TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNİK ARAŞTIRMA KURUMU

ZEMİNLERİN DAVRANIŞININ VİSKO - ELASTİK MODELLE ETÜDÜ

Dr. Aybar ERTEPINAR

Dr. Yalçın MENGİ Dr. Çetin SOYDEMİR

MÜHENDİSLİK ARAŞTIRMA GRUBU

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNİK ARAŞTIRMA KURUMU

ZEMİNLERİN DAVRANIŞININ VİSKO - ELASTİK MODELLE ETÜDÜ

PROJE NO. : MAG - 338

Proje Yürütücüsü
Dr. Aybar ERTEPINAR

Yardımcı Araştırıcılar
Dr. Yalçın MENGİ Dr. Çetin SOYDEMİR

MÜHENDİSLİK ARAŞTIRMA GRUBU

Önsöz

Bu çalışma, TBTAK desteği ile ODTÜ imkânları kullanılarak tamamlanmıştır.

Dr. Aybar ERTEPINAR

Dr. Yalçın MENGİ

Dr. Çetin SOYDEMİR

İçindekiler

Şekil Listesi

Tablo Listesi

Abstrakt

Araştırmacıların doygun ve kohezyonlu zeminlerin konsolidasyonunu, zeminin davranışını visko-elâstik modellerle ifade ederek analiz etmeleri çok yeni değildir; ancak bu çalışmalarda konsolidasyon zamanının drenaj yolu boyuna olan bağlılığı hesaba katılmamıştır. Bu araştırmada, rijit, sürtünmesiz ve geçirimsiz bir temel üzerine oturan ve üzerinde düzgün yayılı şerit veya dairesel yük bulunan doygun ve kohezyonlu bir zemin tabakası problemi çözülmektedir. Hacim değişikliği ve kayma deformasyonu standart ve Maxwell modelleriyle ifade edilmektedir. Konsolidasyon zamanı, drenaj yolu boyunun karesiyle doğru orantılı olarak düşünülmektedir. Yukarıda bahsedilen konsolidasyon probleminin analizinde çok tabakalı visko-elâstik bir ortam için yaklaşık bir teori geliştirilmekte ve bu teori kullanılarak problemin çözümü Laplace-Fourier (veya Hankel) uzayında elde edilmektedir. Deplasman ve gerilme değişimleri nümerik ters transform tekniklerinden faydalanılarak bulunmaktadır.

Abstract

It is not very new that the researchers have begun analyzing the consolidation of saturated, cohesive soil media by describing the behaviour of the media by visco-elastic models; but in these studies, the dependence of the consolidation time on the length of the drainage path is not considered. In the present investigation, the problem of a saturated, cohesive soil layer, which rests on a rigid, frictionless, and impervious foundation, and subjected to a uniform strip or circular pressure on the top surface is studied. The volume change and the shear deformation are respectively described by standard and Maxwell models. The consolidation time is taken to be proportional to the square of the length of the drainage path. In analyzing the abovementioned consolidation problem, an approximate theory for a multi-layered visco-elastic medium is developed and by using it, the solution to the problem is obtained in Laplace-Fourier (or Hankel) transform space. Employing numerical inversion techniques, the distributions of displacements and stress conponents are found.

I. Giriş

Bu çalışmada, geçirimsiz rijit bir temele oturan, şerit veya eksenel simetriye haiz yüke maruz doygun bir zemin tabakasının konsolidasyon problemi visko-elâstik modeller yardımıyla incelenmiştir.

Literatürde, zeminin hacımsal ve kayma deformasyonlarını tanımlayan çeşitli reolojik modeller teklif edilmiş ve bu model parametrelerinin tayini için bazı laboratuar deneyleri geliştirilmiştir. Bu deneyler, hacımsal deformasyonun Kelvin, kayma deformasyonunun ise Maxwell modeli ile tanımlanabileceğini göstermiştir (1). Kelvin modeliyle ilgili gevşeme (relaxation) fonksiyonu t=0 zamanında sonsuz olan Dirac delta fonksiyonunu ihtiva ettiği için, matematik güçlükleri ortadan kaldırma amacıyla, zeminin hacımsal deformasyonu bu çalışmada standard modelle tanımlanmıştır.

Araştırmada, konsolidasyon zamanının, drenaj yolunun uzunluğunun karesiyle orantılı olduğunu kabul eden, Terzaghi'nin bir boyutlu teorisi kullanılmıştır (2). Tabaka, geçirimsiz bir temele oturduğundan, "bulk" modülü derinliğin karesinin fonksiyonu olmakta, bu da tabakayı inhomojen hale sokmaktadır. Bu visko-elâstik, inhomojen tabakanın incelenmesindeki matematiksel güçlükleri yenmek amacıyla, tabakanın, her biri farklı malzeme fonksiyonlarına sahip olan birçok ince tabakadan oluştuğu yaklaşımı yapılmıştır.

Birden fazla tabakadan oluşan visko-elâstik bir ortamda yer değiştirme ve gerilme dağılımlarının kesin olarak tayini oldukça güçtür. Bu nedenle, önce, n ince tabakadan oluşan elâstik bir zemin için yaklaşık bir teori geliştirilmiştir. Yer değiştirmelerin tabaka kalınlığı boyunca Taylor serisine açılma esasına dayanan bu yaklaşık teorinin geliştirilmesinde Hu-Washizu varyasyon teorisinden faydalanılmıştır (3). Böylece, genelleştirilmiş yer değiştirmeleri bilinmeyen olarak ihtiva eden girişimli (coupled), lineer, adi diferansiyel denklem takımı, yaklaşık teorinin ana denklemleri olarak, elde edilmiştir. Geliştirilen yaklaşık teorinin geçerliliğini kontrol etmek amacıyla, tek elâstik tabaka problemi kesin ve yaklaşık metodlarla çözülmüş ve sonuçların birbirine kâfi miktarda yakın olduğu görülmüştür.

Çok tabakalı visko-elâstik problemin çözümü, elâstik çözümden benzerlik (correspondance) prensibi yardımıyla elde edilmiştir (4). Bu prensibin ışığı altında, çok tabakalı, visko-elâstik ortamla ilgili yaklaşık teorinin ana denklemlerini Laplace uzayında elde etmek için, elâstik teorideki malzeme sabitleri, visko-elâstik malzeme fonksiyonlarının Laplace transformu ve transform parametrisi çarpımı ile değiştirilmiştir. Eksenel simetriye haiz problem için radyal yönde Hankel, şerit yüke maruz problem için ise yatay yönde Fourier sinüs ve kosinüs transformları uygulanarak, problemin çözümü Hankel-Laplace veya Fourier-Laplace uzayındaki cebrik denklem takımının çözümüne indirgenmiştir. Hankel ve Fourier transformlarının tersleri Simpson metodu ile, Laplace transformunun tersi ise Krylov ve Skoblya (5) tarafından geliştirilen nümerik bir yöntemle bulunmuştur. $t=0$ ve $t=\infty$ zamanındaki sonuçları elde etmek için Laplace transformu limit teoremleri kullanılmıştır.

Örnek problemler olarak, rijit ve geçirimsiz bir temele oturan, uniform şerit veya uniform eksenel simetriye haiz yüklere maruz H kalınlığındaki visko-elâstik bir tabakanın konsolidasyonu incelenmiştir. Zeminin beş eşit kalınlıkta tabakadan oluştuğu, ve her tabaka için konsolidasyon zamanının tabaka ortasının üst yüzeyden uzaklığının karesiyle orantılı olduğu kabul edilmiştir. Gerilme ve yer değiştirmelerin çeşitli zamanlardaki dağılımları bulunmuş ve şekillerle gösterilmiştir.

II. Lineer Visko-Elastik Teorinin Ana Hatları

A. Giriş

Maxwell 1890'da, bazı katı cisimlerin bir kuvvet etkisi altında, kısa zamanlarda elâstik davranış, uzun zamanlarda ise sıvıya benzer akma özelliği göstereceğini öne sürmüştür (6). Visko-elâstik bir malzeme hem elâstik hem de sıvıya benzer (viscous) özellikler gösterir. Elâstik bir katı cisimde herhangi bir t zamanındaki gerilmenin, sadece aynı zamandaki şekil değiştirme bileşenlerine (strain) bağlı olmasına karşı, visko-elâstik bir katı cisimde ise gerilme t zamanından önceki şekil değiştirme geçmişine de bağlıdır. Böylece, visko-elâstik bir malzeme için zaman (t) ilâve bir değişken olarak bünye denklemlerine girmiş olur.

B. Lineer Visko-Elâstik Malzeme İçin Bünye Denklemleri

Denge denklemleri, uygunluk şartları ve şekil değiştirme bileşenlerini yer değiştirmelere bağlıyan ifadeler elâstik, visko-elâstik ve diğer tip malzemeler için aynıdır. Tek fark bünye denklemlerinde olup, visko-elâstik bir malzeme için bu denklemler zamana bağlıdır. Lineer, yaşlanmayan (nonaging) bir visko-elâstik malzeme için gevşeme (relaxation) tipindeki bir boyutlu bünye denklemleri

$$\sigma(t)=E(t)\,\epsilon(0)+\int_0^t E(t-\tau)\frac{\partial\epsilon(\tau)}{\partial\tau}\,d\tau \qquad (2.1)$$

şeklinde olup burada σ gerilmeyi, ϵ şekil değiştirme bileşenini, E ise malzemenin gevşeme fonksiyonunu göstermektedir.

Denklem (2.1) in tersi

$$\epsilon(t)=J(t)\,\sigma(0)+\int_0^t J(t-\tau)\frac{\partial\sigma(\tau)}{\partial\tau}\,d\tau \qquad (2.2)$$

lineer, visko-elâstik malzeme için sünme (creep) tipindeki bünye denklemlerini vermekte olup J sünme fonksiyonunu göstermektedir. (2.1) ve (2.2) denklemlerinden, gevşeme ve sünme fonksiyonları arasında

$$\int_0^t J(t-\tau)\,E(\tau)\,d\tau=1 \qquad (2.3)$$

bağıntısı olması icap ettiği görülür.

C. Lineer Visko-Elâstik Malzemeyle İlgili Mekanik Modeller

Visko-Elâstik bir katı cismin elâstik ve akma özellikleri lineer yay ve yağ kutusu (dashpot) yardımıyla tanımlanır. Lineer yay Hooke kanununa uyup yüke orantılı ani bir deformasyona uğrar. Öte taraftan yağ kutusu Newton'un viskosite kanununa uyup, deformasyon hızı tatbik edilen kuvvetle orantılıdır. Şekil (1.a) da üç ayrı visko-elâstik model, Maxwell, Kelvin ve Standart, gösterilmiştir. Bu modeller için bünye denklemleri

Maxwell modeli:

$$\dot{\epsilon}=\frac{\dot{\sigma}}{G}+\frac{\sigma}{\eta} \quad , \quad \epsilon(0)=\frac{\sigma(0)}{G}, \tag{2.4}$$

Kelvin modeli:

$$\sigma=G\epsilon+\eta\dot{\epsilon} \quad , \quad \epsilon(0)=0, \tag{2.5}$$

Standart model:

$$\sigma+\frac{\eta}{G+G'}\dot{\sigma}=\frac{GG'}{G+G'}\left(\epsilon+\frac{\eta}{G}\dot{\epsilon}\right) \tag{2.6}$$

şeklinde olup $(\dot{\ })=\frac{\partial(\ )}{\partial t}$ ve G, G' yay sabitlerini, η ise viskosite katsayısını göstermektedir.

Şekil (1.b) de gösterilen ve $\sigma(t)$ birim basamak fonksiyonu (unit step function H(t)) olunca $\epsilon(t)$ ye eşit olan sünme (creep) fonksiyonları

Maxwell modeli:

$$J(t)=\left(\frac{1}{G}+\frac{1}{\eta}t\right)H(t), \tag{2.7}$$

Kelvin modeli:

$$J(t)=\frac{1}{G}\left[1-e^{\left(-\frac{G}{\eta}t\right)}\right]H(t) \tag{2.8}$$

Standard model:

$$J(t)=\left\{\frac{1}{G'}+\frac{1}{G}\left[1-e^{\left(-\frac{G}{\eta}t\right)}\right]\right\}H(t) \tag{2.9}$$

bağıntısıyla verilir. Burada

$$H(t)=\begin{cases}0\ , & t<0\\ 1\ , & t>0\end{cases} \tag{2.10}$$

(ϵ)=H(t) iken $\sigma(t)$ ye eşit olan ve şekil (1.c) de gösterilen gevşeme (relaxation) fonksiyonları

Maxwell modeli

$$E(t)=G\,e^{\left(-\frac{G}{\eta}\right)t}\,H(t) \tag{2.11}$$

Kelvin modeli:

$$E(t)=\eta\,\delta(t)+G\,H(t) \tag{2.12}$$

Standart model:

$$E(t)=\frac{G'}{G+G'}\left[G-G'e^{-\left(\frac{G+G'}{\eta}\right)t}\right]H(t) \tag{2.13}$$

ifadeleriyle tanımlanır. Burada Dirac delta fonksiyonu $\delta(t)$

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases}$$

ve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt=f(0) \tag{2.14}$$

şeklinde tanımlanır.

D. Üç Boyutlu Hal

Gerilme ve yer değiştirme deviatörleri, S_{ij} ve e_{ij},

$$S_{ij}=\tau_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}$$
$$e_{ij}=\epsilon_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\epsilon_{kk} \tag{2.15}$$

ifadeleriyle tanımlanmış olup burada τ_{ij} ve ϵ_{ij} gerilme ve şekil değiştirme tensörlerinin bileşenleri olup, Kronecker delta, δ_{ij} ise

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1\ , & i=j\\ 0\ , & i\neq j\end{cases} \tag{2.16}$$

(2.15) denklemlerinde indeks notasyonu kullanılmış olup Lâtin indeksler (i, j, k) 1, 2 ve 3 değerlerini alabilmekte ve tekrarlanan indeks toplamı gösterilmektedir. Örneğin,

$$\tau_{kk}=\tau_{11}+\tau_{22}+\tau_{33}$$

(2.1), (2.2) ve (2.3) denklemleri gerilme ve şekil değiştirme tensörlerinin deviatörik ve volumetrik kısımları için yazılırsa

$$\tau_{kk}(t)=3K(t)\epsilon_{kk}(0)+\int_0^t 3K(t-\tau)\frac{\partial\epsilon_{kk}(\tau)}{\partial\tau}d\tau, \tag{2.17}$$

$$\epsilon_{kk}(t)=\frac{1}{3}K'(t)\tau_{kk}(0)+\int_0^t\frac{1}{3}K'(t-\tau)\frac{\partial\tau_{kk}(\tau)}{\partial\tau}d\tau, \tag{2.18}$$

$$\int_0^t K'(t-\tau)\,K(\tau)\,d\tau = t, \tag{2.19}$$

$$S_{ij}(t) = 2\mu(t)e_{ij}(0) + \int_0^t 2\mu(t-\tau)\frac{\partial e_{ij}(\tau)}{\partial \tau}\,d\tau, \tag{2.20}$$

$$e_{ij}(t) = \frac{1}{2}\mu'(t)S_{ij}(0) + \int_0^t \frac{1}{2}\mu'(t-\tau)\frac{\partial S_{ij}(\tau)}{\partial \tau}\,d\tau, \tag{2.21}$$

$$\int_0^t \mu'(t-\tau)\mu(\tau)\,d\tau = t, \tag{2.22}$$

üç boyutlu bünye denklemleri bulunur. Burada $K(t)$, $K'(t)$ "bulk"-gevşeme, "bulk"-sünme fonksiyonlarını ve $\mu(t)$, $\mu'(t)$ kayma-gevşeme, kayma-sünme fonksiyonlarını göstermektedir.

