

336.24  
Ö 990

( 1997-810

21

MAG-721

ESTONIAN  
MINISTRY OF INTERIOR  
ARCHIVE, RUOMAT  
TÖPÄNEN

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNİK ARAŞTIRMA KURUMU

MÜHENDİSLİK ARAŞTIRMA GRUBU

Proje No. : MAG-721

AYRI MERKEZLİ BORULARDA NON-NEWTONIAN SIVI İLE HİDRODİNAMİK VE

ISI TRANSFERİ ÇALIŞMALARI

ODTÜ Kimya Mh. Bl.  
Syt : 20  
Ret : 18

Proje Yürütücüleri: Prof.Dr. Canan Özgen ve Prof.Dr. İsmail Tosun

ODTÜ, Kimya Mühendisliği Bölümü, Ankara 06531

Aralık 1990, Ankara

18450

536.26

0.99m

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNİK ARAŞTIRMA KURUMU

MÜHENDİSLİK ARAŞTIRMA GRUBU

Proje No. : MAG-721

AYRI MERKEZLİ BORULARDA NON-NEWTONIAN SIVI İLE HİDRODİNAMİK VE  
ISI TRANSFERİ ÇALIŞMALARI

TÜRKİYE  
BİLİMSEL VE TEKNİK  
ARAŞTIRMA KURUMU  
KÜTÜPHANESİ

Proje Yürütücüleri: Prof. Dr. Canan Üzgen ve Prof. Dr. İsmail Tosun  
ODTÜ, Kimya Mühendisliği Bölümü, Ankara 06531

Bu Proje Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumunun Desteği ile Orta  
Doğu Teknik Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, Kimya Mühendisliği Bölümü,  
Temel İşlemler ve Termodinamik Anabilim Dalında yapılmıştır.

Aralık 1990, Ankara

Bağcı Haziran 1991

18450

## ÖNSÖZ

Bu çalışma daha önce yürütülen ve tamamlanan MAG-582 (Ayrı Merkezli Borularda Hidrodinamik ve Isı Transferi Çalışmaları) No'lu projenin devamıdır. Yapılan araştırmada, non-Newtonian ve Newtonian sıvılar için teorik ve deneysel çalışmalar yapılarak ayrı merkezli borulardaki sıvı akışı ve ısı transferi incelenmiştir.

Araştırmaya sağlamış olduğu mali destek için TÜBİTAK'a, deney aletinin kurulmasındaki ve deneysel çalışmalardaki yardımları için Sayın Deniz Üner ve Sayın Ertuğrul Belge'ye teşekkür ederiz.

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ	i
TABLO LİSTESİ	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
SİMGELER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
BÖLÜM 2 TEORİK ÇALIŞMALAR	4
2.1. İkili Polar (Bipolar) Koordinat Sistemi	4
2.2. Yaklaşık Çözüm	6
2.3. Hız dağılımı ve Hacimsel Debi	7
2.3.1. Power-law modeli	9
2.3.2. Bingham plastik modeli	11
2.3.3. Sutterby modeli	13
BÖLÜM 3 DENEYSEL ÇALIŞMALAR	16
3.1. Deney Düzenegi	16
3.1.1. Isı transferi çalışmaları	16
3.1.2. Hidrodinamik çalışmalar	18
3.2. Deneysel Yöntem	20
3.2.1. Isı transfer çalışmaları	20
3.2.2. Hidrodinamik çalışmalar	21
BÖLÜM 4 BULGULAR VE TARTIŞMA	22
4.1. Hidrodinamik Çalışmalar	22
4.1.1. Teorik çalışmalar	22
4.1.2. Deneysel çalışmalar	35
4.2. Isı Transfer Çalışmaları	35
BÖLÜM 5 SONUÇ VE ÖNERİLER	41
KAYNAKLAR	42
EKLER	
EK-1. An Approximate Solution for Non-Newtonian Flow in Eccentric Annuli, <i>Ind. Eng. Chem. Res.</i> , <u>27</u> , 698-701 (1988).	
EK-2. Flow of a Power-Law Fluid in an Eccentric Annulus, <i>SPE Drilling Engineering</i> , <u>4</u> , 296-272 (1989).	
EK-3. Heat Transfer Studies in an Eccentric Annulus", <i>AIChE Annual Meeting</i> , Nov. 27 - Dec. 2, Washington, DC., 1988.	

## TABLO LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 1.1. Türbülanslı akış için ısı transfer katsayısı korelasyonları .....	3
Tablo 2.1. Sutterby model parametreleri (Mitsubishi ve Aoyagi, 1973).	13
Tablo 3.1. Deneylerde kullanılan iç boru çapları .....	18

## ŞEKİL LİSTESİ

		Sayfa
Şekil 2.1.	Ayrı merkezli boru geometrisi .....	5
Şekil 2.2.	Ayrı merkezli boru sistemine eşdeğer iki levha arasından akış .....	6
Şekil 2.3.	Paralel olmayan iki levha arasından akış geometrisi .....	7
Şekil 3.1.	Isı transferi çalışmaları için kullanılan deney düzeneği.	17
Şekil 3.2.	Hidrodinamik çalışmalar için kullanılan deney düzeneği ..	19
Şekil 3.3.	Test bölgesinin giriş ve çıkışı için yapılan tasarım ....	20
Şekil 4.1.	Power-law sıvısı için boyutsuz hacimsel debinin $\epsilon$ ve $s$ ile değişimi ( $r^* = 0,1$ ) .....	23
Şekil 4.2.	Power-law sıvısı için boyutsuz hacimsel debinin $\epsilon$ ve $s$ ile değişimi ( $r^* = 0,3$ ) .....	24
Şekil 4.3.	Power-law sıvısı için boyutsuz hacimsel debinin $\epsilon$ ve $s$ ile değişimi ( $r^* = 0,5$ ) .....	25
Şekil 4.4.	Power-law sıvısı için $Q_{\text{ayrı}}/Q_{\text{eş}}$ değerinin $\epsilon$ ve $n$ 'in fonksiyonu olarak değişimi ( $r^* = 0,3$ ) .....	26
Şekil 4.5.	Power-law sıvısı için $Q_{\text{ayrı}}/Q_{\text{eş}}$ değerinin $\epsilon$ ve $n$ 'in fonksiyonu olarak değişimi ( $r^* = 0,5$ ) .....	27
Şekil 4.6.	Power-law sıvısı için $Q_{\text{ayrı}}/Q_{\text{eş}}$ değerinin $\epsilon$ ve $n$ 'in fonksiyonu olarak değişimi ( $r^* = 0,7$ ) .....	28
Şekil 4.7.	Power-law sıvısı için $Q_{\text{ayrı}}/Q_{\text{eş}}$ değerinin $\epsilon$ ve $n$ 'in fonksiyonu olarak değişimi ( $r^* = 0,9$ ) .....	29
Şekil 4.8.	Bingham-plastik sıvısı için boyutsuz hacimsel debinin $\epsilon$ ve $T_0$ ile değişimi ( $r^* = 0,1$ ) .....	30
Şekil 4.9.	Bingham-plastik sıvısı için boyutsuz hacimsel debinin $\epsilon$ ve $T_0$ ile değişimi ( $r^* = 0,3$ ) .....	31
Şekil 4.10.	Bingham-plastik sıvısı için boyutsuz hacimsel debinin $\epsilon$ ve $T_0$ ile değişimi ( $r^* = 0,5$ ) .....	32
Şekil 4.11.	Sutterby modeli için boyutsuz ifadelerin $\epsilon$ ve $r^*$ ile değişimi .....	33
Şekil 4.12.	Sutterby modeli için boyutsuz ifadelerin $\epsilon$ ve $r^*$ ile değişimi .....	34
Şekil 4.13.	Basınç düşmesi ile kütleli debinin değişik $\epsilon$ değerlerindeki değişimi .....	36
Şekil 4.14.	Eşmerkezli boru sistemi için Monrad-Pelton korelasyonu ile elde edilen Wilson çizimi ( $r^* = 0,40$ ) .....	38
Şekil 4.15.	Eşmerkezli boru sistemi için Wiegand korelasyonu ile elde edilen Wilson çizimi ( $r^* = 0,40$ ) .....	38
Şekil 4.16.	Ayrı merkezli boru sistemi için elde edilen Wilson çizimleri .....	40

## SİMGELER

$a$	$\eta=0$ olduğu durumda $x$ koordinatının değeri
$C_i$	iç boru ısı transfer katsayısı sabiti
$C_o$	dış boru ısı transfer katsayısı sabiti
$D_h$	hidrolik çap
$E$	birinci tip eliptik integral, Denklem (2.23)
$e$	iç ve dış boru merkezleri arasındaki mesafe
$h$	paralel olmayan iki levha arasındaki yükseklik, Denklem (2.6)
$h_i$	iç boru için ısı transfer katsayısı
$h_o$	dış boru için ısı transfer katsayısı
$K$	ikinci tip eliptik integral, Denklem (2.40)
$k$	ısı iletkenlik
$L$	boru uzunluğu
$l$	Denklem (2.7) ile tanımlanan parametre
$Nu_i$	iç boru için Nusselt sayısı
$Nu_o$	dış boru için Nusselt sayısı
$Nu_s$	piston akışı için Nusselt sayısı
$P$	basınç
$Pe$	Peclet sayısı
$Pr$	Prandtl sayısı
$Q$	hacimsel debi
$\bar{Q}$	boyutsuz hacimsel debi, Denklem (2.25)
$\bar{\bar{Q}}$	boyutsuz hacimsel debi, Denklem (2.36)
$R_w$	duvar direnci
$Re$	Reynolds sayısı
$r_i$	iç boru yarıçapı
$r_o$	dış boru yarıçapı
$r^*$	yarıçap oranı, Denklem (2.4)
$\epsilon$	ayrı merkezlilik oranı, Denklem (2.5)
$\eta \xi$	ikili polar koordinat sistemi
$\lambda$	düzeltilme katsayısı, Denklem (2.22)
$\mu$	viskozite
$\rho$	yoğunluk
$\underline{\tau}$	kayma gerilimi tensörü
$\tau_w$	duvardaki kayma gerilimi
$\dot{\gamma}$	kayma hızı
$\dot{\gamma}_w$	duvardaki kayma hızı



## ÖZET

Bu çalışma, ayrı merkezli boru sistemlerinde Newtonian ve non-Newtonian sıvılar için yapılan hidrodinamik ve ısı transferi çalışmalarını kapsamaktadır.

Hacimsel debi ile basınç düşmesi arasındaki bağıntı, üç değişik non-Newtonian model (Power-law, Bingham plastik, Sutterby) için yaklaşık bir yöntem kullanılarak elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, literatürden bulunan deney sonuçları ile uyum içindedir. Ayrıca, karboksimetil selüloz-su karışımı kullanılarak yapılan deney sonuçlarından, ayrı merkezli borulardaki basınç düşmesinin, aynı kütleli debi için, ayrı merkezlilik oranıyla ters orantılı olarak değiştiği gözlenmiştir.

Isı transferi deneyleri sonucunda daha önce MAG-582 Nolu projede elde edilen ısı transfer korelasyonu geliştirilmiştir.

## ABSTRACT

In this study, the hydrodynamic and heat transfer studies in an eccentric annulus were carried out for both Newtonian and non-Newtonian fluids.

An approximate solution to predict the relationship between volume rate of flow and pressure drop for steady-state laminar flow of non-Newtonian fluids (Power-law, Bingham-plastic, Sutterby model) in an eccentric annulus is described. The results compare reasonably well with the previously published theoretical and experimental data. The experimental results obtained using carboxymethyl cellulose and water mixture indicate that the pressure drop varies inversely with the eccentricity ratio at the same mass flow rate.

As a result of the experiments carried out in a broad range of eccentricity and radius ratios, the heat transfer correlation obtained in the project MAG-582 is improved.

## BÖLÜM 1

### GİRİŞ

Non-Newtonian sıvıların eşmerkezli ve/veya ayrı merkezli halkasal boşluktan akışlarının özellikle petrol sondajlarında ve plastik ekstrüzyon işlemlerinde endüstriyel önemi vardır.

Ayrı merkezli boru sistemlerinin geometrik karmaşıklığının yanı sıra kayma gerilimi ile kayma hızı arasındaki bağıntıların lineer olmaması, non-Newtonian sıvılardaki hız ve sıcaklık dağılımlarının analitik olarak elde edilmesini imkansız kılmaktadır. Bu konuda yapılan az sayıdaki çalışmada deneysel veya nümerik yöntemler kullanılmıştır.

