsymbol{\tau})$ maksimum asal gerilme, yani $\tau_1, \tau_1 > \tau_2 > \tau_3$, $J_1(\boldsymbol{\tau})$ birinci gerilme değişmezi, $3p = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ ve son olarak $J_2(\boldsymbol{\tau})$ von Mises gerilmesini, τ_{eq} , ifade etmektedir. Ayrıca α ve β malzemeye ait parametrelerdir. Yeniden düzenleme ile,

$$Y = \tau_{eq} \left[\alpha \frac{\tau_1}{\tau_{eq}} + \beta \frac{p}{\tau_{eq}} + (1 - \alpha - \beta) \right] \quad (60)$$

elde edilir. Bu yeni formda β tanımı daha belirgin olarak üç eksenliliğe hasasiyet parametresi olarak görülebilir, Lemaitre ve Chaboche [1990]. Bu yapıya aktif-pasif formlar eklenirse,

$$\tau_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{s}\| \quad (61)$$

Bunu kullanarak,

$$\tau_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}} [(\tau_1 - p)^2 + (\tau_2 - p)^2 + (\tau_3 - p)^2] \quad (62)$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} [(\tau_1)^2 + (\tau_2)^2 + (\tau_3)^2 - 3p^2] \quad (63)$$

ve,

$$\tau_{eq}^+ = \sqrt{\frac{3}{2}} [(\tau_1)^2 + \langle \tau_2 \rangle^2 + \langle \tau_3 \rangle^2 - 3\langle p \rangle^2] \quad (64)$$

$$Y^+ = \alpha \langle \tau_1 \rangle + 3\beta \langle p \rangle + (1 - \alpha - \beta) \tau_{eq}^+ \quad (65)$$

tanımlarına ulaşılabilir. Bu hasar evrim formu değişmezlere dayalı olduğundan izotropiktir. Görülmektedir ki bu hasar evrim formu termodinamik olarak türetilmemesine rağmen hasarın her zaman pozitif evrimini göz önüne alarak termodinamiğin ikinci yasasını ihlal etmemektedir.

Üç Eksenli Hasar Modeli

Çok daha basitçe, üç eksenliliğe bağlı bir form da önerilebilir. Bu durumda Y üç eksenlilik oranı olacaktır,

$$Y = \frac{\langle \tilde{p} \rangle}{\tilde{\tau}_{eq}} \quad (66)$$

ve aktif-pasif hasar evrim formları sıradaki denklemi öngörecektir,

$$Y^+ = \frac{\tilde{p}}{\tilde{\tau}_{eq}} \quad (67)$$

Sonuçta görülmektedir ki, parametrik olarak farklı hasar bileşke değişkenleri eşliğinde farklı formlar yakalanabilmektedir. Bu formlar fiziksel gerçeklerle örtüşen fenomenolojik hasar formlarını teşkil etmektedirler.

Belirtmek gerekir ki, etkin izotropik konfigürasyonlar kullanılarak, anizotropik formlar elde etmek olasıdır. Bu çalışmanın konusu dışına bırakılan bu konulara dair uygulamalar, Menzel et al. [2002], ve referanslarında bulunabilir.

0.3 Sayısal İmplementasyon

0.3.1 Sonlu Elemanlar Formülasyonu

İlerleyen satırlarda izotropik ve sıcaklıktan bağımsız formların nümerik çözümleri ele alınmıştır. Notasyonlarda, Doghri [2000]'nin, 14. ve 15. bölümlerinden faydalanılmıştır.

Kuvvetli ve Zayıf Formlar

Euler formunda lokal hareket denklemi tensör ve indis notasyonu ile şu şekilde verilebilir,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \boldsymbol{\gamma}, \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho \gamma_i \quad (68)$$

Burada $\boldsymbol{\sigma} = J \boldsymbol{\tau}$ Cauchy tipi gerilmeleri, ρ özgül ağırlığı, \mathbf{b} bünye kuvvetlerini ve $\boldsymbol{\gamma}$ ise ivmeyi temsil etmektedir. $\operatorname{div}(\bullet)$ operatör tanımı indis notasyonunda açıklanmaktadır. Statik analiz için, ivmelenme bileşeni sıfır olacağından, $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$, alınır. Sayısal çözümlerde zayıf formülasyon tercih edilir. Buna göre, yeterli süreklilikli bir sanal hız alanı, $\boldsymbol{\eta}$, seçilir. (Bubnov-) Galerkin yaklaşımının takibi ile, denklemin her iki tarafı da bu alan ile çarpılır ve güncel konfigürasyonda, \mathcal{B} , entegre edilir,

$$\int_{\mathcal{B}} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}) \bullet \boldsymbol{\eta} \, dv = \int_{\mathcal{B}} \rho \boldsymbol{\gamma} \bullet \boldsymbol{\eta} \, dv \quad (69)$$

Sıradaki denklemi kullanarak

$$\operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\eta}) = \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma}) \bullet \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{\eta} \quad (70)$$

ve denklem 69 içine yerleştirerek,

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\eta}) \, dv - \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{\eta} \, dv + \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} \bullet \boldsymbol{\eta} \, dv = \quad (71)$$

$$\int_{\mathcal{B}} \rho \boldsymbol{\gamma} \bullet \boldsymbol{\eta} \, dv \quad (72)$$

bulunur. Bu aşamada Gauss teoremini uygularsak,

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\eta}) \, dv = \int_{\partial \mathcal{B}_\sigma} \mathbf{n} \bullet \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\eta} \, da \quad (73)$$

denklemini buluruz. Burada $\partial \mathcal{B}_\sigma$ gerilme tipi koşulların uygulandığı sınırı ifade eder. Cauchy gerilmelerinin simetrik olması durumunun empoze edilmesi ve Cauchy denkleminin, $\mathbf{n} \bullet \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}$, yerine konulması ile,

$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} : \nabla^S \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} \bullet \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\partial \mathcal{B}_\sigma} \mathbf{t} \bullet \boldsymbol{\eta} \, da = \quad (74)$$

$$\int_{\mathcal{B}} \rho \boldsymbol{\gamma} \bullet \boldsymbol{\eta} \, dv \quad (75)$$

Sonuç olarak, zayıf formülasyon çıktısı statik koşullar için aşağıda verilen şekilde elde edilmiş olur,

$$g(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} : \nabla^S \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} \bullet \boldsymbol{\eta} \, dv - \quad (76)$$

$$\int_{\partial \mathcal{B}_\sigma} \mathbf{t} \bullet \boldsymbol{\eta} \, da = 0 \quad (77)$$

Zayıf Formun Doğrusallaştırılması

İç sanal iş için, zayıf formun $d\boldsymbol{\varphi}$ yönünde doğrusallaştırılması yani $Dg(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\eta}) \bullet d\boldsymbol{\varphi}$, şöyledir,

$$Dg(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\eta}) \bullet d\boldsymbol{\varphi} = \int_{\mathcal{B}} \nabla^S \boldsymbol{\eta} : \mathbf{c} : \nabla^S d\boldsymbol{\varphi} \, dv + \int_{\mathcal{B}} \nabla \boldsymbol{\eta} \bullet \boldsymbol{\sigma} \bullet \nabla d\boldsymbol{\varphi} \, dv \quad (78)$$

Denklemin sağındaki ilk terim malzeme rijitliğine aitken ikinci terim geometrik rijitliği simgeler. \mathbf{c} , *güncel malzeme tanjantıdır* ve türetilmesine ilerleyen sayfalarda yer verilmiştir. Bu tensörün nümerik olarak tutarlı bir biçimde türetilmesi yakınsamanın Newton Raphson çözüm metodunun gerektirdiği ikinci dereceden yakınsaklığa uygun olması açısından önemlidir.

0.3.2 Algoritmik Yapının Oluşturulması

Zaman t_n 'deki hal değişkenlerinin, $(\bullet)_n$, bilindiği kabul edilmekte ve zaman $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ içerisindeki şekil değiştirmenin bilinmesi ile zaman t_{n+1} 'deki bilinmeyenlerin, $(\bullet)_{n+1}$, çözümüne gidilmektedir. Birim şekil değiştirme temelli bir işlem ile, bir önceki zaman basamağındaki, t_n , elastik çekme tensörünü ve zaman t_{n+1} 'deki bağıl deformasyon gradyeni, \mathbf{f}_{n+1}^T , kullanarak bir deneme çekme tensörü tayin edebiliriz,

$$\mathbf{b}_{n+1}^{e, tri} = \mathbf{f}_{n+1} \bullet \mathbf{b}_n^e \bullet \mathbf{f}_{n+1}^T \quad (79)$$

Formülasyonlarda kullanılan, e, p ve tri üst indisleri, elastik, plastik ve deneme manasına gelmektedir. Akma formunun algoritmik olarak yazımı ile,

$$\mathcal{L}_v \mathbf{b}_{n+1}^e = -2 \frac{\dot{\gamma}_{n+1}}{(1 - D_{n+1})} \left. \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{\tau}} \right|_{n+1} \bullet \mathbf{b}_{n+1}^e \quad (80)$$

tipik bir zaman basamağı, Δt , için, $\Delta \gamma \doteq \Delta t \dot{\gamma}_{n+1}$, tanımını da kullanarak, üstel transformasyon yaklaşımını plastik akmanın entegrasyonunda kullanabiliriz.³

$$\mathbf{b}_{n+1}^e = \exp \left[-2 \frac{\Delta \gamma}{(1 - D_{n+1})} \left. \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{\tau}} \right|_{n+1} \right] \bullet \mathbf{b}_{n+1}^{e, tri} \quad (81)$$

$b_{n+1, A}^e = (\lambda_{n+1, A}^e)^2$, tanımını kullanarak ve formu asal çekmeler cinsinden ifade ederek,

$$\lambda_{n+1, A}^e = \exp \left[- \frac{\Delta \gamma}{(1 - D_{n+1})} \left. \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{\tau}_A} \right|_{n+1} \right] \lambda_{n+1, A}^{e, tri} \quad (82)$$

$\epsilon_A = \log [\lambda_A]$ ilişkisini kullanarak, iki tarafın da doğal logaritmasını alırsak,

$$\epsilon_{n+1, A}^e = \epsilon_{n+1, A}^{e, tri} - \frac{\Delta \gamma}{(1 - D_{n+1})} \left. \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{\tau}_A} \right|_{n+1} \quad (83)$$

asal plastik genleme artışlarını tanımlarız,

$$\Delta \epsilon_{n+1, A}^p = \frac{\Delta \gamma}{(1 - D_{n+1})} \left. \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{\tau}_A} \right|_{n+1} \quad (84)$$

ki bu bize şu formu kazandırır,

$$\epsilon_{n+1, A}^e = \epsilon_{n+1, A}^{e, tri} - \Delta \epsilon_{n+1, A}^p \quad (85)$$

Deformasyon gradyeninin çarpmalı kinematığından küçük deformasyon ve küçük birim şekil değiştirmeli plastisitenin kanonik toplamalı (bu defa logaritmik genlemelerde) yapısını elde etmek bu noktada kayda değerdir. Asal logaritmik genleme tanımı ile asal deneme Kirchhoff gerilmelerini ifade edersek,

$$\tilde{\tau}_{n+1, A}^{tri} = H \log [J_{n+1}] + 2\mu \bar{\epsilon}_{n+1, A}^{e, tri} \quad (86)$$

güncel etkin asal Kirchhoff gerilmelerini elde edebiliriz,

$$\tilde{\tau}_{n+1, A} = H \log [J_{n+1}] + 2\mu \bar{\epsilon}_{n+1, A}^e \quad (87)$$

Bu gerilmelerin Cauchy tipindeki tanımlarını bulmak basittir, $\tilde{\sigma}_{n+1, A}^{tri} = \tilde{\tau}_{n+1, A}^{tri} / J_{n+1}$, $\tilde{\sigma}_{n+1, A} = \tilde{\tau}_{n+1, A} / J_{n+1}$. Dikkat edilmesi gereken husus, plastik sıkıştırılmazlıkla birlikte, dilatasyonun sadece elastik olabilmesidir, yani

³Üstel transformasyon yaklaşımı doğrusal kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümünde kullanılan methodur. Methodun türetilmesine eklerde yer verilmiştir.

$J_{n+1}^e = J_{n+1}^{e, tri} = J_{n+1}$. Bu ilişkileri kullanarak plastik-hasar düzeltimli gelişmeleri tanımlayabiliriz,

$$\tilde{\tau}_{n+1, A} = \tilde{\tau}_{n+1, A}^{tri} - 2\mu \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left. \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{\tau}_A} \right|_{n+1} \quad (88)$$

Daha önce J_2 plastisitesi için verilmiş yapıyı kullanarak,

$$\left. \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{\tau}_A} \right|_{n+1} = n_{n+1, A} \quad (89)$$

aşağıdaki formu elde ederiz,

$$\tilde{s}_{n+1, A} = \tilde{s}_{n+1, A}^{tri} - 2\mu \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \quad (90)$$

Sayıların, yani α ve D , entegrasyonu daha kolaydır ve θ ile parametrize edilmiş bir grup genelleştirilmiş orta-nokta entegrasyonu ailesi şeklinde ifade edilebilirler. Bu formlar, $\theta = 1/2$ için, ikinci dereceden kesinlik taşırlar, Mathews ve Fink [1999],

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta t \dot{\alpha}_{n+\theta}, \quad \text{burada} \quad \dot{\alpha}_{n+\theta} = (1 - \theta) \dot{\alpha}_n + \theta \dot{\alpha}_{n+1} \quad (91)$$

ve

$$D_{n+1} = D_n + \Delta t \dot{D}_{n+\theta} \quad \text{burada} \quad \dot{D}_{n+\theta} = (1 - \theta) \dot{D}_n + \theta \dot{D}_{n+1} \quad (92)$$

Birinci dereceden kesinlikli ve koşulsuz stabil tersine Euler metodu hesaplamalı plastisitede eşlenik plastik birim şekil değiştirmelerin entegrasyonunda oldukça etkilidir, Jirásek ve Bažant [2001]. Bütünlüğün sağlanması adına, bu çalışmada hasarın entegrasyonunda da aynı metod uygulanacaktır,

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta t \dot{\alpha}_{n+1}, \quad D_{n+1} = D_n + \Delta t \dot{D}_{n+1} \quad (93)$$

Buna göre izotropik pekleşme birim şekil değiştirme tipi değişken ile, α_{n+1} , hasarın, D_{n+1} , entegrasyonu şöyle ifade edilebilir,

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma \quad (94)$$

$$D_{n+1} = D_n + \Delta\gamma g_{n+1} \quad (95)$$

burada $g_{n+1} \doteq g(D_{n+1}, Y_{n+1}^{d,+})$.

Viskoz Düzenlemeli Algoritmik Formlar

Sıralanan formların viskoz düzenlemeli formlar şu şekilde verilebilir. Akma kuralı tanımı ile başlanarak,

$$\mathcal{L}_v \mathbf{b}_{n+1}^e = -2 \frac{1}{(1 - D_{n+1})} \frac{\langle \tilde{\phi} \rangle}{\eta} \mathbf{n}_{n+1} \bullet \mathbf{b}_{n+1}^e \quad (96)$$

Tipik bir zaman aralığı, Δt , için,

$$\Delta\gamma^{vp} \doteq \Delta t \dot{\gamma}^{vp}_{n+1}, \text{ burada } \dot{\gamma}^{vp}_{n+1} = \frac{\langle \tilde{\phi} \rangle}{\eta} \quad (97)$$

geçerlidir. Asal logaritmik viskoplastik birim şekil değiştirme artışlarının, $\Delta\epsilon_{n+1,A}^{vp}$, tanımı şöyledir,

$$\Delta\epsilon_{n+1,A}^{vp} = \frac{\Delta\gamma^{vp}}{(1 - D_{n+1})} n_{n+1,A} \quad (98)$$

bununla beraber,

$$\epsilon_{n+1,A}^e = \epsilon_{n+1,A}^{e,tri} - \Delta\epsilon_{n+1,A}^{vp} \quad (99)$$

Deviyatorik Kirchhoff gerilmelerinin tanımına ulaşırız,

$$\tilde{s}_{n+1,A} = \tilde{s}_{n+1,A}^{tri} - 2\mu \frac{\Delta\gamma^{vp}}{(1 - D_{n+1})} n_{n+1,A} \quad (100)$$

Eşlenik plastik genlemelerin integrasyonu,

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma^{vp}, \text{ burada } \Delta\gamma^{vp} = \langle \tilde{\phi}_{n+1} \rangle \frac{\Delta t}{\eta} \quad (101)$$

ve hasar integrasyonu ile denklem setimizi tamamlarız,

$$D_{n+1} = D_n + \Delta\gamma^{vp} g_{n+1} \quad (102)$$

Yukarıda verilen formlarda üst simge, vp , viskoplastisiteyi betimler.