E. Benzerlik (Correspondence) Prensibi

Aynı geometriye, aynı sınır ve başlangıç değerlerine sahip, biri elâstik, diğeri ise visko-elâstik malzemeden yapılmış iki cismin Laplace uzayındaki ana denklemleri ve sınır değerleri

Şekil- yer değiştirme bağıntıları:

Elâstik, visko-elâstik $\epsilon^L_{ij} = \frac{1}{2}(u^L_{i,j} + u^L_{j,i})$, (2.23)

Hareket denklemleri:

elâstik, visko-elâstik $\tau^L_{ji,j} + X^L_i = \rho(s^2 u^L_i - s\alpha_i - \beta_i)$, (2.24)

Sınır değerleri:

elâstik, visko-elâstik $t^{(n)L}_i = \gamma_i$, S üzerinde, (2.25)

Bünye denklemleri:

$$\tau^L_{kk} = 3K\,\epsilon^L_{kk},$$

elâstik $\epsilon^L_{kk} = \frac{1}{3}K'\,\tau^L_{kk}$, (2.26)

$$S^L_{ij} = 2\mu\,e^L_{ij},$$

$$e^L_{ij} = \frac{1}{2}\mu'\,S^L_{ij},$$

ve

$$\tau^L_{kk} = 3\,s\,K^L\,\epsilon^L_{kk},$$

$$\epsilon^L_{kk} = \frac{1}{3}\,s\,K'^L\,\tau^L_{kk}, \tag{2.27}$$

visko-elâstik $S^L_{ij} = 2\,s\,\mu^L\,e^L_{ij}$,

$$e^L_{ij} = \frac{1}{2}\,s\,\mu'^L\,S^L_{ij}. \tag{2.27}$$

(devam)

(2.23-27) denklemlerinde

$(\ )^L$: $(\ )$'ın Laplace transformu,
s : Laplace transform parametresi,
u_i: Yer değiştirme bileşenleri,
x_i: Cartesian koordinatları,

$$(\ )_{,i} = \frac{\partial(\ )}{\partial x_i}$$

X_i: Kütlesel dış yük bileşenleri,
ρ : Kütle yoğunluğu,

$\alpha_i = (u_i)_{t=0}$

$\beta_i = (\dot{u}_i)_{t=0}$

S : Cismi sınırlayan yüzey,
γ_i: x_i ve t'nin fonksiyonu olan ve yüzeyde sınır değerlerine bağlı olan büyüklükler,

$t^{(n)}_i = n_j\tau_{ji}$ (yüzey gerilme vektörü bileşenleri),

n_i: Yüzey normal vektörü bileşenleri.

Yukarıdaki denklemlerden görüleceği gibi, şekil-yer değiştirme bağıntılarının, hareket denklemlerinin ve sınır şartlarının Laplace uzayındaki formları elâstik ve visko-elastik problemlerde aynı kalmaktadır. (2.26-27) denklemleri karşılaştırılırsa, visko-elastik ve elastik bünye denklemlerinin farklı olduğu, fakat elastik bünye denklemlerindeki elastik sabitler visko-elastik karşıtlarının Laplace transformu ve transform parametresi çarpımıyla değiştilirse, (2.27) ve (2.26) denklemlerinin aynı olacağı görülür. Böylece, lineear visko-elastik bir problemin çözümü için aşağıdaki yöntem uygulanabilir: Karşıt elâstik problemin Laplace uzayındaki çözümü bulunur; elastik sabitler karşıt visko-elastik malzeme fonksiyonlarının Laplace transformu ve transform parametresi çarpımıyla değiştirilir; elde edilen ifadelerin Laplace transformu tersi alınarak çözüm elde edilir. Bu yöntem benzerlik (Correspondence) prensibi olarak isimlendirilmektedir.

III. Problemin Kesin Formülasyonu

Giriş kısmında da belirtildiği üzere, bir zemin tabakasının konsoli - dasyon probleminin incelenmesi için tabakanın ince, homojen ve farklı visko-elastik özelliklere haiz tabakalardan oluştuğu yaklaşımının yapılması icabetmektedir. Visko-elastik çözüm, elastik çözümden benzerlik prensibi yardımıyla elde edilebileceğinden, bu kısımda çok tabakalı elastik bir ortamın kesin teorisinin formülâsyonu yapılacaktır.

Şekil (2) de görülen, eşit kalınlıkta ve farklı elâstik özellikleri olan **n** tabakadan oluşan, rijit ve sürtünmesiz bir temele oturan zemin tabakası göz önüne alınsın.

Şerit yüke maruz hal düzlemsel yer değiştirme problemi olduğundan, tabaka için Şekil (2) de görülen cartesian koordinat sistemi kullanılacaktır. Bu sistemde x_1-x_3 düzlemi temel düzlemi ile çakışmakta olup, x_2 ekseni - nin yönü x_1-x_3 düzlemine dik ve yukarı doğrudur. Şerit yük ekseni doğrultusu x_2 eksenine paralel olarak alınmıştır.

Eksenel simetriye haiz yüke maruz tabaka için silindirik koordinat sistemi (rijit) kullanılmıştır. Şekil 12. Burada z ekseni temel düzlemine dik olup yükün simetri ekseniyle çakışmaktadır.

k tabakası için ana denklemler

	Şerit yük	Eksenel simetrik yük
Denge denklemleri	$\tau^{(k)}_{\alpha\beta,\beta}=0,$	$\dfrac{\partial\tau^{(k)}_{rr}}{\partial r}+\dfrac{\partial\tau^{(k)}_{rz}}{\partial z}+\dfrac{\tau^{(k)}_{rr}-\tau^{(k)}_{\theta\theta}}{r}=0,$
		$\dfrac{\partial\tau^{(k)}_{rz}}{\partial r}+\dfrac{\partial\tau^{(k)}_{zz}}{\partial z}+\dfrac{1}{r}\tau^{(k)}_{rz}=0,$

Şerit yük	Eksenel simetrik yük

Bünye denklemleri

$$\tau_{\alpha\beta}^{(k)} = 2\mu^{(k)}\epsilon_{\alpha\beta}^{(k)} + \delta_{\alpha\beta}\lambda^{(k)}\epsilon_{\lambda\lambda}^{(k)}, \qquad \tau_{ij}^{(k)} = 2\mu^{(k)}\epsilon_{ij}^{(k)} + \delta_{ij}\lambda^{(k)}\epsilon_{kk}^{(k)},$$

$$\epsilon_{rr}^{(k)} = \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta}^{(k)} = \frac{u_r^{(k)}}{r},$$

Şekil-yer değiştirme

$$\epsilon_{\alpha\beta}^{(k)} = \frac{1}{2}\left(u_{\alpha,\beta}^{(k)} + u_{\beta,\alpha}^{(k)}\right), \qquad \epsilon_{zz}^{(k)} = \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z}, \tag{3.1}$$

$$\epsilon_{rz}^{(k)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z}\right),$$

$$\epsilon_{r\theta}^{(k)} = \epsilon_{\theta z}^{(k)} = 0.$$

Burada $\mu^{(k)}$ ve $\lambda^{(k)}$ Lamé sabitleri olup, Yunan (Greek) harfleriyle gösterilen indeksler 1 ve 2 değerlerini alabilirler.

Temel ve üst düzlemlerdeki sınır değerleri

Şerit yük	Eksenel Simetrik Yük
$(\tau_{22})_{x_2=H} = -p(x_1)$,	$(\tau_{zz})_{z=H} = -p(r)$,
$(\tau_{12})_{x_2=H} = 0$,	$(\tau_{rz})_{z=H} = 0$,
$(\tau_{12})_{x_2=0} = 0$,	$(\tau_{rz})_{z=0} = 0$,
$(u_2)_{x_2=0} = 0$,	$(u_z)_{z=0} = 0$.

(3.2)

ifadeleriyle verilir. Burada $H=nh$ ve h ince tabaka kalınlığıdır. İnce tabakaların tam bağlantılı olduğu kabul edilirse uygunluk şartları aşağıdaki ifadeler ile verilir:

Şerit yük	Eksenel Simetrik Yük
$(\tau_{22}^{(k)})_{x_2=kh} = (\tau_{22}^{(k+1)})_{x_2=kh}$,	$(\tau_{zz}^{(k)})_{z=kh} = (\tau_{zz}^{(k+1)})_{z=kh}$,
$(\tau_{12}^{(k)})_{x_2=kh} = (\tau_{12}^{(k+1)})_{x_2=kh}$,	$(\tau_{rz}^{(k)})_{z=kh} = (\tau_{rz}^{(k+1)})_{z=kh}$,
$(u_1^{(k)})_{x_2=kh} = (u_1^{(k+1)})_{x_2=kh}$,	$(u_r^{(k)})_{z=kh} = (u_r^{(k+1)})_{z=kh}$,

Burada $k=1, 2, \ldots, n-1$.

Problemin kesin çözümü (3.1) eşitliğiyle verilen ana denklemlerin, sınır şartları (3.2) ve uygunluk şartları (3.3) na bağlı olarak çözülmeleriyle elde edilebilir. Ancak, tabaka sayısı birden fazla olduğu zaman işlemler oldukça karışık bir hale gelmektedir. Bu sebeple bir sonraki kısımda, çok tabakalı elâstik bir ortam için yaklaşık bir teori geliştirilerek denklemlerin x_2(veya z) değişkenlerine bağlılıkları elimine edilmiş ve böylece çözümün elde edilebilmesi kolaylaştırılmıştır.

IV. Yaklaşık Teori

Yaklaşık teorinin geliştirilmesinde Hu-Washizu (3) tarafından geliştirilen bir varyasyon prensibi kullanılmıştır. Çalışmanın bütünlüğünü bozmamak için, bu varyasyon prensibi bu kısımda kısaca özetlenecektir.

V hacminin S yüzeyi ile sınırlandığı düşünülsün. Birim hacme tekabül eden x_i kütlesel kuvvetleri V hacmi içerisinde, gerilme vektörleri $t_i^{(n)} = \bar{t}_i$ S yüzeyinin bir kısmı olan S_t de, ve yer değiştirmeler, $u_i = \bar{u}_i$, ise sınır yüzeyinin geri kalan kısmı olan S_u'da belirlenmiştir. Aşağıdaki Hu-Washizu fonksiyoneli düşünülsün:

$$J_{HW}\{\epsilon_{ij}, u_i\} = \int_V [x_i u_i - U(\epsilon_{ij}) + \tau_{ij}\epsilon_{ij} - \tau_{ij} u_{i,j}] dv + \tag{4.1}$$

$$+ \int_{S_t} \bar{t}_i u_i \, dS + \int_{S_u} \tau_{ij} u_j (u_i - \bar{u}_i) dS.$$

Burada

$$U(\epsilon_{ij}) = \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \lambda \epsilon_{mm} \epsilon_{kk} \tag{4.2}$$

şekil değiştirme potansiyelidir. (4.1) le tanımlanan fonksiyonelde $\tau_{ij}, \epsilon_{ij}, u_i$ bağımsız durum değişkenleri (independent state variables) dır. Kabul edilebilir durum (state) için τ_{ij} ve ϵ_{ij} 'in simetrik olmaları icabetmektedir.

Teorem: Bütün kabul edilebilir durumlar içerisinde V içerisinde lineer elastisite ana denklemlerini ve S_t üzerinde $t_i^{(n)} = \bar{t}_i$ ve S_u üzerinde $u_i = \bar{u}_i$ sınır şartlarını sağlayan durum

$$\delta J_{HW} = 0$$

ifadesiyle verilir. Burada δJ_{HW}, J_{HW} nin birinci varyasyonunu gösterir.

Yaklaşık teorinin geliştirilmesinde, yer değiştirme bileşenleri aşağıda gösterilen serilerle ifade edilecektir.

Şerit Yük

$$u_1=\sum_{j=1}^{\infty} x_2^{2(j-1)} m_j(x_1),$$

$$u_2=\sum_{j=1}^{\infty} x_2^{(2j-1)} h_j(x_1),$$

$$u_3=0 ,$$

Eksenel Simetrik Yük

$$u_r=\sum_{j=1}^{\infty} z^{2(j-1)} f_j(r),$$

$$u_z=\sum_{j=1}^{\infty} z^{(2j-1)} g_j(r), \qquad (4.3)$$

$$u_\theta=0.$$

Burada m_j ve h_j sadece x_1'in fonksiyonları; f_j ve g_j ise sadece r'nin fonksiyonları olup bu büyüklüklere genelleştirilmiş yer değiştirme bileşenleri olarak bakılabilir. (4. 3) ifadelerinin yazılmasında problemin simetri, antisimetri durumları göz önüne alınmıştır. Bu serilerde her terim şekil değiştirmenin bir modunu (mode) temsil etmektedir. u_1 ve u_r için iki terim, u_2 ve u_z için ise bir terim alınırsa

Şerit Yük

$$u_1=m_1(x_1)+x_2^2\, m_2(x_1),$$

$$u_2=x_2\, h_1(x_1),$$

$$u_3=0 ,$$

Eksenel Simetrik Yük

$$u_r=f_1(r)+z^2 f_2(r)$$

$$u_z=z\, g_1(r), \qquad (4.4)$$

$$u_\theta=0.$$

(3.1) denkleminde verilen şekil-yer değiştirme ifadeleri (4. 4) denklemiyle birlikte kullanılırsa

Şerit Yük

$$\epsilon_{11}=m_{1,1}+x_2^2\, m_{2,1} ,$$

$$\epsilon_{22}=h_1 ,$$

$$\epsilon_{12}=\frac{1}{2}(2m_2+h_{1,1})x_2 ,$$

Eksenel Simetrik Yük

$$\epsilon_{rr}=f_{1,r}+z^2 f_{2,r} , \qquad (4.5)$$

$$\epsilon_{\theta\theta}=\frac{1}{r} f_1+\frac{z^2}{r} f_2 ,$$

$$\epsilon_{zz}=g_1 ,$$

$$\epsilon_{rz}=\frac{z}{2}(g_{1,r}+2f_2),$$

elde edilir.

Aşağıdaki genelleştirilmiş yer değiştirme bileşenleri ifadeleri

Şerit Yük

$$\Gamma_1=m_{1,1} ,$$

$$\Gamma_2=m_{2,1} ,$$

$$\Gamma_3=h_1 ,$$

$$\Gamma_4=m_2+\frac{1}{2} h_{1,1} ,$$

Eksenel Simetrik Yük

$$\Gamma_1=f_{1,r} ,$$

$$\Gamma_2=f_{2,r} ,$$

$$\Gamma_3=g_1 , \qquad (4.6)$$

$$\Gamma_4=\frac{1}{2}(g_{1,r}+2f_2),$$

$$\Gamma_5=\frac{1}{r} f_1 ,$$

$$\Gamma_6=\frac{1}{r} f_2$$

kullanılırsa (4.5) ifadeleri

Şerit Yük

$$\epsilon_{11} = \Gamma_1 + x_2^2\,\Gamma_2\,,$$

$$\epsilon_{22} = \Gamma_3\,,$$

$$\epsilon_{12} = x_2\,\Gamma_4\,,$$

Eksenel Simetrik Yük

$$\epsilon_{rr} = \Gamma_1 + Z^2\,\Gamma_2\,,$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \Gamma_5 + Z^2\,\Gamma_6\,, \tag{4.7}$$

$$\epsilon_{zz} = \Gamma_3\,,$$

$$\epsilon_{rz} = Z\,\Gamma_4\,,$$

şeklini alır.

(4.1) ifadesinin sağ tarafındaki entegral içerisinde görülen terimler, genelleştirilmiş şekil ve yer değiştirme bileşenleri cinsinden hesap edilirse

Şerit yük için:

$$\begin{aligned}
U^{(k)}(\epsilon_{ij}) &= \left[\mu^{(k)} + \frac{1}{2}\lambda^{(k)}\right]\left[\Gamma_1^2 + 2x_2^2\,\Gamma_1\Gamma_2 + x_2^4\,\Gamma_2^2 + \Gamma_3^2\right] + \\
&\quad + 2\mu^{(k)} x_2^2\,\Gamma_4^2 + \lambda^{(k)}\left[\Gamma_1\Gamma_3 + x_2^2\,\Gamma_2\Gamma_3\right], \\
\tau_{ij}\,\epsilon_{ij} &= \tau_{11}\,\Gamma_1 + x_2^2\,\tau_{11}\,\Gamma_2 + \tau_{22}\,\Gamma_3 + 2\,x_2\,\tau_{12}\,\Gamma_4\,, \\
\tau_{ij}\,u_{i,j} &= \tau_{11}\,m_{1,1} + x_2^2\,\tau_{11}\,m_{2,1} + \tau_{22}\,h_1 + x_2\,\tau_{12}\left[2m_2 + h_{1,1}\right],
\end{aligned} \tag{4.8}$$

eksenel simetrik yük için:

$$\begin{aligned}
U^{(k)}(\epsilon_{ij}) &= \left[\mu^{(k)} + \frac{1}{2}\lambda^{(k)}\right]\left[\Gamma_1^2 + 2Z^2\Gamma_1\Gamma_2 + Z^4\Gamma_2^2 + \Gamma_5^2 + 2Z^2\Gamma_5\Gamma_6 + \Gamma_3^2 + Z^4\Gamma_6^2\right] + \\
&\quad + 2\mu^{(k)}\left[\Gamma_1\Gamma_5 + Z^2(\Gamma_1\Gamma_6 + \Gamma_2\Gamma_5) + Z^4\Gamma_2\Gamma_6 + \Gamma_1\Gamma_3 + Z^2\Gamma_2\Gamma_3 + \Gamma_3\Gamma_5 + Z^2\,\Gamma_3\Gamma_6\right], \\
\tau_{ij}\,\epsilon_{ij} &= \tau_{rr}\,\Gamma_1 + Z^2\,\tau_{rr}\,\Gamma_2 + \tau_{\theta\theta}\Gamma_5 + Z^2\,\tau_{\theta\theta}\Gamma_6 + \tau_{zz}\,\Gamma_3 + 2Z\,\tau_{rz}\,\Gamma_4\,, \\
\tau_{ij}\,u_{i,j} &= \tau_{rr}\left(f_{1,r} + Z^2 f_{2,r}\right) + \tau_{\theta\theta}\left(\frac{f_1}{r} + Z^2\frac{f_2}{r}\right) + \tau_{zz}\,g_1 + \tau_{rz}\left(2Zf_2 + Z\,g_{1,r}\right),
\end{aligned} \tag{4.9}$$

elde edilir.