Sutterby modeli ile ifade edilebilen sıvıların ayrı merkezli borulardaki hız dağılımı, Mitsubishi ve Aoyagi (1973) tarafından hidrojen kabarcıkları kullanılarak ölçülmüştür. Bu amaçla, ağırlık yüzdeleri % 3,92 olan hidroksietil selüloz ve % 3,44 olan karboksimetil selüloz çözeltileri kullanılmıştır. Mitsubishi ve Aoyagi, hız dağılımını varyasyonel yöntem kullanarak da hesaplamışlar ve deneysel sonuçlarıyla karşılaştırmışlardır.

*Bingham plastik* ve *Power-law* tipindeki non-Newtonian sıvıların ayrı merkezli halkasal boşluktaki akışları Guckes (1979) tarafından incelenmiştir. Guckes, hareket denklemini sonlu farklar (finite difference) tekniği kullanarak çözmüştür. Bu teknik, daha önce Redberger ve Charles (1962, 1963) tarafından kullanılan yöntemin bir uzantısıdır.

Iyoho ve Azar (1981) ayrı merkezli iki boru arasındaki akışı, paralel olmayan iki levha arasındaki akış olarak modelleyerek Power-law tipi sıvılar için hız dağılımını analitik olarak belirlemişlerdir. Hacimsel debi, eşmerkezli borular için Skelland (1967) tarafından verilen formülün değişik bir şekli kullanılarak hesaplanmıştır. Tosun (1984) bu yöntemin doğru olmadığını, hacimsel debinin yarıçap ve ayrı merkezlilik oranlarına bağlı olduğunu göstermiştir.

Halkasal boşluktan akan sıvılara ve/veya sıvılardan olan ısı transferinin analitik çözümü ancak akışın laminer olduğu durumlarda mümkündür. Türbülanslı akış için ise deneysel çalışmalar sonucunda elde edilen ısı transfer katsayısı korelasyonları kullanılmaktadır.

Ayrı merkezli boru sistemlerindeki ısı transferi, laminer akış için Snyder (1963), Cheng ve Hwang (1968) ve Trombetta (1971) tarafından teorik olarak incelenmiştir. Snyder (1963), piston akışındaki sıvı metaller için ısı transferi korelasyonunu,

$$Nu = 0,667 Nu_s + 0,025 Pe^{0,8} \quad (1.1)$$

şeklinde ifade etmiştir. Burada,  $Nu_s$  piston akışı Nusselt sayısını göstermektedir. Cheng ve Hwang (1968) 20 noktalı eşleştirme yöntemini, Trombetta (1971) ise en düşük kareler yöntemini kullanarak değişik sınır şartlarında Nusselt sayısını hesaplamışlardır.

Ayrı merkezli borulardaki türbülanslı akış için ısı transferi Judd ve arkadaşları (1963), Lee ve Barrow (1964), ve Yu ve Dwyer (1966) tarafından araştırılmış ancak geçerli bir korelasyon elde edilememiştir.

Ayrı merkezli borulardaki çalışmaların çok kısıtlı olmasına karşılık, boru ve eşmerkezli boru sistemlerindeki ısı transferi çalışmaları oldukça fazladır. Bu sistemler için türbülanslı akışdaki ısı transfer katsayısı korelasyonları literatürde genel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir:

$$Nu = C Re^a Pr^\beta r^{*\gamma} \quad (1.2)$$

Denklem (1.2)'deki  $C$ ,  $a$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$  değerleri Tablo 1.1'de verilmiştir.

Tablo 1.1. Türbülanslı akış için ısı transfer katsayısı korelasyonları.

Geometri	C	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	Kaynak
Boru	0,023	0,8	1/3	0	Sieder & Tate (1936)
	0,023	0,8	0,4 (ısıtma)	0	Dittus & Boelter (1930)
	0,023	0,8	0,3 (soğutma)		
Eşmerkezli Boru	0,020	0,8	1/3	-0,53	Monrad & Pelton (1942)
	0,023	0,8	0,4	-0,45	Wiegand (1945)

## BÖLÜM 2

### TEORİK ÇALIŞMALAR

#### 2.1. İkili Polar (Bipolar) Koordinat Sistemi

Enerji ve momentum denklikleri, ayrı merkezli boru sistemlerinde ikili polar koordinat sistemi kullanılarak çözülmür. İkili polar koordinat sistemi  $(\eta, \xi, z)$  ile kartezyen koordinat sistemi  $(x, y, z)$  arasındaki bağıntılar aşağıda verilmiştir:

$$x = \frac{a \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} \quad (2.1)$$

$$y = \frac{a \sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi} \quad (2.2)$$

$$z = z \quad (2.3)$$

Ayrı merkezli bir boru geometrisi Şekil 2.1' de gösterilmiştir. Bu tip sistemlerde sık olarak kullanılan iki terim, *yarıçap oranı* ve *ayrı merkezlilik oranıdır*.

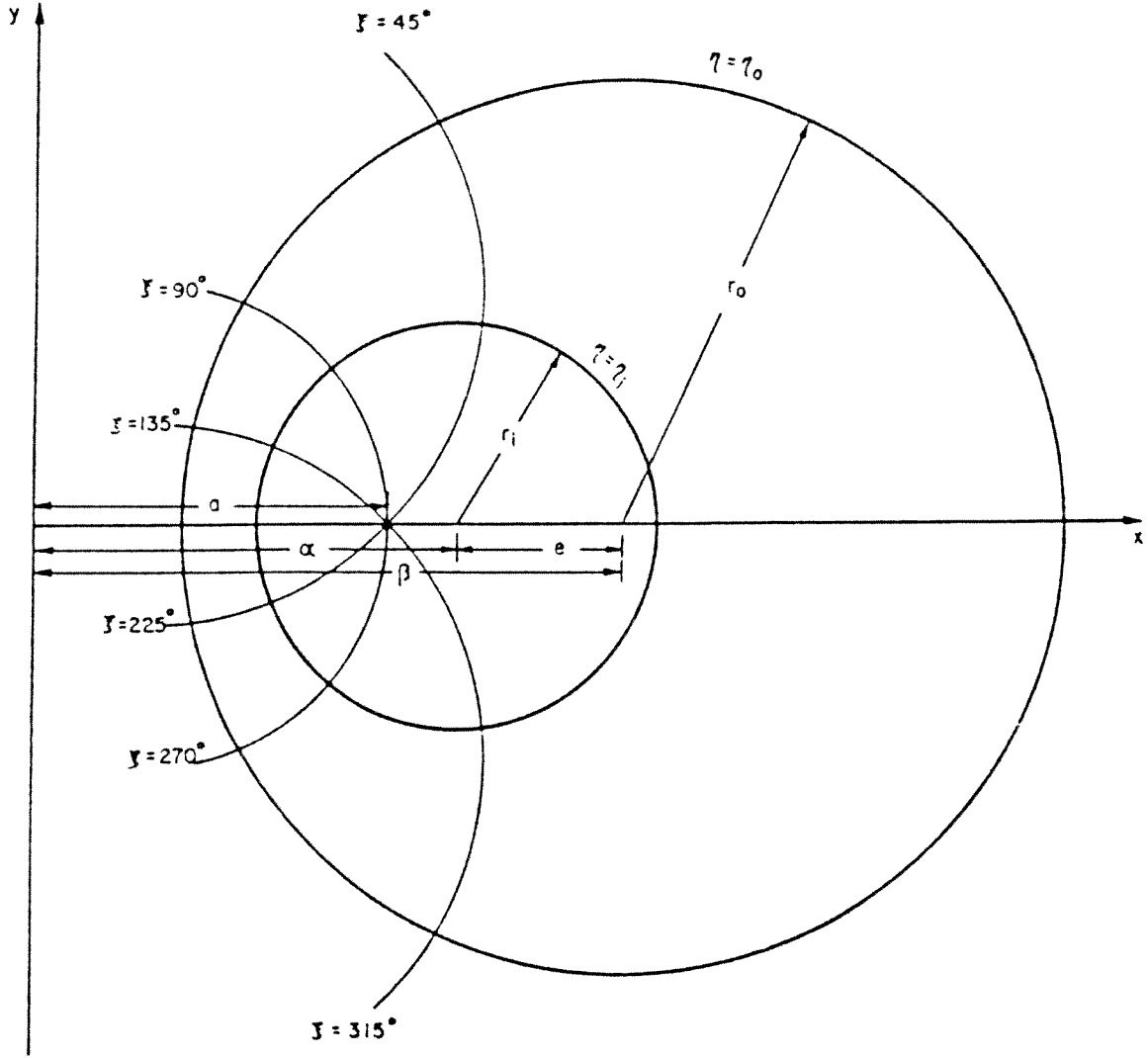
Yarıçap oranı,  $r^*$ , iç ve dış boru yarıçaplarının birbirine oranıdır:

$$r^* = r_i / r_o \quad (2.4)$$

Ayrı merkezlilik oranı,  $\epsilon$ ,

$$\epsilon = e / (r_o - r_i) \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır. İç ve dış boru merkezlerinin çakıştığı durumda



Şekil 2.1. Ayrı merkezli boru geometrisi.

(eşmerkezli)  $\epsilon = 0$ , iç ve dış boru merkezlerinin bir noktada birbirine değdiği durumda ise  $\epsilon = 1$  olur.

İkili polar koordinat sistemi ile ilgili bilgi, Tosun ve Üzgen (1986) tarafından MAG-582 Nolu projede detaylı olarak verilmiştir.

## 2.2. Yaklaşık Çözüm

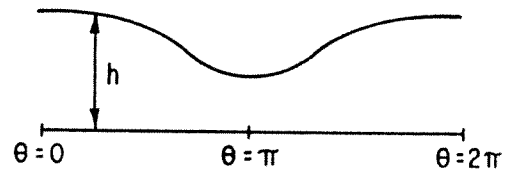
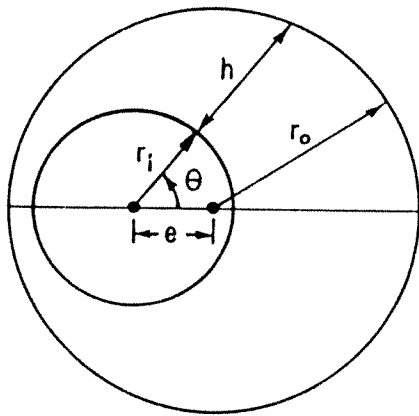
İç ve dış boru çaplarının birbirine yakın olduğu durumlarda ayrı merkezli iki boru arasındaki akış, Şekil 2.2'de gösterilen paralel olmayan iki levha arasındaki akış olarak modellenenebilir (Tao ve Donovan, 1955; Iyoho ve Azar, 1981; Tosun, 1984). İki levha arasındaki yükseklik,  $h$

$$h = r_o \left[ \sqrt{1 - l^2 \sin^2 \theta} + l \cos \theta - r^* \right] \quad (2.6)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$l = \epsilon (1 - r^*) \quad (2.7)$$

olarak tanımlanmıştır.



Şekil 2.2. Ayrı merkezli boru sistemine eşdeğer iki levha arasından akış.