0.3.3 Eşzamanlı Çözüm Yaklaşımı

Bu bölümde öncelikle tüm denklem setinin oluşturulması ve çözülmesinde takip edilecek yollar ele alınacaktır. Sonra sırası ile denklem sayısı ikiye ve teke indirgenecek ve sistem basitleştirilecektir. Bu amaç için güncel zamanda tanımlanmış akma fonksiyonu şu şekilde verilebilir,

$$\tilde{\phi}_{n+1} \doteq \|\tilde{s}_{n+1}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} y(q_{n+1}) = 0 \quad (103)$$

Burada $\|\bullet\|$ tensör normunu ifade etmektedir.

Tam Denklem Seti

Tüm denklemler kalıntı biçiminde derlenirse,

$$\mathbf{r}_{n+1} = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{s}_{n+1,A} - \tilde{s}_{n+1,A}^{tri} + 2\mu \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} n_{n+1,A} \\ \alpha_{n+1} - \alpha_n - \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma \\ q_{n+1} - K'(\alpha_{n+1}) \\ \tilde{\phi}_{n+1} \doteq \|\tilde{s}_{n+1}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} y(q_{n+1}) \\ D_{n+1} - D_n - \Delta\gamma g_{n+1} \end{array} \right\} \quad (104)$$

elde edilir. Burada $\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{0}$. Bu yedi denklem yedi bilinmeyen, ki bunlar sırası ile $\tilde{s}_{n+1,A}$ ($A = 1, 2, 3$), $\Delta\gamma$, D_{n+1} , α_{n+1} , q_{n+1} , bulunmasında kullanılacaktır. Doğrusal olmayan bu denklem seti standart Newton-Raphson metodu ile çözülebilir, fakat öncelikle çeşitli manüplasyonlarla problemin basitleştirilme olasılıkları üzerinde durulacaktır.

Viskoz düzenleme denklem grubu da şu şekilde verilebilir,

$$\mathbf{r}_{n+1} = \begin{pmatrix} \Delta\gamma^{vp} - \left\{ \|\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} y(q_{n+1}) \right\} \frac{\Delta t}{\eta} \\ \tilde{s}_{n+1,A} - \tilde{s}_{n+1,A}^{tri} + 2\mu \frac{\Delta\gamma^{vp}}{(1-D_{n+1})} n_{n+1,A} \\ \alpha_{n+1} - \alpha_n - \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma^{vp} \\ q_{n+1} - K'(\alpha_{n+1}) \\ D_{n+1} - D_n - \Delta\gamma^{vp} g_{n+1} \end{pmatrix} \quad (105)$$

Simó Taylor Tipi İndirgenmiş Denklemler

Simó ve Taylor [1985]'i takip ederek, denklemler seçilen akma fonksiyonu için, $\tilde{s}_{n+1,A} = \|\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}\| n_{n+1,A}$, tanımı yerine konularak indirgenebilir.

$$\|\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}\| n_{n+1,A} = \|\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^{tri}\| n_{n+1,A}^{tri} - 2\mu \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} n_{n+1,A} \quad (106)$$

Takip eden denklem kullanılarak,

$$\left(\|\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}\| + 2\mu \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} \right) n_{n+1,A} = \|\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^{tri}\| n_{n+1,A}^{tri} \quad (107)$$

ve spektral ayırmadan doğan, $\mathbf{n}_{n+1} \equiv \mathbf{n}_{n+1}^{tri}$, durumu da değerlendirilerek,

$$n_{n+1,A}^{tri} \mathbf{m}_{n+1}^{tri,A} = n_{n+1,A} \mathbf{m}_{n+1}^A \quad (108)$$

elde edilir. Bunun yansısı $\mathbf{m}_{n+1}^{tri,A} \equiv \mathbf{m}_{n+1}^A$ ve $n_{n+1,A} \equiv n_{n+1,A}^{tri}$ kullanılarak,

$$\|\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}\| + 2\mu \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} = \|\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^{tri}\| \quad (109)$$

ve pekleşme fonksiyonu ile birlikte,

$$y = \tau_0 + \tilde{K}'(\alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma) \quad (110)$$

gerekli modifikasyonlar uygulanarak sıradaki ikiye indirgenmiş denklem seti elde edilir,

$$\mathbf{r}_{n+1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \{ \tau_0 + K(\alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma) \} - \|\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^{tri}\| + 2\mu \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} \\ D_{n+1} - D_n - \Delta\gamma g_{n+1} \end{pmatrix} \quad (111)$$

burada $\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{0}$. Bilinmeyenler, yani $\Delta\gamma$ ve D_{n+1} , yediden ikiye düşürülmüştür. Bu denklem sisteminin çözümünde standard Newton-Raphson metodu kullanılacaktır. Kalıntı formunun bileşenlerini $r_{1,n+1}$ ve $r_{2,n+1}$ olarak adlandırırsak, bunların doğrusallaştırılmış şekilleri şu şekilde verilebilir,

$$\begin{Bmatrix} dr_{1,n+1} \\ dr_{2,n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{\Delta\gamma} r_{1,n+1} & \partial_{D_{n+1}} r_{1,n+1} \\ \partial_{\Delta\gamma} r_{2,n+1} & \partial_{D_{n+1}} r_{2,n+1} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} d\Delta\gamma \\ dD_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (112)$$

Yukarıdaki denklem kısaca, $d\mathbf{r}_{n+1} = D\mathbf{r}_{n+1} \bullet d\boldsymbol{\kappa}_{n+1}$ notasyonu ile ifade edilebilir. Bununla birlikte $D\mathbf{r}_{n+1}^{-1} \bullet d\mathbf{r}_{n+1} = d\boldsymbol{\kappa}_{n+1}$ bulunur. $\boldsymbol{\kappa}_{n+1}$ çözümü ise şu tekrarlamalı sistemle sağlanır,

$$\boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{(k+1)} = \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{(k)} - \delta^{(k)} D\mathbf{r}_{n+1}^{-1, (k)} \bullet \mathbf{r}_{n+1}^{(k)} \quad (113)$$

Burada, $\delta^k \in (0, 1]$, doğru-arama parametresidir. Bu form açık olarak şu şekilde yazılabilir,

$$\begin{Bmatrix} \Delta\gamma^{(k+1)} \\ D_{n+1}^{(k+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\gamma^{(k)} \\ D_{n+1}^{(k)} \end{Bmatrix} - \frac{\delta^{(k)}}{\Delta_{n+1}^{(k)}} \begin{bmatrix} (\partial_{D_{n+1}} r_{2,n+1})^{(k)} & -(\partial_{D_{n+1}} r_{1,n+1})^{(k)} \\ -(\partial_{\Delta\gamma} r_{2,n+1})^{(k)} & (\partial_{\Delta\gamma} r_{1,n+1})^{(k)} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} r_{1,n+1}^{(k)} \\ r_{2,n+1}^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (114)$$

Burada, $\Delta_{n+1}^{(k)} = \det[D\mathbf{r}_{n+1}^{(k)}]$, yerel tanjant operatörü yerine geçen, Jacobian determinantıdır. Algoritmik olarak tutarlı elastoplastik tanjantın elde edilmesinde global iteratif formlarda aşağıdaki türevler kullanılacaktır, Borja et al. [2003],

$$\begin{Bmatrix} d\Delta\gamma \\ dD_{n+1} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{\Delta_{n+1}} \begin{bmatrix} \partial_{D_{n+1}} r_{2,n+1} & -\partial_{D_{n+1}} r_{1,n+1} \\ -\partial_{\Delta\gamma} r_{2,n+1} & \partial_{\Delta\gamma} r_{1,n+1} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} dr_{1,n+1} \\ dr_{2,n+1} \end{Bmatrix} \quad (115)$$

Burada $\Delta_{n+1} = \det[D\mathbf{r}_{n+1}]$ 'dir. Aşağıda listelenen Jacobian bileşenlerinin tayini bu noktada esastır.

$$\partial_{\Delta\gamma} r_{1,n+1} = \frac{2}{3} K''(\alpha_{n+1}) + 2\mu \frac{1}{(1 - D_{n+1})} \quad (116)$$

$$\partial_{D_{n+1}} r_{1,n+1} = 2\mu \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})^2} \quad (117)$$

$$\partial_{\Delta\gamma} r_{2,n+1} = -g_{n+1} + \Delta\gamma \partial_{\Delta\gamma} g_{n+1} \quad (118)$$

$$\partial_{D_{n+1}} r_{2,n+1} = 1 - \Delta\gamma \partial_{D_{n+1}} g_{n+1} \quad (119)$$

burada $K''(\alpha) = \partial_{\alpha^2}^2 K(\alpha)$. Türetmelere ait detaylar ekte yer almaktadır. Algoritma **KUTU 2**'de özetlenmiştir. Viskoz düzenlemeli formlar aynı veriler ışığında kolaylıkla elde edilebilir.

KUTU 1. Elastik kestirim

1. Veri $\mathbf{x} \in \mathfrak{B}$

$$\mathbf{b}_n^e, \alpha_n, D_n$$

2. Verilen, \mathbf{F}_{n+1} , bağıl deformasyon gradyanını hesapla

$$\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \bullet \mathbf{F}_n^{-1}$$

3. Elastik kestirimi hesapla

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{n+1}^{e, tri} &= \mathbf{f}_{n+1} \bullet \mathbf{b}_n^e \bullet \mathbf{f}_{n+1}^T \\ \lambda_{n+1, A}^{e, tri} &= (b_{n+1, A}^{e, tri})^{1/2} \\ \tilde{\tau}_{n+1, A}^{tri} &= \tilde{p}_{n+1} + \tilde{s}_{n+1, A}^{tri} \\ \tilde{p}_{n+1} &= H \log [J_{n+1}] \\ \tilde{s}_{n+1, A}^{tri} &= 2\mu \bar{\epsilon}_{n+1, A}^{e, tri} \end{aligned}$$

KUTU 2. Eşzamanlı çözüm için 2 aşamalı lokal integrasyon
(Elastik kestirim-plastik/hasar düzeltimi tipi algoritma)

1. **KUTU 1**'i gerçekleştir. (Elastik kestirim)

2. Efektif Kirchhoff uzayında plastik-hasar yüklemesini kontrol et,

$$\tilde{\phi}_{n+1}^{tri} = \{(\tilde{s}_{n+1,1}^{tri})^2 + (\tilde{s}_{n+1,2}^{tri})^2 + (\tilde{s}_{n+1,3}^{tri})^2\}^{1/2} - \sqrt{\frac{2}{3}} \{\tau_0 + K(\alpha_n)\}$$

EĞER $\tilde{\phi}_{n+1}^{tri} \leq 0$ **İSE**

Set $(\bullet)_{n+1} = (\bullet)_{n+1}^{tri}$, **ÇIK.** (Elastik basamak)

DEĞİLSE

3.'e GİT (Plastik-hasar düzeltimi)

SORGU SONU

3. Plastik çarpımı ve hasarı bul, $\Delta\gamma^{(0)} = 0, D_{n+1}^{(0)} = D_n$

$$\left\{ \begin{array}{c} \Delta\gamma^{(k+1)} \\ D_{n+1}^{(k+1)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta\gamma^{(k)} \\ D_{n+1}^{(k)} \end{array} \right\} - \frac{\delta^{(k)}}{\Delta_{n+1}^{(k)}} \left[\begin{array}{cc} (\partial_{D_{n+1}} r_{2,n+1})^{(k)} & -(\partial_{D_{n+1}} r_{1,n+1})^{(k)} \\ -(\partial_{\Delta\gamma} r_{2,n+1})^{(k)} & (\partial_{\Delta\gamma} r_{1,n+1})^{(k)} \end{array} \right] \bullet \left\{ \begin{array}{c} r_{1,n+1}^{(k)} \\ r_{2,n+1}^{(k)} \end{array} \right\}$$

bununla birlikte,

$$(Y^{d,+})^{(k)} = \frac{1+\nu}{2E} (\langle \tilde{\tau}_{n+1,1}^{(k)} \rangle^2 + \langle \tilde{\tau}_{n+1,2}^{(k)} \rangle^2 + \langle \tilde{\tau}_{n+1,3}^{(k)} \rangle^2) - \frac{9\nu}{2E} \langle \tilde{p}_{n+1} \rangle^2$$

4. Etkin gerilmeleri hesapla,

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{n+1,A} &= \tilde{s}_{n+1,A}^{tri} - 2\mu \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} \frac{\tilde{s}_{n+1,A}^{tri}}{\|\tilde{s}_{n+1}^{tri}\|} \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma \end{aligned}$$

5. Homojenize toplam Kirchhoff gerilmelerini bul,

$$\tau_{n+1,A} = (1-D_{n+1}) (\tilde{s}_{n+1,A} + \tilde{p}_{n+1})$$

6. Orta konfigürasyonu güncelle,

$$b_{n+1,A}^e = J^{\frac{2}{3}} \exp \left[\frac{\tilde{s}_{n+1,A}}{\mu} \right], \text{ öyle ki } \mathbf{b}_{n+1}^e = \sum_{A=1}^3 b_{n+1,A}^e \mathbf{m}_{n+1}^{tri,A}$$

İndirgenmiş Tek Denklemlilik Çözüm

de Souza Neto [2002] takip edilerek denklemlerin teke indirilmesi de olasıdır. Burada D_{n+1} 'in $\Delta\gamma$ cinsinden ifade edilebilmesi kullanılmaktadır,

$$D_{n+1}(\Delta\gamma) = 1 - 2\mu \Delta\gamma \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^{tri}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \{\tau_0 + \tilde{K}'(\alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma)\}} \quad (120)$$

Buna göre, elde edilen form önceki buluntularda kullanılarak aşağıdaki doğrusal olmayan denklem elde edilir,

$$D_{n+1}(\Delta\gamma) - D_n - \Delta\gamma g(D_{n+1}(\Delta\gamma), Y_{n+1}(\Delta\gamma)) = 0 \quad (121)$$

ve sadece $\Delta\gamma$ bilinmeyi için çözülür.

0.3.4 Basamaklı Çözüm Yaklaşımı

Plastik-hasar düzeltimi aşaması basamaklı biçimde eşlenmesiz olarak ele alınabilir. Bu durumda öncelikle donmuş hasar durumunda plastik akma hesaplanacak sonra sabit plastik birim şekil değiştirmelerle hasar çözümlenecektir. Sonuçta elde edilen üç basamaklı bir formdur ve, *elastik kestirim*, *plastik düzeltim* ve *hasar zayıflatımı* basamaklarından oluşur. Bu tip bir algoritma eş zamanlı sağlanması gereken denklem sayısı düştüğünden sayısal olarak oldukça karlıdır.

Denklemleri basamaklı biçimde çözmek için öncelikle plastisite ve hasar eşlenmesi ortadan kaldırılır. Buna göre sabit hasar altında plastik akma şu şekilde verilir,

$$\mathbf{r}_{n+1} = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{s}_{n+1, A} - \tilde{s}_{n+1, A}^{tri} + 2\mu \frac{\Delta\gamma}{1-D_n} n_{n+1, A} \\ \alpha_{n+1} - \alpha_n - \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma \\ q_{n+1} - \tilde{K}'(\alpha_{n+1}) \\ \tilde{\phi}_{n+1} \doteq \|\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} y(q_{n+1}) \end{array} \right\} \quad (122)$$

burada $\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{0}$. Çözülmesi gereken altı denklem ve altı bilinmeyen sözkonusudur. Bunlar sırası ile $\tilde{t}_{n+1, A}$, $\Delta\gamma$, α_{n+1} , q_{n+1} olarak verilebilir. Hasar zayıflatması aşamasında ise hasar sabit plastik akma altında entegre edilecektir,

$$D_{n+1} - D_n - \Delta\gamma g_{n+1} = 0 \quad (123)$$

ve denklem sadece D_{n+1} için çözülecektir. Denklemlerin önceden verilen metodlarla indirgenmesi ile sıradaki basit formlar elde edilebilir,

$$\mathbf{r}_{n+1} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{2}{3}} \{\tau_0 + \tilde{K}'(\alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma)\} - \|\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^{tri}\| + 2\mu \frac{\Delta\gamma}{1-D_n} \\ D_{n+1} - D_n - \Delta\gamma g_{n+1} \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (124)$$

Doğrusallaştırılmış formlar ise şunlardır,

$$\begin{Bmatrix} dr_{1,n+1} \\ dr_{2,n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{\Delta\gamma} r_{1,n+1} & 0 \\ 0 & \partial_{D_{n+1}} r_{2,n+1} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} d\Delta\gamma \\ dD_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (125)$$

İteratif yaklaşımla sırayla önce plastisite,

$$\Delta\gamma^{(k+1)} = \Delta\gamma^{(k)} - \frac{\delta^{(k)}}{(\partial_{\Delta\gamma} r_{1,n+1})^{(k)}} r_{1,n+1}^{(k)} \quad (126)$$

sonra da hasar çözümlenir,

$$D_{n+1}^{(m+1)} = D_{n+1}^{(m)} - \frac{\delta^{(m)}}{(\partial_{D_{n+1}} r_{2,n+1})^{(m)}} r_{2,n+1}^{(m)} \quad (127)$$

Gerekli türevler, aşağıdaki formlar kullanılarak bulunur,

$$\begin{Bmatrix} d\Delta\gamma \\ dD_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\partial_{\Delta\gamma} r_{1,n+1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\partial_{D_{n+1}} r_{2,n+1}} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} dr_{1,n+1} \\ dr_{2,n+1} \end{Bmatrix} \quad (128)$$

Algoritmik yapının özeti **KUTU 3**'te verilmektedir.

