

**Biyolojik, Elektriksel ve Mekaniksel Osilatörler:
Senkronizasyon, Kaos ve Çatallanma**

Program Kodu: 1001

Proje No: 111T320

Proje Yürütücüsü:
Prof. Dr. Marat AKHMET

Bursiyer:
Ayşegül KIVILCIM

EKİM 2014
ANKARA

ÖNSÖZ

Projemiz kapsamında sinir ağları, mekanik ve elektronik modellerinde kaos üretimi ve kontrolü konuları ele alınmıştır. Dinamik sistemler teorisinde elde edilen bir çok sonuç girdi/çıktı mekanizmasını kullanmaktadır. Örneđin, belirli tipteki diferansiyel denklemlerde denklemin sağ tarafına uygulanan pertürbasyon periyodik, sınırlı ya da hemen hemen periyodik ise bu durumda denklemin aynı özelliği sağlayan tek bir çözümü bulunmaktadır. Bu projede, girdi/çıktı mekanizması kaotik çözümler için kullanılmıştır. Yani, diferansiyel denklemin sağ tarafına uygulanan pertürbasyon kaotik ise diferansiyel denklem kaotik çözüm üretmektedir. Bu konu literatürde ilk kez ele alınmış olup sonuçlarımız yüksek "impact factor" değerine sahip dergilerde basılmıştır. Projemiz TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER

ÖZET - iv
ABSTRACT - v
GİRİŞ - 1
LİTERATÜR TARAMASI - 1
GEREÇ VE YÖNTEM - 4
BULGULAR - 5
SONUÇ - 7

ÖZET

Bu projede asimptotik kararlı denge noktası ya da asimptotik kararlı limit çemberine sahip olan diferansiyel denklem sistemlerinin kaotik olarak pertürbe edildiklerinde ortaya çıkan dinamik incelenmiştir. Girdilerin kaotik olması durumunda çıktılarının da kaotik olduğu teorik olarak ispatlanmıştır. Elde edilen kaosun kontrol edilebilirliği gösterilmiştir. Hücresel sinir ağları modellerinde kaos üretimi problemi ele alınmış olup Hopfield sinir ağları modellerinde çembersel kaos oluşumu incelenmiştir. Çalışmalarımızda Devaney ve Li-Yorke kaos türlerinin yanı sıra ardışık periyot-çiftlenmesi çatallanması yolları ile meydana gelen kaos türlerinden faydalanılmıştır. Aralıklılık (intermittency) yoluyla meydana gelen kaos, Shilnikov yörüngeleri ve Chua osilatörlerinde kaos oluşumu nümerik olarak incelenmiştir. Bunun yanı sıra projemiz kapsamında faz uzayındaki yüzeylerde etkilere sahip olan Van der Pol denkleminde süreksiz limit çemberinin varlığı ispatlanmıştır. Sonuçlarımız genelleştirilmiş senkronizasyon kavramı ile karşılaştırılmış olup simülasyonlarla desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kaosun replikasyonu, Devaney kaos, Li-Yorke kaos, Ardışık periyot-çiftlenmesi çatallanması

ABSTRACT

In this project, the dynamics of differential equations that possess asymptotically stable equilibrium points or asymptotically stable limit cycles are investigated when they are perturbed chaotically. It is theoretically proved that the outputs are chaotic when the inputs are chaotic. The controllability of the obtained chaos is demonstrated. The chaos generation problem in cellular neural networks is considered and the formation of cyclic chaos in Hopfield neural networks is investigated. In our studies, chaos in the sense of Devaney and Li-Yorke as well as the one obtained through period-doubling cascade are utilized. Intermittency route to chaos, Shilnikov orbits and chaos appearance in Chua oscillators are investigated numerically. Besides, the presence of discontinuous limit cycle in Van der Pol equation with impacts on surfaces in the phase space is proved within the scope of the project. Our results are compared with the generalized synchronization concept and supported by simulations.