### 2.3. Hız Dağılımı ve Hacimsel Debi

Şekil 2.3'de gösterilen akış sistemi için momentum denkliği

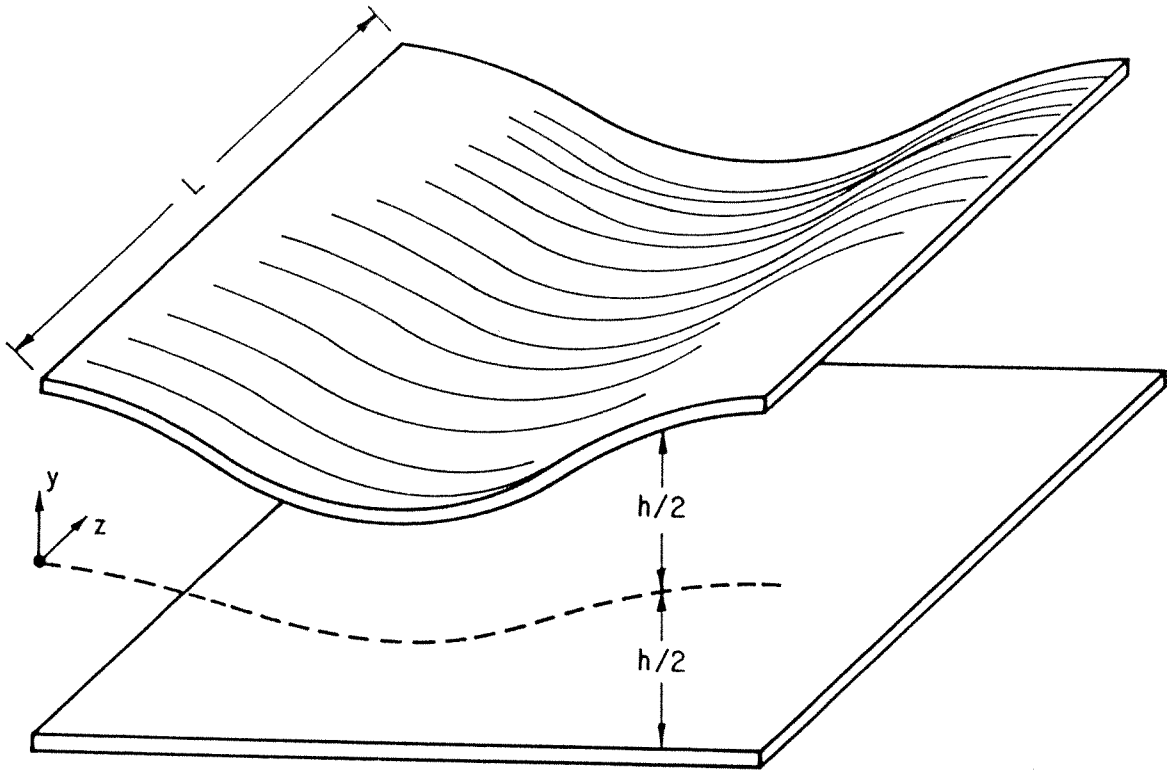
$$\frac{dr_{yz}}{dy} = - \frac{dP}{dz} \quad (2.8)$$

şeklinde yazılır. Sınır şartının

$$y = 0 \quad \tau_{yz} = 0 \quad (2.9)$$

olarak kullanılmasıyla kayma gerilimi dağılımı aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\tau_{yz} = \left[ \frac{P_0 - P_L}{L} \right] y \quad (2.10)$$



Şekil 2.3. Paralel olmayan iki levha arasından akış geometrisi.

Non-Newtonian akışkanlar için kayma gerilimi tensörü,  $\underline{\tau}$ ,

$$\underline{\tau} = - \eta \dot{\underline{\gamma}} \quad (2.11)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $\dot{\underline{\gamma}}$

$$\dot{\underline{\gamma}} = \underline{\nabla \underline{v}} + (\underline{\nabla \underline{v}})^T \quad (2.12)$$

olarak verilmiştir. Denklem (2.11)'deki kayma hızına bağımlı olan viskozite,  $\eta$ , akışkan tipine göre değişir. Bu çalışmada 3 tip akışkan modeli incelenmiştir: Power-law, Bingham plastik, Sutterby. Bu modeller için  $\eta$  değerleri aşağıda verilmiştir:

$$\eta = \begin{cases} m\dot{\gamma}^{n-1} & \text{Power-law} \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\eta = \begin{cases} \infty & \tau \leq \tau_0 \\ \mu_0 + (\tau_0/\dot{\gamma}) & \tau \geq \tau_0 \end{cases} \text{ Bingham plastik} \quad (2.14)$$

$$\eta = \begin{cases} \eta_0 (\text{arcsinh} B\dot{\gamma}/B\dot{\gamma})^A & \text{Sutterby} \end{cases} \quad (2.15)$$

Burada  $\dot{\gamma}$  ve  $\tau$ ,

$$\dot{\gamma} = \left| \sqrt{0.5(\dot{\underline{\gamma}}:\dot{\underline{\gamma}})} \right| \quad ; \quad \tau = \left| \sqrt{0.5(\underline{\tau}:\underline{\tau})} \right| \quad (2.16)$$

olarak tanımlanmışlardır.

Hızın z-yönündeki bileşeni,  $v_z$ ,  $y = 0$ 'da maksimum değerine sahiptir. Duvara yaklaşıldıkça ( $y$ -değeri arttıkça)  $v_z$  değeri azalacağından

$$\dot{\gamma} = - dv_z/dy \quad ; \quad \tau = \tau_{yz} \quad (2.17)$$

olur ve Denklem (2.11) aşağıdaki şekle indirgenir:

$$\tau_{yz} = - \eta \frac{dv_z}{dy} \quad (2.18)$$

### 2.3.1. Power-law modeli

Denklem (2.13)'ün Denklem (2.18)'de yerine konulmasıyla kayma gerilimi ifadesi

$$\tau_{yz} = m \left[ - \frac{dv_z}{dy} \right]^n \quad (2.19)$$

olarak bulunur. Denklem (2.10) ile (2.19)'un birleştirilip,  $y = h/2$ 'de  $v_z=0$  sınır şartı kullanılarak integrasyonu sonucunda hız dağılımı aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$v_z = \frac{1}{s+1} \left[ \frac{P_o - P_L}{mL} \right]^s \left[ \frac{h}{2} \right]^{s+1} \left[ 1 - \left[ \frac{y}{h/2} \right]^{s+1} \right] \quad (2.20)$$

Burada  $s = 1/n$  olarak tanımlanmıştır.

Hacimsel debi, hız dağılımının akış kesit alanı üzerinde integrasyonu sonucunda hesaplanabilir:

$$Q = \lambda \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} v_z dy d\theta = 4\lambda \int_0^\pi \int_0^{h/2} v_z dy d\theta \quad (2.21)$$

Ayrı merkezlik oranına ve yarıçap oranına bağlı bir düzeltme katsayısı olan  $\lambda$  değeri Tosun (1984) tarafından

$$\lambda = \frac{\pi r_o}{2} \left[ \frac{1 - r^{*2}}{2E - \pi r^*} \right] \quad (2.22)$$

şeklinde hesaplanmıştır. Denklem (2.22)'deki E terimi

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - t^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (2.23)$$

olarak tanımlanmıştır.

Denklem (2.20)'nin Denklem (2.21)'de kullanılmasıyla

$$\bar{Q} = \frac{\pi}{s+2} \left[ \frac{1}{2} \right]^{s+1} \left[ \frac{1 - r^{*2}}{2E - \pi r^*} \right] \int_0^{\pi} \left[ \sqrt{1 - t^2 \sin^2 \theta} + t \cos \theta - r^* \right]^{s+2} d\theta \quad (2.24)$$

elde edilir. Burada boyutsuz hacimsel debi,  $\bar{Q}$ , şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\bar{Q} = \frac{Q}{r_o^{s+3} \left[ \frac{P_o - P_L}{mL} \right]^s} \quad (2.25)$$

Power-law modeline uygun sıvıların eşmerkezli borulardaki hacimsel debisi Hanks ve Larsen (1979) tarafından hesaplanmıştır:

$$\bar{Q}_{eş} = \frac{\pi}{s+3} \left[ \frac{1}{2} \right]^s \left[ (1 - \beta^2)^{s+1} - r^{*(1-s)} (\beta^2 - r^{*2})^{s+1} \right] \quad (2.26)$$

Burada  $\beta$ , hızın maksimum olduğu boyutsuz radyal pozisyonu göstermektedir. Hanks ve Larsen (1979),  $\beta$  değerlerini  $s$  ve  $r^*$ 'in fonksiyonu olarak hesaplamışlardır. Bu durumda, aynı basınç düşmesi için ayrı merkezli ve eşmerkezli boru sistemlerinde hacimsel debilerin birbirine oranı aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\frac{Q_{ayrı}}{Q_{eş}} = \frac{s+3}{2(s+2)} \left[ \frac{1 - r^{*2}}{2E - \pi r^*} \right] \frac{\int_0^{\pi} \left[ \sqrt{1 - t^2 \sin^2 \theta} + t \cos \theta - r^* \right]^{s+2} d\theta}{\left[ (1 - \beta^2)^{s+1} - r^{*(1-s)} (\beta^2 - r^{*2})^{s+1} \right]} \quad (2.27)$$

### 2.3.2. Bingham plastik modeli

Eğer  $y = y_0$  noktasında  $\tau_{yz}$  değeri  $\tau_0$  ise, Denklem (2.10)'dan

$$y_0 = \frac{\tau_0}{(P_0 - P_L)/L} \quad (2.28)$$

elde edilir. Problemdeki simetri nedeniyle akış alanının sadece üst kısmı ( $0 \leq y \leq h/2$ ) ele alınabilir. Burada iki akış bölgesi bulunmaktadır:  $0 \leq y \leq y_0$  bölgesinde piston akışı,  $y_0 \leq y \leq h/2$  bölgesinde ise plastik akışı vardır. Denklem (2.14) ile (2.18)'in birleştirilmesiyle

$$\tau_{yz} = \tau_0 - \mu_0 \, dv_z/dy \quad y_0 \leq y \leq h/2 \quad (2.29)$$

$$dv_z/dy = 0 \quad 0 \leq y \leq y_0 \quad (2.30)$$

elde edilir. Denklem (2.10)'un Denklem (2.29)'da yerine yerleştirilip,  $y = h/2$  de  $v_z = 0$  sınır şartının kullanılarak integrasyonu sonucunda aşağıdaki hız dağılımları elde edilir:

$$v_z = \frac{P_0 - P_L}{2\mu_0 L} \left(\frac{h}{2}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{y}{h/2}\right)^2\right] - \frac{\tau_0}{\mu_0} \left(\frac{h}{2}\right) \left[1 - \left(\frac{y}{h/2}\right)\right] \quad y_0 \leq y \leq h/2 \quad (2.31)$$

$$v_z = \frac{P_0 - P_L}{2\mu_0 L} \left(\frac{h}{2}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{y_0}{h/2}\right)^2\right] - \frac{\tau_0}{\mu_0} \left(\frac{h}{2}\right) \left[1 - \left(\frac{y_0}{h/2}\right)\right] \quad 0 \leq y \leq y_0 \quad (2.32)$$

Hacimsel debinin hesaplanmasında Denklem (2.21) kullanılabilir. Ancak Denklem (2.21)'in kısmi integrasyonu ile hacimsel debi için daha basit bir ifade elde edilir:

$$Q = - 4\lambda \int_0^\pi \int_0^{h/2} y(dv_z/dy) dy d\theta \quad (2.33)$$

$0 \leq y \leq y_0$  bölgesinde  $dv_z/dy = 0$  olduğu için Denklem (2.33) aşağıdaki şekle indirgenir:

$$Q = - 4\lambda \int_0^\pi \int_{y_0}^{h/2} y(dv_z/dy) dy d\theta \quad (2.34)$$

Denklem (2.31)'in Denklem (2.34)'de kullanılmasıyla

$$\bar{Q} = \frac{\pi}{12} \left[ \frac{1 - r^{*2}}{2E - \pi r^*} \right] (H + 4\pi T_0^3 - 3GT_0) \quad (2.35)$$

elde edilir. Buradaki boyutsuz parametreler,  $\bar{Q}$ ,  $H$ ,  $T_0$  ve  $G$ , aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$\bar{Q} = \frac{Q}{r_0^4 \left[ \frac{P_0 - P_L}{\mu_0 L} \right]} \quad (2.36)$$

$$H = 2E \left[ \frac{l^2 + 7}{3} + 3r^{*2} \right] - \frac{8}{3} K(1 - l^2) - \pi r^* (3 + r^{*2}) \quad (2.37)$$

$$T_0 = y_0/r_0 \quad (2.38)$$

$$G = \pi(1 + r^{*2}) - 4Er^* \quad (2.39)$$

Denklem (2.37)'deki  $K$  terimi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$K = \int_0^{\pi/2} (1 - l^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta \quad (2.40)$$

### 2.3.3. Sutterby modeli

Mitsuishi ve Aoyagi (1973) tarafından deneysel çalışmalarda kullanılan hidroksietil selüloz (HEC) ve karboksimetil selüloz (CMC) çözeltileri, Sutterby modeli ile ifade edilir. Model parametreleri Tablo 2.1'de verilmiştir.

Tablo 2.1. Sutterby model parametreleri (Mitsuishi ve Aoyagi, 1973).