KUTU 3. Basamaklıçözüm için 3 aşamalı lokal integrasyon
(Elastik kestirim-plastik düzeltim-hasar zayıflatımı tipi algoritma)

1. **KUTU 1**'i gerçekleştir. (Elastik kestirim)

2. Efektif Kirchhoff uzayında plastik-hasar yüklemesini

$$\tilde{\phi}_{n+1}^{tri} = \{(\tilde{s}_{n+1,1}^{tri})^2 + (\tilde{s}_{n+1,2}^{tri})^2 + (\tilde{s}_{n+1,3}^{tri})^2\}^{1/2} - \sqrt{\frac{2}{3}} \{\tau_0 + K(\alpha_n)\}$$

EĞER $\tilde{\phi}_{n+1}^{tri} \leq 0$ **İSE**

Eşitle $(\bullet)_{n+1} = (\bullet)_{n+1}^{tri}$, **ÇIK.** (Elastik basamak)

DEĞİLSE

3.'e GİT 3. (Plastik düzeltim)

SORGU SONU

3. Plastikçarpamı bul, $\Delta\gamma^{(0)} = 0$

$$\Delta\gamma^{(k+1)} = \Delta\gamma^{(k)} - \frac{\delta^{(k)}}{(\partial_{\Delta\gamma} r_{1,n+1})^{(k)}} r_{1,n+1}^{(k)}$$

4. Efektif Kirchhoff gerilmesini düzelt,

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{n+1,A} &= \tilde{s}_{n+1,A}^{tri} - 2\mu \frac{\Delta\gamma}{(1-D_n)} \frac{\tilde{s}_{n+1,A}^{tri}}{\|\tilde{s}_{n+1}^{tri}\|} \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma \end{aligned}$$

5. Güncel hasarı bul $D_{n+1}^{(0)} = D_n$

$$\begin{aligned} Y^{d,+} &= \frac{1+\nu}{2E} (\langle \tilde{\tau}_{n+1,1} \rangle^2 + \langle \tilde{\tau}_{n+1,2} \rangle^2 + \langle \tilde{\tau}_{n+1,3} \rangle^2) - \frac{9\nu}{2E} \langle \tilde{p}_{n+1} \rangle^2 \\ D_{n+1}^{(m+1)} &= D_{n+1}^{(m)} - \frac{\delta^{(m)}}{(\partial_{D_{n+1}} r_{2,n+1})^{(m)}} r_{2,n+1}^{(m)} \end{aligned}$$

6. Homojenize *toplam* Kirchhoff gerilmelerini bul,

$$\tau_{n+1,A} = (1 - D_{n+1}) (\tilde{s}_{n+1,A} + \tilde{p}_{n+1})$$

7. Orta konfigürasyonu güncelle.

$$b_{n+1,A}^e = J^{\frac{2}{3}} \exp \left[\frac{\tilde{s}_{n+1,A}}{\mu} \right], \text{ öyle ki } \mathbf{b}_{n+1}^e = \sum_{A=1}^3 b_{n+1,A}^e \mathbf{m}_{n+1}^{tri,A}$$

0.3.5 Algoritmik Olarak Tutarlı Malzeme Tanjantı

Bu bölümde gerilmelerin logaritmik birim şekil değiştirmelere olan hasasiyetinin türetilmesine yer verilmektedir. Bu Newton-Raphson algoritmasının

ikinci dereceden yakınsamasını sağlamaktadır. Sürekli ortamlar mekaniğinde elde edilen malzeme tanjantı ile algoritmik malzeme tanjantı arasındaki fark için Simó ve Taylor [1985]'a bakılabilir.

Güncel elasto-plastik-hasar tanjantı şu şekilde tanımlanır, Simó [1992],

$$c_{ijkl} = 2 F_{iI} F_{jJ} F_{kK} F_{lL} \frac{\partial S_{IJ}}{\partial C_{KL}} \quad (129)$$

$t = t_{n+1}$ 'de gerilme tensörünün spektral ayrımı yapılırsa,

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \sum_{A=1}^3 \tau_{n+1, A} \mathbf{m}_{n+1}^{tri, A}, \quad \text{burada } \mathbf{m}_{n+1}^{tri, A} = \boldsymbol{\nu}^{tri, A} \otimes \boldsymbol{\nu}^{tri, A} \quad (130)$$

efektif gerilme tanımı ile birlikte homojenize gerilmeler $\boldsymbol{\tau}_{n+1} = (1 - D_{n+1}) \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}$ ile tanımlanır. Buna göre asal gerilme uzayında algoritmik malzeme tanjantı, \mathbf{c} , şu şekilde formüle edilir,

$$\mathbf{c} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e, tri}} = \sum_{A=1}^3 \sum_{B=1}^3 a_{n+1, AB}^{epd} \mathbf{m}_{n+1}^{tri, A} \otimes \mathbf{m}_{n+1}^{tri, B} + 2 \sum_{A=1}^3 \tau_{n+1, A} \hat{\mathbf{c}}_{n+1}^{tri, A} \quad (131)$$

Burada $\hat{\mathbf{c}}_{n+1}^{tri, A}$, spektral yönlerin rotasyonunu vermektedir ve malzemeye bağlı olmaksızın bir tek kere türetilmesi yeterlidir, Simó ve Taylor [1991] ve Simó [1992]. Denklem (131)'de, $a_{n+1, AB}^{epd}$, 3×3 'lük elasto-plastik-hasar algoritmik modülünün bileşenlerini ifade eder, ve şu şekilde tanımlanabilir,

$$a_{n+1, AB}^{epd} = \frac{\partial \tau_{n+1, A}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} \quad (132)$$

Etkin gerilme tanımı kullanılarak, denklem (132) yeniden düzenlenirse,

$$a_{n+1, AB}^{epd} = \frac{\partial [(1 - D_{n+1}) \tilde{\tau}_{n+1, A}]}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} \quad (133)$$

elde edilir. Deviyatorik ve hacimsel gerilme ayrımı kullanılarak,

$$\mathbf{a}_{n+1}^{epd} = \mathbf{a}_{n+1}^{epd, vol} + \mathbf{a}_{n+1}^{epd, dev} \quad (134)$$

bulunur. Aşağıdaki bileşenlerle beraber,

$$a_{n+1, AB}^{epd, vol} = (1 - D_{n+1}) H - H \ln[J_{n+1}] \frac{\partial D_{n+1}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} \quad (135)$$

sıradaki tanım elde edilir.

$$\begin{aligned} a_{n+1, AB}^{epd, dev} = & 2\mu \left\{ (1 - D_{n+1}) \delta_{AB}^{dev} \right. \\ & - n_{n+1, A} \left\{ \frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} + \frac{\Delta \gamma}{(1 - D_{n+1})} \frac{\partial D_{n+1}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} \right\} \\ & \left. - \Delta \gamma \frac{2\mu}{\|\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^{tri}\|} \left\{ \delta_{AB}^{dev} - n_{n+1, A} n_{n+1, B} \right\} \right\} - \tilde{s}_{n+1, A} \frac{\partial D_{n+1}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} \end{aligned} \quad (136)$$

Burada kullanılan tanımlar,

$$\delta_{AB}^{dev} = \delta_{AB} - \frac{1}{3} = \begin{cases} 2/3, & \text{if } A = B; \\ -1/3, & \text{else.} \end{cases} \quad (137)$$

ve

$$\sum_{C=1}^3 \epsilon_{n+1,C}^{tri} = \ln[J_{n+1}] \quad (138)$$

dır. $\partial\Delta\gamma/\partial\epsilon_{n+1,B}^{tri}$ ve $\partial D_{n+1}/\partial\epsilon_{n+1,B}^{tri}$, yapıları daha önce değinilen yerel tangentler kullanılarak bulunacaktır,

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial\Delta\gamma}{\partial\epsilon_{n+1,B}^{tri}} \\ \frac{\partial D_{n+1}}{\partial\epsilon_{n+1,B}^{tri}} \end{array} \right\} = -\frac{1}{\Delta_{n+1}} \begin{bmatrix} \partial_{D_{n+1}} r_{2,n+1} & -\partial_{D_{n+1}} r_{1,n+1} \\ -\partial_{\Delta\gamma} r_{2,n+1} & \partial_{\Delta\gamma} r_{1,n+1} \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial r_{1,n+1}}{\partial\epsilon_{n+1,B}^{tri}} \\ \frac{\partial r_{2,n+1}}{\partial\epsilon_{n+1,B}^{tri}} \end{array} \right\} \quad (139)$$

Hasarla eşlemesiz durumlarda, denklemler (135) ve (136) aşağıdaki biçime indirgenir,

$$a_{n+1,AB}^{epd, vol} = H \quad (140)$$

ve,

$$a_{n+1,AB}^{epd, dev} = 2\mu \left\{ \delta_{AB}^{dev} - n_{n+1,A} \frac{\partial\Delta\gamma}{\partial\epsilon_{n+1,B}^{tri}} - \Delta\gamma \frac{2\mu}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{tri}\|} \{ \delta_{AB}^{dev} - n_{n+1,A} n_{n+1,B} \} \right\} \quad (141)$$

elde edilir. Burada,

$$\frac{\partial\Delta\gamma}{\partial\epsilon_{n+1,B}^{tri}} = \frac{2\mu n_{n+1,B}}{\frac{2}{3} K''(\alpha_{n+1}) + 2\mu} \quad (142)$$

Elde edilen bu form, Simó [1992]'da sonlu plastisite için türetilen denklemlerle aynıdır.

0.4 Yapının Yerel Olmayan Eklentilerle Zenginleştirilmesi

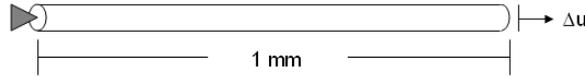
Malzemelerin yumuşama rejimlerinde sayısal modellenmeleri çeşitli zorluklara neden olmaktadır. Bu zorlukların başında çözümün tekil olmaması ve ağa bağlılığı başta sayılabilir. Bu davranışın sağaltımında lokal olmayan formülasyonlar gereklidir. Konu hakkındaki formüllerin sıralanmasından önce literatürde sıkça işlenen bir boyutlu (1B) bir problem irdelenecektir. Bu problemde küçük birim şekil değiştirmeler kabul edilmiş ve doğrusal yumuşayan

Tablo 1: 1B çekme altındaki bara ait malzeme parametreleri

Parametre	Sembol	Büyüklik	Birim
Elastisite modülü	E	20000.0	MPa
Poisson oranı	ν	0.3	-
Akma gerilmesi	σ_0	100.0	MPa
Pekleşme modülü	h	-1000.0	-

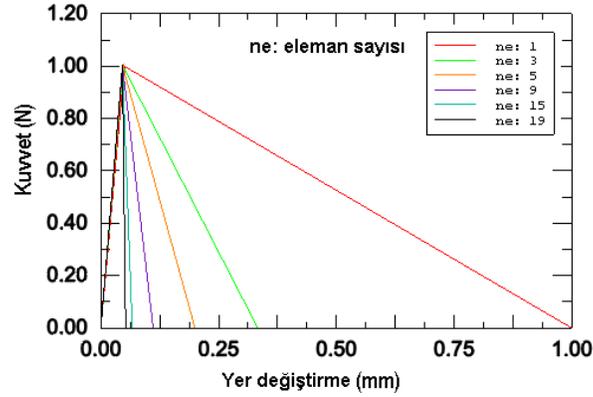
bir malzeme modeli seçilmiştir. Malzemeye ait parametreler Tablo 1'de verilmektedir.

Şekil 1'de verildiği gibi, 1.0 mm uzunluğunda bir bar sağ ucundan toplam 0.1 mm'lik bir deplasmanla çekilmektedir. Tam orta kesitte alan 0.001 mm^2 tanımlanırken diğer tüm yerlerde 0.0011 mm^2 'dir. Sistem, sırası ile 1, 3, 5, 9, 15 ve 19 sonlu elemana bölünmüş ve yük-yer değiştirme grafikleri çizilmiştir.



Şekil 1: 1B çubuk problem geometrisi ve sınır koşulları

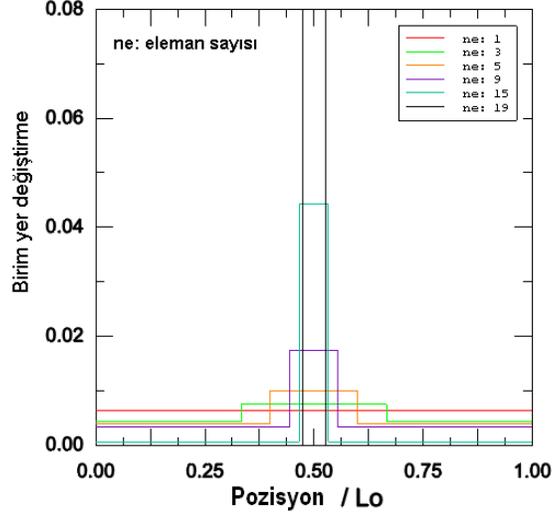
Şekil 2 göstermektedir ki, eleman sayısı arttıkça yük-yer değiştirme davranışı elastik yük boşaltmaya doğru bir seyir takip etmektedir. Bu çatallaşma çözümünün tekilliğini engeller.



Şekil 2: Ağa bağlı değişim gösteren yük-yer değiştirme diyagramları

Şekil 3, genlemelerin de ağa bağlı olarak, yakınsama gözetmeksizin, artan bir değerle merkezi elemana lokalize olduğunu göstermektedir.

Bu anomali viskoz düzenleme, yerel olmayan gradyen ve entegral metodlar gibi yöntemlerle sağaltılabilir. Visköz düzenlemenin en basit kullanımına



Şekil 3: Ağa bağlı yerleşmiş olan birim şekil değiştirmeler, $\Delta u=0.0064$ mm

örnek olarak Reckwerth ve Tsakmakis [2003] verilebilir. Bu çalışmada visko-plastisitenin hasar davranışını da düzenleyeceği ileri sürülmüştür. Bunu hem hasar hem de plastisite evrim denklemlerinin aynı çarpanla tayin edilmesine bağlayabiliriz. Viskoz düzenleme konusunda daha geniş bir çalışma için okur Wang et al. [1997]'ye yönlendirilmektedir.

Yerel olmayan metodlar temelde probleme yerleşme bölgesinin genişliğini de belirleyen bir uzunluk ölçütü katarlar. Yerel olmayan formülasyonların avantajı kabaca iki çeşittir, Jackiewicz ve Kuna [2003]. İlki fiziksel nedenlerden kaynaklanır. Bu sayede mikro-yapısal etkileşimler belirli bir etki alanı içerisinde sözkonusu olmaktadır. Termodinamiğin yerel formülasyonlarında, bir noktaya ait termodinamik durum sadece o noktaya ait içsel değişkenlere bağlanırken, yerel olmayan formlarda bahsi geçen etkileşimler bir anlamda hesaba katılabilmekte noktaya ait termodinamik veri çevresel noktalardan da etkilenmektedir. İkinci ve daha belirgin avantaj nümerik olandır. Ovalliğin kaybolması ile meydana gelen ağ bağılılığı ve yerleşme sorunları bu şekilde sağaltılır ve sayısal olarak anlamlı sonuçlar elde edilir. Yerel olmayan formlar integral ortalamalı ya da yüksek gradyenli olarak formüle edilebilir, Borino et al. [2003]. Her iki formun denkliği, Mediavilla [2005]'de gösterilmektedir. Bu çalışmada integral metod kullanılmıştır. Bu metod hasara ait artışın bir uzunluk ölçütü dahilinde yumuşatılmasına dayanır. Kullanılan algoritmik yapılar, Drabek ve Böhm [2005], Drabek ve Böhm [2006] ve Drabek [2005]'te detaylı olarak yer almaktadır.