(4.1) fonksiyonelinin, şerit yük probleminde dikdörtgensel bir hacım elemanı, eksenel simetrik yük probleminde ise dairesel silindirik bir eleman için yazılması icap etmektedir. Dikdörtgensel hacim elemanı x_3 yönünde birim uzunluğa haiz olup $x_1 = x_1^{(1)}$, $x_1 = x_1^{(2)}$, $x_2 = 0$, ve $x_2 = H$ düzlemleriyle sınırlanmıştır. Dairesel silindirik eleman ise Z eksenli ve r^1 yarıçapında olup, $Z = H, Z = 0$ düzlemleriyle sınırlanmıştır. Bu elemanlar için (4.1) fonksiyoneli, kütlesel kuvvetlerin olmaması ve üst ve alt yüzeydeki sınır şartlarının kullanılması halinde, şerit yük için:

$$J_{HW}=\int_{x_1^{(1)}}^{x_1^{(2)}}\left[\int_0^H\left(-U(\epsilon_{ij})+\tau_{ij}\epsilon_{ij}-\tau_{ij}u_{i,j}\right)dx_2\right]dx_1+\int_{x_1^{(1)}}^{x_1^{(2)}}\left|p(x_1)u_2\right|_{x_2=H}dx_1+ \tag{4.10}$$

$$+\left(x_1=x_1^{(1)} \text{ ve } x_1=x_2^{(2)}\right.$$

deki sınır şartları),

eksenel simetrik yük için:

$$J_{HW}=\int_0^{2\pi}\int_0^{r'}\left\{\int_0^H\left[-U(\epsilon_{ij})+\tau_{ij}\epsilon_{ij}-\tau_{ij}u_{i,j}\right]dz\right\}r\,dr\,d\theta+ \tag{4.11}$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{r'}-p\,u_z\Big|_{z=H}r\,dr\,d\theta+(r=r' \quad \text{yüzeyindeki sınır şartları})$$

olarak bulunur.

(4.8) ve (4.9) denklemleri (4.10) ve (4.11) denklemleriyle birlikte kullanılırsa

şerit yük için:

$$J_{HW}=\int_{x_1^{(1)}}^{x_1^{(2)}}\left[-\bar{U}(\Gamma_i)+B(F_i,\Gamma_i)-T(F_i,A_i)\right]dx_1-\int_{x_1^{(1)}}^{x_1^{(2)}}pHh_1\,dx_1+ \tag{4.12}$$

$$+\left[x_1=x_1^{(1)} \text{ ve } x_1=x_1^{(2)} \quad \text{sınır şartları}\right],$$

eksenel simetrik yük için:

$$J_{HW}=\int_0^{2\pi}\int_0^{r'}\left[-\bar{U}(\Gamma_i)+B(F_i,\Gamma_i)-T(F_i,A_i)\right.r\,dr\,d\theta-\int_0^{2\pi}\int_0^{r'}pHg_1\,r\,dr\,d\theta+ \tag{4.13}$$

$$+\left[r=r' \text{ yüzeyindeki sınır şartları}\right]$$

elde edilir.

Şerit yük problemi için (4.12 denklemi):

$$\bar{U}(\Gamma_i)=\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\mu^{(k)}+\frac{1}{2}\lambda^{(k)}\right)\left[h\Gamma_1^2+2\frac{h^2}{3}\Gamma_1\Gamma_2\left(k^3-(k-1)^3\right)+\frac{h^2}{6}\Gamma_2^2\left(k^5-(k-1)^5\right)+h\Gamma_3^2\right]+\right.$$

$$\left.+2\mu^{(k)}\frac{h^3}{3}\Gamma_4^2\left(k^3-(k-1)^3\right)+\lambda^{(k)}\left[h\Gamma_1\Gamma_3+\frac{h^3}{3}\Gamma_2\Gamma_3\left(k^3-(k-1)^3\right)\right]\right\},$$

$$B(F_i,\Gamma_i)=F_1\Gamma_1+F_2\Gamma_2+F_3\Gamma_3+F_4\Gamma_4,$$

$$T(F_i,A_i)=F_1m_{1,1}+F_2m_{2,1}+F_3h_1+F_4(2m_2+h_{1,1}),$$

$$F_1=\int_0^H\tau_{11}\,dx_2, \tag{4.14}$$

$$F_2=\int_0^H x_2^2\,\tau_{11}\,dx_2\,,$$

$$F_3=\int_0^H \tau_{22}\,dx_2\,,$$

$$F_4=\int_0^H x_2\,\tau_{12}\,dx_2$$

ve

$$(A_i)=(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$$

$$=(m_{1,1}\,;\,m_{2,1}\,;\,h_1\,;\,m_2\,;\,h_{1,1}),$$

eksenel simetrik yük problemi için (4.13 denklemi):

$$\bar{U}(\Gamma_i)=\sum_{k=1}^{n}\Big\{\big(\mu^{(k)}+\frac{1}{2}\lambda^{(k)}\big)\Big[h\Gamma_1^2+\frac{2h^3}{3}\Gamma_1\Gamma_2\big(k^3-(k-1)^3\big)+\frac{h^5}{5}\Gamma_2^2\big(k^5-(k-1)^5\big)+h\Gamma_5^2$$

$$+\frac{2h^3}{3}\Gamma_5\Gamma_6\big(k^3-(k-1)^3\big)+\frac{h^5}{5}\Gamma_6^2\big(k^5-(k-1)^5\big)+h\Gamma_3^2\Big]+2\mu^{(k)}\frac{h^3}{3}\Gamma_4^2\big(k^3-(k-1)^3\big)+$$

$$+\lambda^{(k)}\Big[h\Gamma_1\Gamma_5+\frac{h^3}{3}\big(\Gamma_1\Gamma_6+\Gamma_2\Gamma_5\big)\big(k^3-(k-1)^3\big)+\frac{h^5}{5}\Gamma_2\Gamma_6\big(k^5-(k-1)^5\big)+h\Gamma_1\Gamma_3+$$

$$+\frac{h^3}{3}\Gamma_2\Gamma_3\big(k^3-(k-1)^3\big)+h\Gamma_3\Gamma_5+\frac{h^3}{3}\Gamma_3\Gamma_6\big(k^3-(k-1)^3\big)\Big\},$$

$$B(F_i,\Gamma_i)=F_1\Gamma_1+F_2\Gamma_2+F_3\Gamma_3+F_4\Gamma_4+F_5\Gamma_5+F_6\Gamma_6\,, \qquad (4.15)$$

$$T(F_i,A_i)=F_1 f_{1,r}+F_2 f_{2,r}+F_5\frac{f_1}{r}+F_6\frac{f_2}{r}+F_3 g_1+F_4\big(f_2+\frac{1}{2}g_{1,r}\big),$$

$$F_1=\int_0^H \tau_{rr}\,dz\,,$$

$$F_2=\int_0^H z^2\,\tau_{rr}\,dz\,,$$

$$F_3=\int_0^H \tau_{zz}\,dz\,,$$

$$F_4=\int_0^H 2z\,\tau_{rz}\,dz\,,$$

$$F_5=\int_0^H \tau_{\theta\theta}\,dz\,,$$

$$F_6=\int_0^H z^2\,\tau_{\theta\theta}\,dz,$$

ve

$$(A_i)=(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6),$$

$$=(f_{1,r}\,;\,f_{2,r}\,;\,g_{1,r}\,;\,f_1\,;\,f_2\,;\,g_1).$$

(4.12) ve (4.13) denklemlerinin birinci varyasyonu alındığı zaman şerit yük için:

$$\delta J_{HW} = \int_{x_1^{(1)}}^{x_1^{(2)}} \left\{ \left(-\frac{\partial \bar{U}}{\partial \Gamma_i} + \frac{\partial B}{\partial \Gamma_i}\right)\delta\Gamma_i + \left(\frac{\partial B}{\partial F_i} - \frac{\partial T}{\partial F_i}\right)\delta F_i - \frac{\partial T}{\partial A_i} - \rho H \delta h_1 \right\} dx_1 + \tag{4.16}$$

$+ \left[x_1 = x_1^{(1)} \text{ ve } x_1 = x_1^{(2)} \right.$ deki sınır şartları),

eksenel simetrik yük için:

$$\delta J_{HW} = \int_0^{2\pi}\int_0^{r'} \left[-\frac{\partial \bar{U}}{\partial r_i} + \frac{\partial B}{\partial \Gamma_i} \right]\delta\Gamma_i + \left(\frac{\partial B}{\partial F_i} - \frac{\partial T}{\partial F_i}\right)\delta F_i - \frac{\partial T}{\partial A_i}\delta A_i - H\rho\delta q_1 \Big] r\,dr\,d\theta + \tag{4.17}$$

$+ \left[r = r' \right.$ yüzeyindeki sınır şartları$\left.\right]$

elde edilir.

Kısmi entegrasyon kullanılırsa, $\delta J_{HW} = 0$ şartından

	şerit yük	eksenel simetrik yük
denge denklemleri	$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial A_1}\right) = 0,$	$\frac{\partial T}{\partial A_4} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial A_1}\right) = 0,$
	$\frac{\partial T}{\partial A_4} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial T}{\partial A_2}\right) = 0,$	$\frac{\partial T}{\partial A_5} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial A_2}\right) = 0,$ (4.18)
	$\frac{\partial T}{\partial A_3} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial T}{\partial A_5}\right) + \rho h = 0,$	$\frac{\partial T}{\partial A_6} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial A_3}\right) + H\rho = 0,$
bünye denklemleri	$-\frac{\partial \bar{U}}{\partial \Gamma_i} + \frac{\partial B}{\partial \Gamma_i} = 0, (i=1,\ldots,4),$	$-\frac{\partial \bar{U}}{\partial \Gamma_i} + \frac{\partial B}{\partial \Gamma_i} = 0, (i=1,\ldots,6)$
şekil-yer değiştirme denklemleri	$\frac{\partial B}{\partial F_i} - \frac{\partial T}{\partial F_i} = 0, (i=1,\ldots,4),$	$\frac{\partial B}{\partial F_i} - \frac{\partial T}{\partial F_i} = 0 (i=1,\ldots,6),$

bulunur.

(4.18) de (4.14) ve (4.15) de verilen ifadeler yerine konulursa

	şerit yük	eksenel simetrik yük
denge denklemleri	$F_{1,1} = 0,$	$\frac{F_1}{r} + F_{1,r} - \frac{F_5}{r} = 0,$
	$F_{2,1} - 2F_4 = 0,$	$\frac{F_2}{r} + F_{2,r} - \frac{F_6}{r} - F_4 = 0,$
	$-F_3 + F_{4,1} - \rho H = 0,$	$-F_3 + \frac{1}{2}F_{4,r} + \frac{1}{2}\frac{F_4}{r} - H\rho = 0,$

$$
\text{bünye denklemleri}\qquad
\begin{array}{ll}
F_1=A\Gamma_1+B\Gamma_2+C\Gamma_3, & F_1=A\Gamma_1+B\Gamma_2+C\Gamma_3+C\Gamma_5+E\Gamma_6,\\
F_2=B\Gamma_1+D\Gamma_2+E\Gamma_3, & F_2=B\Gamma_1+D\Gamma_2+E\Gamma_3+E\Gamma_5+F\Gamma_6,\\
F_3=C\Gamma_1+E\Gamma_2+A\Gamma_3, & F_3=C\Gamma_1+E\Gamma_2+A\Gamma_3+C\Gamma_5+E\Gamma_6,\\
F_4=2G\Gamma_4, & F_4=4G\Gamma_4,\\
 & F_5=C\Gamma_1+E\Gamma_2+C\Gamma_3+A\Gamma_5+B\Gamma_6,\\
 & F_6=E\Gamma_1+F\Gamma_2+E\Gamma_3+B\Gamma_5+D\Gamma_6,
\end{array}
\qquad (4.19)
$$

	Şerit yük	eksenel simetrik yük
Şekil-yer değiştirme denklemleri	$\Gamma_1=m_{1,1}$,	$\Gamma_1=f_{1,r}$,
	$\Gamma_2=m_{2,1}$,	$\Gamma_2=f_{2,r}$,
	$\Gamma_3=h_1$,	$\Gamma_3=g_1$,
	$\Gamma_4=m_2+\frac{1}{2}h_{1,1}$,	$\Gamma_4=\frac{1}{2}(g_{1,r}+2f_2)$,
		$\Gamma_5=\frac{1}{r}f_1$,
		$\Gamma_6=\frac{1}{r}f_2$.

Burada şerit ve eksenel simetrik yük için

$$
A=h\sum_{k=1}^{n}(2\mu^{(k)}+\lambda^{(k)}),\qquad B=\frac{h^3}{3}\sum_{k=1}^{n}(2\mu^{(k)}+\lambda^{(k)})(k^3-(k-1)^3),\qquad (4.20)
$$

$$
C=h\sum_{k=1}^{n}\lambda^{(k)},\qquad D=\frac{h^5}{5}\sum_{k=1}^{n}(2\mu^{(k)}+\lambda^{(k)})(k^5-(k-1)^5),
$$

$$
E=\frac{h^3}{3}\sum_{k=1}^{n}\lambda^{(k)}(k^3-(k-1)^3),\qquad G=\frac{h^3}{3}\sum_{k=1}^{n}\mu^{(k)}(k^3-(k-1)^3),
$$

ve eksenel simetrik yük için

$$
F=\frac{h^5}{5}\sum_{k=1}^{n}\lambda^{(k)}(k^5-(k-1)^5).
$$

(4.19) daki bünye ve şekil-yer değiştirme denge denklemlerinde yerine konursa

şerit yük için

$$A\, m_{1,11} + B\, m_{2,11} + C\, h_{1,1} = 0\,,$$

$$B\, m_{1,11} + D\, m_{2,11} + (E-2G)\, h_{1,1} - 4G\, m_2 = 0\,, \qquad (4.21)$$

$$G\, h_{1,11} - C\, m_{1,1} + (2G-E)\, m_{2,1} - A\, h_1 - \rho H = 0\,,$$

ve eksenel simetrik yük için

$$A \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r f_1)\right] + B \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r f_2)\right] + C\, g_{1,r} = 0\,,$$

$$B \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r f_1)\right] + D \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r f_2)\right] - 4G f_2 + (E-2G)\, g_{1,r} = 0,$$

$$(2G-E)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r f_2) - C\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r f_1) - A g_1 + G\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dg_1}{dr}\right) - H\rho = 0, \qquad (4.22)$$

elde edilir.

(4.21) ve (4.22) girişimli (coupled) denklem takımları, şerit yük ve eksenel simetrik yük problemlerinin genelleştirilmiş yer değiştirmeler cinsinden ifade edilmiş olan ana denklemlerdir.