Çözelti	A	B(s)	$\eta_0$ (N.s/m <sup>2</sup> )
3,92 % HEC	0,30	0,368	1,21
3,44 % CMC	0,45	0,715	7,15

Denklem (2.10)'dan

$$\tau_{yz} = \tau_w \left[ \frac{y}{h/2} \right] \quad (2.41)$$

elde edilir. Burada  $\tau_w$  duvardaki kayma gerilimini göstermektedir ve aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:

$$\tau_w = \frac{P_o - P_L}{L} \left[ \frac{h}{2} \right] \quad (2.42)$$

Denklem (2.33)'de verilen integrasyon değişkeni y'den  $\tau_{yz}$ 'ye değiştirilecek olursa

$$Q = \lambda \int_0^\pi h^2 d\theta \int_0^{\tau_w} \dot{\gamma} (\tau_{yz}/\tau_w^2) d\tau_{yz} \quad (2.43)$$

elde edilir. Bu ifadenin kısmi integrasyonu sonucunda hacimsel debi ifadesi

$$Q = \frac{\lambda}{2} \int_0^\pi h^2 \left[ \dot{\gamma}_w - \int_0^{\dot{\gamma}_w} (\tau_{yz}/\tau_w)^2 d\dot{\gamma} \right] d\theta \quad (2.44)$$

şeklini alır. Burada  $\dot{\gamma}_w$ ,  $\dot{\gamma}$  değerinin duvardaki değeridir. Denklem (2.15) ve (2.18)'den

$$\tau_{yz} = \eta_0 \left[ \frac{\operatorname{arcsinh} B \dot{\gamma}}{B \dot{\gamma}} \right]^A \dot{\gamma} \quad (2.45)$$

elde edilir. Buradan kayma geriliminin duvardaki değeri olarak

$$\tau_w = \eta_0 \left[ \frac{\operatorname{arcsinh} a}{a} \right]^A \dot{\gamma}_w \quad (2.46)$$

ifadesi bulunur. Denklem (2.6), (2.45) ve (2.46)'ın Denklem (2.44)'de yerine konmasıyla aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{4Q}{\pi r_0^3} = \frac{1}{B} \left[ \frac{1 - r^{*2}}{2E - \pi r^*} \right] \int_0^\pi a \left[ \sqrt{1 - t^2 \sin^2 \theta} + t \cos \theta - r^* \right]^2 \left[ 1 - \left[ \frac{\operatorname{arcsinh} a}{a} \right]^{-2A} \phi \right] d\theta \quad (2.47)$$

Denklem (2.47)'deki  $\phi$  terimi

$$\phi = \int_0^1 \left[ \frac{\operatorname{arcsinh} a \dot{\gamma}^*}{a \dot{\gamma}^*} \right]^{2A} \dot{\gamma}^{*2} d\dot{\gamma}^* \quad (2.48)$$

olarak tanımlanmıştır. Buradaki  $\dot{\gamma}^*$  terimi ise aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$\dot{\gamma}^* = \dot{\gamma} / \dot{\gamma}_w \quad (2.49)$$

Öte yandan Denklem (2.42) ile (2.46)'ın Denklem (2.6) kullanılarak birleştirilmesi sonucunda



$$\frac{(P_O - P_L)r_o}{2L} = \frac{a\eta_o}{B[(1-t^2\sin^2\theta)^{0.5} + t\cos\theta - r^*]} \left[ \frac{\operatorname{arcsinh}a}{a} \right]^A \quad (2.50)$$

ifadesi elde edilir. Gerek Denklem (2.47) gerekse Denklem (2.50),  $4Q/\pi r_o^3$  ve  $(P_O - P_L)r_o/2L$  ifadelerinin  $a$  (veya  $B\dot{\gamma}_w$ ) ve  $A$  terimlerine bağımlı olduğunu göstermektedir.

Teorik çalışma sonuçları *Bulgular ve Tartışma* bölümünde verilmiştir.

## BÖLÜM 3

### DENEYSEL ÇALIŞMALAR

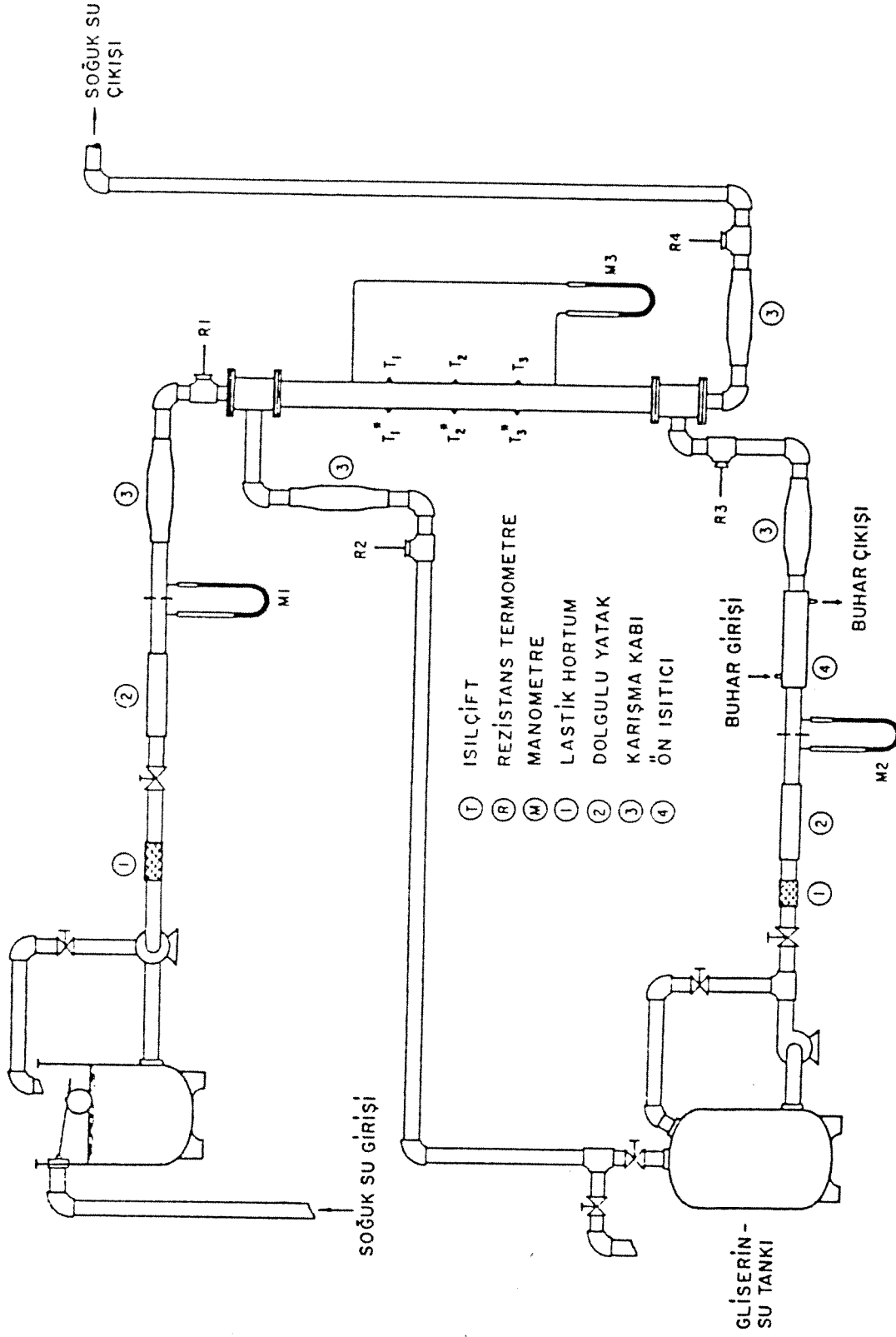
Bu proje, daha önce tamamlanan MAG-582 No'lu projenin bir devamıdır. MAG-582 No'lu proje kapsamında ısı transferi çalışmaları deneysel, hidrodinamik çalışmalar ise teorik olarak yürütülmüştü. MAG-582 No'lu projede ısı transfer deneylerinin yapılabilmesi için boru yapım malzemesi olarak bakır kullanılmıştı. Piyasada bulunan en büyük bakır boru çapının 50 mm olması nedeniyle hidrodinamik çalışmalar değişik ayrı merkezlilik,  $\epsilon$ , ve yarıçap oranları,  $r^*$ , için yapılamamış, ancak ısı transfer çalışmaları olanakların el verdiği ölçüde yürütülmüştü.

Hidrodinamik çalışmaların çok geniş bir aralıktaki ayrı merkezlilik ve yarıçap oranlarında yapılabilmesi amacıyla bu projede bakır boru yerine PVC boru kullanılmıştır. Ancak PVC borunun ısı transferi çalışmaları için uygun bir malzeme olmaması nedeniyle, ısı transferi çalışmaları eski deney düzeneğinde tekrarlanarak daha önce Newtonian sıvılar için elde edilen korelasyon geliştirilmiştir. Non-Newtonian sıvılar ile yapılan ısı transfer çalışmalarında ise uyumlu sonuçlar alınamamıştır. Bunun başlıca nedeninin Non-Newtonian sıvı viskozitelerinin sıcaklıkla çok fazla değişmesi olduğu gözlenmiştir. Non-Newtonian sıvı viskozitelerinin sıcaklıkla değişimi incelenmiş, ancak bunu içeren korelasyonlar proje süresinde tamamlanamamıştır. Bu konudaki çalışmalara devam edilmektedir.

#### 3.1. Deney Düzeneği

##### 3.1.1. Isı transferi çalışmaları

Isı transferi ile ilgili deneyler, MAG-528 No'lu proje kapsamında kurulan ve akış diagramı Şekil 3.1'de gösterilen düzende yapılmıştır. Deney düzeneğiyle ilgili detaylı bilgiler MAG-528 No'lu projenin kesin



Şekil 3.1. Isı transferi çalışmaları için kullanılan deney düzeneği.

raporunda anlatılmıştır. MAG-528 No'lu projede elde edilen ısı transferi korelasyonu bu cihazda tekrar edilen deneylerle geliştirilmiştir. Isı transferi ile ilgili deneysel çalışma sonuçları *Bulgular ve Tartışma* bölümünde verilmiştir.

### 3.1.2. Hidrodinamik çalışmalar

Piyasadan ancak sınırlı büyüklüklerde bakır boru temin edilebildiği için, değişik ayrı merkezlilik ve yarıçap oranları sağlayabilecek PVC borulardan yapılan ve Şekil 3.2'de gösterilen yeni bir deney düzeneği bu proje kapsamında kurulmuştur.

Deneylerde kullanılan dış borunun iç çapı 99 mm'dir. İç boru çapları ise Tablo 3.1'de verilmiştir.

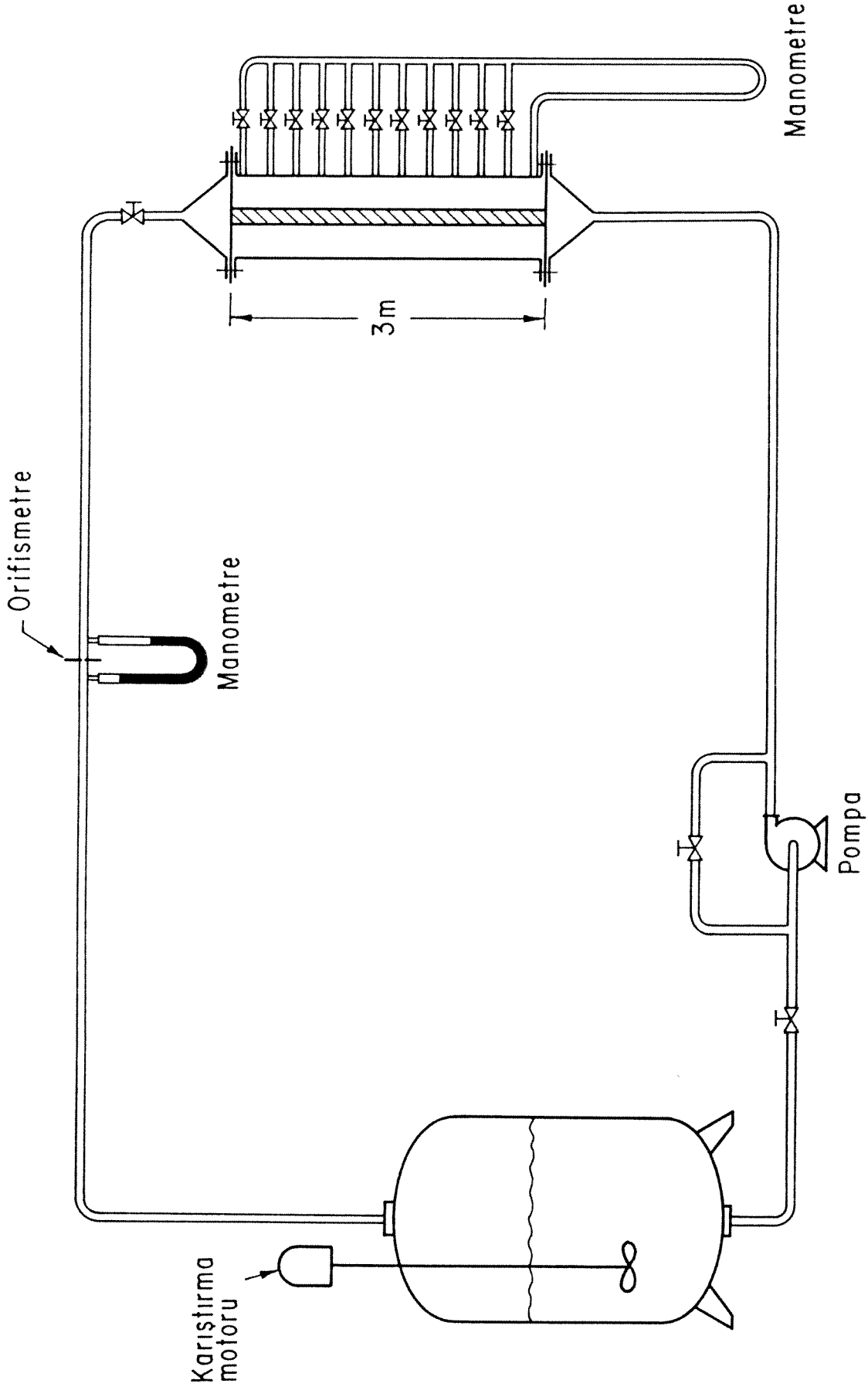
Tablo 3.1. Deneylerde Kullanılan İç Boru Çapları.