0.4.1 Entegral Ortalama ile Düzenleme

Konu hakkında daha geniş bir uygulama için Bažant ve Jirásek [2002]'a başvurulabilir. Hali hazırdaki formlar Drabek [2005]'e dayanmaktadır. Orjinal uygulamalarında formlar Rousselier modeli için ABAQUS içine implement edilmiştir. Bu çalışmada ise aynı formlar MSC MARC içerisine farklı hasar modelleri esas alınarak adapte edilmektedir. Buna göre hasar artışının yerel olmayan bileşeni yerel artışın ortalama değeri ile bulunur,

$$\Delta D_{NL}(\mathbf{x}) = \frac{1}{W(\mathbf{x})} \int_V \Delta D_L(\mathbf{y}) w(\mathbf{x}, \mathbf{y}, L) dV \quad (143)$$

Burada $W(\mathbf{x})$ and $w(\mathbf{x}, \mathbf{y}, L)$ sırası ile normalizasyon faktörü ve yumuşatma fonksiyonudur. Ayrıca altsimgeler L ve NL sırası ile yerel ve yerel olmayan değişkenleri ifade eder. Yumuşatma fonksiyonu yerelleşme limitleyicisi gibi işler ve işlem alanını uzunluk ölçütü ile daha önceden belirlenmiş bir alana konsantre eder. Normalizasyon faktörü sırada verilen çekirdek fonksiyonla tanımını bulur,

$$W(\mathbf{x}) = \int_V w(\mathbf{x}, \mathbf{y}, L) dV \quad (144)$$

Bu fonksiyon için literatürde farklı formlar önerilmiştir. Bunlara örnek olarak *Gauss dağılımı* ve *çan eğrisi* verilebilir. Bu çalışmada bahsi geçen taban çalışmalarında kullanılan şu form kullanılacaktır,

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{y}, L) = \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{L} \right)^8} \right]^2 \quad (145)$$

Burada $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, \mathbf{x} ve \mathbf{y} ile ifade edilen iki nokta arasındaki vektörün Öklit normunu ifade eder. $2L$ içsel *uzunluk ölçütü*dür ve malzeme parametresi olarak geçer. Gauss formu şu şekilde verilir,

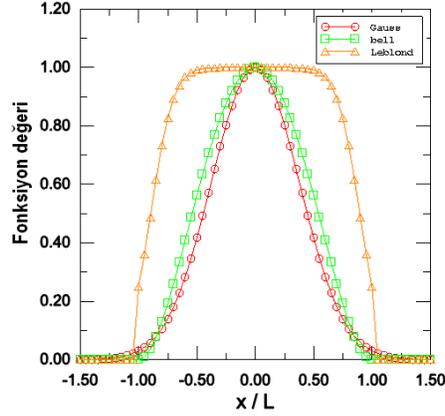
$$w(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ell) = \exp \left[-\frac{n_{dim} (\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)^2}{2\ell^2} \right], \quad n_{dim} = 1, 2, 3 \quad (146)$$

Burada ℓ Gauss dağılım parametresidir. Bu etki yarıçapı ile şu şekilde ilintilidir, Jirásek [2006].

$$\ell = \begin{cases} L/\sqrt{7}, & \text{eğer } n_{dim} = 1; \\ L/2, & \text{eğer } n_{dim} = 2; \\ L/\sqrt{3}, & \text{eğer } n_{dim} = 3. \end{cases} \quad (147)$$

Son olarak çan eğrisi fonksiyonu şöyledir

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{y}, L) = \left[1 - \frac{(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)^2}{L^2} \right]^2 \quad (148)$$



Şekil 4: Ağırlık fonksiyonlarının dağılımları

Etki alanı dışında bir etki gözlemlemek sözkonusu olmadığından tüm bu çekirdek fonksiyonların tanımları buna göre sınırlandırılır. Fonksiyonlara ait dağılımsal yapı Şekil 4'de verilmektedir.

3B uygulamada yerel olmayan ortalama çapı uzunluk ölçütü tarafından belirlenen belli bir küresel hacimde gerçekleştirilir. Buna göre anlamlı sonuçlar elde edebilmek ve metodu işler kılmak için sonlu elemanlar metodunda seçilen eleman boyutlarının uzunluk ölçütünden küçük olması ya da en azından azami bu ölçüde olması temin edilmelidir. Bu yapı altyordam olarak varolan çatıya eklenmiştir.

0.5 Uygulama Problemleri

Geliştirilen formülasyonlar ticari sonlu elemanlar programı MSC MARC için kullanıcı altyordamları şeklinde implement edilmiştir. Implement edilen kod kolayca yeni hasar modelleri ve plastisite denklemleri ile genişletilebilir haldedir. Seçilen simülasyonlarda karşılaştırılmaların yapılabilmesi adına ileriye çubuk akıtma dışında Lemaitre tipi model, ileriye çubuk akıtmada ise üç eksenli hasar modeli kullanılmıştır. Plastisite pekleşmesi için literatürde sıkça kullanılan satürasyon tipi pekleşme formu seçilmiştir.

Burada değinilmesi gereken hususlardan biri de geliştirilen altyordamın halihazırda bir çok eşleşmesiz kırılma kriterini de içerecek şekilde ele alındığıdır.

0.5.1 Eksenel Simetrik Çubuğun Boyun Vermesi

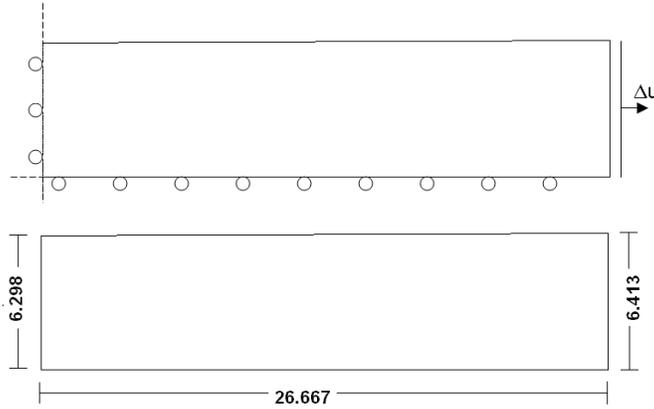
Model Tanımı ve Motivasyon

Bu ilk problem literatürde oldukça sık kullanılan ve dokümente edilmiş bir problemdir, Steinmann et al. [1994], Simó [1992]. Problemden kullanılan çubuğun

Tablo 2: Eksenel simetrik barın malzeme parametreleri

Parameter	Sembol	Değer	Birim
Sıkıştırılabilirlik modülü	H	164.206	GPa
Kayma modülü	μ	80.1938	GPa
Doğrusal pekleşme	K	0.12914	GPa
Satürasyon gerilmesi	K_∞	0.715	GPa
Akma gerilmesi	K_0	0.450	GPa
Satürasyon parametresi	δ	16.93	-
1. Hasar parametresi	a_0	0.0	-
2. Hasar parametresi	a_1	200.0	-
3. Hasar parametresi	a_2	0.0	-
4. Hasar parametresi	S	1.0	-
5. Hasar parametresi	q	0.0	-

toplam uzunluğu 53.334 yarıçapı ise 6.413'tür. Boyun vermeyi tetiklemek adına merkezi kesit alanı uçların %98.2'i kadar olacak şekilde doğrusal olarak alan azaltımına gidilmiştir. Bu sayede boyun vermenin her kesitte potansiyel olarak oluşabileceği bir çatallaşma problemi, limit yük problemine çevrilmiştir, Ibrahimbegović [1999]. Modellenen çeyreğin sınır koşulları ve model geometrisi Şekil 5'te verilmektedir.

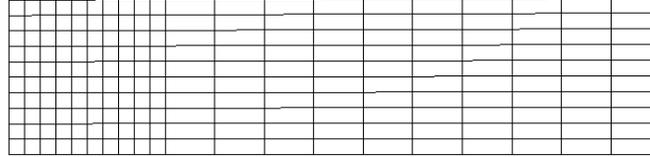


Şekil 5: Eksenel simetrik olarak modellenmiş çeyreğin sınır koşulları ve geometrisi

Kullanılan malzeme parametreleri Steinmann et al. [1994]'dan alınmıştır. Bunlar Tablo 2'de özetlenmektedir.

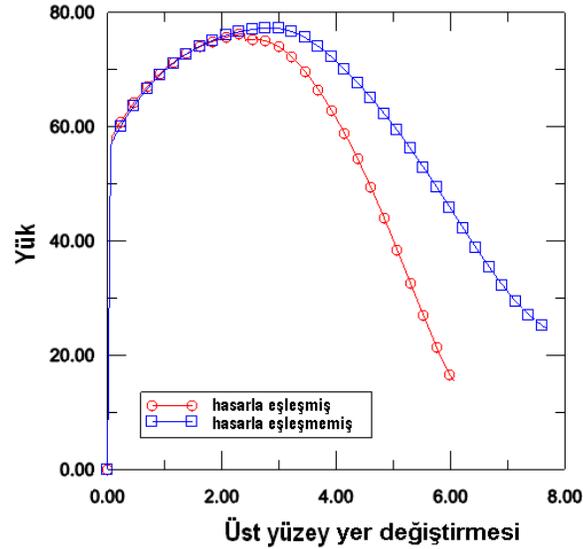
Sonuçlar

Problem hasarla eşleşmiş ve eşleşmemiş koşullarda 20×10 'luk (20 eleman uzunluk, 10 eleman ise yarıçap yönünde) Şekil 6'da görülen bir sonlu elemanlar ağı kullanılarak modellenmiştir.



Şekil 6: 20×10 eksenel simetrik ağı

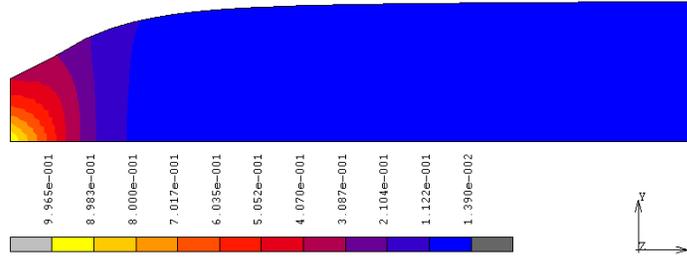
Şekil 7'da verilen yük-yer değiştirme eğrilerinden de görüleceği gibi hasarla eşleşmiş analizde yükleme daha keskin biçimde düşmektedir. Bu sonuçlar Steinmann et al. [1994] ile uyumludur. Üç eksenlilik etkisinin de barındırıldığı mevcut çalışmada hasarla eşleşmiş durum daha kritik sonuçlar doğurmaktadır.



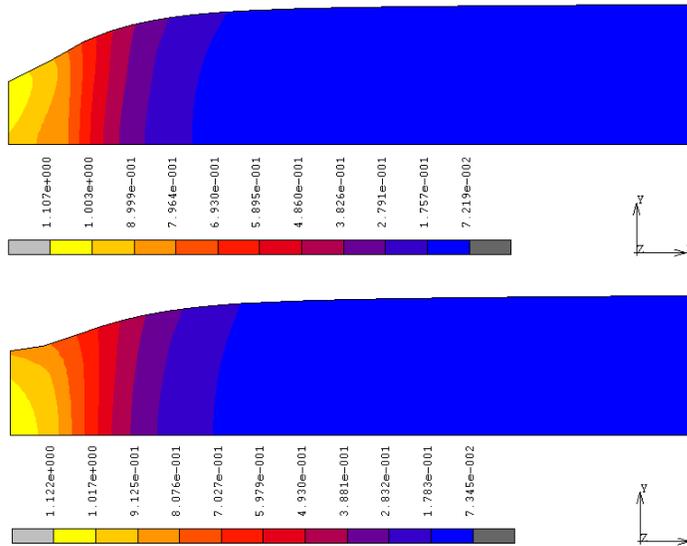
Şekil 7: Hasarla eşleşmiş ve eşleşmemiş analizler için yük-yer değiştirme eğrileri

Yerleşmiş hasar dağılımı Şekil 8'de yer almaktadır. Görüldüğü gibi bu yerleşmenin merkezi bir karakteri vardır ki bu deneysel verilerle uyum içerisindedir. Deneylerde sünek kırılmalar merkezden başlayan bir yapı izler.

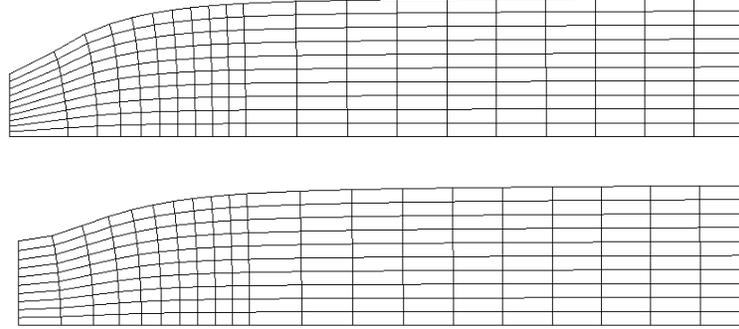
Hasarla eşlemeli ve eşlemesiz analizler için eşlenik plastik birim şekil değiştirme dağılımı Şekil 9'de verilmektedir. Steinmann et al. [1994]'dan

Şekil 8: Hasar dağılımı, $\Delta u=5.8752$

farklı olarak hasar ve eşlenik plastik birim şekil değiştirme dağılımları konumlandırmaları aynı yerlerde konsantre olmamaktadır. Bunun nedeninin üç eksenliliğe dayalı olan mevcut form olduğu açıktır. Üç eksenlilik hasar oluşumunu ivmelendirmektedir.

Şekil 9: Eşlenik plastik birim şekil değiştirme dağılımları, (üst) hasarla eşleşmiş model, (alt) hasarla eşleşmemiş model, $\Delta u=5.8752$

Deforme olmuş ağ yapısı da dikkate değer sonuçlardan biridir. Şekil 10'da verildiği gibi hasarlı analizde yarıçap şekil değiştirmesi ve incilmesi hasara dayalı zayıflama ile birlikte beklenildiği gibi daha fazladır.



Şekil 10: Deforme olmuş ağlar (üst) hasarla eşleşmiş model, (alt) hasarla eşleşmemiş model, $\Delta u=5.8752$

0.5.2 Düzlem Birim Şekil Değiştirmede Çekme ile Yerelleşme Problemi

Model Tanımı ve Motivasyon

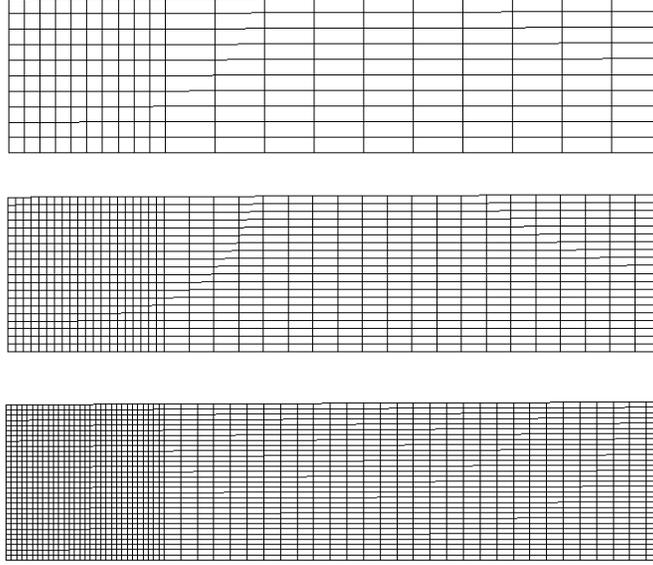
Bu örnek problem de Steinmann et al. [1994]'te bulunabilir. Düzlem birim şekil değiştirme koşullarında meydana gelen çekme testlerinde kayma bantlarının oluşumunu incelenmektedir. Test geometrisi aksenal simetrisinin düzlem simetriye dönüştürülmesi ile bir önceki problemin aynısıdır. Malzeme parametreleri Tablo 2'dekilerle aynıdır sadece pekleşme katsayısı, yani K , -0.012924 olarak alınacaktır. Problem Şekil 11'de görülen 20×10 , 40×20 ve 60×30 'luk ağlar için hasarla eşleşmiş ve eşleşmemiş durumlar için çözülmüştür.

Sonuçlar

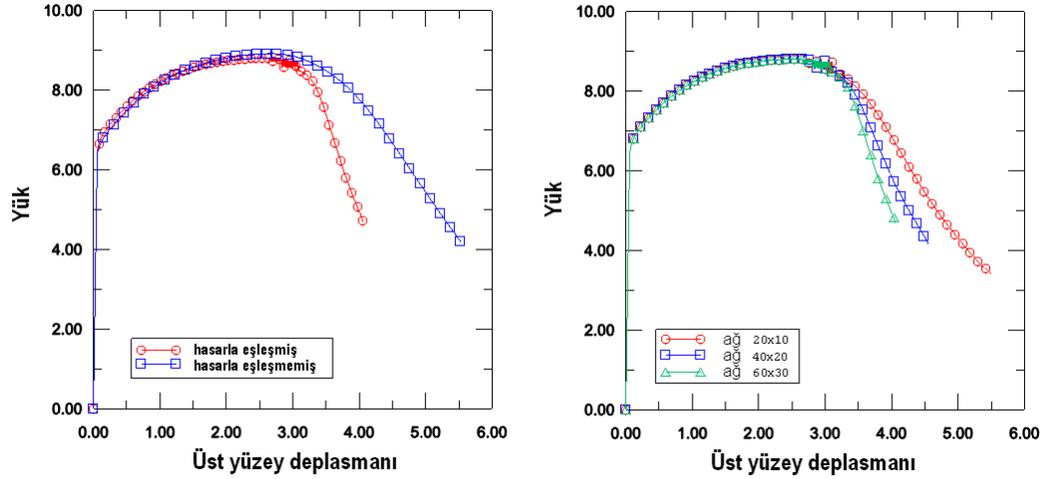
Şekil 12 (sol)'da verilen yük-yer değiştirme eğrileri de göstermektedir ki hasar eşleşmesinin yük taşıma kapasitesinde önemli bir zararı vardır. Aynı şeklin (sağ) kısmında hasarla eşleşmiş modelin farklı sıklıktaki ağlar için farklı yüklemeye-yer değiştirme eğrileri verdiği görülmektedir. Ağ yapısı sıklaştırıldıkça bu eğriler daha erken ve daha dik olarak düşüşe geçmekte, ağa duyarlılık açıkça sergilenmektedir.