V. Tek Elastik Tabaka İçin Örnek Problem

Bu kısımda, H kalınlığında, sürtünmesiz ve rijit bir temele oturan tek elâstik tabakadaki gerilme ve yer değiştirme dağılımları hem kati hem de yaklaşık metodlarla her iki problem (2a genişliğinde uniform şerit ve a yarı çapında uniform eksenel simetrik yüklere maruz) için elde edilmiştir. (Şekil 3). Uniform şerit yük problemi için x_1 yönünde Fourier sinüs-kosinüs transformları, uniform eksenel simetriye sahip yük problemi için-de r yönünde Hankel transformu kullanılmıştır. Yaklaşık ve kesin metod neticeleri karşılaştırılmıştır.

A Kesin Metodla Çözüm

Problemlerin simetri şartları göz önüne alınırsa, elâstisite ana denklemlerini sağlayan yer değiştirme bileşenleri Fourier ve Hankel entegralleri yardımıyla aşağıda gösterildiği gibi ifade edilebilirler:

Şerit yük için:

$$u_1(x_1,x_2)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[(A_1+A_2x_2)e^{-\alpha x_2}+(A_3+A_4x_2)e^{\alpha x_2}\right]\sin\alpha x_1\,d\alpha,$$

$$u_2(x_1,x_2)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\left[A_1+\left(\frac{k}{\alpha}+x_2\right)A_2\right]e^{-\alpha x_2}+\left[-A_3+\left(\frac{k}{\alpha}-x_2\right)e^{\alpha x_2}\right\}\cos\alpha x_1\,d\alpha, \tag{5.1}$$

eksenel simetrik yük için:

$$u_r(r,z)=\int_0^{\infty}\alpha\left\{\left[-C_1-\left(\frac{k}{\alpha}+z\right)C_2\right]e^{\alpha z}+\left[C_3-\left(\frac{k}{\alpha}-z\right)C_4\right]e^{-\alpha z}\right\}J_1(\alpha r)\,d\alpha,$$

$$u_z(r,z)=\int_0^{\infty}\alpha\left[(C_1+zC_2)e^{\alpha z}+(C_3+zC_4)e^{-\alpha z}\right]J_0(\alpha r)\,d\alpha. \tag{5.2}$$

Denklem (5.2) de J_0 ve J_1 sıfır ve birinci dereceden Bessel fonksiyonlarını göstermektedir. (5.1) ve (5.2) denklemlerinde $A_i\ (i=1-4)$ Fourier transformu değişkeni (α), $C_i\ (i=1-4)$ ise Hankel transformu değişkeni

(α)'nin fonksiyonları olup değerleri (3.2) sınır şartlarından bulunmuştur. Aynı denklemlerde $k=3-4\nu$ ve ν Poisson oranıdır. Gerilme bileşenleri $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{12}, \tau_{33}$ (şerit yük için) ve $\tau_{rr}, \tau_{\theta\theta}, \tau_{zz}, \tau_{rz}$ (eksenel simetrik yük için) (3.1) deki bünye denklemleri kullanılarak elde edilmiştir. Yer değiştirme ve gerilme bileşenleri ifadelerinde görülen (α) entegraller Simpson nümerik entegrasyon tekniği (7) ile bulunmuştur.

B. Yaklaşık Metodla Çözüm

Problemlerin simetri özellikleri göz önüne alınarak (4.21) denklemlerinin ilk ikisinin Fourier-sinüs, sonuncusunun Fourier-kosinüs transformu; (4.22) denklemlerinin ilk ikisinin birinci dereceden ve sonuncuşunun sıfırıncı dereceden Hankel transformları alınırsa

şerit yük için:

$$\begin{bmatrix} A\alpha^2 & B\alpha^2 & C\alpha \\ B\alpha^2 & D\alpha^2+4G & (E-2G)\alpha \\ C\alpha & (E-2G)\alpha & A+G\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1^s \\ m_2^s \\ h_1^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Hp^c \end{bmatrix} \qquad (5.3)$$

eksenel simetrik yük için:

$$\begin{bmatrix} A\alpha^2 & B\alpha^2 & C\alpha \\ B\alpha^2 & D\alpha^2+4G & (E-2G)\alpha \\ C\alpha & (E-2G)\alpha & A+G\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ g_1^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Hp^0 \end{bmatrix} \qquad (5.4)$$

ve h_1^c, m_α ve h_1'in Fourier- sinüs
bulunur. (5.3) de m_α^s $(\alpha=1,2)$ ve p^c ise üst yüzeydeki üniform şerit yükün ko-
ve kosinüs transformlarını ve f_1^1, f_2^1 ; f_1 ve f_2'nin birinci de-
sinüs transformunu; denklem (5.4) de g_1^0, g_1'in sıfırıncı dereceden Hankel trans-
receden Hankel transformlarını, p_0 ise üniform dairesel yükün sıfırıncı dereceden Hankel trans-
formunu ve
formunu göstermektedir. Üniform şerit ve dairesel yükler için

$$p^c = \int_0^\infty p_0 \cos \alpha x_1 \, dx_1 = p_0 \sin \alpha a / \alpha \qquad (5.5)$$

$$p^0 = \int_0^\infty r \, p_0 J_0(\alpha r) \, dr = p_0 a J_1(\alpha a) / \alpha$$

elde edilir.

(4.4) denklemleri, (3.1) denklemlerindeki şekil yer değiştirme ifadeleri, bünye denklemleri kullanılırsa şerit yük için:

$$u_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (m_1^s + x_2^2\, m_2^s) \sin \alpha x_2 \, d\alpha ,$$

$$u_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty x_2\, h_1^c \cos \alpha x_1 \, d\alpha , \tag{5. 6}$$

ve

$$\frac{1}{2\mu} \tau_{11} = \frac{2}{\pi(1-2\nu)} \int_0^\infty \left[\alpha (1-\nu)(m_1^s + x_2^2\, m_2^s + \nu h_1^c \right] \cos \alpha x_1 \, d\alpha ,$$

$$\frac{1}{2\mu} \tau_{22} = \frac{2}{\pi(1-2\nu)} \int_0^\infty \left[(1-\nu)\, h_1^c + \alpha\, \nu\, (m_1^s + x_2^2\, m_2^s) \right] \cos \alpha x_1 \, d\alpha , \tag{5. 7}$$

$$\frac{1}{2\mu} \tau_{12} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (m_2^s - \frac{1}{2} \alpha\, h_1^c) \sin \alpha x_1 \, d\alpha ,$$

$$\tau_{33} = \nu (\tau_{11} + \tau_{22}) ,$$

eksenel simetrik yük için:

$$u_r = \int_0^\infty \alpha \left[f_1^1 + z^2 f_2^1 \right] J_1(\alpha r)\, d\alpha ,$$

$$u_z = \int_0^\infty \alpha\, z\, g_1^0\, J_0(\alpha r)\, d\alpha , \tag{5. 8}$$

ve

$$\tau_{rr} = \int_0^\infty \alpha \left\{ \left[(f_1^1 + z^2 f_2^1)\, \alpha (2\mu + \lambda) + \lambda g_1^0 \right] J_0(\alpha r) - \right.$$

$$\left. - \frac{2\mu}{r} (f_1^1 + z^2 f_2^1) J_1(\alpha r) \right\} d\alpha ,$$

$$\tau_{\theta\theta} = \int_0^\infty \alpha \left\{ (f_1^1 + z^2 f_2^1) \frac{2\mu}{r} J_1(\alpha r) + \left[\lambda \alpha (f_1^1 + z^2 f_2^1) + \lambda g_1^0 \right] J_0(\alpha r) \right\} d\alpha ,$$

$$\tau_{zz} = \int_0^\infty \alpha \left\{ (2\mu + \lambda)\, g_1^0 + \lambda \alpha\, (f_1^1 + z^2 f_2^1) J_0(\alpha r)\, d\alpha ,\right.$$

$$\tau_{zr} = \mu z \int_0^\infty \alpha\, (2 f_2^1 - \alpha\, g_1^0) J_1(\alpha r)\, d\alpha ,$$

bulunur.

Şerit yük probleminin kesin ve yaklaşık teorilerle bulunan nümerik çözüm sonuçları Şekil (4-9)'da ve eksenel simetrik yük problemi için ise bu karşılaştırma Şekil (10-14)'de gösterilmiştir. Her iki problem içinde $\nu = .3$ ve $H = a$ alınmıştır. Üst yüzey nümerik hesaplar yönünden hassas olduğu için yer değiştirme ve gerilme dağılımları özellikler üst yüzeyde karşılaştırılmışlardır. Şekillerden görüleceği üzere yaklaşık teori sonuçları, kesin teori sonuçlarına oldukça yakındır.

VI. Konsolidasyon Probleminde Visko-Elastik Malzeme Fonksiyonlarının Formları

Deneysel çalışmalar, zeminin hacimsel şekil değiştirmesinin Kelvin modeli ile, kayma şekil değiştirmesinin ise Maxwell modeli ile tanımlanmasının uygun olacağını göstermiştir.

A. Hacimsel Şekil Değiştirme

Kelvin modeli ile ilgili gevşeme (relaxation) fonksiyonu $t=o$ zamanında sonsuz olduğundan (denklem 2.12), bu çalışmada hacimsel şekil değiştirme, G_o yayı (şekil 15) çok sert (G_o yay sabiti G_V yay sabitine nazaran çok büyük) olan standart lineer modelle temsil edilmiştir.

Konsolidasyon zamanı drenaj yolunun uzunluğuna bağlıdır. Eğer temel geçirimsiz ise, drenaj ancak yukarı tabakalar yönünde olabilmekte ve Terzaghi'nin bir boyutlu konsolidasyon teorisine göre (2), konsolidasyon zamanının derinliğin karesi ile orantılı olacağı kabul edilmektedir. Bu durumda, "bulk"-sünme modülü $K'(t)$. derinliğin, $(H-x_2)$, fonksiyonu olmakta ve aşağıda gösterilen ifadeyle verilmektedir:

$$K'(t)=\frac{1}{G_o}+\frac{1}{G_v}\left[1-\exp\left(\frac{-3a^2t}{2\tau_v^o(H-x_2)^2}\right)\right] \tag{6.1}$$

Bu denklemde G_o yardımcı yay sabitini; G_V yağ kutusuna paralel bağlı yay sabitini; $\tau_v^o=\eta_v/G_v$ yüzeyden a derinliğindeki gevşeme zamanını; η_v ise viskozite sabitini göstermektedir (Şekil 15) . (2.19) ve (6.1) denklemleri yardımıyla "bulk"-gevşeme fonksiyonu, $K(t)$,

$$K(t)=\frac{G_o}{G_o+G_v}\left[G_v+G_o\cdot\exp\left(\frac{-3(G_o+G_v)a^2}{2G_v\tau_v^o(H-x_2)^2}t\right)\right] \tag{6.2}$$

olarak bulunur. $K(t)$ nin her ince tabakada sabit olduğu kabul edilmiş olduğundan, k tabakası için

$$K^{(k)}(t)=\frac{G_0}{G_0+G_v}\left[G_v+G_0\cdot exp\left(\frac{-3(G_0+G_v)a^2}{2G_v\tau_v^0\alpha_k^2h^2}t\right)\right] \tag{6.3}$$

bulunur. Burada $k=1, 2, \ldots, n$ ve

$$\alpha_k=\frac{2n-2k+1}{2}.$$

B. Kayma Şekil Değiştirmesi

Yukarıda bahsedildiği üzere, kayma şekil değiştirmesi Maxwell modeli ile tanımlanmaktadır. Yay sabiti G_D ve viskozite katsayısı η_D olan (Şekil 16) Maxwell modeli için kayma-sünme fonksiyonu

$$\mu'(t)=\frac{1}{G_D}+\frac{1}{\eta_D}t \tag{6.4}$$

olarak elde edilir. (2.22) ve (6.4) denklemleri yardımıyla, kayma-gevşeme fonksiyonu, $\mu(t)$,

$$\mu(t)=G_D\,exp(-t/\tau_D) \tag{6.5}$$

olarak bulunur. Burada, $\tau_D=\eta_D/G_D$ gecikme (retardation) zamanıdır.

Elastisite teorisindeki $\lambda=k-\frac{2}{3}\mu$ Lamé sabitinin visko-elâstik karşıtı benzerlik prensibi kullanılarak

$$\lambda^{(k)}(t)=\frac{G_0}{G_0+G_v}\left[G_v+G_0\,exp\left(\frac{-3(G_0+G_v)a^2}{2G_v\tau_v^0\alpha_k^2h^2}t\right)\right]-\frac{2}{3}G_D\,exp(-t/\tau_D) \tag{6.6}$$

şeklinde bulunmuştur.

VII. Çok Tabakalı Visko-Elastik Ortam İçin Yaklaşık Teori

Çok tabakalı visko-elâstik ortam için yaklaşık teorinin geliştirilmesinde benzerlik prensibi kullanılacaktır.

Elâstik yaklaşık teori ana denklemlerinin (4.21, 4.22) Laplace transformu alınır elâstik malzeme sabitleri karşıt viskoelastik malzeme fonksiyonları Laplace transformu ve transform parametresi çarpımıyla değiştirilirse

şerit yük için

$$
\begin{aligned}
&A^L m^L_{1,11} + B^L m^L_{2,11} + C^L h^L_{1,1} = 0 , \\
&B^L m^L_{1,11} + D^L m^L_{2,11} + (E^L - 2G^L) h^2_{1,1} - 4G^L m^L_2 = 0 , \\
&G^L h^L_{1,11} - C^L m^L_{1,1} + (2G^L - E^L) m^L_{2,1} - A^L h^L_1 - \rho H \frac{1}{s} = 0 ,
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

eksenel simetrik yük için

$$
\begin{aligned}
&A^L \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r f^L_1)\right] + B^L \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r f^L_2)\right] + C^L g^L_{1,r} = 0 , \\
&B^L \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r f^L_1)\right] + D^L \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r f^L_2)\right] + 4G^L f^L_2 + (E^L - 2G^L) g^L_{1,r} = 0 , \\
&(2G^L - E^L)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r f^L_2) - C^L \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r f^L_1) - A^L g^L_1 + G^L \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{d g^L_1}{dr}\right) - \frac{H\rho}{s} = 0
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

elde edilir, (7.1) ve (7.2) denklemleri visko-elâstik yaklaşık teorinin ana denklemleri olup burada

$$
A^L = s h \sum_{k=1}^{n} \left(2\mu^{(k)^L} + \lambda^{(k)^L}\right) ,
$$

$$
B^L = s \frac{h^3}{3} \sum_{k=1}^{n} \left(2\mu^{(k)^L} + \lambda^{(k)^L}\right)\left(k^3 - (k-1)^3\right) ,
$$

$$C^L = sh\sum_{k=1}^{n} \lambda^{(k)^L},$$

$$D^L = s\frac{h^3}{5}\sum_{k=1}^{n} (2\mu^{(k)^L} + \lambda^{(k)^L})(k^5 - (k-1)^5),$$

$$E^L = s\frac{h^3}{3}\sum_{k=1}^{n} \lambda^{(k)^L}(k^3 - (k-1)^3), \qquad (7.3)$$

$$G^L = s\frac{h^3}{3}\sum_{k=1}^{n} \mu^{(k)^L}(k^3 - (k-1)^3),$$

ve eksenel simetrik yük için

$$F^L = s\frac{h^5}{5}\sum_{k=1}^{n} \lambda^{(k)^L}(k^5 - (k-1)^5).$$

Simetri durumları gözönüne alınarak, şerit yük problemi için x_1 yönünde Fourier sinüs, Fourier kosinüs transformları, eksenel simetrik yük problemi için radyal yönde Hankel transformu kullanılırsa

şerit yük için

$$\begin{bmatrix} A^L\alpha^2 & B^L\alpha^2 & C^L\alpha \\ B^L\alpha^2 & D^L\alpha^2+4G^L & (E^L-2G^L)\alpha \\ C^L\alpha & (E^L-2G^L)\alpha & G^L\alpha^2+A^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1^{LS} \\ m_2^{LS} \\ h_1^{LC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{hp^c}{s} \end{bmatrix} \qquad (7.4)$$

eksenel simetrik yük için

$$\begin{bmatrix} A^L\alpha^2 & B^L\alpha^2 & C^L\alpha \\ B^L\alpha^2 & D^L\alpha^2+4G^L & (E^L-2G^L)\alpha \\ C^L\alpha & (E^L-2G^L)\alpha & (A^L+G^L\alpha^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^{1L} \\ f_2^{1L} \\ g_1^{0L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{hp^o}{s} \end{bmatrix} \qquad (7.5)$$

elde edilir. Burada

$$p^c = p_0 \sin\alpha a/\alpha, \quad p^o = p a J_1(\alpha a)/\alpha. \qquad (7.6)$$