Keywords: Replication of chaos, Devaney chaos, Li-Yorke chaos, Period-doubling cascade

1. GİRİŞ

Dinamik sistemler teorisi lineer olmayan diferansiyel denklem çözümlerinin global özelliklerini incelemek için kalitatif teknikler ortaya koymuş olan H. Poincaré'nin çalışmaları ile başlamıştır [10]. Poincaré'nin bulmuş olduğu homoclinic yörüngeler kaos teorisinin başlangıcı olarak kabul edilmektedir.

Kaosun ilk matematiksel tanımı Li ve Yorke [27] tarafından ortaya konmuştur. Bu tanıma göre, $J \subset \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere, sürekli bir $F: J \rightarrow J$ fonksiyonu Li-Yorke kaotiktir eğer: (i) Her bir p doğal sayısı için F 'in J 'de bir p -periyodik noktası vardır; (ii) Hiçbir periyodik nokta içermeyen sayılamaz çoklukta elemana sahip olan $S \subset J$ vardır ve her bir $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$, için $\limsup_{k \rightarrow \infty} |F^k(s_1) - F^k(s_2)| > 0$ ve $\liminf_{k \rightarrow \infty} |F^k(s_1) - F^k(s_2)| = 0$ özellikleri sağlanır; (iii) S 'deki her bir s elemanı ve J 'deki her bir \hat{s} elemanı için $\limsup_{k \rightarrow \infty} |F^k(s) - F^k(\hat{s})| > 0$ eşitsizliği sağlanır.

Kaosun diğer bir matematiksel tanımı Devaney [13] tarafından verilmiştir. Devaney'e göre, $J \subset \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere bir $F: J \rightarrow J$ fonksiyonu için eğer öyle bir $\delta > 0$ vardır ki her $x \in J$ ve x 'in herhangi bir N komşuluğu için öyle bir $y \in J$ ve k pozitif tamsayısı vardır ki $|F^k(x) - F^k(y)| > \delta$ özelliği sağlanıyorsa F başlangıç değerlerine göre hassas bağımlıdır denir. Öte yandan, herhangi $U, V \subset J$ açık kümeleri için öyle bir k pozitif tamsayısı vardır ki $F^k(U) \cap V \neq \emptyset$ özelliği sağlanıyorsa F topolojik geçişlidir denir. $F: J \rightarrow J$ fonksiyonu Devaney kaotiktir eğer: (i) F başlangıç koşullarına göre hassas bağımlıdır; (ii) F topolojik geçişlidir; (iii) F 'in periyodik noktaları J 'de yoğundur.

Projemiz kapsamında Li-Yorke ve Devaney kaos tanımları sürekli-zaman dinamik sistemler için verilmiştir. Bu tanımlar aracılığıyla sürekli-zaman dinamik sistemlerinde kaos üretimi yapılmıştır.

2. LİTERATÜR TARAMASI

İlk örnekleri Hadamard [19], Morse ve Hedlung [30] tarafından oluşturulan sembolik dinamik kaos çalışmalarında en eski yöntemlerden biridir. Sembolik dinamik sistemler, sonlu bir alfabeden seçilen bir veya iki yönlü sonsuz semboller dizisini içeren faz uzaylarından oluşan sistemlerdir. Bu gibi dinamikler at nalı (horseshoe) fonksiyonu ve logistic fonksiyonu gibi çeşitli durumlarda ortaya çıkar. Sembolik dinamiğin en önemli özelliği, kaydırma

fonksiyonu altında izin verilen dizilerin değişmez (invariant) olmasıdır [13,16,20,23,38,39]. Ayrıca, sembolik dinamik sistemler hem Devaney hem de Li-Yorke kaotiktir [2,3,5,6,13,34]. Smale Horseshoe fonksiyonu ilk olarak Smale [37] tarafından çalışılmıştır ve bu fonksiyon yapısal olarak kararlı olan ve kaotik değişmez küme özelliği gösteren bir difeomorfizmaya örnektir [13,23,38,39]. At nalı fonksiyonu Duffing denklemi durumundaki gibi transverse homoklinik yörüngeler olduğunda ortaya çıkmaktadır [15,17,38].