Ağ sıklığının hasar ve eşlenik plastik birim şekil değiştirmelerin dağılımları üzerinde de hatırı sayılır bir etkisi vardır. Şekil 13 ve 14 bunu göstermektedir. Hem hasar hem de eşlenik plastik birim şekil değiştirme ağın sıklaştırılması ile ağ büyüklüğü ile orantılı daha dar bir kayma bandına sıkışmaktadır.

Şekil 15'de hasarlı ve hasarsız modeller için eşlenik plastik birim şekil değiştirme dağılımları verilmektedir. Hasarın kayma bandı oluşumuna katkısı bu şekillerden kolaylıkla görülebilmektedir. $\Delta u=3.840$ 'lık bir deformasyon için hasarlı analizde kayma bandı son derece belirginken hasarsız analizde henüz başlangıç sözkonusudur. Deformasyon yerelleşmesi hasar ile büyümesi Şekil 16'de belirgin biçimde gösterilmektedir.



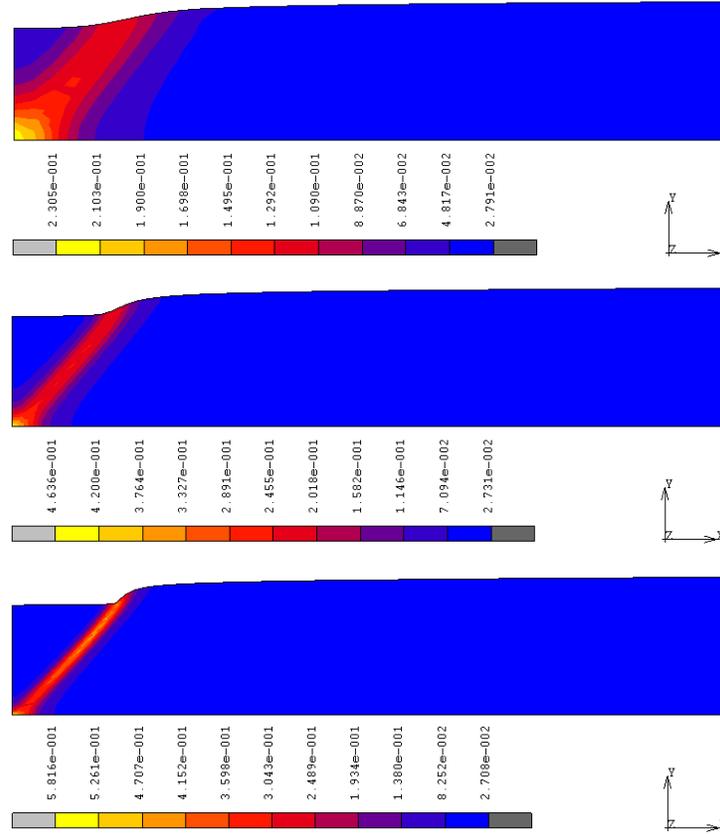
Şekil 11: Analiz edilen, (üst) 20x10, (orta) 40x20, (alt) 60x30



Şekil 12: Yük-yer değiştirme eğrileri, (sol) hasarla eşleşmiş ve eşleşmemiş sonuçlar (60x30), (sağ) hasarla eşleşmiş farklı ağı sonuçlar

0.5.3 Çentikli Eksenel Simetrik Parçanın Çekme Altındaki Davranışı

Problem geometrisi César de Sá et al. [2006] ve Vaz Jr. ve Owen [2001]'dan da bulunabilir. Mevcut çalışmada hasar modeli ve malzeme parametreleri farklıdır.

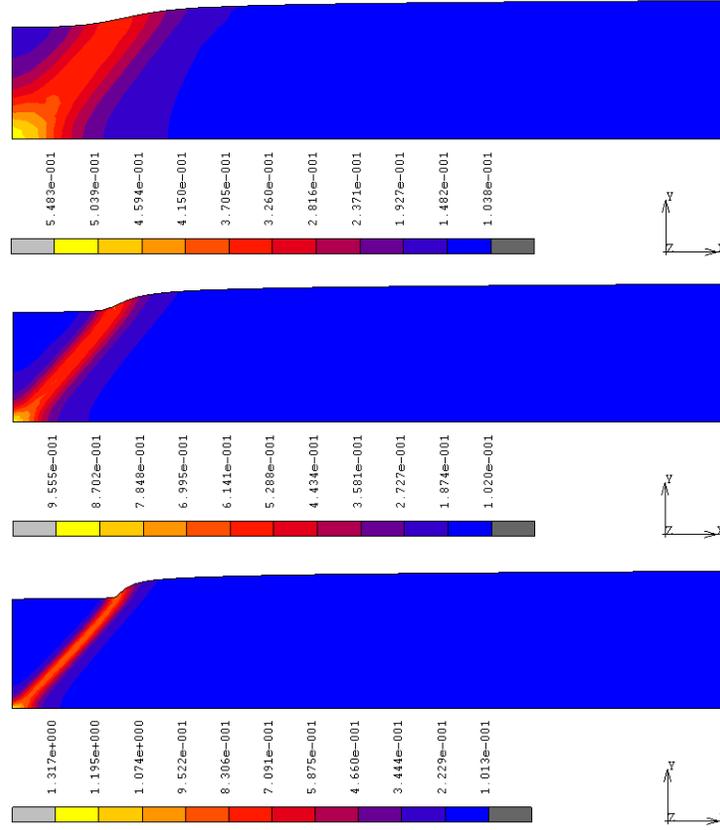


Şekil 13: Hasar dağılımları $\Delta u=3.840$, (üst) 20x10, (orta) 40x20, (alt) 60x30

Yine de hasar mekanizması ve dağılımları literatürle benzerlikler göstermektedir. Çentikli parçanın 3B geometrisi Şekil 17’de verilmektedir. Sınır koşulları ve yükleme açısından aksel simetrik düzlem problemine indirgenebilir. Şekil 18’da ilgili geometri ve sınır koşulları verilmektedir. Bu problemde yerel olmayan formülasyonlar da kullanılmıştır. yerel olmayan ortalamaların hesaplanmasında farklı sınır ve simetri koşullarının da değerlendirilmesi gerekmektedir. Şekil 19, bu koşullarda ele alınan etki alanlarını göstermektedir. Bu problemde yerel olmayan formülasyonlar da kullanılmış ve performansın tayini için Şekil 20’de verilen üç farklı sıklıkta ağ kullanılmıştır.

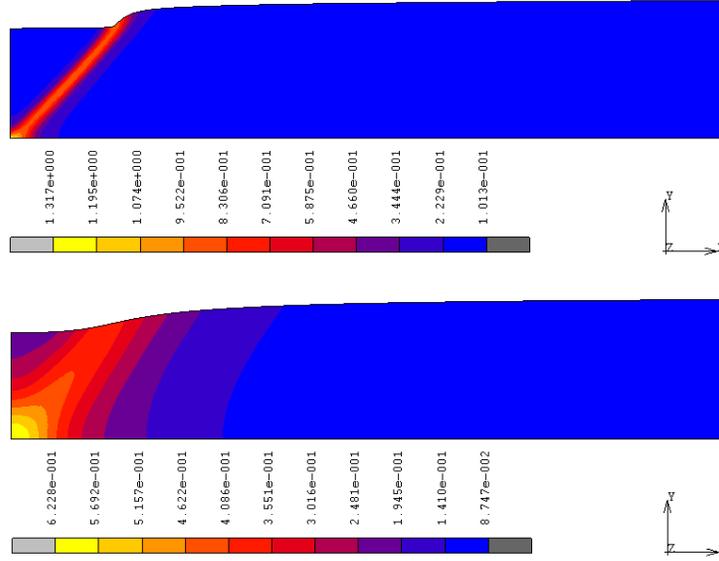
Sonuçlar

Hasar güzergahı literatürdeki ile aynıdır. Şekil 21’de de yerel olmayan formlar için verildiği gibi ilk olarak çentik yüzeyine konsantre olan hasar deformasyon etkisi ile merkezleşmektedir. Geliştirilen algoritmada, ortalamalar referans

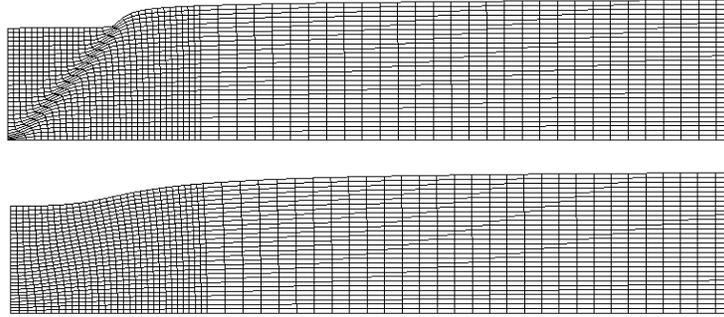


Şekil 14: Eşlenik plastik gerilme dağılımları $\Delta u=3.840$, (üst) 20x10, (orta) 40x20, (alt) 60x30

geometri üzerinden gerçekleştirilmektedir. Bu nedenle yüksek deformasyonlarda ağda meydana gelen bozulmalar sorun çıkarmamakta, yerel olmayan formun düzenleme performansı artmaktadır. Şekil 22’de bahsedilen ağ bozulmalarına yer verilmiştir. Şekil 23’de yerel olmayan formülasyonların yerelasyonu limite eden karakteri görülmektedir. Burada hasar evrimi çeşitli yüklem basamaklarında verilmektedir. Grafikte, x eksenini, ele alınan malzeme noktasının merkezi çizgi boyunca konumunun, seçilen uzunluk ölçütüne oranını vermektedir. yerel formlarda deformasyonla daha fazla yerel olan hasar yerel olmayan formülasyonda uzunluk ölçütüne bağlı bir alana hapsolmakta daha fazla yerel olmamaktadır. Aynı durum Şekil 24’de de bu defa yarıçap boyunca verilmektedir. Son olarak analizin son basamağında, yerel ve yerel olmayan formların merkezi hatta uzunluk boyunca hasar dağılımları üç ayrı ağ için Şekil 25’de verilmektedir. Görülmektedir ki yerel olmayan formlarda ağa duyarlılık son derece fazla olup ağın sıklaştırılması ile birlikte yerleşme bölgesinde prematür

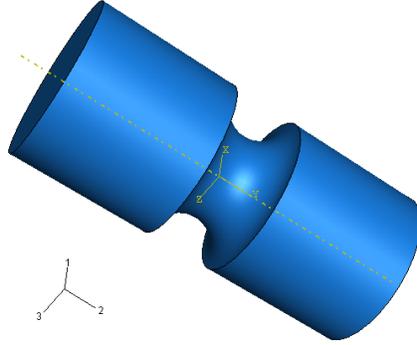


Şekil 15: Eşlenik plastik genleme dağılımları (60x30) $\Delta u=3.840$, (üst) hasarla eşleşmiş model, (alt) hasarla eşleşmemiş model

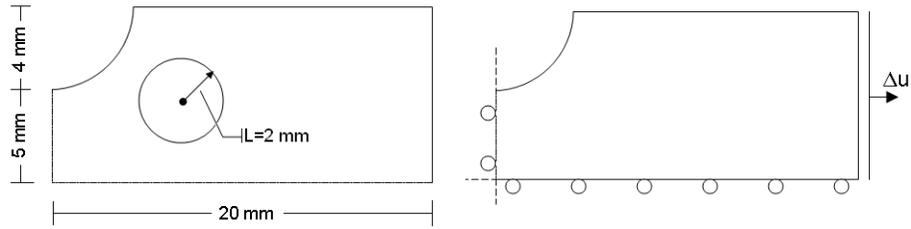


Şekil 16: Ağ deformasyonları (60x30) $\Delta u=3.840$, (üst) hasarla eşleşmiş model, (alt) hasarla eşleşmemiş model

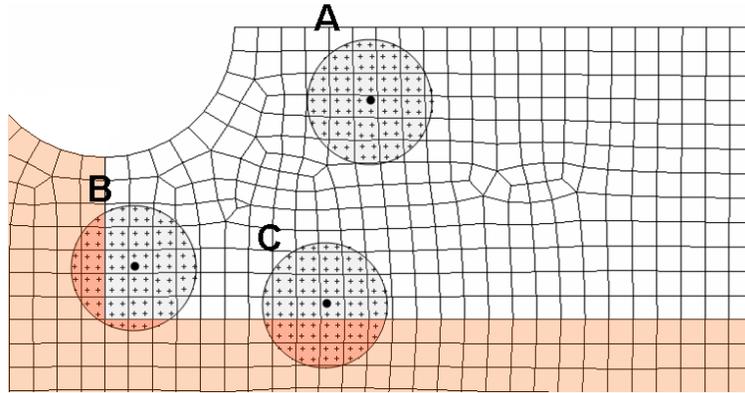
bir kırılmaya yönelik vardır. Şekil 26'da aynı grafiklerin yarıçap boyunca olan değişimleri görülebilir.



Şekil 17: Modelde işlenen çentikli geometrinin 3B çizimi



Şekil 18: Geometri ve sınır koşulları

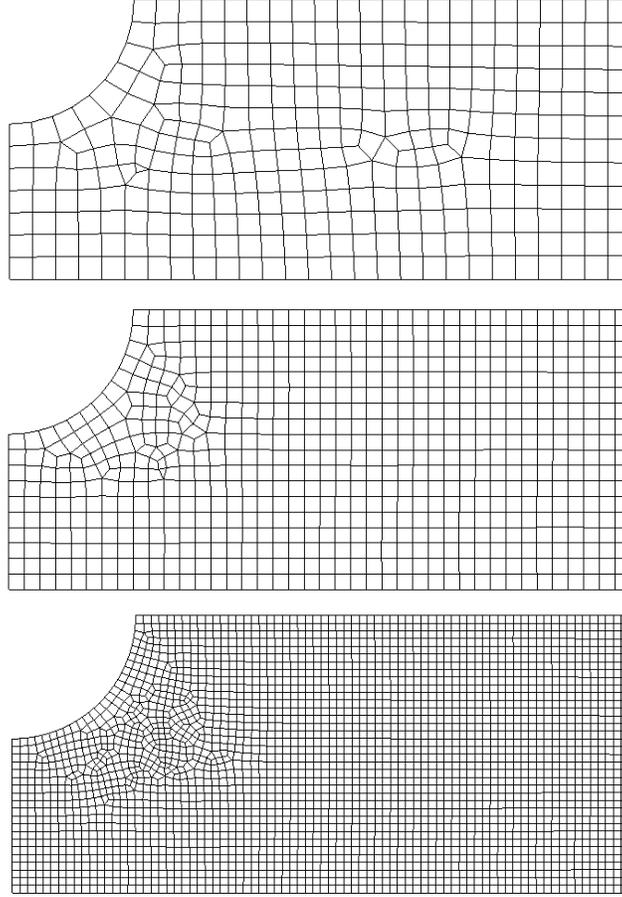


Şekil 19: yerel olmayan ortalamalarda kullanılan simetri koşulları

0.5.4 İleriye Çubuk Akıtma ve Sayısal Kırık Eldesi

Model Tanımı ve Motivasyon

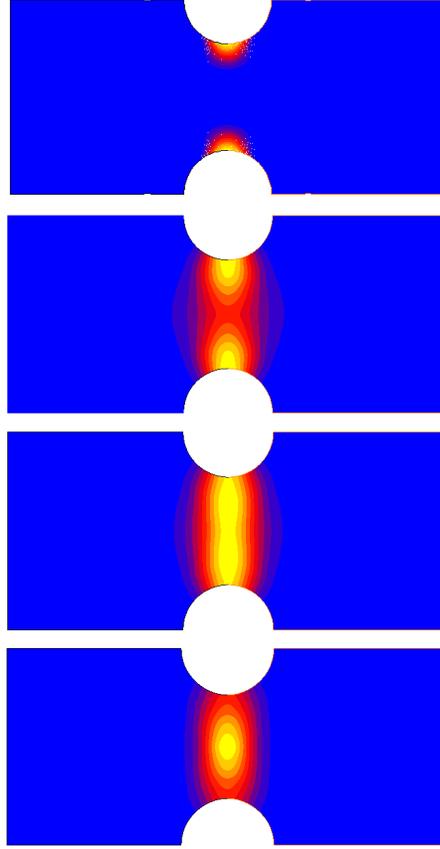
Eksenel simetrik ileriye çubuk akıtma bir alan küçültme işlemidir ve endüstride basitliği ve ekonomisi ile sıklıkla tercih edilmektedir. Malzeme sünekliği, kalıp



Şekil 20: Farklı eleman sayılarına sahip Model A, B ve C. (A. 326, B. 687 ve C.2754 elemanlıdır.)

açısı, sürtünme gibi işlem parametrelerine bağlı olarak yüzeysel ya da içsel kırıklar görülebilmektedir. Yüzeysel kırıklara yılan derisi ismi verilmekte, içsel kırıklara ise çevron kırıkları denmektedir. Bu tip makro-kırıkların sayısal modellenmesinde süreklilik koşulları ihlal edildiğinden çeşitli prosedürler ileri sürülmüştür. Bağ noktası ayırma ya da eleman silme bunlardan ikisidir. Bu metodlarda eleman silme halihazırdaki çalışmada kullanılmıştır ve bir eleman içindeki Gauss noktalarının hasar değerleri ortalaması kritik hasar değerine ulaşınca eleman analiz dışına çıkartılmıştır. MSC MARC bu işlemi desteklemektedir.