İç Boru No	Dış çap,mm	r*
1	90	0,91
2	75	0,76
3	63	0,64
4	50	0,51
5	40	0,40
6	32	0,32

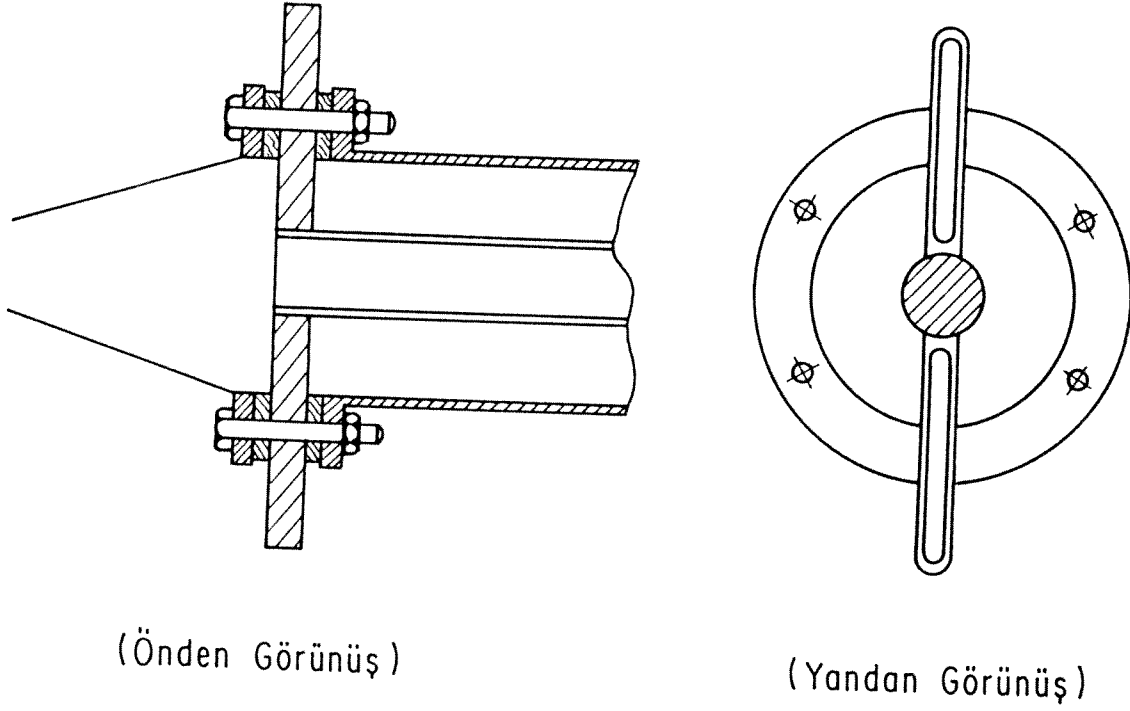
İç borunun iki uç kısmı kapatılarak, sıvının iç borudan akması önlenmiştir. 3 metre uzunluğundaki test bölgesi boyunca 5 cm aralıklarla yerleştirilen basınç ölçme boruları özel bir tasarımla manometreye bağlanmıştır.

Sistende karıştırıcılı bir tank kullanılarak su ve karboksimetil selüloz (CMC) karışımının sürekli karıştırılması sağlanmıştır. Döngülü sistem 1 inç PVC borudan yapılmış, hacimsel debi ölçümleri orifis metre ile yapılmıştır.

Çeşitli yarıçap ve ayrı merkezlilik oranlarında çalışabilmek amacıyla test kısmının iki uç kısmı Şekil 3.3'de gösterildiği gibi tasarlanmıştır.



Şekil 3.2. Hidrodinamik çalışmaları için kullanılan deney düzeniği.



Şekil 3.3. Test bölgesinin giriş ve çıkışı için yapılan tasarım.

### 3.2 Deneysel Yöntem

#### 3.2.1. Isı transfer çalışmaları

Şekil 3.1'de verilen deney düzeneğinde yapılan deneyler sonucunda elde edilen Wilson Plot çizimlerinden ısı transfer katsayısı hesaplamak için değişik  $c$  ve  $r^*$  değerlerinde yapılan deneylerde su debisi parametre olarak alınmıştır. Deneylerde sistem kararlı hale yaklaşık 70 dakikada ulaşmıştır. Sistemin kararlı hale gelmesinden sonra aşağıdaki ölçümler yapılmıştır:

- İki boru arasından akan sıvının hacimsel debisi,
- Soğutma suyunun hacimsel debisi,
- Soğutma suyunun ve halkasal boşluktan akan sıvının sisteme giriş ve çıkış sıcaklıkları,
- Test bölgesindeki iç borunun duvar sıcaklığı,
- Test bölgesindeki basınç düşmesi,
- Çevre sıcaklığı ve basınç.

Bu deney düzeneğinde non-Newtonian sıvılarla yapılan çalışmalarda viskozitenin sıcaklıkla değişmesi nedeniyle uyumlu sonuçlar alınamamıştır.

### 3.2.2. Hidrodinamik çalışmalar

Şekil 3.2'de gösterilen deney düzeneğinde yapılan deneylerde, 3 m uzunluğundaki test bölgesi boyunca 5 cm aralıklarla yerleştirilen basınç boruları yardımıyla basınç düşmesi ölçülmüştür. Basınç düşmesi/uzunluk değerinin sabit kaldığı noktadan sonraki kısımda akımın tam gelişmiş olduğu varsayılarak bu kısımdaki basınç düşmesi ( $\Delta P/L$ ), değişik  $\epsilon$  ve  $r^*$  değerlerinde ölçülmüştür.

TÜRKİYE  
MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI  
TEKNEK  
MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI  
TEKNEK

## BÖLÜM 4

### BULGULAR VE TARTIŞMA

#### 4.1. Hidrodinamik Çalışmalar

##### 4.1.1. Teorik çalışmalar

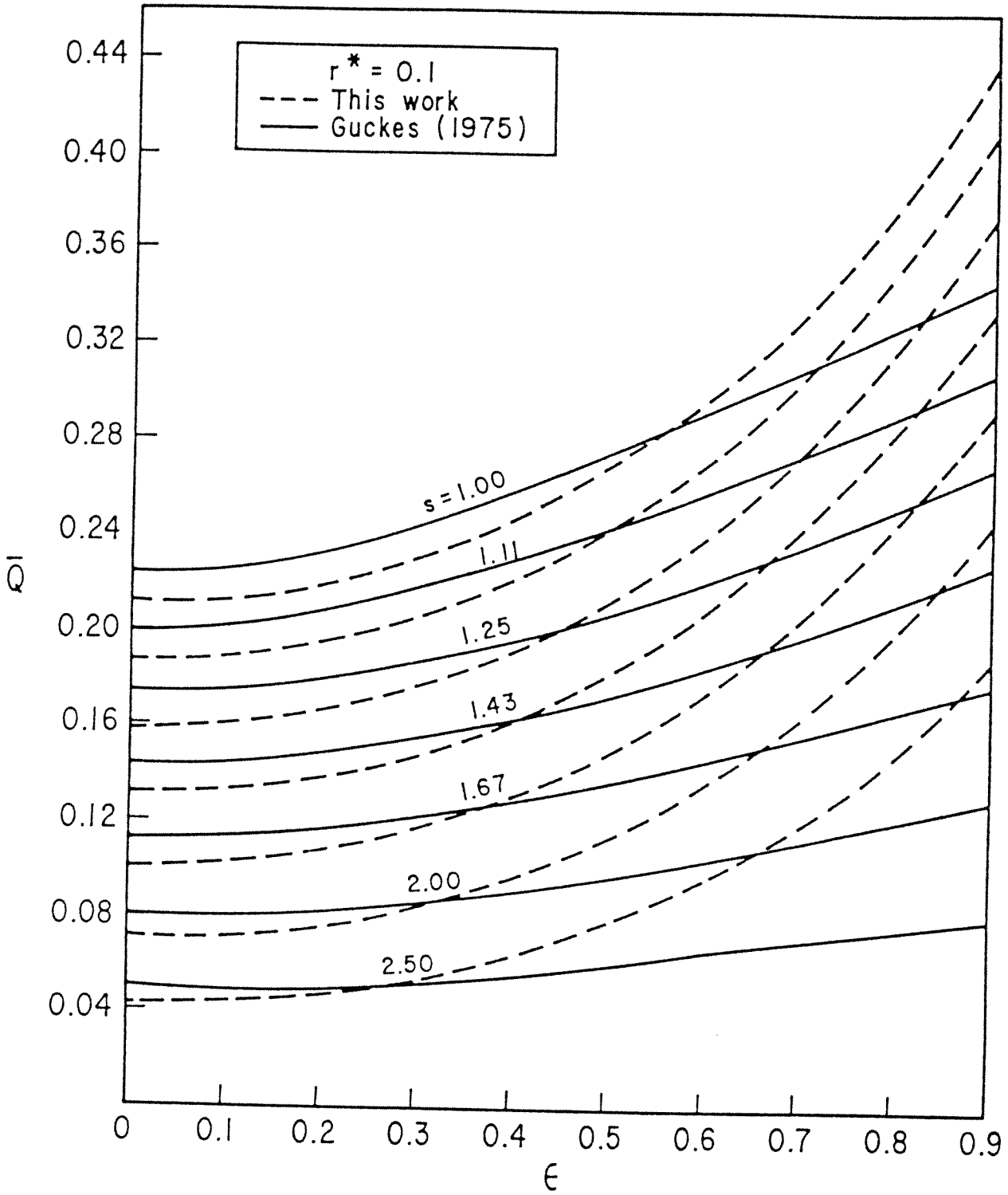
MAG 582 no'lu projede, basınç düşmesi ile hacimsel debi arasındaki bağıntı Newtonian sıvılar için elde edilmişti. Bu çalışmada ise, basınç düşmesi ile hacimsel debi arasındaki bağıntı 3 değişik non-Newtonian sıvı (Bingham plastik, Power-law, Sutterby) için yaklaşık bir yöntem kullanılarak elde edilmiştir.

Power-law modeline uygun sıvılar için boyutsuz hacimsel debinin,  $\bar{Q}$ ,  $\epsilon$  ve  $s$  ( $s = 1/n$ ) değerleri ile değişimi Denklem (2.24)'de verilmişti. Elde edilen sonuçlar Şekil 4.1-4.3'de gösterilmiştir. Yaklaşık yöntem sonuçları, Guckes (1975) tarafından nümerik yöntemle hesaplanan sonuçlarla özellikle küçük  $\epsilon$  değerlerinde birbirleriyle uyum içindedir.