Lorenz sonsuz boyutlu bir sistemin dinamiğini üç boyutlu bir denkleme indirgeyerek basit tek boyutlu map uygulaması ile sistemin analiz edilebilir olduğunu göstermiştir [28]. Smale [37], Cartwright ve Littlewood [12] ve sonrasında Levinson [26] tarafından incelenen Van der Pol denkleminin karmaşık dinamiği altında at nalı fonksiyonunun geometrisinin olduğu belirtilmiştir. Bugünlerde, kaotik dinamiği ile birlikte Smale Horseshoe fonksiyonu, bir kaos sürecini tanımlamaya çalışırken en temel enstrümanlardan birisidir [17,38,39]. Guckenheimer and Williams [18], eşboyut (codimension) 2'nin yapısal kararlılığını göstermek için Lorenz çeker akışının geometrik bir açıklamasını vermiştir. Buna ek olarak, Lorenz çekerin topolojisinin at nalı fonksiyonu topolojisinden çok daha karmaşık olduğu bulunmuştur [17]. Ayrıca, Levi [25], Van der Pol map içinde gömülü at nalının varlığını ve onların faz düzleminde nasıl yerleştirdiğini göstermek için Van der pol denkleminin basitleştirilmiş bir sürümü için bir geometrik yaklaşım kullanmıştır.

Kaos üretimi konusu literatürde kaotik sistemlerin senkronizasyonu konusunda ele alınmıştır [1,15,21,22,29,32,35]. Bu kavramda iki adet kaotik sistem ele alınmakta ve bu sistemlerin çözümlerinin asimptotik davranışları incelenmektedir. Ancak bizim durumumuzda çözümlerin asimptotik davranışları ele alınmamakla birlikte çözümlerin Devaney [13], Li-Yorke [27] ve ardışık periyot çiftlenmesi çatallanması [14] yoluyla kaos tanımlarını sağladığı teorik olarak gösterilmektedir.

Referanslar

- [1] Abarbanel, H.D.I., Rulkov, N.F., Sushchik, M.M. 1996. "Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach", Phys. Rev. E, 53, 4528-4535.
- [2] Akhmet, M. 2010. Principles of Discontinuous Dynamical Systems, New York: Springer.
- [3] Akhmet, M. 2011. Nonlinear hybrid continuous/discrete-time models. Amsterdam-Paris: Atlantis Press.
- [4] Akhmet, M, Yılmaz, E. 2014. Neural Networks with Discontinuous/Impact Activations, New-York: Springer.
- [5] Akhmet, M. U. 2009. "Devaney's chaos of a relay system", Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 14, 1486-1493.

- [6] Akhmet, M. U. 2009. "Li-Yorke chaos in the impact system", *J. Math. Anal. Appl.*, 351, 804-810.
- [7] Akhmet, M. U. 2009. "Shadowing and dynamical synthesis", *Int. J. Bifur. Chaos*, 19, 3339-3346.
- [8] Akhmet, M. U. 2009. "Dynamical synthesis of quasi-minimal sets", *Int. J. Bifur. Chaos*, 19, 2423-2427.
- [9] Akhmet, M. U. 2009. "Creating a chaos in a system with relay", *Int. J. of Qual. Theory Differ. Equat. Appl.*, 3, 3-7.
- [10] Andersson, K. G. 1994. "Poincaré's discovery of homoclinic points", *Archive for History of Exact Sciences*, 48, 133-147.
- [11] Bouzerdoum, A., Pinter, R. B. 1993. "Shunting inhibitory cellular neural networks: derivation and stability analysis", *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 40, 215-221.
- [12] Cartwright, M. L., Littlewood, J. E. 1945. "On nonlinear differential equations of the second order, I," *J. London Math. Soc.*, 20, 180-189.
- [13] Devaney, R. 1987. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. United States of America: Addison-Wesley.
- [14] Feigenbaum, M. J. 1980. *Universal behavior in nonlinear systems*, Los Alamos Science, 1, 4-27.
- [15] Gonzales-Miranda, J. M. 2004. *Synchronization and Control of Chaos*, London: Imperial College Press.
- [16] Grebogi, C., Yorke, J. A. 1997. *The impact of chaos on science and society*. Tokyo: United Nations University Press.
- [17] Guckenheimer, J., Holmes, P. 1997. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. New York: Springer-Verlag.
- [18] Guckenheimer, J., Williams, R. F. 1979. *Structural stability of Lorenz attractors*. *Publ Math.*, 50, 307-320.
- [19] Hadamard, J. 1898. *Les surfaces a courbures opposees et leurs lignes geodesiques*. *J. Math. Pures Appl.*, 4, 27-74.
- [20] Hale, J., Kocak, H. 1991. *Dynamics and bifurcations*. New York: Springer-Verlag.
- [21] Hunt, B. R., Ott, E., Yorke, J. A. 1997. "Differentiable generalized synchronization of chaos", *Phys. Rev. E*, 55, 4029-4034.
- [22] Kapitaniak, T. "Synchronization of chaos using continuous control", *Phys. Rev. E*, 50, 1642-1644.
- [23] Kennedy, J., Yorke, J. A. 2001. *Topological horseshoes*. *Trans. Am. Math. Soc.*, 353, 2513–2530.