İleriye çubuk akıtma kırıkları ile ilgili çalışmalar Avitzur [1968]'un analitik çalışmalarına kadar uzanır. Sonlu elemanlarla işlemde hasar tayini bir çok kişi tarafından çalışılmıştır. Bunlar arasında mikro-mekanik bir hasar modeli kul-

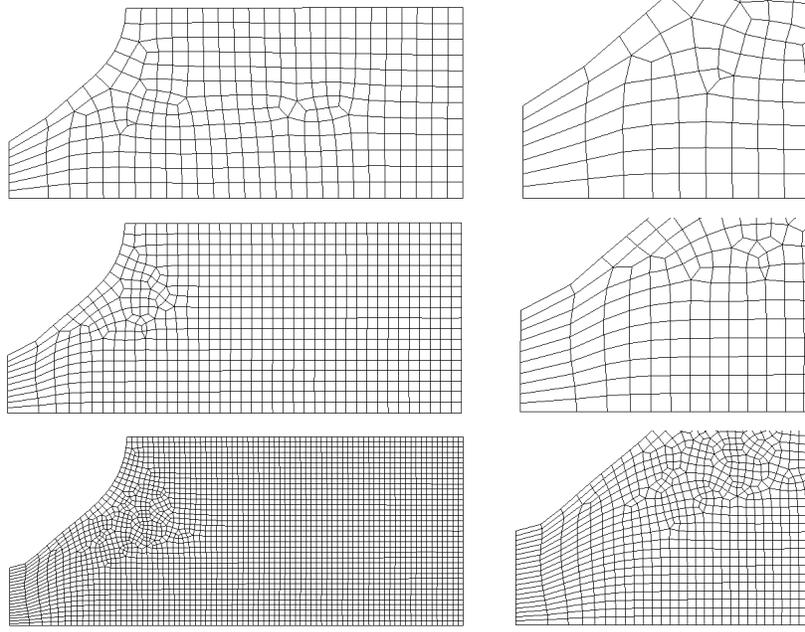


Şekil 21: Model C, Hasar dağılımları, analiz basamağı 8, 20, 45 ve 90, yerel olmayan Model

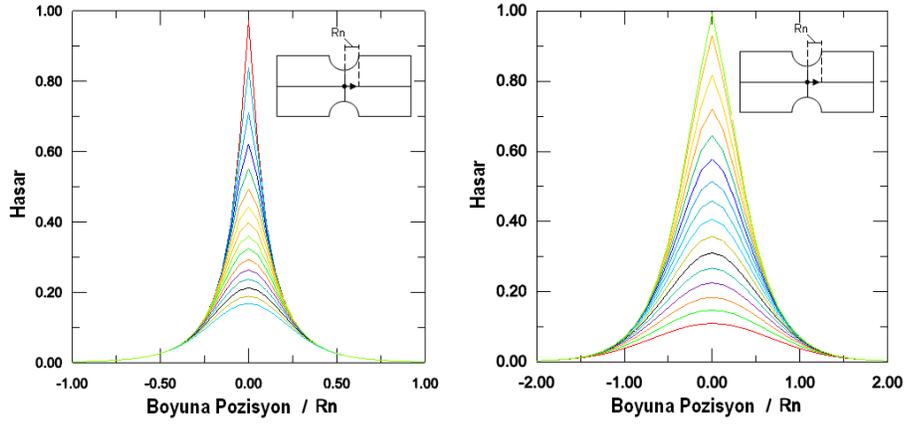
lanan Aravas [1986] kırıkları elde etme peşine düşmez, ama işlemin kinematik ve kinetik etkilerini ortaya sermiştir. Temel olarak işlem, basınçlı bir işlem gibi algılandığında, alan indirgeme bölgesinde çekme gerilmeleri oluşmakta ve kırıklar buna göre şekillenmektedir. Komori [1999, 2003] bağ noktası ayırma metodu ile kırık oluşumunu inceler ve mikromekanik modellerin yanı sıra kırılma kriterlerini de kullanır.

Bu problemde, 16.15 mm'lik bir yarıçap, 15.30 mm'ye indirilmektedir. Süreksiz temas normallerinin iraksamaya yol açmaması için, kalıbı ifade eden doğruların birleştiği köşelerde 0.5 mm çaplı yumuşatmalara gidilmiştir. 30 derecelik bir kalıp açısı alınmıştır. Seçilen geometride literatürde *Chrysler Çevronsuz Üretim Eğrileri* olarak bilinen ve alan indirgeme oranı-kalıp açısı düzlemini emniyetli ve emniyetsiz olarak bölen eğrisinden faydalanılmış olumsuz koşulların temsili bakımından merkezi kırıkları veren ölçüler seçilmiştir.

Kullanılan hasar modeli üç eksenelliğe bağlı hasar modelidir ve tüm diğer

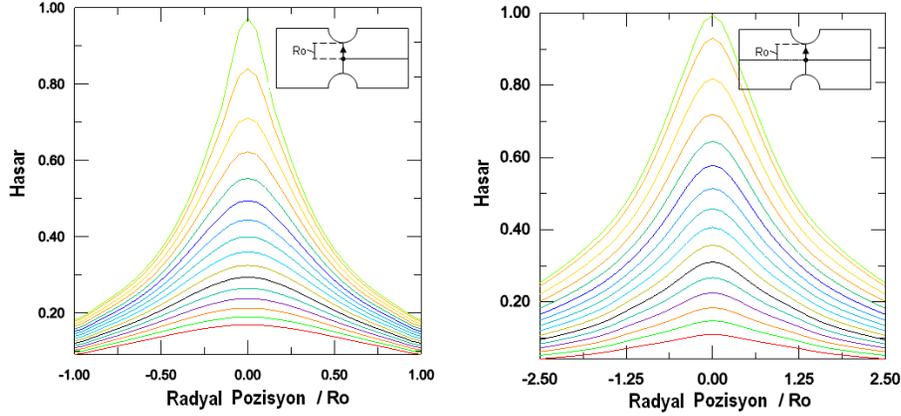


Şekil 22: Model A, B ve C'de meydana gelen eleman deformasyonları

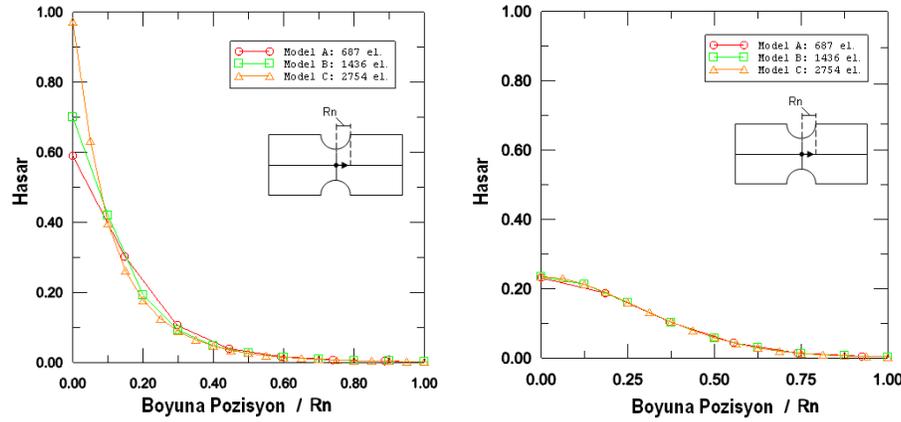


Şekil 23: Merkezi hatta uzunluk boyunca hasar evrimi Model C, a. yerel formülasyon, b. yerel olmayan formülasyon.

problemlerin aksine basamaklı çözüm algoritması takip edilmiştir. Seçilen malzeme parametrelerinden sıfır olmayanlar şunlardır, akma gerilmesi 150 MPa , pekleşme katsayısı 250 MPa ve elastisite katsayısı 210 GPa . Hasar parametrelerinden ise a_1 ve S sırası ile, 25 ve 1 değerleri ile kullanılmıştır.



Şekil 24: Merkezi hatta yarıçap boyunca hasar evrimi Model C, a. yerel formülasyon, b. yerel olmayan formülasyon.

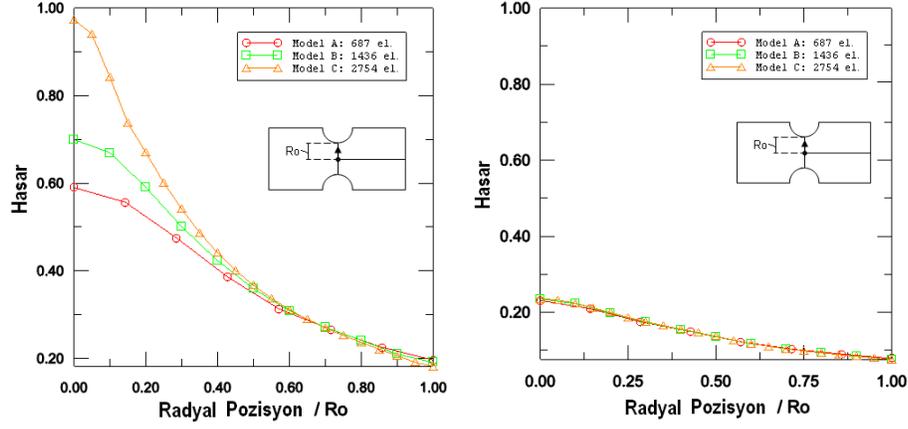


Şekil 25: Merkezi hatta uzunluk boyunca hasar dağılımları, Model A, B ve C, a. yerel formülasyon, b. yerel olmayan formülasyon.

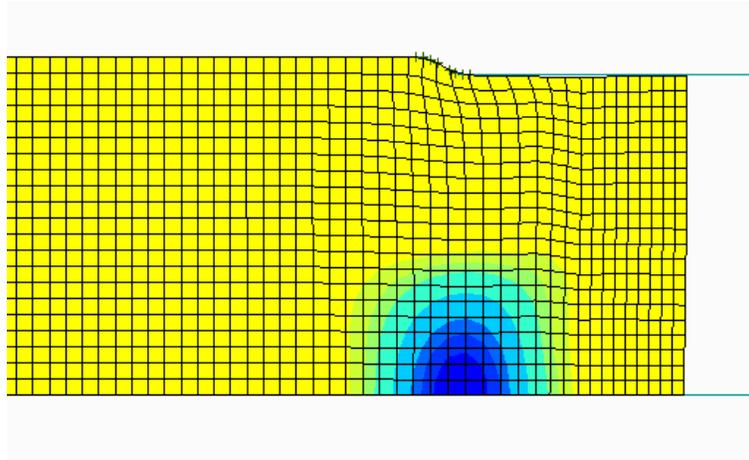
Sonuçlar

Merkezde başlayan ve ilk kırığı tetikleyecek olan üç eksenelliğe dayalı hasar birikimi Şekil 27'te verilmektedir. Daha önce de değinildiği gibi, işlemin bütünü basınç içeren bir işlem gibi algılandığında alan indirgeme bölgesi boyunca hasara sebebiyet veren pozitif hidrostatik basınç etkisi altındaki plastik akma mekanizması görülmektedir.

Kırıkların periyodik oluşumu çevron kırıklarına özgü durumlardan biridir ve Şekil 28'de görülmektedir. Bu periyodiklik temel olarak oluşan serbest yüzeylerdeki yük boşaltımı ve bunu takip eden merkezi hasar ve akma birikimleridir. Kırıklarla birlikte oluşan hasar ve eşlenik plastik birim şekil değiştirme

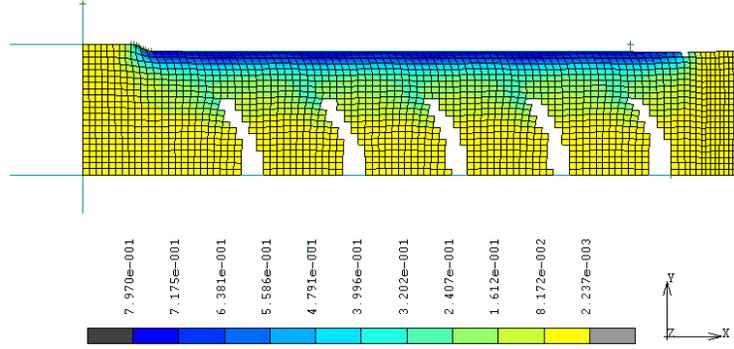


Şekil 26: Merkezi hatta yarıçap boyunca hasar dağılımları, Model A, B ve C, a. yerel formülasyon, b. yerel olmayan formülasyon.



Şekil 27: İlk çevron oluşumunu tetikleyen hasar birikimi

dağılımları, Şekil 29 ve 30'da verilmektedir. Değinilmesi gereken konulardan biri de, çözümün ağa duyarlı olmasıdır. Bu konudaki çalışmalarımız devam etmektedir.



Şekil 30: Kırıklı yapıdaki eşlenik plastik birim şekil değiştirme dağılımı

eklemlenebileceği anlamına gelir. Bunlardan örnek olarak üç hasar modeli formülasyonu sabit bir fonksiyon üzerinden parametrik farklarla sunulmuştur.

Geliştirilen model MSC MARC kullanıcı altyordamı olarak kodlanmıştır. Bunu yanısıra program içerisine bir grup kırılma kriteri de ileride araştırma kolaylığı teşkil etmesi bakımından kodlanmıştır. Kodlanan altyordamlar simülasyonlarda test edilmiştir. Bu test problemlerinde görülmüştür ki model etkin ve sayısal olarak verimli biçimde çalışmaktadır. Uygulanan yerel olmayan formlar da ağ etkisini azaltacak ve yerelleşmeyi minimize edecek biçimde çalışmaktadır.

İleriye dönük araştırma konuları şu şekilde planlanmaktadır. İmplemente edilen izotropik yapı kolaylıkla anizotropik etkileri de içerecek şekilde genişletilebilecek haldedir. Bu yüzden etkin konfigürasyonların tanımı ile anizotropik modellemeler hedeflenmektedir. Bunu yanısıra malzeme parametrelerinin tayini ile ilgili çalışmalar yapılacaktır. Darmstadt Teknik Üniversitesi'nde gerçekleştirilen dönel dövme deneylerinin analizleri, eldeki ısı-ışlemeli hasar modeli ile tekrarlanacaktır ve burda da merkezi kırıklar araştırılacaktır. Şu aşamaya kadar bu testlerin sadece Gurson Tvergaard Needleman mikro mekanik modeli ile analizine gidilmiştir.

Bunun yanısıra kodlara implemente edilen kırılma kriterlerinin farklı metal işlemleri için karşılaştırmalı analizlerinin yapılması da yeni araştırma konuları arasına eklenebilir.