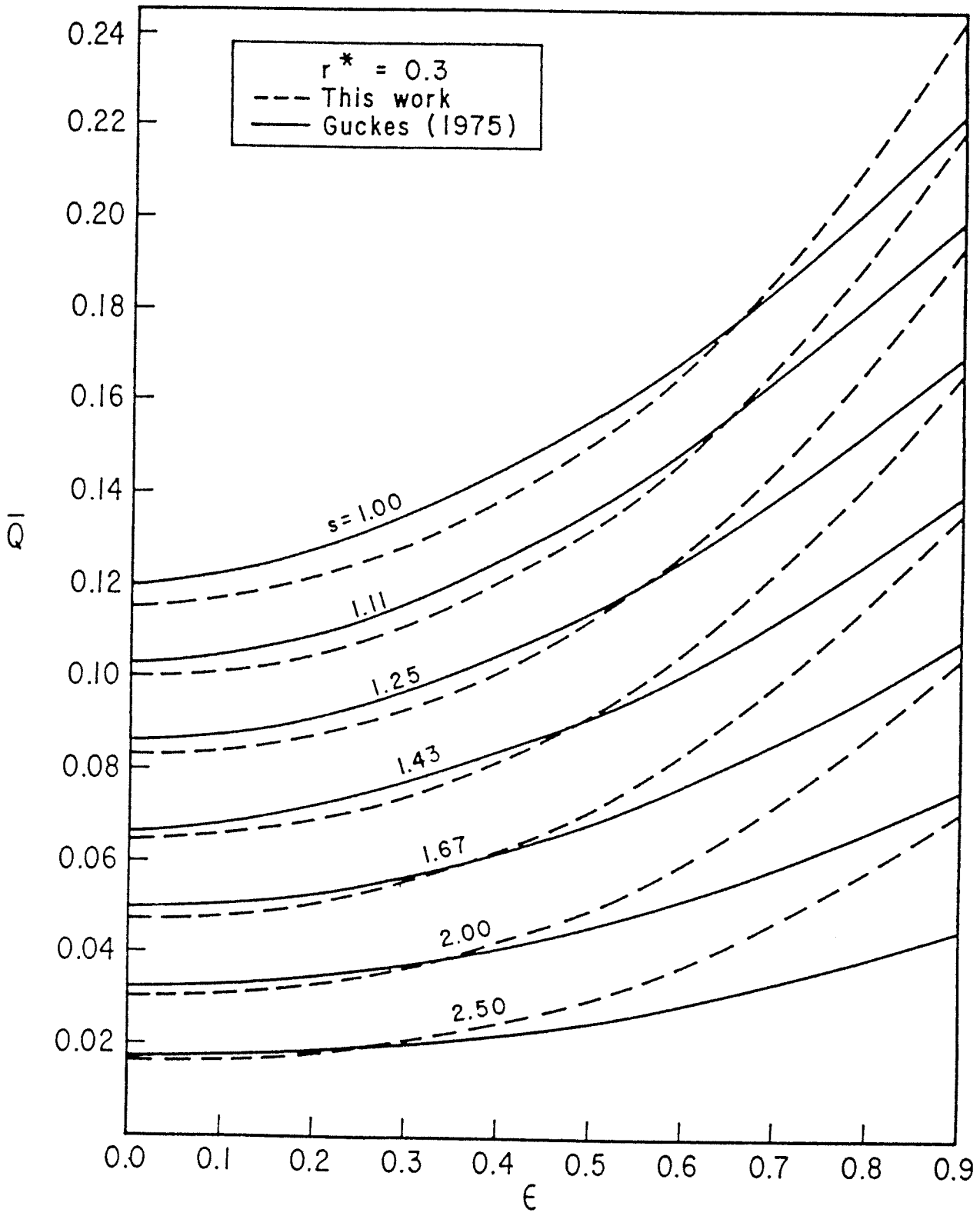
Ayrı ve eşmerkezli borulardaki hacimsel debilerin birbirine oranını gösteren Denklem (2.27) kullanılarak elde edilen sonuçlar, değişik  $r^*$  değerleri için Şekil 4.4-4.7'de gösterilmiştir. Şekillerden görülebileceği gibi, ayrı merkezlilik oranının hacimsel debiye olan etkisi, özellikle  $n$  ( $n=1/s$ ) değerinin 0,50'den küçük olduğu durumlarda fazlalaşmaktadır.

Bingham plastik modeli için boyutsuz hacimsel debi ile basınç düşmesi arasındaki bağıntı Denklem (2.35)'de verilmişti. Değişik yarıçap oranları için buradan hesaplanan sonuçların  $\epsilon$  ve  $T_0$  ( $T_0=y_0/r_0$ ) ile değişimi Şekil 4.8-4.10'da gösterilmiştir. Yarıçap oranının 0,3'den büyük olduğu durumlarda elde edilen sonuçlar, Guckes (1975) tarafından hesaplanan değerlerle uyum içindedir. Bu uyum, özellikle  $T_0$  değerinin küçük olduğu durumda daha iyidir.

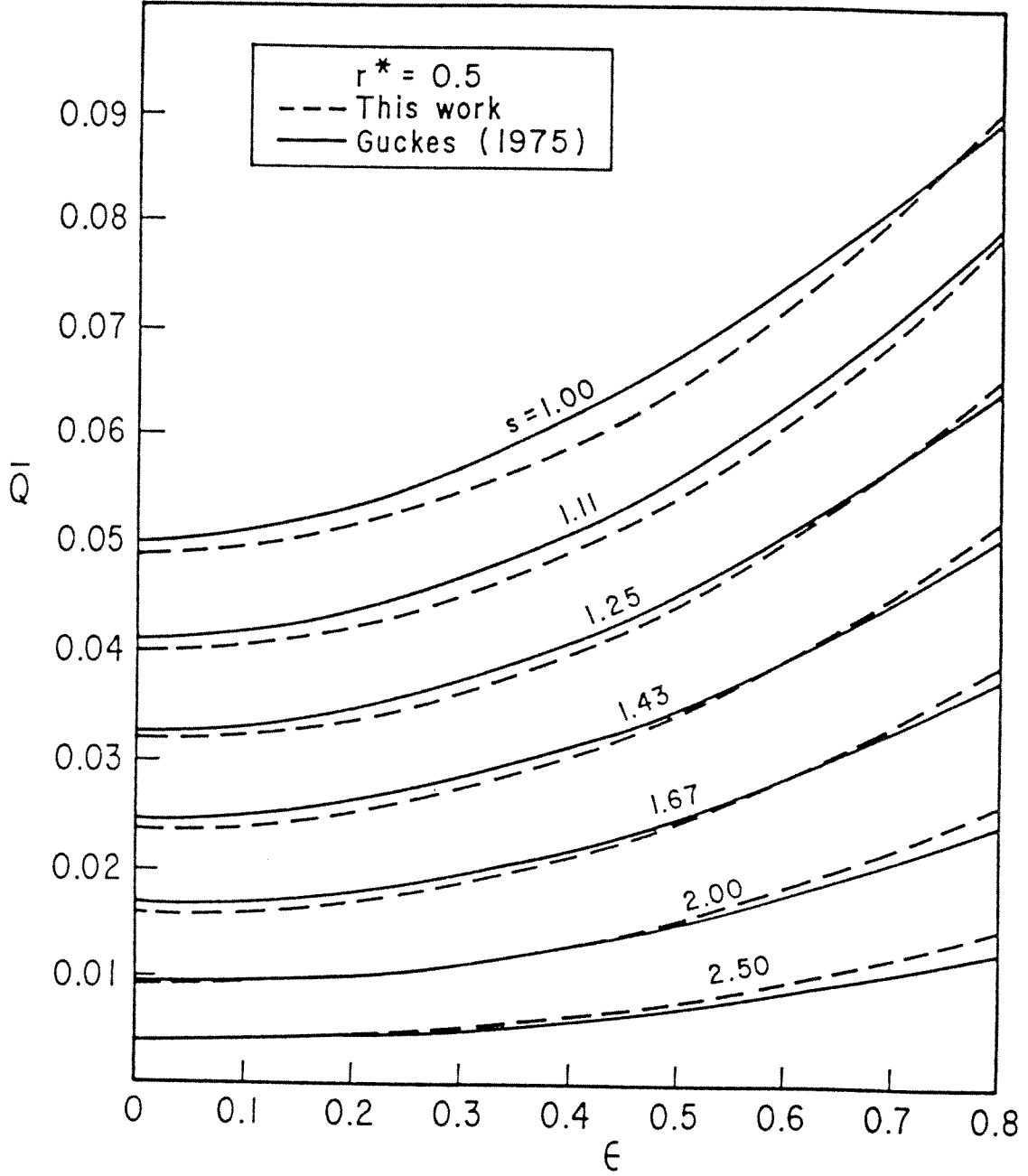




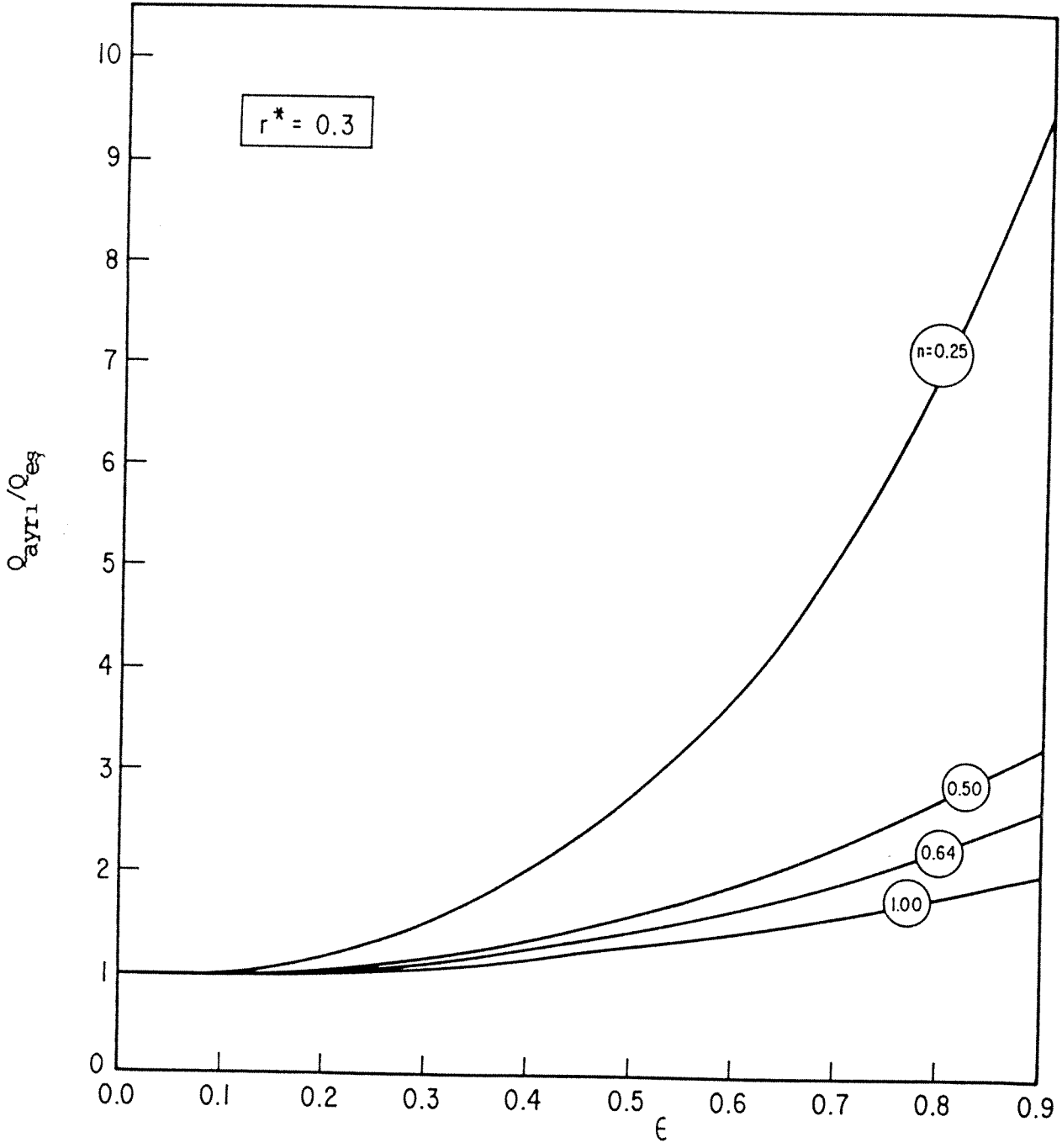
Şekil 4.1. Power-law sıvısı için boyutsuz hacimsel debinin  $\epsilon$  ve  $s$  ile değişimi ( $r^* = 0,1$ ).