Benzerlik prensibi kullanılırsa, yer değiştirme ve gerilme bileşenlerinin Laplace uzayındaki formları şerit yük için

$$
\begin{aligned}
& u_1^L = m_1^L + x_2^2\, m_2^L\,, \\
& u_2^L = x_2\, h_1^L\,, \\
& \tau_{11}^{(k)L} = s\left(2\mu^{(k)L} + \lambda^{(k)L}\right)\left(\frac{\partial m_1^L}{\partial x_1} + x_2^2\,\frac{\partial m_2^L}{\partial x_1}\right) + s\,\lambda^{(k)L}\, h_1^L\,, \\
& \tau_{22}^{(k)L} = s\,\lambda^{(k)L}\left(\frac{\partial m_1^L}{\partial x_1} + x_2^2\,\frac{\partial m_2^L}{\partial x_1}\right) + s\left(2\mu^{(k)L} + \lambda^{(k)L}\right) h_1^L\,, \\
& \tau_{12}^{(k)L} = s\,\mu^{(k)L}\left(2\, m_2^L + \frac{\partial h_1^L}{\partial x_1}\right) x_2\,, \\
& \tau_{33}^{(k)L} = s\,\lambda^{(k)L}\left(\frac{\partial m_1^L}{\partial x_1} + x_2^2\,\frac{\partial m_2^L}{\partial x_1} + h_1^L\right),
\end{aligned}
\qquad (7.8)
$$

eksenel simetrik yük için

$$
\begin{aligned}
& u_1^L = f_1^L + z^2 f_2^L\,, \\
& u_z^L = z\, g_1^L\,, \\
& \tau_{rr}^{(k)L} = s\left(2\mu^{(k)L} + \lambda^{(k)L}\right)\left(f_{1,r}^L + z^2 f_{2,r}^L\right) + s\,\lambda^{(k)L}\left(\frac{f_1^L}{r} + z^2\frac{f_2^L}{r} + g_1^L\right), \\
& \tau_{\theta\theta}^{(k)L} = s\left(2\mu^{(k)L} + \lambda^{(k)L}\right)\left(\frac{f_1^L}{r} + z^2\frac{f_2^L}{r}\right) + s\,\lambda^{(k)L}\left(f_{1,r}^L + z^2 f_{2,r}^L + g_1^L\right), \\
& \tau_{zz}^{(k)L} = s\left(2\mu^{(k)L} + \lambda^{(k)L}\right) g_1^L + s\,\lambda^{(k)L}\left(f_{1,r}^L + z^2 f_{2,r}^L + \frac{f_1^L}{r} + z^2\frac{f_2^L}{r}\right), \\
& \tau_{zr}^{(k)L} = s\, z\, \mu^{(k)L}\left(g_{1,r}^L + 2 f_2^L\right)
\end{aligned}
\qquad (7.9)
$$

şeklindedir. Burada

$$
\begin{aligned}
& m_1^L = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty m_1^{LS} \sin\alpha x_1\, d\alpha\,, \\
& m_2^L = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty m_2^{LS} \sin\alpha x_1\, d\alpha\,, \\
& h_1^L = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty h_1^{LC} \cos\alpha x_1\, d\alpha\,,
\end{aligned}
\qquad (7.10)
$$

ve

$$f_1^L = \int_0^\infty \alpha f_1^{IL} J_1(\alpha r)\, d\alpha ,$$

$$f_2^L = \int_0^\infty \alpha f_2^{IL} J_1(\alpha r)\, d\alpha , \qquad (7.11)$$

$$g_2^L = \int_0^\infty \alpha g_1^{OL} J_0(\alpha r)\, d\alpha .$$

(7.10) ve (7.11) denklemlerindeki m_1^{LS}, m_2^{LS}, h_1^{LC} ve f_1^{IL}, f_2^{IL}, g_1^{OL} (7.4) ve (7.5) denklemlerinin çözümleridir.

Yer değiştirme ve gerilme dağılımlarının gerçek uzayda elde edilmeleri için Laplace ve Fourier (veya Hankel) transform terslerinin alınması gerekir. Hankel ve Fourier transform tersleri için Simpson nümerik metodu kullanılmıştır (7). Laplace transform tersi için ise Krylov ve Skoblya (5) tarafından geliştirilen nümerik bir yöntem kullanılmıştır. Çalışmanın bütünlüğünü bozmamak için bu yöntem aşağıda kısa olarak özetlenmiştir.

f(t) fonksiyonunun Laplace transformu

$$f^L(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \qquad (7.12)$$

şeklinde tanımlanır. Laplace transform tersi

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} f^L(s)\, e^{st}\, ds \qquad (7.13)$$

ifadesiyle verilir.

(7.13) denkleminde, $s' = st$ değişken değişimi yapılırsa

$$f(t) = \frac{1}{t} \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} f^L(s'/t)\, e^{s'}\, ds' \qquad (7.14)$$

bulunur. (7.14) denklemine $F(s') = f^L(s'/t)$ konarak ve s'nın "dummy" değişken olduğu gözönüne alınarak

$$f(t) = \frac{1}{t} \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} F(s)\, e^s\, ds \qquad (7.15)$$

bulunur.

$$F(s) = s^{-m} \phi(s) \quad ve \quad I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} F(s)\, e^s\, ds$$

tanımlarıyla (7.15) denklemi

$$f(t) = \frac{1}{t} I \qquad (7.16)$$

şeklini alır. (7.16) denklemindeki I

$$I = \sum_{k=1}^{q} A_k \, \phi(s_k) \tag{7.17}$$

serisiyle ifade edilmektedir. Burada A_k ve s_k kompleks sayılar olup değerleri (5)'de çeşitli m ve q için tablo halinde verilmiştir. f(t) nin sıfır ve sonsuz zamanlarındaki değerleri ise Laplace transformu limit teoremleri yardımıyla bulunabilir.

VIII. Örnek Konsolidasyon Problemi

Örnek problem olarak beş ince visko-elâstik tabakayla yaklaşımı yapılmış bir zemin tabakasının konsolidasyonu incelenmiştir. Zemin tabakası 2 a genişliğinde uniform şerit veya a yarı çapında dairesel uniform P_0 yüküne maruzdur. Toplam tabaka kalınlığı a olarak alınmıştır. Dolayısıyla her ince tabakanın kalınlığı 0:2 a olmaktadır. (Şekil 17). Malzeme fonksiyonlarıyla ilgili parametreler

$$G_0/G_D = 10 \,,\quad G_V/G_D = 2 \,,\quad \tau_V^0/\tau_D = 1 \,, \tag{8.1}$$

olarak seçilmiştir.

Bu problem bir önceki kısımda anlatılan nümeriksel yöntemlerle çözülmüş olup m=1, q=5 olarak alınmıştır. Bu duruma tekabül eden A_k ve s_k değerleri Tablo 1'de verilmiştir.

Yer değiştirme ve gerilme bileşenleri dağılımları için nümerik sonuçlar $t=0, \tau_D, 2\tau_D, \infty$ zamanlarında bulunmuş ve sonuçlar Şekil (18-34) de gösterilmiştir.

Tablo 1. Laplace transformu tersinin nümerik olarak bulunmasında kullanılan (A_L) ve (S_k)'nin m=1 ve q=5 için değerleri.

k	s_k	A_k
1	3.65569432 + 6.54373690 i	3.83966163 - 0.27357039 i
2	3.65569432 - 6.54373690 i	3.83966163 + 0.27357039 i
3	5.70095330 + 3.21026560 i	-25.07945221 + 2.18725229 i
4	5.70095330 - 3.21026560 i	-25.07945221 - 2.18725229 i
5	6.28670475 + 0.00000000 i	43.47958116 + 0.0000000 i

IX. Sonuçlar

Bu çalışmada geliştirilmiş olan yaklaşık teoriler sadece zemin konsolidasyon probleminin incelenmesinde değil, aynı zamanda homojen olmayan ortamların analizinde kullanılabilir.

Bu raporda drenajın üst yüzey vasıtasiyle olduğu kabul edilmiştir. Eğer drenaj hem üst hem de alt yüzeyler yoluyla olursa, mevcut yaklaşık teoriler, konsolidasyon zamanının derinlikle değişiminde ufak bir düzeltme yapılarak, bu tip problemlerin incelenmesinde de kullanılabilirler.

Yaklaşık teorinin presizyonu, yer değiştirme bileşenleri serisinde alınan terim sayısına bağlıdır. Prezisyona etki edecek başka bir faktör de alınan ince tabaka sayısıdır. İnce tabaka sayısı arttıkça sonuçların gerçeğe daha yakın olması tabiidir.

Laplace transformu tersiyle ilgili kullanılan nümerik metod (0, T) zaman aralığında yakınsaktır. Kullanılan nümerik metoddaki terim sayısı arttıkça, üst limit T'nin değeri de artacaktır.

Zeminin hacımsal şekil değiştirmesi Kelvin modeli yerine standart modelle temsil edilmiştir. Bu seçim sadece matematiksel güçlükleri yenmek için yapılmamıştır. Standard model tam doygun olmayan zeminlerin davranışını daha gerçekçi olarak temsil eder.

Zemin davranışının Kelvin ve Maxwell modelleriyle temsil edilmesi halinde Poisson kat sayısının sıfır ve sonsuzdaki değerleri 0.5 olacaktır. Bu çalışmada olduğu gibi, zemin davranışının standart-Maxwell modelleriyle tanımlanması halinde arasındaki Poisson katsayısı yine 0.5 olmakta, fakat bu katsayısının $t=o$ daki değeri G_o/G_d oranına bağlı olmaktadır. Örnek pooblemde bu oran $G_o/G_D=10$ olarak alınmıştır. Buna mukabil eden $t=0$ zamanındaki Poisson oranı 0.45 olmaktadır. G_o/G_D büyüdükçe, sıfır zamanındaki Poisson katsayısı 0.5'e yaklaşır.

Şekil (18-34) de gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin derinliğe ve yatay istikamete göre değişmeleri gerek şerit yük problemi, gerekse eksenel simetrik yük problemi için gösterilmiştir. Bu şekillerin incelenmesinden görüleceği üzere, gerilme bileşenleri dağılımları (yer değiştirme bileşenleri aksine) daha çok yük durumuna bağlı olmakta, malzeme fonksiyonları tarafından fazla etkilenmemektedirler.

Özet

Bu çalışmada, geçirimsiz rijit bir temele oturan, şerit veya eksenel simetriye haiz yüke maruz, doygun bir zemin tabakasının konsolidasyonu visko-elâstik modeller yardımıyla incelenmiştir. Araştırmada, Terzaghi'nin, konsolidasyon zamanının, drenaj yolu uzunluğunun karesiyle orantılı olduğunu kabul eden tek boyutlu konsolidasyon teorisi kullanılmıştır. Ancak, geçirimsiz bir temele oturduğunu kabul edilen tabakada, "bulk" modülü derinliğin karesinin fonksiyonu olmakta ve dolayısıyla tabaka inhomojen hale geldiğinden problemin kesin teori ile çözümü matematik güçlükler göstermektedir. Bu güçlükleri yenmek amacı ile, tabakanın, her biri farklı malzeme fonksiyonlarına sahip çok sayıda ince tabakadan oluştuğu yaklaşımı yapılmıştır. Önce, n ince tabakadan oluşan elâstik bir zemin için, Hu-Washizu varyasyon teoreminden faydalanılarak, yaklaşık bir teori geliştirilmiş ve bu yaklaşık teorinin ana denklemleri, genelleştirilmiş yer değiştirmeleri bilinmeyen olarak ihtiva eden girişimli, lineer, adi diferansiyel denklem takımı halinde elde edilmiştir. Bu yaklaşık teorinin geçerliliği, kesin çözümü bilinen tek elâstik tabaka probleminin kesin ve yaklaşık metodlarla çözülüp neticelerin karşılaştırılması yoluyla yapılmış ve yaklaşık teorinin iyi sonuç verdiği görülmüştür. Çok tabakalı visko-elâstik problemin çözümü ise elâstik çözümden benzerlik (correspondence) prensibi yardımıyla elde edilmiştir. Eksenel simetriye haiz yük probleminde radyal yönde Hankel, şerit yüke maruz problemde yatay yönde Fourier sinüs, kosinüs transformları uygulanarak her iki problemin ana denklemleri Hankel-Laplace veya Fourier-Laplace uzayında cebrik denklem takımlarına indirgenmiştir. Hankel ve Fourier transformlarının tersi Simpson metodu ile, Laplace transformunun tersi ise Krylov ve Skoblya tarafından geliştirilen nümerik bir yöntemle elde edilmiştir. $t=0$, $t=\infty$ zamanındaki sonuçları elde etmek için Laplace transformu limit teoremleri kullanılmıştır.

Örnek problem olarak, beş ince visko-elâstik tabakayla yaklaşımı yapılan bir zemin tabakasının konsolidasyonu incelenmiştir. Zemin tabakasının (2a) genişliğinde uniform şerit veya (a) yarıçapında dairesel uniform yüke maruz olduğu kabul edilmiştir. Her tabakanın kalınlığı (0.2a) alınmış-

tır. Yer değiştirme ve gerilme bileşenleri dağılımları için çeşitli zamanlar için nümerik sonuçlar bulunmuş ve bu sonuçlar grafiklerle gösterilmiştir.

Çalışmada geliştirilmiş olan yaklaşık teori sadece zemin konsolidasyon probleminin incelenmesinde değil, aynı zamanda homojen olmayan ortamların analizinde de kullanılabilir.

Raporda drenajın üst yüzey vasıtasiyle olduğu kabul edilmiştir. Eğer drenaj hem üst hem de alt yüzeyler yoluyla olursa, mevcut yaklaşık teoriler, konsolidasyon zamanının derinlikle değişiminde ufak bir değişiklik yapılarak, bu tip problemlerin incelenmesinde de kullanılabilir.

Summary

In this work, the consolidation problem of a fully saturated visco-elastic layer of finite thickness, resting on a rigid, impervious foundation and subjected to either uniform strip or uniform axially symmetric loading on the top surface, is considered. The work is based on Terzaghi's one dimensional consolidation theory which assumes that the consolidation time varies with the length of the drainage path. Since the bulk modulus is a function of the square of the depth, the layer is inhomogeneous and the problem becomes too complicated to be studied by exact theories. To overcome the mathematical difficulties, the layer is assumed to be made of thin layers, each having different material functions. First, an approximate theory is developed for an elastic medium made of thin layers by using Hu-Washizu's variational theorem. The governing equations of this approximate theory are coupled, linear, ordinary differential equations where the generalized displacements are the unknowns. In order to verify the validity of the approximate theory, the problem of a single elastic layer is solved by both exact and approximate theories. The results compare favorably. The solution of the multi-layered visco-elastic problem is obtained through the use of the correspondence principle. For the axi-symmetric problem the Hankel transform is used in the radial direction. For the strip load problem, Fourier sine cosine transforms in the horizontal direction are used. Thus, the governing equations of both problems are obtained, in the Hankel-Laplace, or Fourier-Laplace space, as sets of algebraic equations. The inverse transformations for the Hankel and Fourier transforms are obtained by using Simpson's method. Inverse Laplace transformation is performed using a numerical method developed by Krylov and Skoblya. The initial and the final value theorems of the Laplace transformation are used in order to obtain results at the end. $t=\infty$

As a sample problem, the consolidation of a soil medium consisting of five visco-elastic layers is studied. The medium is subjected at the top surface to either uniform strip load of width $(2a)$ or a uniform circular load of radius (a). Each soil layer is assumed to have a thickness $(0.2a)$. Numerical results are obtained for the distributions of displacement and

stress components at various times and these results are shown by graphs.

The present theory can also be used to study inhomogeneous media.

In this report, the drainage is assumed to be through the top surface only. However, the approximate theory can be applied to problems where drainage is possible through both the top and the bottom surfaces. In this case a modification must be made in the variation of the consolidation time with depth.

Yayın Listesi

1. Soydemir, Ç., Schmid, W.C., "Deformation and Stability of Visco-Elastic Soil Media", J. Soil Mech. and Foundation Div., ASCE, Vol. 96, Nov. 1970, pp. 2081, 2098.