- [24] Kocarev, L., Parlitz, U. 1996. "Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems", Phys. Rev. Lett., 76, 1816-1819.
- [25] Levi, M. 1981. Qualitative Analysis of the Periodically Forced Relaxation Oscillations. United States of America: Memoirs of the American Mathematical Society.
- [26] Levinson, N. 1949. "A second order differential equation with singular solutions", Ann Math, 50, 127-153.
- [27] Li, T. Y., Yorke, J. A. 1975. "Period three implies chaos", The American Mathematical Monthly, 82, 985-992.
- [28] Lorenz, E. N. 1963. "Deterministic nonperiodic flow", J. Atmos. Sci., 20, 130-141.
- [29] Macau, E. E. N., Grebogi, C., Lai, Y.-C. "Active synchronization in nonhyperbolic hyperchaotic systems", Phys. Rev. E, 65, 027202.
- [30] Morse, M., Hedlund, G. A. 1938. "Symbolic dynamics", Am J Math, 60, 815-866.
- [31] Ott, E., Grebogi, C., Yorke, J. A. 1990. "Controlling chaos", Phys. Rev. Lett., 64, 1196-1199.
- [32] Pecora, L. M., Carroll, T. L. 1990. "Synchronization in chaotic systems", Phys. Rev. Lett., 64, 821-825.
- [33] Pyragas, K. 1992. "Continuous control of chaos by self-controlling feedback", Phys. Rev. A, 170, 421-428.
- [34] Robinson, C. 1995. Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. Boca Raton/Ann Arbor/London/Tokyo: CRC Press.
- [35] Rulkov, N. F., Sushchik, M. M., Tsimring, L. S., Abarbanel, H. D. I. 1995. "Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems", Phys. Rev. E, 51, 980-994.
- [36] Schuster, H. G. 1999. Handbook of Chaos Control. Weinheim: Wiley-Vch.
- [37] Smale, S. 1967. "Differentiable dynamical systems", Bull. Am. Math. Soc., 73, 747-817.
- [38] Wiggins, S. 1988. Global bifurcations and chaos: analytical methods. New York: Springer-Verlag.
- [39] Wiggins, S. 2003. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. New York: Springer-Verlag.

3. GEREÇ VE YÖNTEM

Projemiz kapsamında d_1, d_2, d_3, D reel sayılar ve k bir doğal sayı olmak üzere

$$x'' + d_1 x' + d_2 x + d_3 x^3 = D \cos(k\pi t) + v(t, t_0, \mu) \quad (1)$$

formatındaki Duffing osilatörü ele alınmış olup, bu denklemde ardışık periyot-çiftlenmesi çatallanması yoluyla kaos oluşumu ve oluşan bu kaosun kontrolü teorik olarak incelenmiştir ve sonuçlarımız simülasyonlar ile desteklenmiştir. Burada μ bir parametre ve $v(t, t_0, \mu)$ değişim noktaları kaotik olan parçalı sabit bir fonksiyondur.