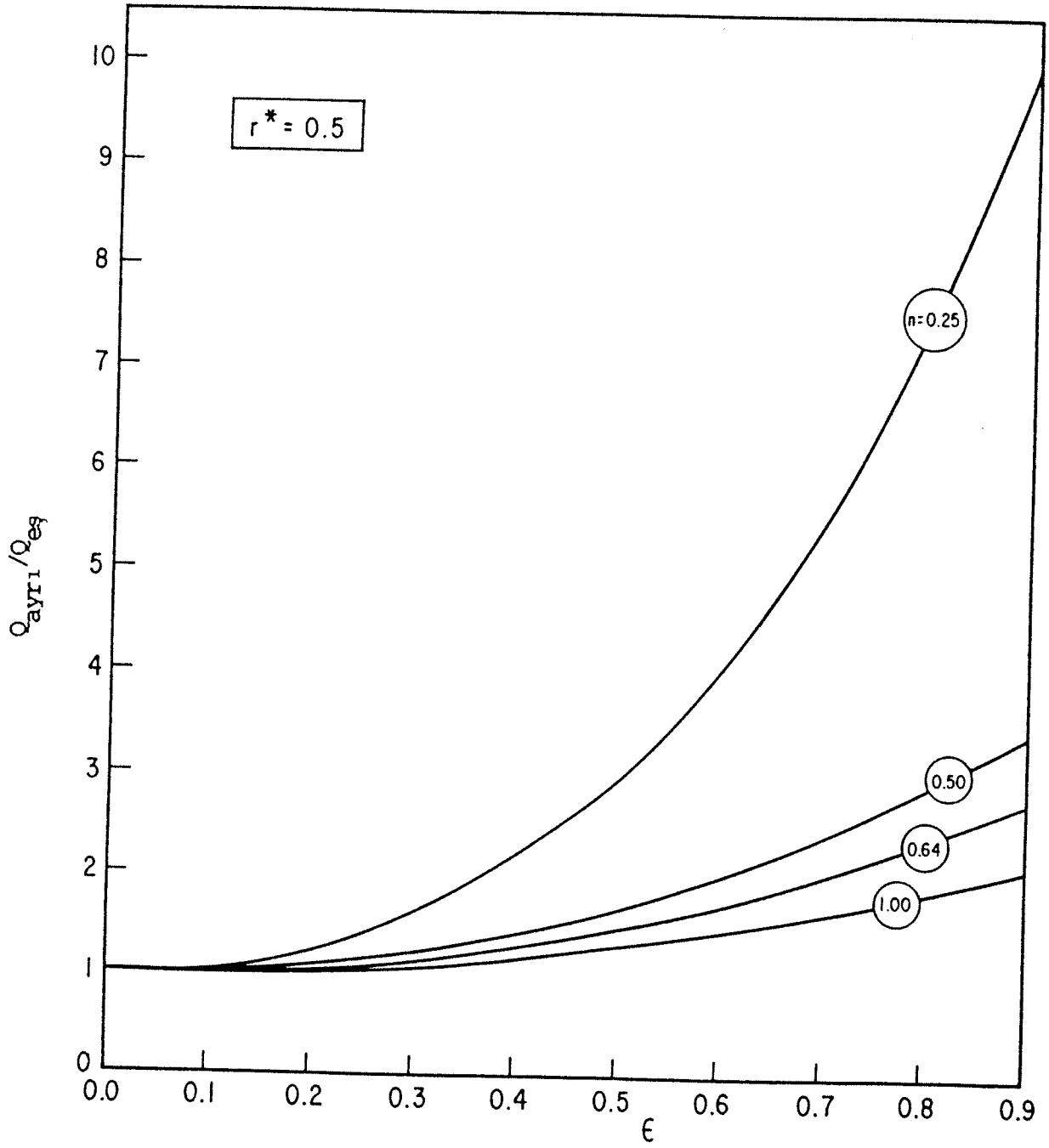
Şekil 4.2. Power-law sıvısı için boyutsuz hacimsel debinin  $\epsilon$  ve  $s$  ile değişimi ( $r^* = 0,3$ ).



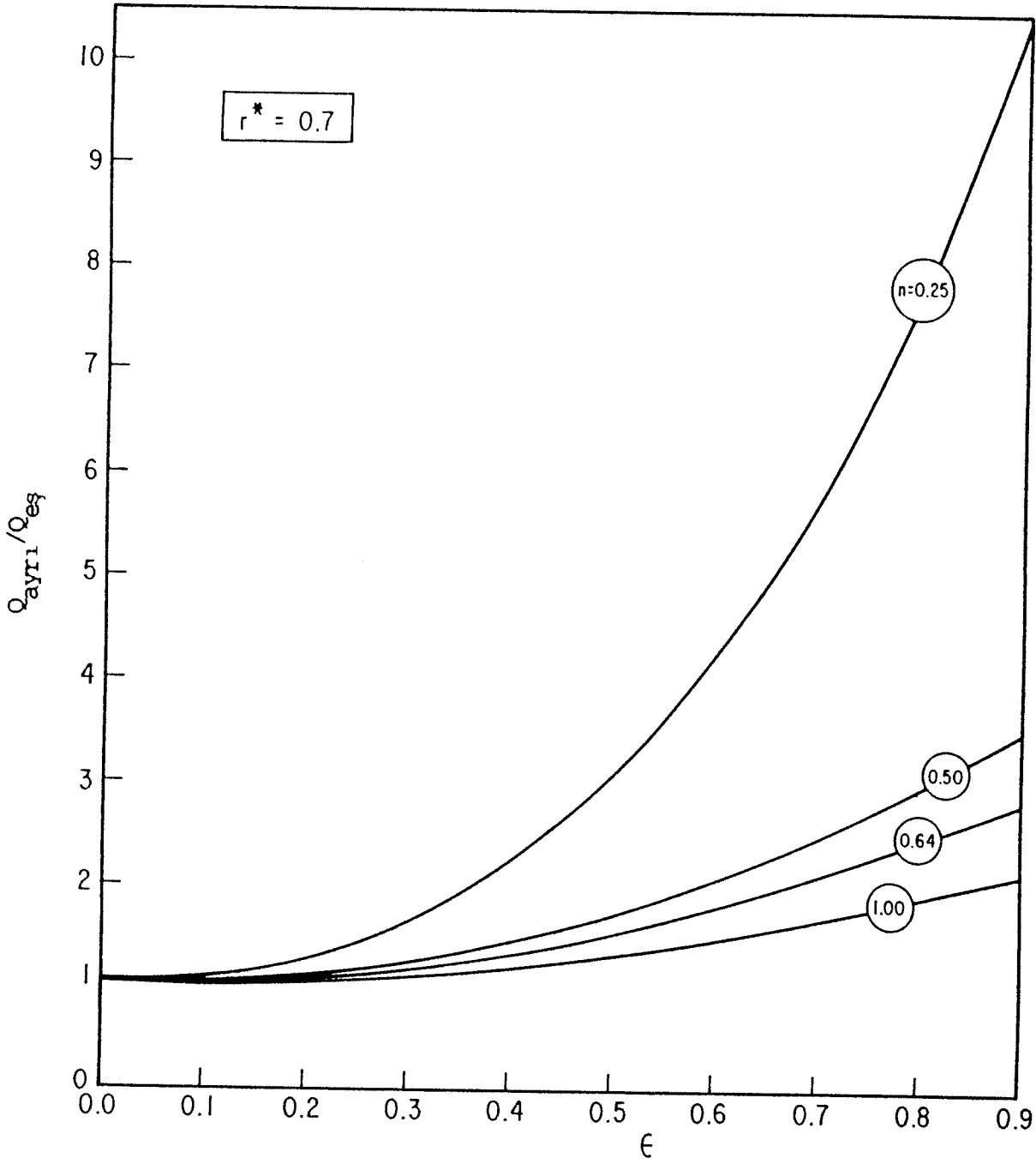
Şekil 4.3. Power-law sıvısı için boyutsuz hacimsel debinin  $\epsilon$  ve  $s$  ile değişimi ( $r^* = 0,5$ ).



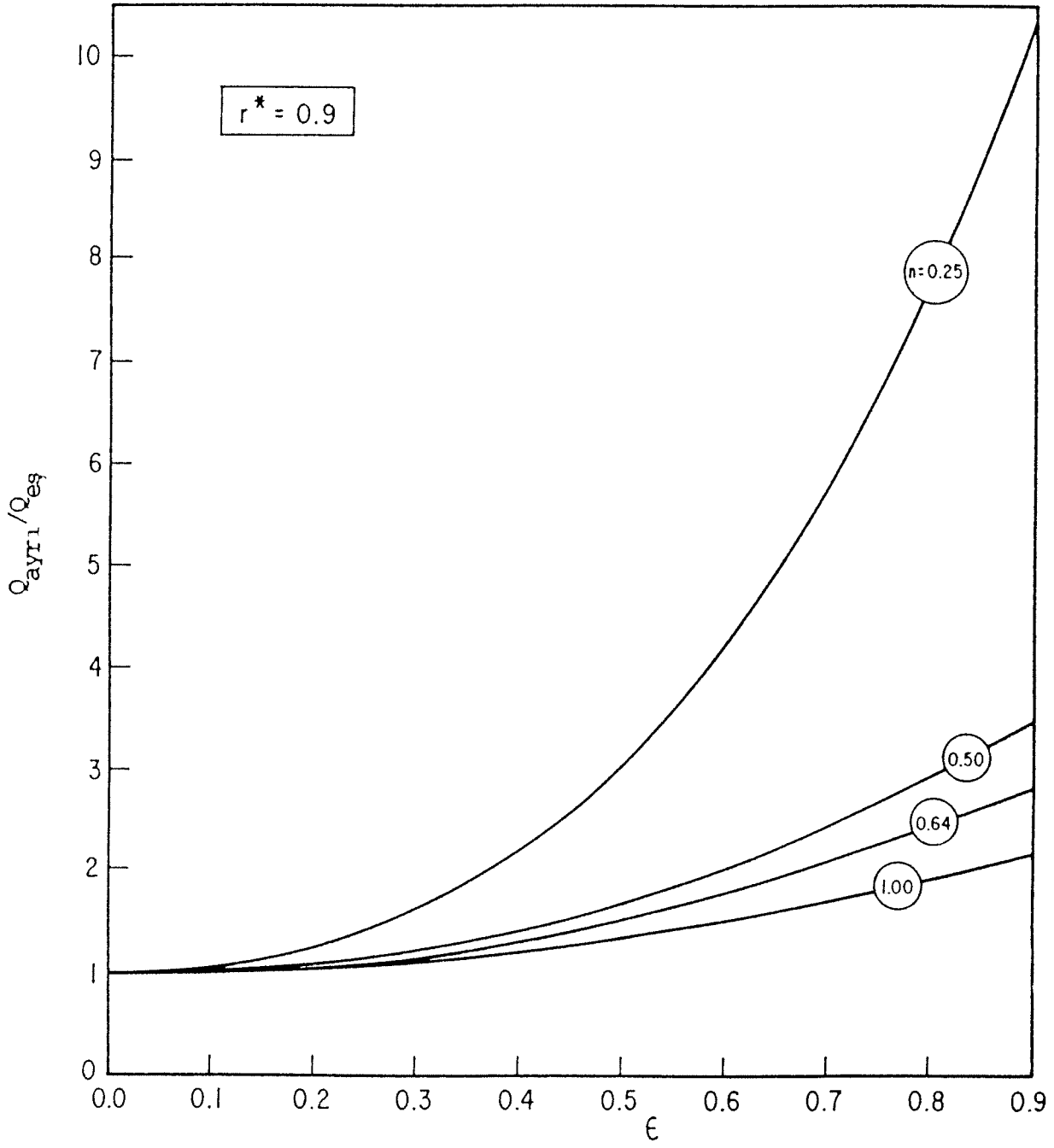
Şekil 4.4. Power-law sıvısı için  $Q_{ayrı}/Q_{eş}$  değerinin  $\epsilon$  ve  $n$ 'in fonksiyonu olarak değişimi ( $r^* = 0,3$ ).