2. Terzaghi, K., Peck, R.B., Soil Mechanics in Engineering Practice, John Wiley and Sons, 1962.

3. Washizu, K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1968.

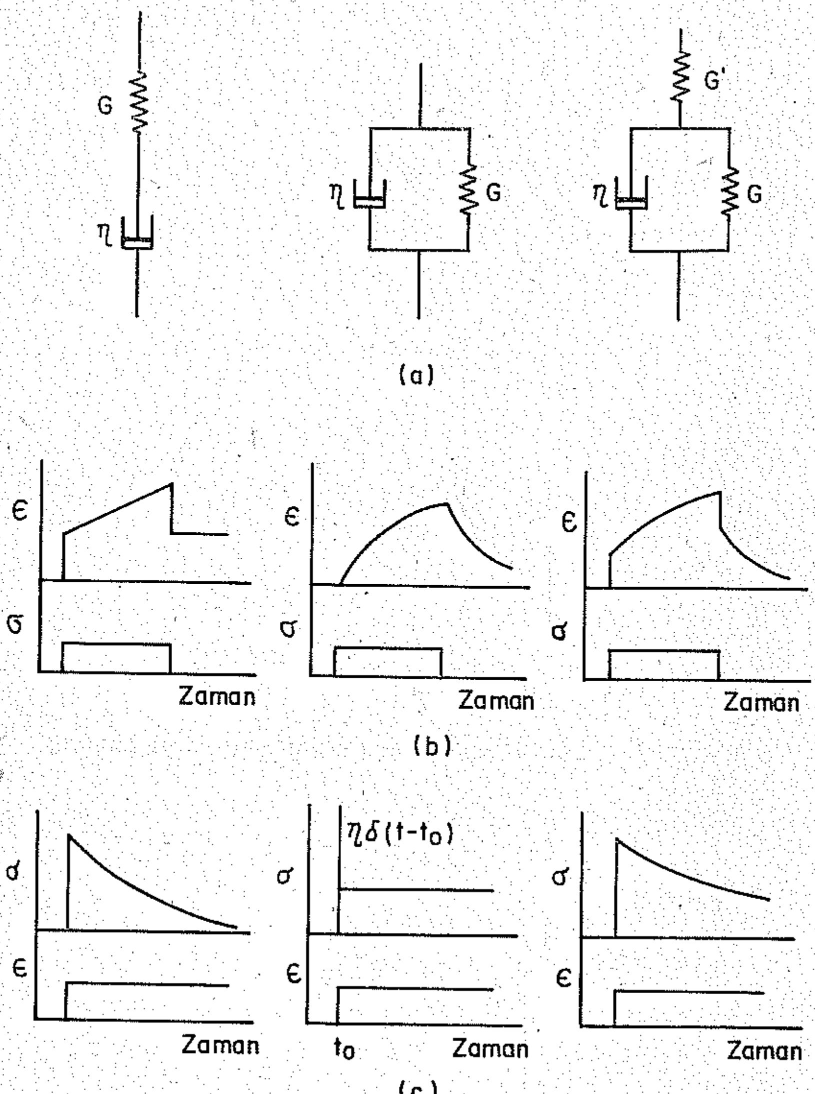
4. Bland, D.R., The Theory of Linear Visco-Elasticity, Pergamon Press, New York, 1960.

5. Krylov, Skoblya, Handbook of Numerical Inversion of Laplace Transforms, Israel Scientific Translation Program Series 1972.

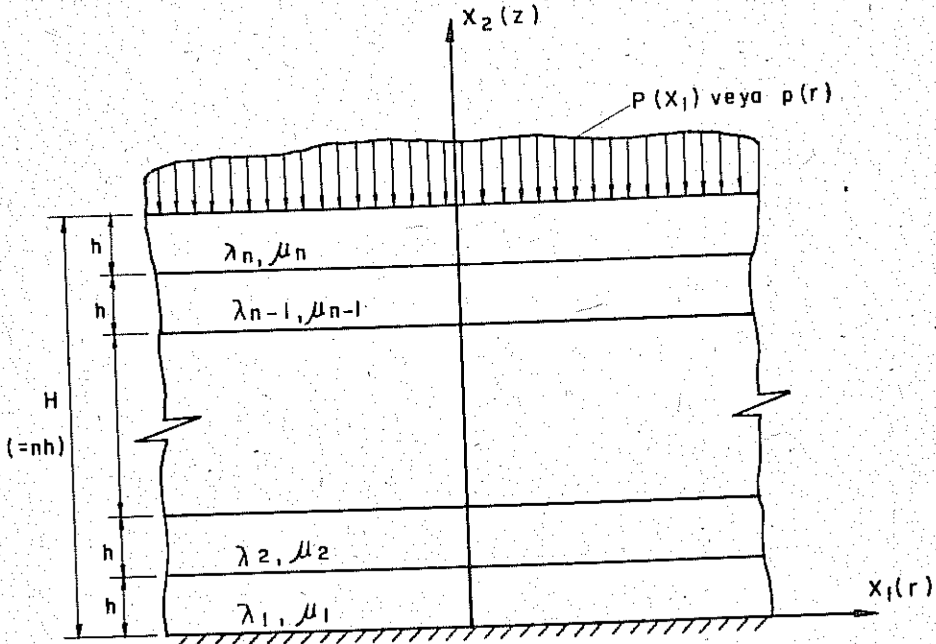
6. Fung, Y.C., "Foudations of Solid Mechanics", Prentice-Hall, 1965.

7. Conte, S.D., De Boor, C., Elementary Numerical Analysis, McGraw-Hill, 1965.

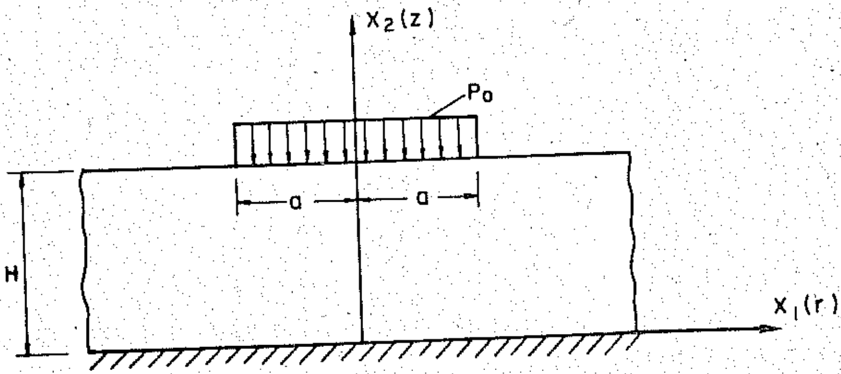
ŞEKİLLER



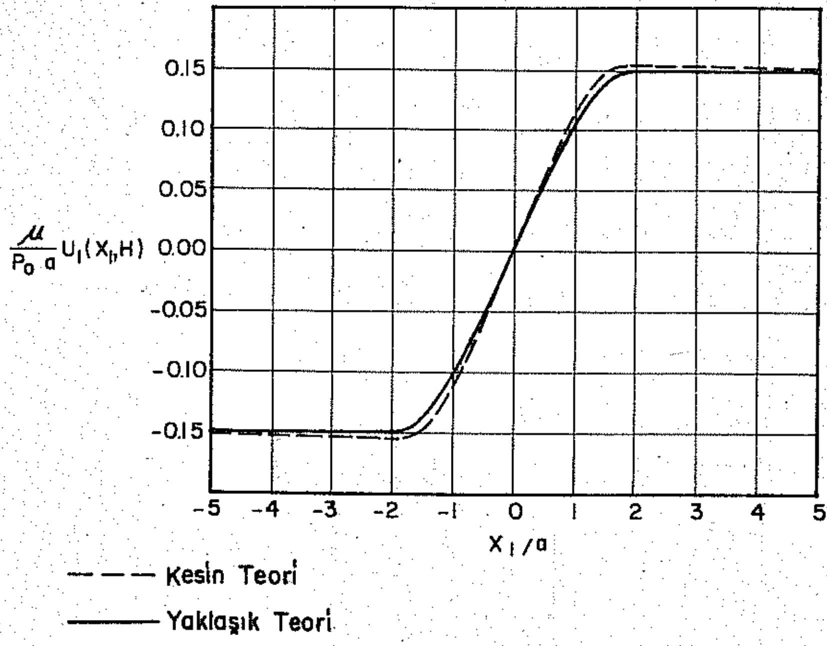
Şekil 1- (a) Maxwell, Kelvin ve standart Modeller, (b) Sünme fonksiyonlarının zamana göre değişimi (c) Gevşeme fonksiyonlarının zamana göre değişimi.



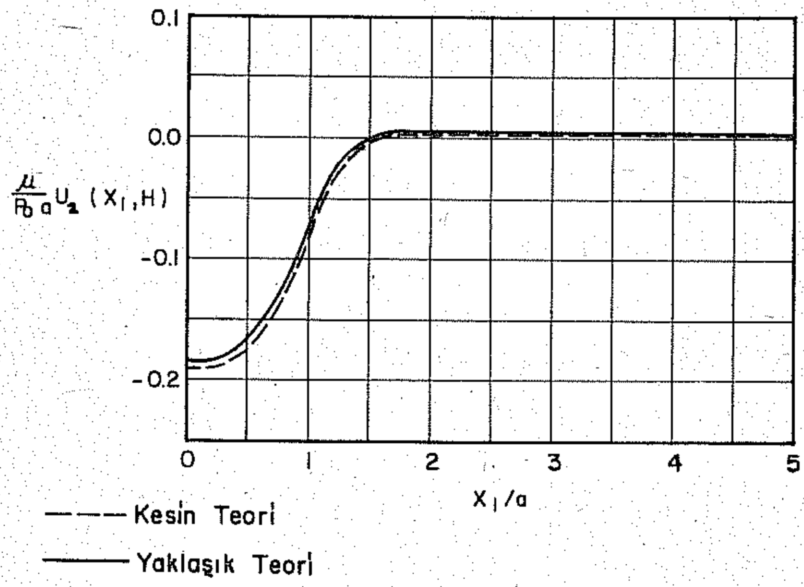
Şekil 2 - Elastik, çok tabakalı problemin konfigürasyonu.



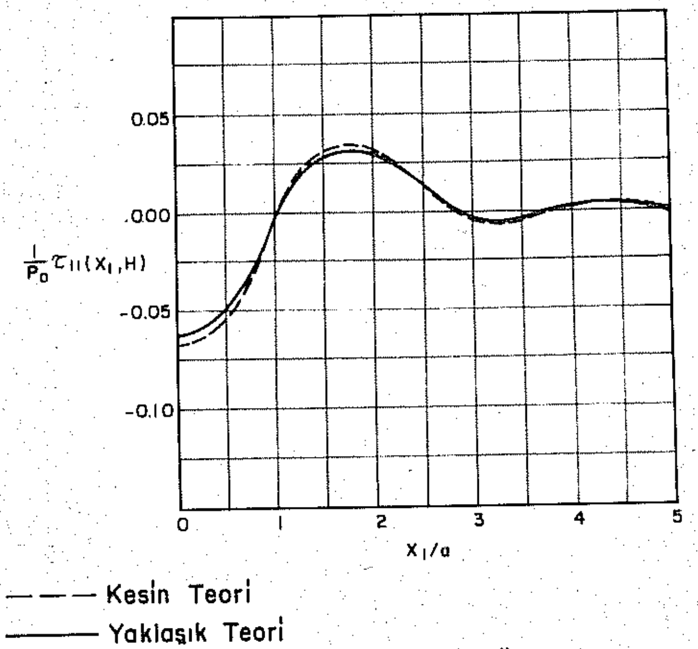
Şekil 3 - Tek elastik tabaka probleminin konfigürasyonu



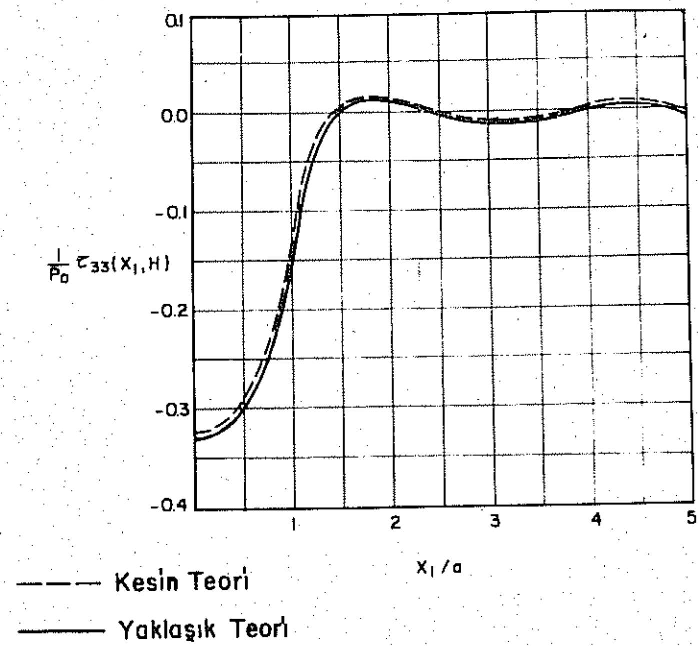
Şekil 4 - Şerit yük için üst yüzeydeki yatay yer değiştirme bileşeninin (X_1)'e göre değişimi.



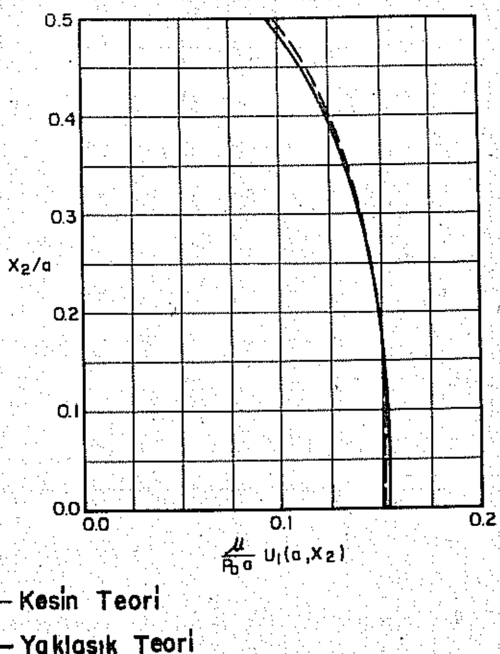
Şekil 5 - Şerit yük için üst yüzeydeki düşey yer değiştirme bileşeninin (X_1)'e göre değişimi.



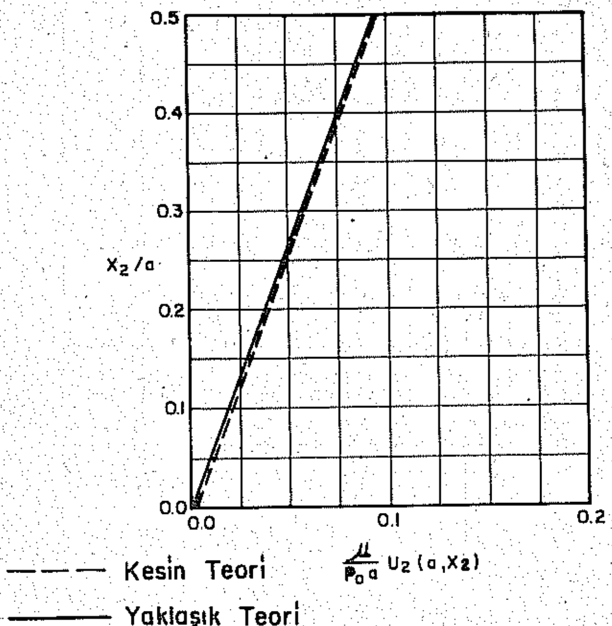
Şekil 6 - Şerit yük için (τ_{11})'in üst yüzeyde (X_1)'e göre değişimi.