Ek A. Üstel Transformasyon Algoritmasının Türetimi

y 'nin zamanın bir fonksiyonu olduğunu kabul edersek, standart formda doğrusal bir diferansiyel denklemi şu şekilde tanımlayabiliriz,

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t) \quad (149)$$

Bunu $t = 0$ için $q(t) = 0$ ile bir ilk değer problemi olarak tanımlarsak,

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0, \quad \text{where } y(0) = y^{tri} \quad (150)$$

Diferansiyel denklemin çözümü integrasyon çarpanı olarak, $\exp[\int p(t)dt]$ uygulanarak bulunabilir. Buna göre denklemin her iki yanını da bununla çarparak,

$$\begin{aligned} 0 &= \exp\left[\int p(t)dt\right] \frac{dy}{dt} + \exp\left[\int p(t)dt\right] p(t)y \\ &= \exp\left[\int p(t)dt\right] \frac{dy}{dt} + \frac{d}{dt} \left[\exp\left[\int p(t)dt\right] \right] y \\ &= \frac{d}{dt} \left[\exp\left[\int p(t)dt\right] y \right] \end{aligned} \quad (151)$$

ve her iki tarafı da integre edersek,

$$\exp\left[\int p(t)dt\right] y = C \quad (152)$$

Burada C integrasyon sabitidir ve şöyle bulunur,

$$\exp\left[\int_0^t p(t)dt\right] y(t) = C \quad (153)$$

$t = 0$ için $y(0) = y^{tri}$ eşitliği yerine konularak,

$$\begin{aligned} C &= \exp\left[\int_0^0 p(t)dt\right] y(0) \\ &= \exp[0] y^{tri} \\ &= y^{tri} \end{aligned} \quad (154)$$

Bu formu denklem 152'e yerleştirirsek,

$$y(t) = \exp\left[-\int p(t)dt\right] y^{tri} \quad (155)$$

Tipik bir Δt zaman aralığı için, $\int p(t)dt \approx p(t)\Delta t$ tanımını kullanarak,

$$y(\Delta t) = \exp[-p(t)\Delta t] y^{tri} \quad (156)$$

sonuca ulaşılır.

Ek B. Algoritmik Malzeme Tanjantı Türetimi

Bu bölümde tutarlı elasto-plastik-hasar için gerekli tutarlı malzeme tanjantı türetimine yer verilecektir. İlk olarak deviyatorik ve hacimsel ayırım yapılarak,

$$a_{n+1, AB}^{epd, vol} = \frac{\partial[(1 - D_{n+1}) \tilde{p}_{n+1}]}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} \quad (157)$$

ve

$$a_{n+1, AB}^{epd, dev} = \frac{\partial[(1 - D_{n+1}) \tilde{s}_{n+1, A}]}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} \quad (158)$$

bulunur. Bu formu denklem (157)'te yerine koyarsak,

$$\tilde{p}_{n+1} = H \sum_{C=1}^3 \epsilon_{n+1, C}^{tri} \quad (159)$$

aşağıdaki denkleme ulaşırız

$$\frac{\partial \tilde{p}_{n+1}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} = H \quad (160)$$

Burada

$$\frac{\partial \sum_{C=1}^3 \epsilon_{n+1, C}^{tri}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} = 1 \quad (161)$$

Deviyatorik kısım için,

$$a_{n+1, AB}^{epd, dev} = (1 - D_{n+1}) \frac{\partial \tilde{s}_{n+1, A}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} - \tilde{s}_{n+1, A} \frac{\partial D_{n+1}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} \quad (162)$$

aşağıdaki denklemlerin türetimi gereklidir,

$$\frac{\partial \tilde{s}_{n+1, A}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} = \frac{\partial \{ \tilde{s}_{n+1, A} - 2\mu \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} n_{n+1, A} \}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} \quad (163)$$

Aşağıdaki ayrımlar yapılarak,

$$\frac{\partial \tilde{s}_{n+1, A}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} = \frac{\partial \tilde{s}_{n+1, A}^{tri}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} - 2\mu \frac{\partial \{ \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} n_{n+1, A} \}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} \quad (164)$$

eşitliğin sağındaki ilk ifade şöyle çözülebilir,

$$\frac{\partial \tilde{s}_{n+1, A}^{tri}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} = 2\mu \delta_{AB}^{dev} \quad (165)$$

burada $\delta_{AB}^{dev} = \delta_{AB} - \frac{1}{3}$. İkinci ifadeye gelirsek,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left\{ \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} n_{n+1, A} \right\}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} &= \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} \frac{1}{(1-D_{n+1})} n_{n+1, A} \\ &+ \Delta\gamma \frac{1}{(1-D_{n+1})^2} \frac{\partial D_{n+1}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} n_{n+1, A} \\ &+ \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} \frac{\partial n_{n+1, A}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} \end{aligned} \quad (166)$$

Sıradaki özelliği kullanarak,

$$\sum_{C=1}^3 n_{n+1, C} = 0 \quad (167)$$

aşağıdaki denklem elde edilebilir,

$$\frac{\partial n_{n+1, A}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} = \frac{2\mu}{\|\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^{tri}\|} \{ \delta_{AB}^{dev} - n_{n+1, A} n_{n+1, B} \} \quad (168)$$

Sonuçları birleştirerek,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{s}_{n+1, A}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} &= 2\mu \delta_{AB}^{dev} - 2\mu \left\{ \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} \frac{1}{(1-D_{n+1})} n_{n+1, A} \right. \\ &+ \Delta\gamma \frac{1}{(1-D_{n+1})^2} \frac{\partial D_{n+1}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} n_{n+1, A} \\ &\left. + \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} \frac{2\mu}{\|\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^{tri}\|} [\delta_{AB}^{dev} - n_{n+1, A} n_{n+1, B}] \right\} \end{aligned} \quad (169)$$

Burada $\partial \Delta\gamma / \partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}$ ve $\partial D_{n+1} / \partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}$ terimleri yerel tanjantlar kullanılarak bulunacaktır.

Ek C. Yerel Tanjant Türetmeleri

Eşzamanlı integrasyon esas alınarak,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} \\ \frac{\partial D_{n+1}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} \end{array} \right\} = \frac{1}{\Delta_{n+1}} \left[\begin{array}{cc} \partial_{D_{n+1}} r_{2, n+1} & -\partial_{D_{n+1}} r_{1, n+1} \\ -\partial_{\Delta\gamma} r_{2, n+1} & \partial_{\Delta\gamma} r_{1, n+1} \end{array} \right] \bullet \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial r_{1, n+1}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} \\ \frac{\partial r_{2, n+1}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} \end{array} \right\} \quad (170)$$

elde edilir,

$$\frac{\partial r_{1, n+1}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} = -2\mu n_{n+1, B} \quad (171)$$

ve

$$\frac{\partial r_{1, n+1}}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} = -\frac{\partial \|\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^{tri}\|}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}}, \quad \text{where} \quad \frac{\partial \|\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^{tri}\|}{\partial \epsilon_{n+1, B}^{tri}} = 2\mu n_{n+1, B} \quad (172)$$

Sıradaki denklemin türetimi tamamıyla seçilen hasar fonksiyonunun şekline bağlıdır,

$$\frac{\partial r_{2,n+1}}{\partial \epsilon_{n+1,B}^{tri}} = -\Delta\gamma \frac{\partial g_{n+1}}{\partial \epsilon_{n+1,B}^{tri}} \quad (173)$$

Bu çalışmada seçilen kuvvet tipi fonksiyonla,

$$g'_{n+1}(D_{n+1}, Y_{n+1}^+) = S(a_1 + a_2 D_{n+1}) \frac{(Y_{n+1}^+)^{S-1}}{(1 - D_{n+1})^q} \quad (174)$$

ki burda $g' = \partial_{Y_{n+1}^+} g$. Zincir kuralı ile şu sonuçlar elde edilir.

$$\frac{\partial g_{n+1}}{\partial(\bullet)} = g'_{n+1} \frac{\partial Y_{n+1}^+}{\partial(\bullet)} \quad (175)$$

burada (\bullet) , $\epsilon_{n+1,B}^{tri}$, $\Delta\gamma$ ya da D_{n+1} 'dan birini ifade etmektedir.

Ek D. Seçilen Özel Hasar Fonksiyonunun Türetimi

Sırada yalnızca Lemaitre tipi hasar modeli için yapılan türetimlere yer verilmektedir. Buna göre,

$$Y_{n+1}^+ = \frac{1 + \nu}{2E} (\langle \tilde{\tau}_{n+1,1} \rangle^2 + \langle \tilde{\tau}_{n+1,2} \rangle^2 + \langle \tilde{\tau}_{n+1,3} \rangle^2) - \frac{9\nu}{2E} \langle \tilde{p}_{n+1} \rangle^2 \quad (176)$$

burada $\tilde{p}_{n+1} = (\tilde{\tau}_{n+1,1} + \tilde{\tau}_{n+1,2} + \tilde{\tau}_{n+1,3})/3$. Aşağıdakilerin hesaplanmasında,

$$\frac{\partial Y_{n+1}^+}{\partial \epsilon_{n+1,B}^{tri}}, \quad \frac{\partial Y_{n+1}^+}{\partial \Delta\gamma}, \quad \frac{\partial Y_{n+1}^+}{\partial D_{n+1}} \quad (177)$$

sırada verilen zincir kuralı uygulanacaktır,

$$\frac{\partial Y_{n+1}^+}{\partial(\bullet)} = \sum_{A=1}^3 \frac{\partial Y_{n+1}^+}{\partial \tilde{\tau}_{n+1,A}} \frac{\partial \tilde{\tau}_{n+1,A}}{\partial(\bullet)} \quad (178)$$

ki burada,

$$\frac{\partial Y_{n+1}^+}{\partial \tilde{\tau}_{n+1,A}} = \frac{1 + \nu}{E} \langle \tilde{\tau}_{n+1,A} \rangle - \frac{3\nu}{E} \langle \tilde{p} \rangle \quad (179)$$

böylece türetimler tamamlanır.

Kaynaklar

- Abu Al-Rub, R. K.; Voyiadjis, G. Z., On the coupling of anisotropic damage and plasticity models for ductile materials, *International Journal of Solids and Structures*, **40**, 2611–2643, (2003).
- Andrade Pires; F. M., de Souza Neto, E. A.; Owen, D. R. J., On the finite element prediction of damage growth and fracture initiation in finitely deforming ductile materials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **193**, 5223–5256, (2004).
- Aravas, N., The analysis of void growth that leads to central bursts during extrusion, *Journal of Engineering for Ind*, **34**, 55–79, (1986).
- Asaro, R. J., Micromechanics of crystals and polycrystals, *Advances in Applied Mechanics*, **23**, 1–115, (1983).
- Auricchio, F.; Taylor, R. L., A return-map algorithm of general associative isotropic elastoplastic materials in large deformation regimes, *International Journal of Plasticity*, **15**, 1359–1378, (1999).
- Avitzur, B., Analysis of central bursting defects in extrusion and wire drawing, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, **90**, 79–91, (1968).
- Bakhshi-Jooybari, M., A theoretical and experimental study of friction in metal forming by the use of the forward extrusion process, *Journal of Materials Processing Technology*, **125-126**, 369–374, (2002).
- Bažant, Z.; Jirásek, M., Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: Survey of progress, *Journal of Engineering Mechanics*, **11**, 1119–1149, (2002).
- Bellenger, E.; Bussy, P., Plastic and viscoplastic damage models with numerical treatment for metal forming processes, *Journal of Materials Processing Technology*, **80-81**, 591–596, (1998).
- Berski, S.; Dyja, H.; Banaszek, G.; Janik, M., Theoretical analysis of bimetallic rods extrusion process in double reduction die, *Journal of Materials Processing Technology*, **153-154**, 583–588, (2004).

- Bielski, J.; Skrzypek, J. J.; Kuna-Ciskal, H., Implementation of a model of coupled elastic-plastic unilateral damage material to finite element code, *International Journal of Damage Mechanics*, **15**, 5–39, (2006).
- Bonora, N., A nonlinear CDM model for ductile failure, *Engineering Fracture Mechanics*, **58**, 11–28, (1997).
- Bonora, N.; Gentile, D.; Pironi, A.; Newaz, G., Ductile damage evolution under triaxial state of stress: theory and experiments, *International Journal of Plasticity*, **21**, 981–1007, (2005).
- Borino, G.; Failla, B.; Parinello, F., A symmetric nonlocal damage theory, *International Journal of Solids and Structures*, **40**, 3621–3645, (2003).
- Borja, R. I.; Sama, K. M.; Sanz, P. F., On the numerical integration of three-invariant elastoplastic constitutive models, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **192**, 1227–1258, (2003).
- de Borst, R.; Mühlhaus, L. J.; Pamin, J. H. -B., Fundamental issues in finite element analyses of localization deformation, *Engineering Computation*, **10**, 99–121, (1999).
- Brozzo, P.; Deluca, B.; Rendina, R., *A new method for the prediction of formability limits in metal sheets, sheet metal forming and formability Proceedings of the Seventh Biannual Conference of the International Deep Drawing Research Group*, (1972).
- Brüning, M., An anisotropic ductile damage model based on irreversible thermodynamics, *International Journal of Plasticity*, **19**, 1679–1713, (2003).
- Brüning, M., Nonlocal continuum theory of anisotropically damaged metals, *International Journal of Plasticity*, **19**, 1679–1713, (2003).
- Camacho, A. M.; González, C.; Rubio, E. M.; Sebastián, M. A., Influence of geometrical conditions on central burst appearance in axisymmetric drawing processes, *Journal of Materials Processing Technology*, **177**, 304–306, (2006).
- Ceretti, E.; Taupin, E.; Altan, T., Simulation of metal flow and fracture applications in orthogonal cutting, blanking, and cold extrusion, *Annals of the CIRP*, **46**, 187–190, (1997).
- César de Sá, J. M. A.; Areias, P. M. A.; Zheng, C., Damage modelling in metal forming problems using an implicit non-local gradient model, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **195**, 6646–6660, (2006).
- Chaboche, J. L., Bölüm 2.04, Damage Mechanics, *Comprehensive Structural Integrity*, Elsevier Ltd., (2003), Pp: 213–284.
- Chen, C. C.; Oh, S. I.; Kobayashi, S., Ductile fracture in axisymmetric extrusion and drawing, *J. Eng. Ind.*, **101**, 13–35, (1979).

- Chen, D.; Syu, S.; Wu, C.; Lin, S., Investigation into cold extrusion of aluminum billets using three-dimensional finite element method, *Journal of Materials Processing Technology*, **192-193**, 188–193, (2007).
- Cherouat, A.; Saanouni, K.; Hammi, Y., Numerical improvement of thin tubes hydroforming with respect to ductile damage, *International Journal of Mechanical Sciences*, **44**, 2427–2446, (2002).
- Cherouat, A.; Saanouni, K.; Hammi, Y., Improvement of forging process of a 3D complex part with respect to damage occurrence, *Journal of Materials Processing Technology*, **142**, 307–317, (2003).
- Cockroft, M. G.; Latham, D. J., *Ductility and the workability of metals Journal of the Institute of Metals*, **96**, 33–39, (1968).
- Dhar, S.; Dixit, P. M.; Sethuraman, R., A continuum damage mechanics model for ductile fracture, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, **77**, 335–344, (2000).
- Doghri, I., *Mechanics of Deformable Solids, Linear and Nonlinear, Analytical and Computational Aspects*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (2000).
- Drabek, T., *Modeling of Matrix Damage in Particle Reinforced Ductile Matrix Composites* (Doktora Tezi), Vienna University of Technology, Austria, (2005).
- Drabek, T.; Böhm, H. J., Damage models for studying ductile matrix failure in composites, *Computational Materials Science*, **32**, 329–336, (2005).
- Drabek, T.; Böhm, H. J., Micromechanical finite element analysis of metal matrix composites using nonlocal ductile failure models, *Computational Materials Science*, **37**, 29–36, (2006).
- Elgueta, M.; Cortés, C., Application of continuum damage theory in metal-forming processes, *Journal of Materials Processing Technology*, **95**, 122–127, (1999).
- Engelen, R. A. B., *Plasticity induced damage in metals* (Doktora Tezi), Technische Universiteit Eindhoven, (2005)
- Freudenthal, A. M., *The Inelastic Behavior in Solids*, Wiley, New York, (1950).
- Ganczarski, A.; Barwacz, L., Notes on damage effect tensors of two-scalar variables, *International Journal of Damage Mechanics*, **13**, 287–295, (2004).
- Gelin, J. C., Modelling of damage in metal forming simulations, *Journal of Materials Processing Technology*, **80-81**, 24–32, (1998).
- Giardini, C.; Ceretti, E.; Maccarini, G., Formability in extrusion forging: the influence of die geometry and friction conditions, *Journal of Materials Processing Technology*, **54**, 302–308, (1995).