Kaos üretimi konusunda ele aldığımız diğer bir çalışma ise tek yönlü bağlantılı sistemlerde belirli türdeki bir kaosun genişletilebileceği üzerine olmuştur. Bu amaçla,

$$x' = F(t, x) \quad (2)$$

ve

$$y' = Ay + g(x, y) \quad (3)$$

formatındaki sistemler ele alınmıştır ve sistem (2)' nin kaotik olması durumunda sistem (3)' ün de aynı türde kaos ürettiği teorik olarak ispatlanmıştır. Burada, pertürbasyon olmaması durumunda sistem (3) asimptotik kararlı bir denge noktasına sahiptir.

Asimptotik kararlı limit çemberi içeren sistemlerde kaos üretimi konusu kapsamında ise

$$y' = f(y) + h(x(t)) \quad (4)$$

formatında bir sistem ele alınmıştır. Burada, $x(t)$ pertürbasyon terimi (2) formatındaki kaotik bir sistemden gelmektedir.

Sinir ağlarında kaos oluşumunu incelemek amacıyla model olarak

$$x'_{ij} = -a_{ij}x_{ij} - \sum_{C_{kl} \in N_r(i,j)} C_{ij}^{kl} f(x_{kl}(t))x_{ij} + L_{ij}(t) \quad (5)$$

formatındaki hücrel sinir ağları seçilmiştir. Model (5) Bouzerdoum ve Pinter [11] tarafından ortaya konulmuştur. Bu tür sinir sistemlerinde Li-Yorke kaosun varlığı teorik olarak ispatlanmıştır.

4. BULGULAR

Projemizin temelinde diferansiyel denklem sistemlerinde kaos üretimi ve kontrolü yer almaktadır. Bu durum bir önceki bölümde bahsedilen sistemler için hayata geçirilmiştir. Literatürde ilk kez sürekli-zaman dinamiği için Devaney ve Li-Yorke kaos türleri tanımları verilmiştir. Elde ettiğimiz sonuçlar teorik temellere dayanmaktadır. Çalışmalarımızda kaos kontrol metodu olarak OGY [31,36] ve Pyragas [33] metotları seçilmiştir. Kaos kontrolü ele aldığımız sistemler için hem teorik olarak ispatlanmış hem de kararsız periyodik çözümlerin stabilizasyonu simülasyonlarla gösterilmiştir.

Teorik sonuçlarımızın yanı sıra aralıklılık (intermittency) yoluyla meydana gelen kaos, Shilnikov yörüngeleri ve Chua osilatörlerinde kaos oluşumu nümerik olarak incelenmiştir. Ayrıca, faz uzayındaki yüzeylerde etkilere sahip olan Van der Pol denkleminde süreksiz limit çemberinin varlığı ispatlanmıştır. Diferansiyel denklemlerde kaos üretimi üzerine olan sonuçlarımız genelleştirilmiş senkronizasyon kavramı ile karşılaştırılmıştır.

Projemiz kapsamında yapmış olduğumuz çalışmalarımız şu şekildedir:

1. Akhmet, M., Fen, M.O. 2014. "Attraction of Li-Yorke chaos by retarded SICNNs", *Neurocomputing*, 147, 330-342.
2. Akhmet, M., Fen, M.O. 2014. "Generation of cyclic/toroidal chaos by Hopfield neural networks", *Neurocomputing*, 145, 230-239.
3. Akhmet, M.U., Fen, M.O. 2014. "Entrainment by chaos", *Journal of Nonlinear Science*, 24, 411-439.
4. Akhmet, M., Fen, M.O. 2014. "Chaotification of Impulsive Systems by Perturbations", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24, 1450078.
5. Akhmet, M., Fen, M.O. 2014. "A new method of chaos generation", *Nonlinear Studies*, 21, 195-203.
6. Akhmet, M., Turan M. 2013. "Bifurcation of discontinuous limit cycles of the Van der Pol equation", *Mathematics and Computers in Simulation*, 95, 39-54.
7. Akhmet, M., Fen, M.O. 2013. "Period-Doubling Route to Chaos in Shunting Inhibitory Cellular Neural Networks", *Proceedings of 8th International Symposium on Health Informatics and Bioinformatics (HIBIT)*, September 25-27, Ankara, Turkey.
8. Akhmet, M.U., Fen, M.O. 2013. "Shunting inhibitory cellular neural networks with chaotic external inputs", *Chaos*, 23, 023112.
9. Akhmet, M.U., Fen, M.O. 2013. "Replication of chaos", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 18, 2626-2666.
10. Akhmet, M.U., Fen, M.O. 2012. "Chaotic period-doubling and OGY control for the forced Duffing equation", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 17, 1929-1946.