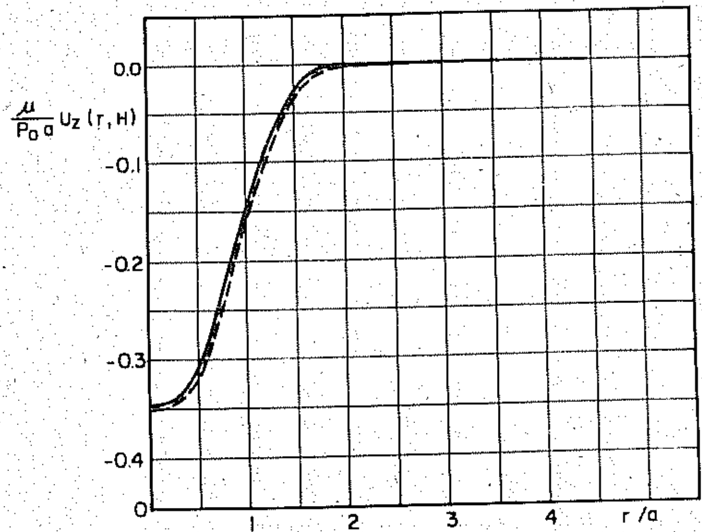
Şekil 7 - Şerit yük için (τ_{33}) ün üst yüzeyde (X_1)'e göre değişimi.



Şekil 8 - Şerit yük için $X_1 = a$'daki yatay yer değiştirme bileşeninin (X_2)'e göre değişimi.



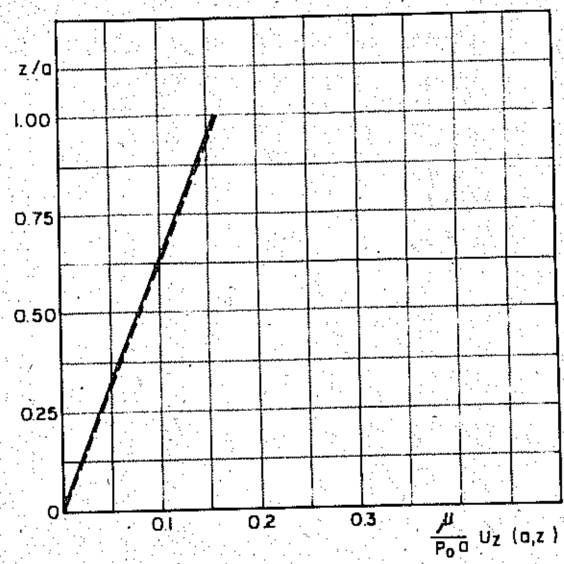
Şekil 9 - Şerit yük için $X_1 = a$'daki düşey yer değiştirme bileşeninin (X_2)'e göre değişimi.



--- Kesin Teori

——— Yaklaşık Teori

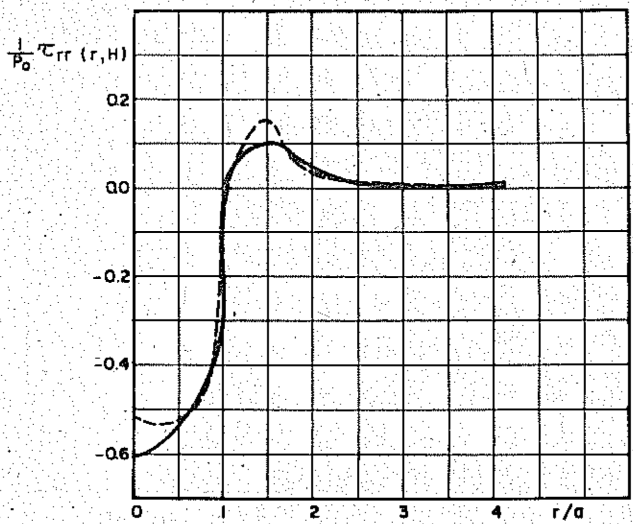
Şekil 10 - Eksenel simetrik yük için üst yüzeydeki düşey yer değiştirme bileşeninin (r)'ye göre değişimi.



--- Kesin Teori

——— Yaklaşık Teori

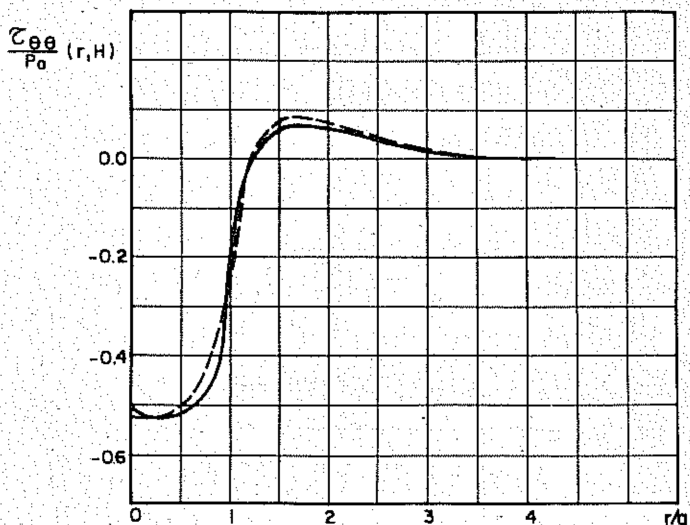
Şekil 11 - Eksenel simetrik yük için r = a'daki düşey yer değiştirme bileşeninin (z)'ye göre değişimi.



– – – Kesin Teori

——— Yaklaşık Teori

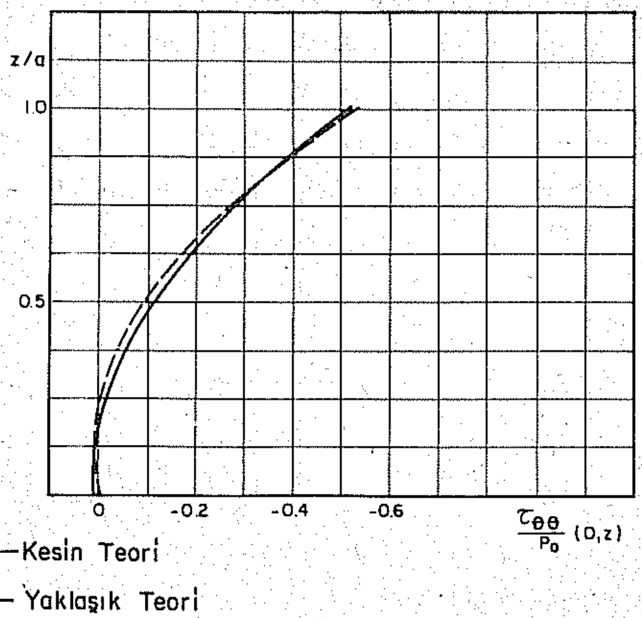
Şekil 12 - Eksenel simetrik yük için (τ_{rr})'nin üst yüzeyde (r)'ye göre değişimi.



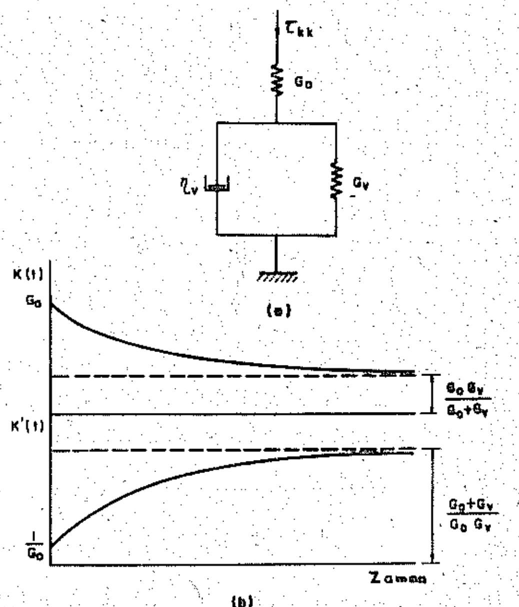
——— Kesin Teori

– – – Yaklaşık Teori

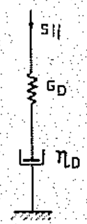
Şekil 13 - Eksenel simetrik yük için ($\tau_{\theta\theta}$)'nin üst yüzeyde (r)'ye göre değişimi.



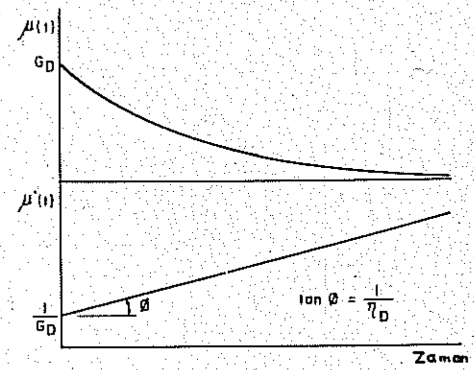
Şekil 14 - Eksenel simetrik yük için ($\tau_{\theta\theta}$)'nin r = 0'da (z)'ye göre değişimi.



Şekil 15 - (a) Hacımsal lineer standart model (b) "Bulk"- gevşeme ve "Bulk"- sünme fonksiyonları K (t), K' (t)'nin zamana göre değişimi.

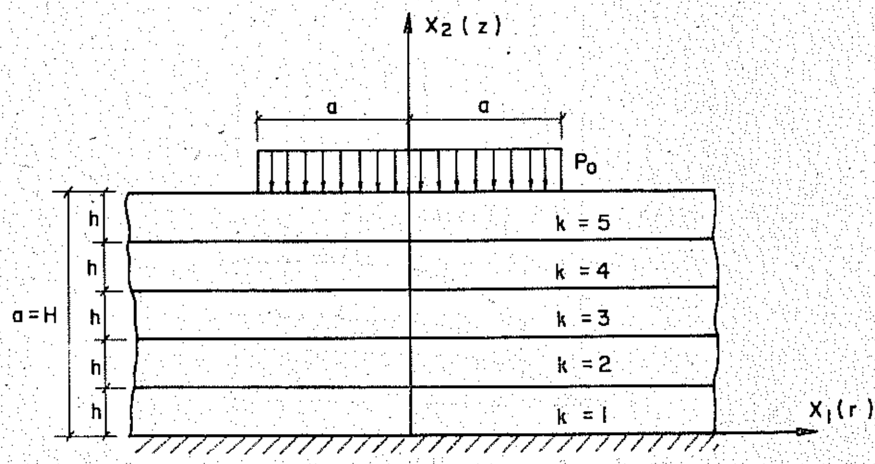


(a)

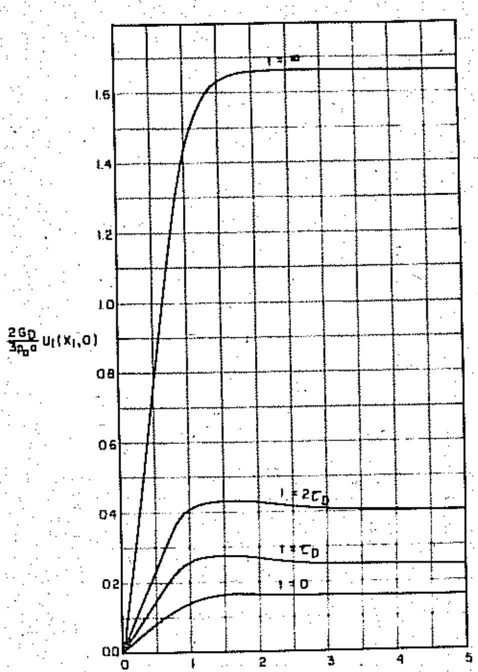


(b)

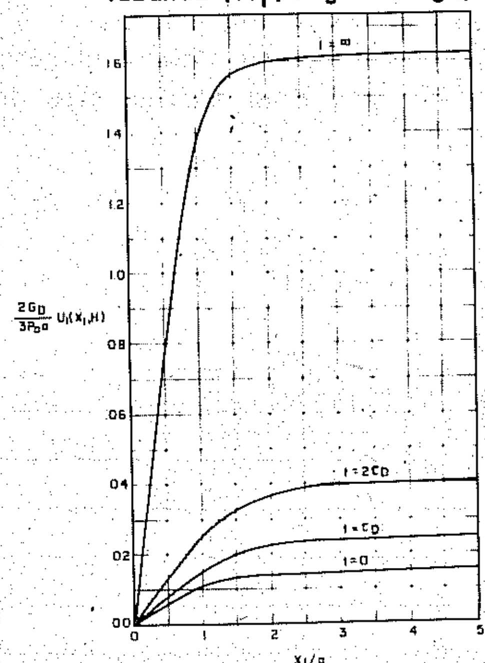
Şekil 16 - (a) Kayma Maxwell modeli
(b) Kayma - sünme ve kayma - gevşeme fonksiyonları $\mu(t)$, $\mu'(t)$'nin zamana göre değişimi.



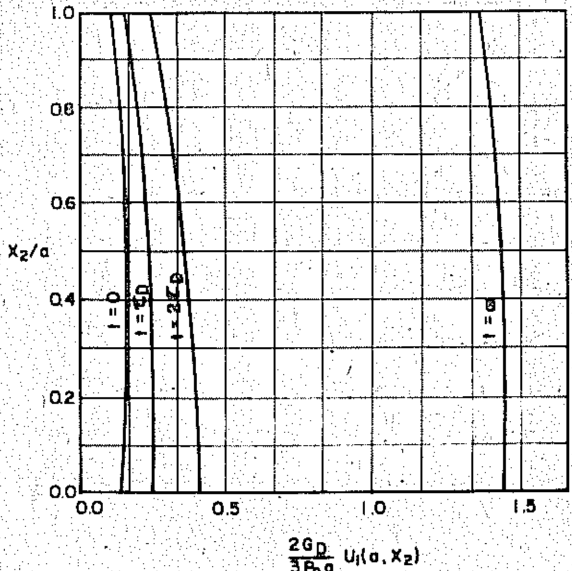
Şekil 17 - Örnek problemin konfigürasyonu



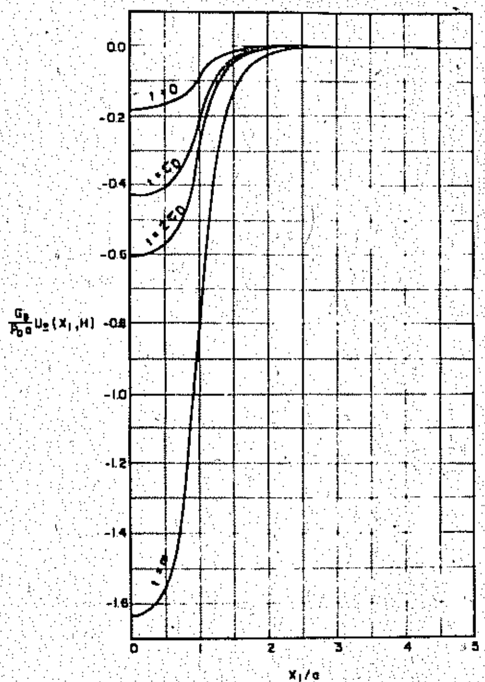
Şekil 18 - Şerit yük için yatay yer değiştirmenin tabanda (X_1)'e göre değişimi.



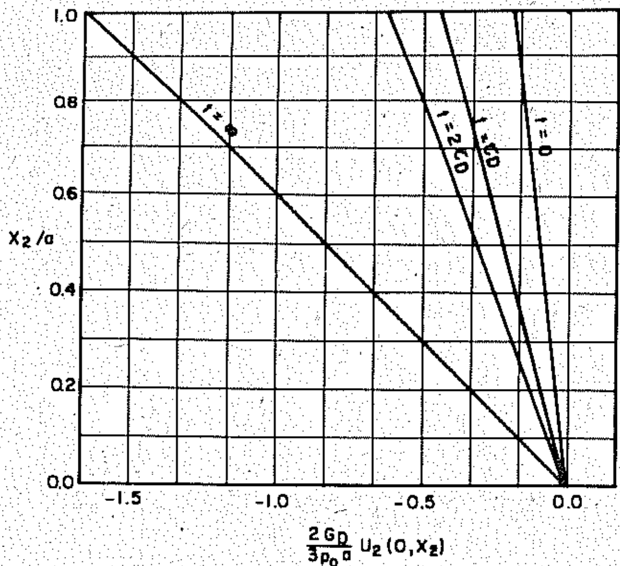
Şekil 19 - Şerit yük için yatay yer değiştirmenin üst yüzeyde (X_1)'e göre değişimi.