- Goijaerts, A. M.; Govaert, L. E.; Baaijens, F. P. T., Evaluation of ductile fracture models for different metals in blanking, *J. Mater. Process. Technol.*, **110**, 312–323, (2001).
- Gurson, A. L., Continuum theorie of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I - Yield criteria and flow rules for porous ductile media, *J. Eng. Mater. Technol. Trans. ASME*, **99**, 2–15, (1977).
- Hambli, R., Comparison between Lemaitre and Gurson damage models in crack growth simulation during blanking process, *International Journal of Mechanical Sciences*, **43**, 2769–2790, (2001).
- Hambli, R.; Badie-Levet, D., Damage and fracture simulation during the extrusion process, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **186**, 109–120, (2000).
- Hambli, R.; Potiron, A., Finite element modelling of sheet-metal blanking operations with experimental verification, *Journal of Materials Processing Technology*, **102**, 257–265, (2000).
- Hancock, J. W.; Brown, D. K., On the role of strain and stress in ductile fracture, *Journal of Mech Phys Solids*, **31**, 1–24, (1983).
- Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, London, (1950).
- Ibrahimbegović, A., Equivalent spatial and material descriptions of finite deformation elastoplasticity in principal axes, *International Journal of Solids and Structures*, **31**, 3027–3040, (1994).
- Ibrahimbegović, A.; Gharzeddine, F., Finite deformation plasticity in principal axes: from a manifold to the euclidean setting, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **171**, 341–369, (1999).
- Ibrahimbegović, A.; Chorfi, L., Viscoplasticity model at finite deformations with combined isotropic and kinematic hardening, *Computers and Structures*, **77**, 509–525, (2000).
- Jackiewicz, J.; Kuna, M., Non-local regularization for FE simulation of damage in ductile materials, *Computational Materials Science*, **28**, 684–694, (2003).
- Jirásek, M., Modelling of Localized Inelastic Deformation Ders Notları, (2006)
- Jirásek, M.; Bažant, Z., *Inelastic Analysis of Structures*, John Wiley and Sons, England, (2001).
- Ju, J. W., On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modelling and computational aspects, *International Journal of Solids and Structures*, **25**, 803–833, (1989).

- Drabek, T.; Böhm, H. J., Energy-based coupled elastoplastic damage models at finite strains, *Journal of Engineering Mechanics*, **115**, 2507–2525, (1989).
- Ju, J. W., Isotropic and anisotropic damage variables in continuum damage mechanics, *Journal of Engineering Mechanics*, **116**, 283–287, (1990).
- Kachanov, L. M., Time of the rupture process under creep conditions, *Izv. Akad. Nauk. SSR*, **8**, 26–31, (1958).
- Kattan, P. I.; Voyiadjis, G. Z., A Coupled Theory of Damage Mechanics and Finite Strain Elasto-Plasticity, Part II: Damage and Finite Strain Plasticity, *International Journal of Engineering Science*, **28**, 505–524, (1990).
- Ko, D.; Kim, B., The prediction of central burst defects in extrusion and wire drawing, *Journal of Materials Processing Technology*, **102**, 19–24, (2000).
- Komori, K., Simulation of chevron crack formation and evolution in drawing, *International Journal of Mechanical Sciences*, **41**, 1499–1513, (1999).
- Komori, K., Effect of ductile fracture criteria on chevron crack formation and evolution in drawing, *International Journal of Mechanical Sciences*, **45**, 141–160, (1999).
- Krajcinovic, D., *Damage Mechanics*, Elsevier, Amsterdam, (1996).
- Kuhl, E.; Ramm, E., Simulation of strain localization with gradient enhanced damage models, *Computational Materials Science*, **16**, 176–185, (1999).
- Lee, E. H., Elasto-plastic deformation at finite strains, *ASME Journal of Applied Mechanics*, **36**, 1–6, (1969).
- Lee, Y.; Hahm, S., Mechanical property changes in drawing/extrusion of hardening viscoplastic materials with damage, *International Journal of Mechanical Sciences*, **39**, 565–573, (1997).
- Lemaitre, J., Evaluation of dissipation and damage in metals, *Proceedings of I.C.M. 1*, Kyoto, Japan., (1971).
- Lemaitre, J.; Chaboche, J., *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, Cambridge, (1990).
- Lemaitre, J., *A Course on Damage Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, (1996).
- Lemaitre, J.; Desmorat, R., *Engineering Damage Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (2005).
- Lim, L. G.; Dunne, F. P. E., Modelling central bursting in the extrusion of particulate reinforced metal matrix composite materials, *Int. J. Mach. Tools Manufact.*, **37**, 901–915, (1997).

- Lin, J.; Liu, Y.; Dean, T. A., A review on damage mechanisms, models and calibration methods under various deformation conditions, *International Journal of Damage Mechanics*, **14**, 299–319, (2005).
- Lubarda, V. A.; Krajcinovic, D.; Mastilovic, S., Damage model for brittle elastic solids with unequal tensile and compressive strength, *Engineering Fracture Mechanics*, **49**, 681–697, (1994).
- Lubliner, J., A maximum-dissipation principle in generalized plasticity, *Acta Mechanica*, **52**, 225–237, (1984).
- Lämmer, H.; Tsakmakis, Ch., Discussion of coupled elastoplasticity and damage constitutive equations for small and finite deformations, *International Journal of Plasticity*, **16**, 496–523, (2000).
- Mackenzie, A. C.; Hancock, J. W.; Brown, D. K., On the influence of state of stress on ductile fracture in high strength steel, *Engineering Fracture Mechanics*, **9**, 167–188, (1977).
- Mackerle, J., Finite element modelling and simulation of bulk material forming, *International Journal for Computer-Aided Engineering and Software*, **23**, 250–342, (2006).
- Marsden, J. E.; Hughes, T. J. R., *Mathematical Foundations of Elasticity*, Dover, New York, (1994).
- Mathews, J. H.; Fink, K. D., *Numerical Methods Using MATLAB*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, (1999).
- Maugin, G. A., *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*, Cambridge University Press, Cambridge, (1992).
- McAllen, P.; Phelan, P., Ductile fracture by central bursts in drawn 2011 aluminium wire, *International Journal of Fracture*, **135**, 19–33, (2005).
- McAllen, P. J.; Phelan, P., Numerical analysis of axisymmetric wire drawing by means of a coupled damage model, *Journal of Materials Processing Technology*, **183**, 210–218, (2007).
- McClintock, F. A., A criterion for ductile by the growth of holes, *ASME Journal of Applied Mechanics*, **35**, 363–371, (1968).
- McVeigh, C.; Liu, W. K., Prediction of central bursting during axisymmetric cold extrusion of a metal alloy containing particles, *International Journal of Solids and Structures*, **43**, 3087–3105, (2006).
- Mediavilla, J., *Continuous and discontinuous modelling of ductile fracture*, (Doktora Tezi), Technische Universiteit Eindhoven, (2005).

- Mediavilla, J.; Peerlings, R. H. J.; Geers, M. G. D., A nonlocal triaxiality-dependent ductile damage model for finite strain plasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **195**, 4317–4634, (2006).
- Menzel, A.; Steinmann, P., A theoretical and computational framework for anisotropic continuum damage mechanics at large strains, *International Journal of Solids and Structures*, **38**, 9505–9523, (2001).
- Menzel, A.; Ekh, M.; Steinmann, P.; Runesson, K., Anisotropic damage coupled to plasticity: Modelling based on the effective configuration concept, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **54**, 1409–1430, (2002).
- Menzel, A.; Ekh, M.; Runesson, K.; Steinmann, P., A framework for multiplicative elastoplasticity with kinematic hardening coupled to anisotropic damage, *International Journal of Plasticity*, **21**, 397–434, (2005).
- Miehe, Ch., Comparison of two algorithms for the computation of fourth-order isotropic tensor functions, *Computers and Structures*, **66**, 37–43, (1998).
- Moritoki, H.; Okuyama, E., Prediction of central bursting in extrusion, *Journal of Materials Processing Technology*, **80-81**, 579–584, (1998).
- Mousavi, S. A. A. A.; Feizi, H.; Madoliat, R., Investigations on the effects of ultrasonic vibrations in extrusion process, *Journal of Materials Processing Technology*, **187-188**, 657–661, (2007).
- Oyane, M., *Criteria of ductile fracture strain Bulletin of JSME*, **15**, 1507–1513, (1972).
- Oyane, M.; Sato, T.; Okimoto, K.; Shima, S., Criteria for ductile fracture and their applications, *J. Mech. Work. Technol.*, **4**, 65–81, (1979).
- Rice, J. R.; Tracey, D. M., On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, **17**, 201–217, (1969).
- Rousselier, G., Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture, *Nucl. Eng. Design*, **105**, 97–111, (1987).
- Peng, X.; Qin, Y.; Balendra, R., FE analysis of springback and secondary yielding effect during forward extrusion, *Journal of Materials Processing Technology*, **135**, 211–218, (2003).
- Perzyna, P., Constitutive equations of dynamic plasticity, ed.: Kleiber, M.; König, J. A., *Inelastic Solids and Structures, Antoni Sawczuk Memorial Volume*, Pineridge Press, Swansea, UK, (1990), Pp.: 111–129.
- Plancak, M., Stress distribution within the specimen in cold forward extrusion of steel, *Journal of Materials Processing Technology*, **24**, 387–394, (1990).

- Rabotnov, Y., Creep rupture, ed.: Hetenyi M.; Vincenti W., *Applied Mechanics. Proceedings of the 12th International Congress of Applied Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, (1968), Pp.: 342–320.
- Ragab, A. R.; Samy, S. N.; Saleh, Ch. A. R., Prediction of central bursting in drawing and extrusion of voided metals, *J. Manufacturing Science and Engineering, ASME*, **127**, 698–702, (2005).
- Rajak, S. A.; Reddy, N. V., Prediction of internal defects in plane strain rolling, *Journal of Materials Processing Technology*, **159**, 409–417, (2005).
- Reckwerth, D.; Tsakmakis, Ch., The principle of generalized energy equivalence in continuum damage mechanics, ed.: Hutter, K., *Deformation and Failure of Metallic Continua*, Springer, (2003), Pp.: 381–406.
- Rojek, J.; Zienkiewicz, O. C.; Oñate, E.; Postek, E., Advances in FE explicit formulation for simulation of metalforming processes, *Journal of Materials Processing Technology*, **119**, 41–47, (2001).
- Rojek, J.; Oñate, E.; Postek, E., Application of explicit FE codes to simulation of sheet and bulk metal forming processes, *Journal of Materials Processing Technology*, **80-81**, 620–627, (1998).
- Saanouni, K.; Chaboche, J. L., Bölüm 3.06, Computational Damage Mechanics: Application to Metal Forming Simulation, *Comprehensive Structural Integrity*, Elsevier Ltd., (2003), Pp.: 319–374.
- Saanouni, K.; Mariage, J. F.; Cherouat, A.; Lestriez, P., Numerical prediction of discontinuous central bursting in axisymmetric forward extrusion by continuum damage mechanics, *Computers and Structures*, **82**, 2309–2332, (2004).
- Saleh, Ch. A. R.; Ragab, A. R.; Samy, S. N., Prediction of void growth in drawing and extrusion of voided metals, *Mechanics of Materials*, **37**, 915–924, (2005).
- Shabaik, A. H., Mechanics of plastic deformation in metal forming processes: Experimental and numerical methods, *Journal of Materials Processing Technology*, **27**, 3–24, (1991).
- Simó, J. C., Algorithms for multiplicative plasticity that preserve the form of the return mappings of the infinitesimal theory, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **99**, 61–112, (1992).
- Simó, J. C.; Miehe, Ch., Associative coupled thermoplasticity at finite strains - Formulation, numerical-analysis and implementation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **98**, 41–104, (1992).
- Simó, J. C.; Taylor, R. L., Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **48**, 101–118, (1985).

- Simó, J. C.; Taylor, R. L., Quasi-incompressible finite elasticity in principle stretches: continuum basis and numerical algorithms, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **85**, 273–310, (1991).
- Simó, J. C.; Hughes, T. J. R., *Computational Inelasticity*, Springer-Verlag, Berlin, (1998).
- Skrzypek, J. J.; Gancarski, A., *Modelling of Material Damage and Failure of Structures*, Springer-Verlag, Berlin, (1999).
- de Souza Neto, E. A., A fast, one-equation integration algorithm for the Lemaitre ductile damage model, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **18**, 541–554, (2002).
- Sriram, S.; Van Tyne, C. J., Criterion for prevention of central bursting in forward extrusions through spherical dies using the finite element method, *J. Manufacturing Science and Engineering, ASME*, **124**, 65–70, (2002).
- Staub, C.; Boyer, J. C., A ductile growth model for elasto-plastic material, *Journal of Materials Processing Technology*, **77**, 9–16, (1998).
- Steinmann, P.; Miehe, Ch.; Stein, E., Comparison of different finite deformation inelastic damage models within multiplicative elastoplasticity for ductile material, *Computational Mechanics*, **13**, 458–474, (1994).
- Tiernan, P.; Hillery, M. T.; Draganescu, B.; Gheorghe, M., Modelling cold extrusion with experimental verification, *Journal of Materials Processing Technology*, **168**, 360–366, (2005).
- Tveergaard, V.; Needleman, A., Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar, *Acta Metall.*, **32**, 157–169, (1984).
- Vaz Jr., M.; Owen, D. R. J., Aspects of ductile fracture and adaptive mesh refinement in damaged elasto-plastic materials, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **50**, 29–54, (2001).
- Venkata Reddy, N.; Dixit, P. M.; Lal, G. K., Ductile fracture criteria and its prediction in axisymmetric drawing, *International Journal of Machine Tools and Manufacture Design, Research and Application*, **40**, 95–111, (2000).
- Voyiadjis, G. Z.; Abu Al-Rub, R. K.; Palazotto, A. N., Thermodynamic formulations for non-local coupling of viscoplasticity and anisotropic viscodamage for dynamic localization problems using gradient theory, *International Journal of Plasticity*, **20**, 981–1038, (2004).
- Wang, W. M.; Sluys, L. J.; de Borst, R., Viscoplasticity for instabilities due to strain softening and strain-rate softening, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **40**, 3839–3864, (1997).

-
- Zhu, Y. Y.; Cescetto, S., A fully coupled elasto-visco-plastic damage theory for anisotropic materials, *International Journal of Solids and Structures*, **32**, 1607–1641, (1995).
- Zimmerman, Z.; Avitzur, B., Analysis of central bursting defects in extrusion and wire drawing, *J. Eng. Ind.*, **90**, 135–145, (1970).
- Zimmerman, Z.; Darlington, H.; Kottcamp, E. H., Selection of operating parameters to prevent central bursting defects during cold extrusion, ed.: Hoffmann, A. L., *Metal Forming - Interrelations between Theory and Practice* Plenum Press, New York-London, (1971), Pp.: 47–62.

TÜBİTAK
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU

Proje No: MISAG-JULICH 04
Proje Başlığı: Modelling Damage Phenomenon for Elastoplasticity
Proje Yürütücüsü ve Araştırmacılar: Türk Takımı: Danışman: Doç.Dr. Uğurhan Akyüz Yardımcı Danışman: Prof.Dr.-Ing. A.Erman Tekkaya Araştırmacı: Celal Soyarslan, Yüksek Mühendis Alman Takımı: Danışman: Prof.Dr.-Ing.Dipl.-Wirtsch.-Ing.Peter Groche Araştırmacı: Dipl.-Ing. Thomas Rathmann
Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi: Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara/Türkiye Darmstadt Teknik Üniversitesi, Darmstadt/Almanya
Destekleyen Kuruluş(ların) Adı ve Adresi: TÜBİTAK, Türkiye Almanya Jülich Araştırma Merkezi, Almanya
Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri: 01.10.2004-30.05.2006
Öz (en çok 70 kelime) Hasarla eşleşmiş ısıl etkileri de barındıran <i>hiperelastik-(visko)plastik</i> bir formülasyon <i>asal eksenlerde</i> Öklidyen bir çerçevede yerel ve entegral ortalamaya dayalı yerel olmayan yapıları ile sunulmuştur. Gösterilmiştir ki, asal eksen formülasyonları sadece sonlu plastisite çözümlerini tensöryel türevlerden sayıl türevlere dönüştürmekle kalmamakta asal iz düşümlerle çözümlenebilen <i>aktif-pasif hasar evriminin</i> formüle edilmesinde de elverişlilik sağlamaktadır. Doruk sonrası tepkinin düzenlenmesinde kullanılan yerel olmayan formülasyonda hasar artışlarının güncel olan hacimde ortalamasına ve malzeme uzunluk birimi boyunca yumuşatılmasına başvurulmuştur. Yerel formların etkinlik ve kestirim performansı ve yerel olmayan formların yerelleşmeyi engelleme özellikleri bir grup test problemi üzerinde çalışılmıştır.
Anahtar Kelimeler: Hasar, Sonlu Plastisite, Sonlu Elemanlar
Projeden Yapılan Yayınlar: Soyarslan C., Tekkaya A.E., Akyuz U, "Application of Continuum Damage Mechanics in discontinuous crack formation: Forward extrusion chevron predictions", Z.Angew. Math.Mech. 88, No. 6, 436 – 453, (2008). Soyarslan C., Tekkaya A.E., Akyuz U, "Finite deformation plasticity coupled with isotropic damage: formulation in principal axes", submitted to the Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, in review. Halihazırda yapının yerel olmayan genişletilmesi, ısıl eşleşmeli formülasyonlar üzerinde 3 yayın daha hazırlanılmaktadır.