Projemiz kapsamında basılmış olan makalelerin tamamında proje numarası (111T320) belirtilerek Tübitak'a teşekkür edilmiştir.

5. SONUÇ

Projemiz kapsamında girdi/çıkıktı mekanizması kullanılarak sinir ağları, mekanik ve elektronik sistemlerinde kaos üretimi ve kontrolü ele alınmıştır. Girdi/çıkıktı mekanizması diferansiyel denklemler teorisinde sınırlı, periyodik ve hemen hemen periyodik sistemler için sıkça kullanılmaktadır. Projemizin orijinalliği bu mekanizmanın kaotik çözümler için kullanılmasıdır. Sonuçlarımız teorik olarak ispatlanmış olup simülasyonlarla desteklenmiştir. Sonuçlarımız matematiksel sinir ağlarının farklı modelleri üzerine uygulanabilir ve gelecekteki çalışmalarımız bu yönde devam edecektir.

**TÜBİTAK
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU**

Proje Yürütücüsü:	Prof. Dr. MARAT AKHMET
Proje No:	111T320
Proje Başlığı:	Biyolojik, Elektriksel ve Mekaniksel Osilatörler: Senkronizasyon, Kaos ve Çatallanma
Proje Türü:	Araştırma
Proje Süresi:	36
Araştırmacılar:	
Danışmanlar:	
Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi:	ORTA DOĞU TEKNİK Ü. FEN F. MATEMATİK B.
Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri:	01/10/2011 - 01/10/2014
Onaylanan Bütçe:	93145.0
Harcanan Bütçe:	45904.51
Öz:	<p>Bu projede asimptotik kararlı denge noktası ya da asimptotik kararlı limit çemberine sahip olan diferansiyel denklem sistemlerinin kaotik olarak pertürbe edildiklerinde ortaya çıkan dinamik incelenmiştir. Girdilerin kaotik olması durumunda çıktılarının da kaotik olduğu teorik olarak ispatlanmıştır. Elde edilen kaosun kontrol edilebilirliği gösterilmiştir. Hücresel sinir ağları modellerinde kaos üretimi problemi ele alınmış olup Hopfield sinir ağları modellerinde çembersel kaos oluşumu incelenmiştir. Çalışmalarımızda Devaney ve Li-Yorke kaos türlerinin yanı sıra ardışık periyot-çiftlenmesi çatallanması yolları ile meydana gelen kaos türlerinden faydalanılmıştır. Aralıklılık (intermittency) yoluyla meydana gelen kaos, Shilnikov yörüngeleri ve Chua osilatörlerinde kaos oluşumu nümerik olarak incelenmiştir. Bunun yanı sıra projemiz kapsamında faz uzayındaki yüzeylerde etkilere sahip olan Van der Pol denkleminde süresiz limit çemberinin varlığı ispatlanmıştır. Sonuçlarımız genelleştirilmiş senkronizasyon kavramı ile karşılaştırılmış olup simülasyonlarla desteklenmiştir.</p>
Anahtar Kelimeler:	Kaosun replikasyonu, Devaney kaos, Li-Yorke kaos, Ardışık periyot-çiftlenmesi çatallanması
Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu Mu?:	Hayır
Projeden Yapılan Yayınlar:	1- Replication of Chaos (Makale/Kitap/Kitapta Bölüm)