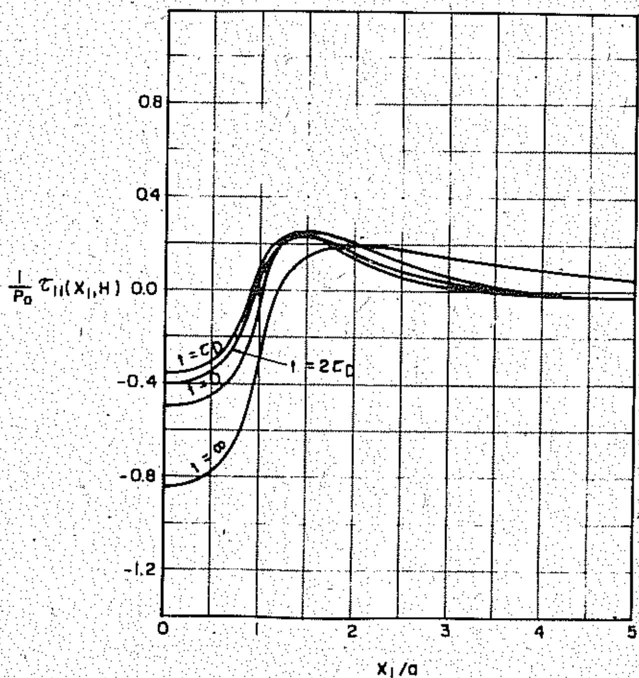
Şekil 20 - Şerit yük için yatay yer değiştirmenin $X_1 = a$'da (X_2)'e göre değişimi.



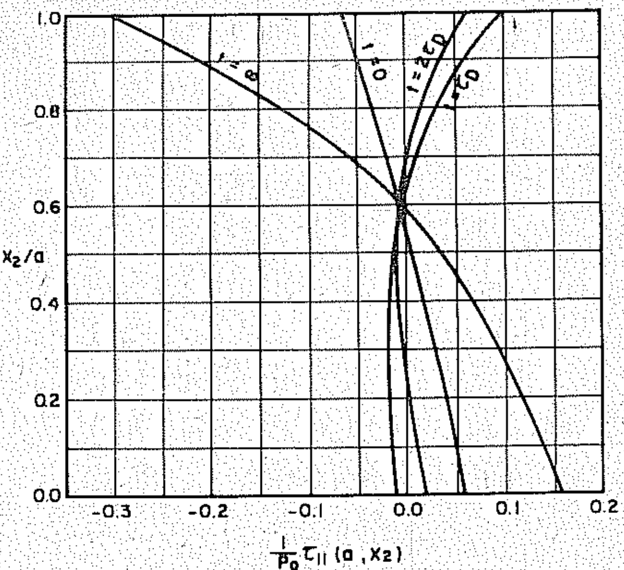
Şekil 21 - Şerit yük için düşey yer değiştirmenin üst yüzeyde (X_1)'e göre değişimi.



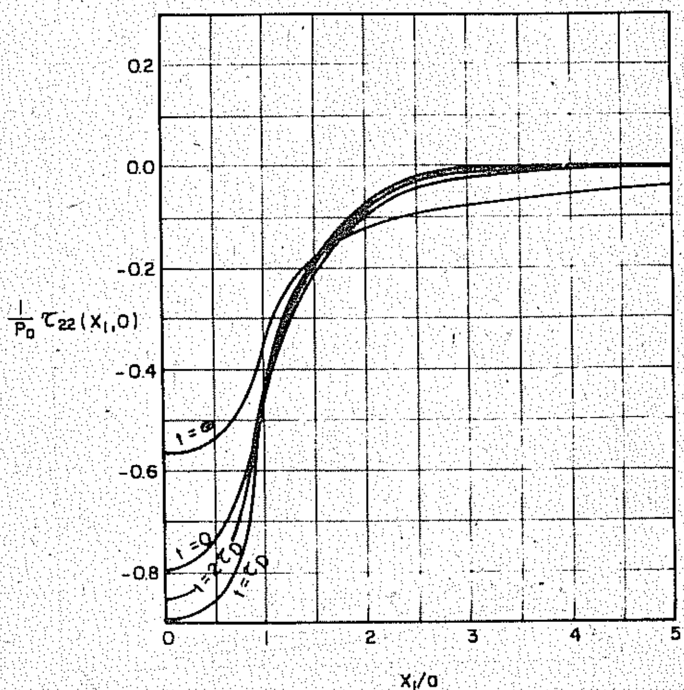
Şekil 22 - Şerit yük için düşey yer değiştirmenin $X_1 = 0$'da (X_2)'e göre değişimi.



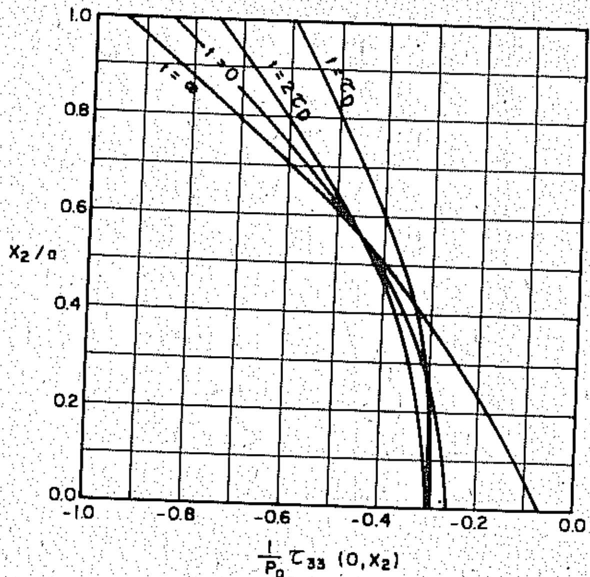
Şekil 23 - Şerit yük için (τ_{11})'nin yüzeyde (X_1)'e göre değişimi.



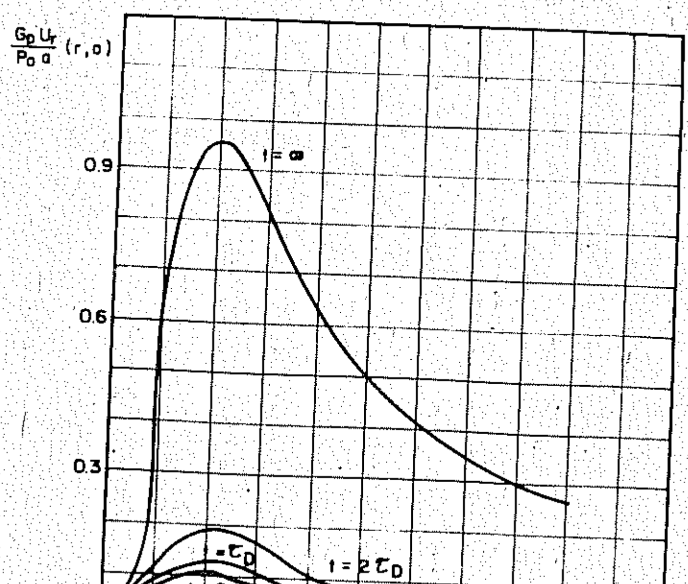
Şekil 24 - Şerit yük için (τ_{11})'in $X_1 = a$'da (X_2)'e göre değişimi.



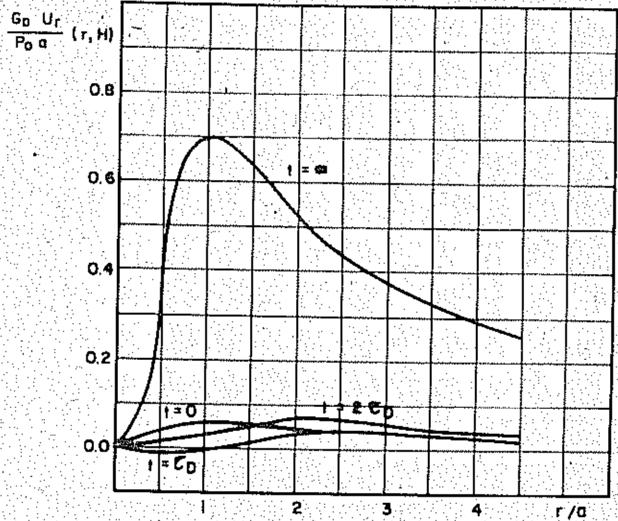
Şekil - 25 Şerit yük için (τ_{22})'nin tabanda (X_1)'e göre değişimi.



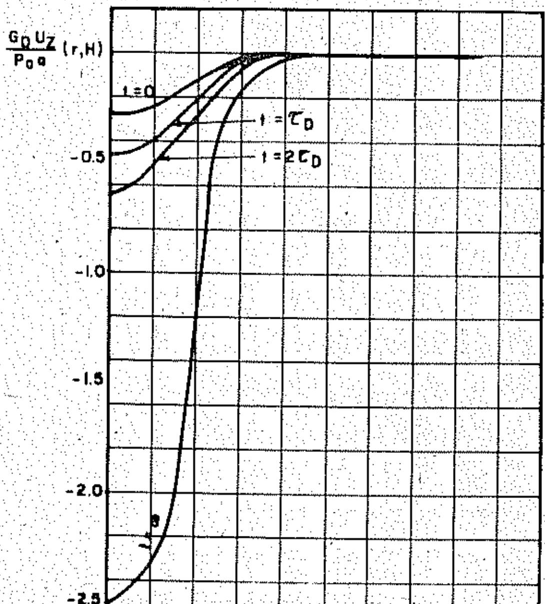
Şekil 26 – Şerit yük için (τ_{33})'ün. $X_1 = 0$'da (X_2)'e göre değişimi.



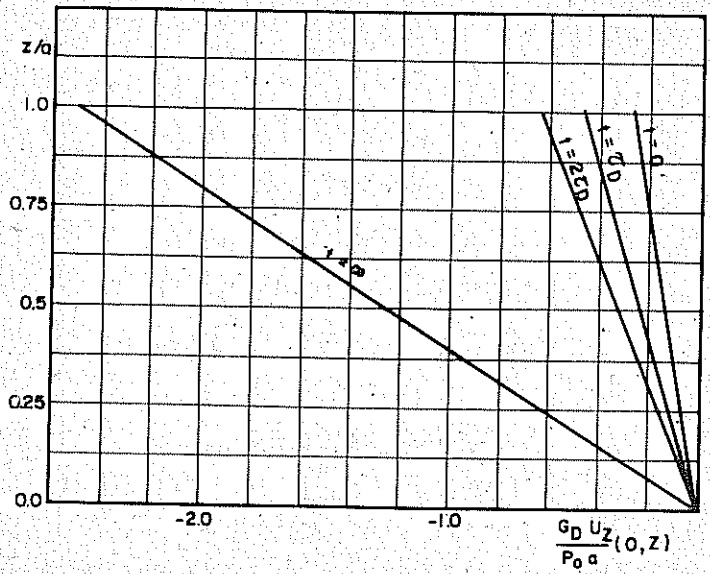
Şekil 27 – Eksenel simetrik yük için yatay yer değiştirmenin tabanda (r)'ye değişimi.



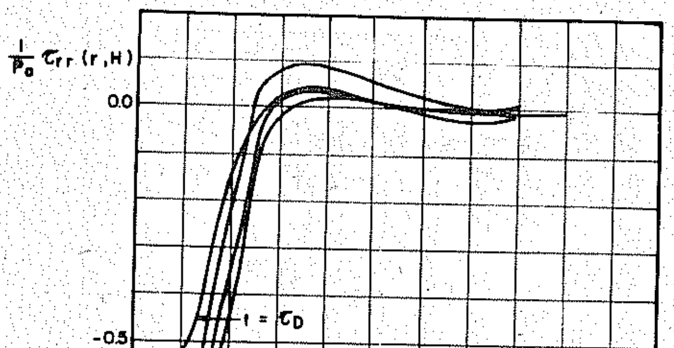
Şekil 28- Eksenel simetrik yük için yatay yer değiştirmenin Üst yüzeyde (r)'ye göre değişimi.



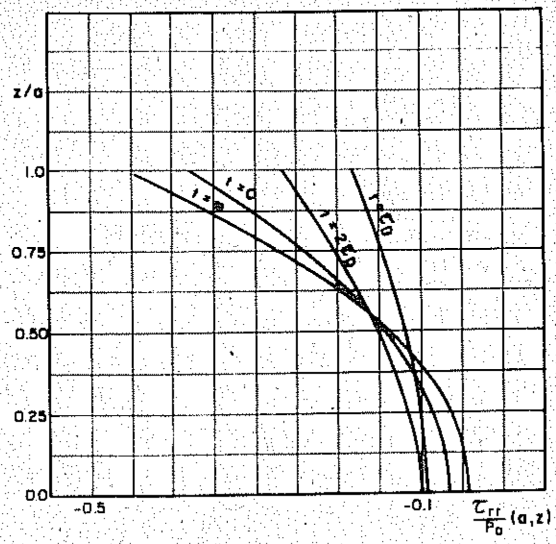
Şekil 29- Eksenel simetrik yük için düşey yer değiştirmenin üst yüzeyde (r)'ye göre değişimi



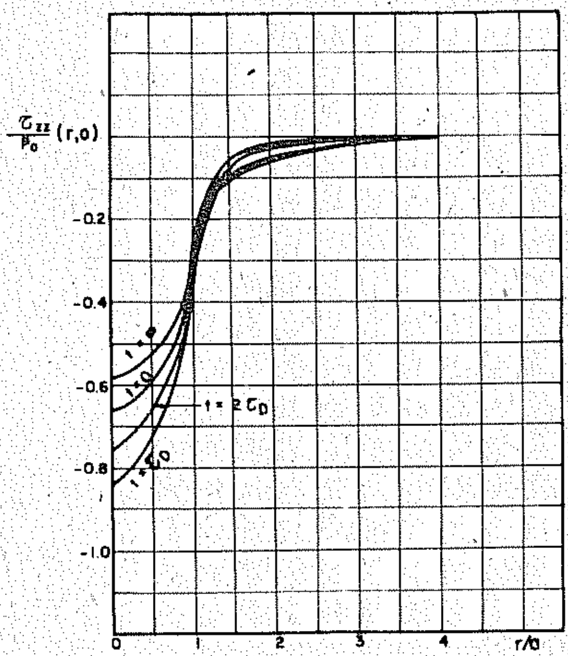
Şekil 30 - Eksenel simetrik yük için düşey yer değiştirmenin r =0'da (z) ye göre değişimi.



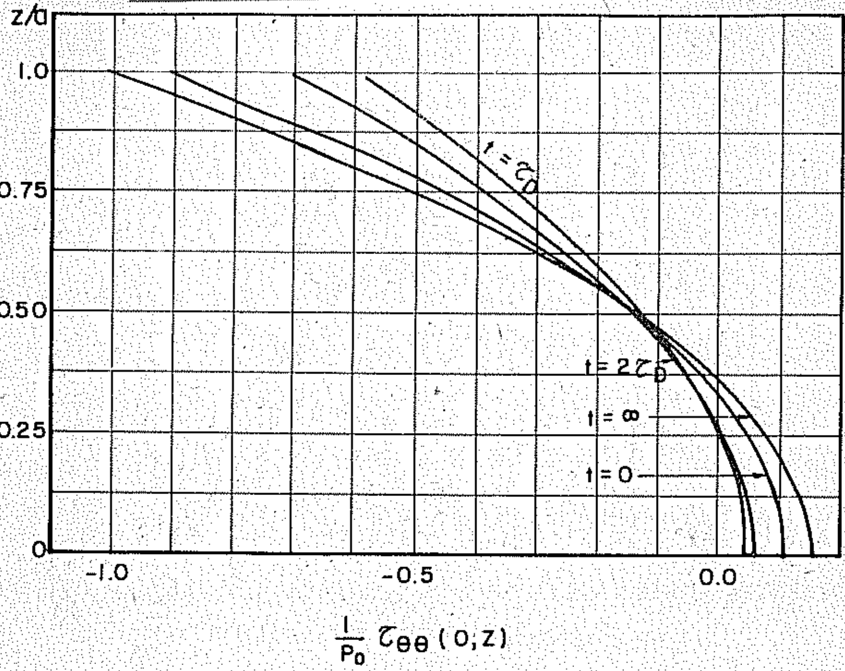
Şekil 31- Eksenel simetrik yük için (τ_{rr})'nin üst yüzeyde (r)'ye göre değişimi.



Şekil 32 - Eksenel yük için (τ_{rr})'nin r = a'da (z)'ye göre değişimi.



Şekil 33 - Eksenel simetrik yük için (τ_{zz})'nin tabanda (r)'ye göre değişimi.



Şekil 34 - Eksenel simetrik yük için ($\tau_{\theta\theta}$)'nin r = 0'da (z)'ye göre değişimi.