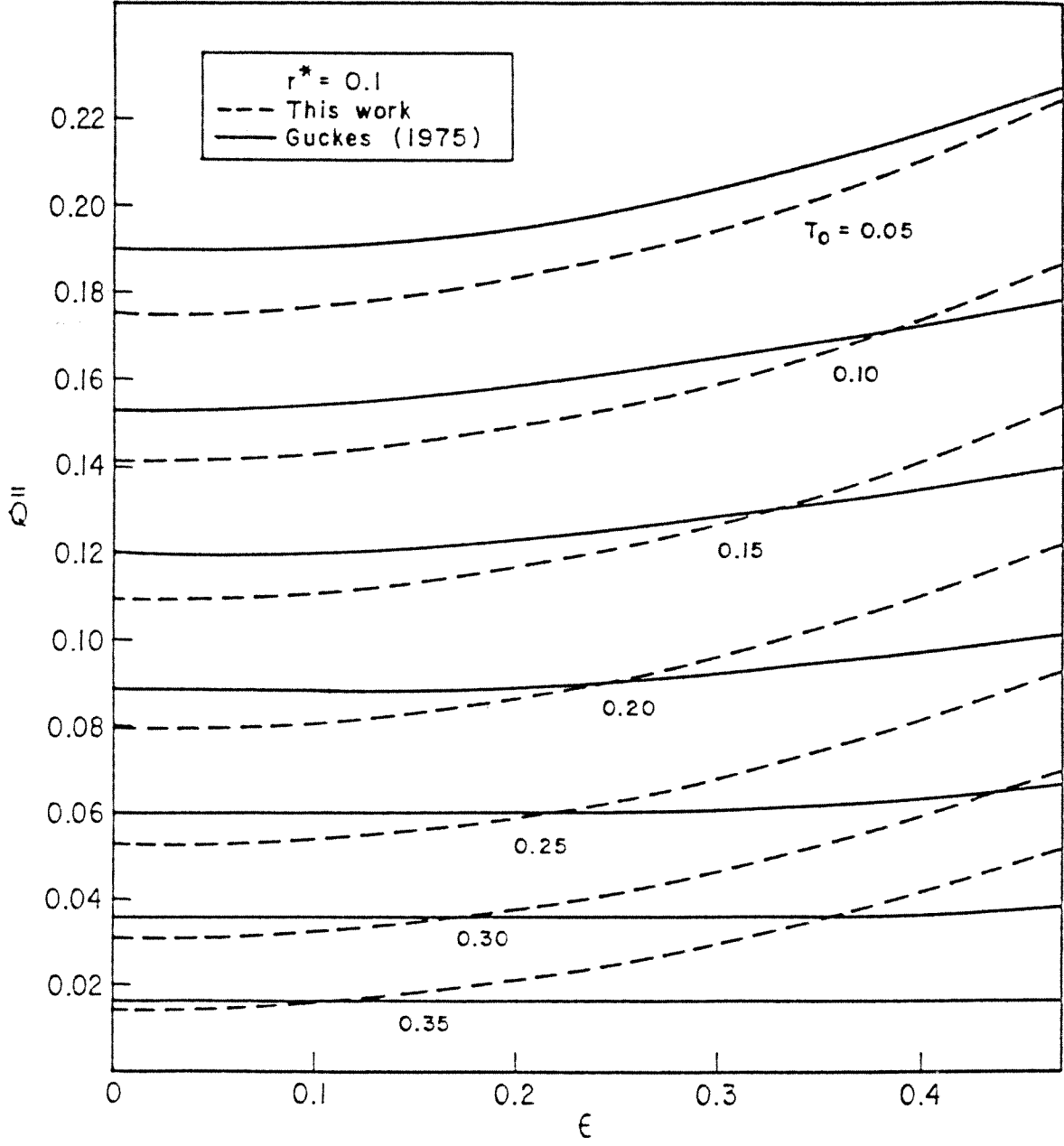
Şekil 4.5. Power-law sıvısı için  $Q_{ayrı}/Q_{eş}$  değerinin  $\epsilon$  ve  $n$ 'in fonksiyonu olarak değişimi ( $r^*=0,5$ ).



Şekil 4.6. Power-law sıvısı için  $Q_{ayrı}/Q_{eş}$  değerinin  $\epsilon$  ve  $n$ 'in fonksiyonu olarak değişimi ( $r^*=0,7$ ).

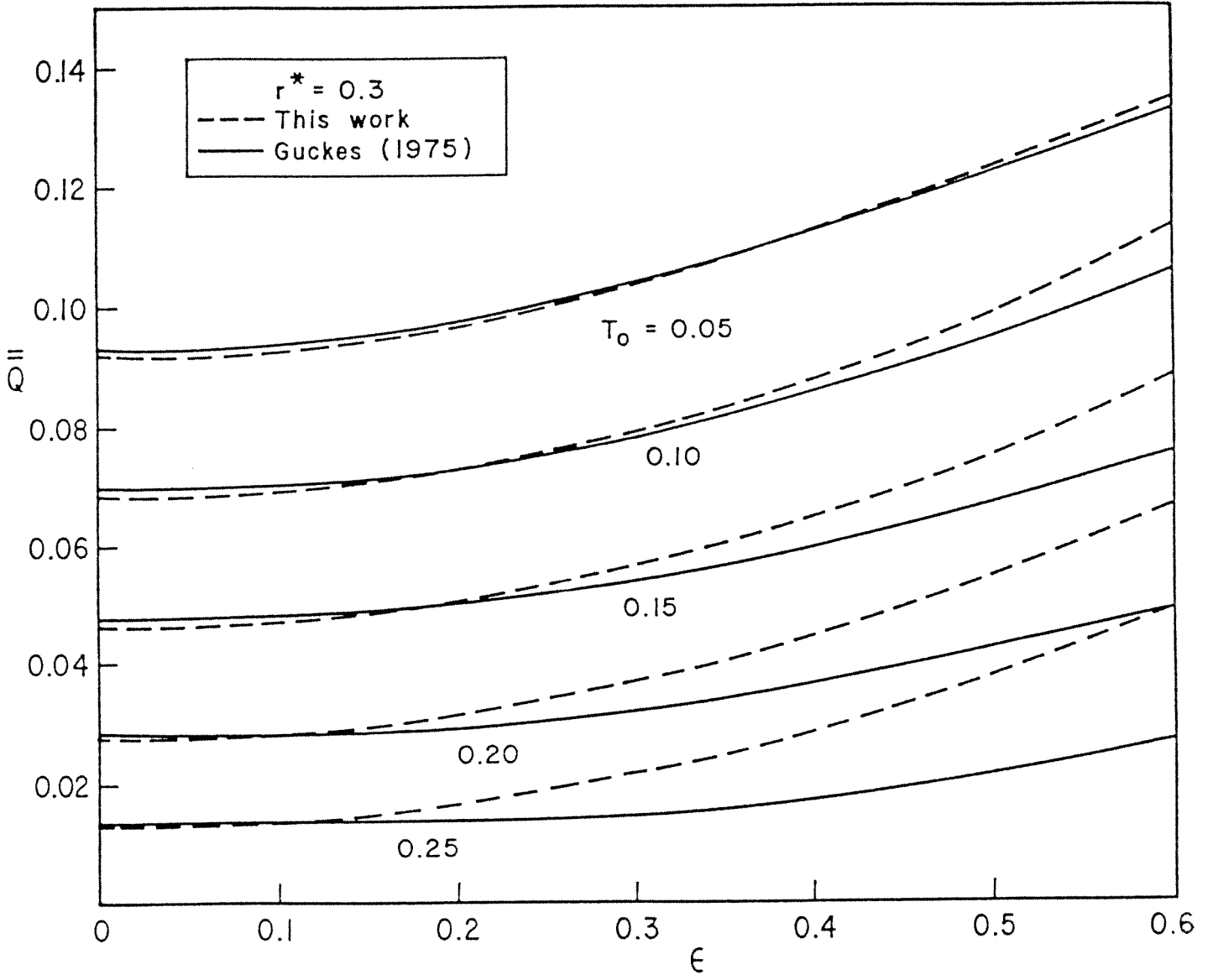


Şekil 4.7. Power-law sıvısı için  $Q_{ayrı}/Q_{eş}$  değerinin  $\epsilon$  ve  $n$ 'in fonksiyonu olarak değişimi ( $r^*=0,9$ ).

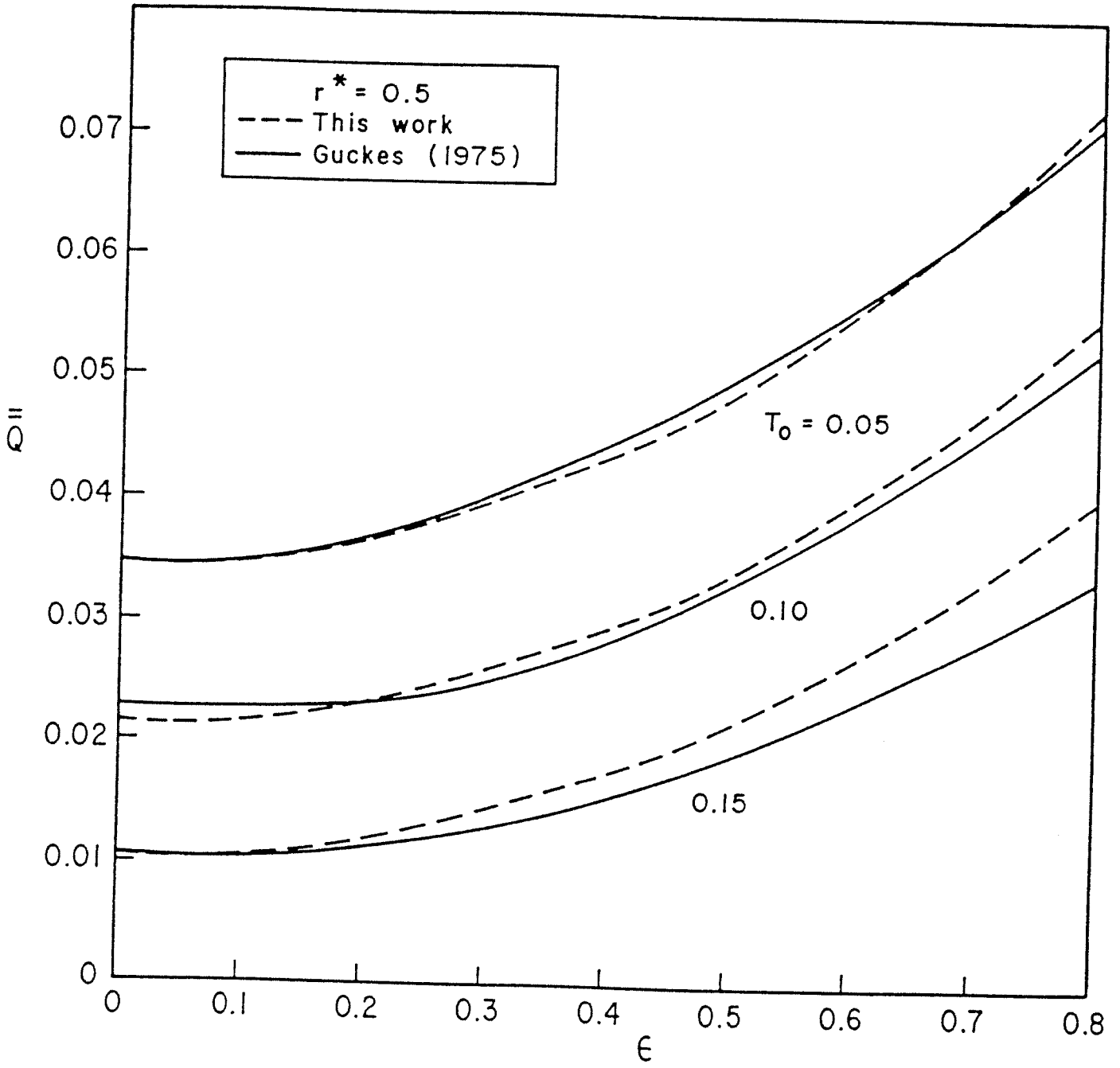


şekil 4.8. Bingham-plastik sıvısı için boyutsuz hacimsel debinin  $\epsilon$  ve  $T_0$  ile değişimi ( $r^*=0,1$ ).



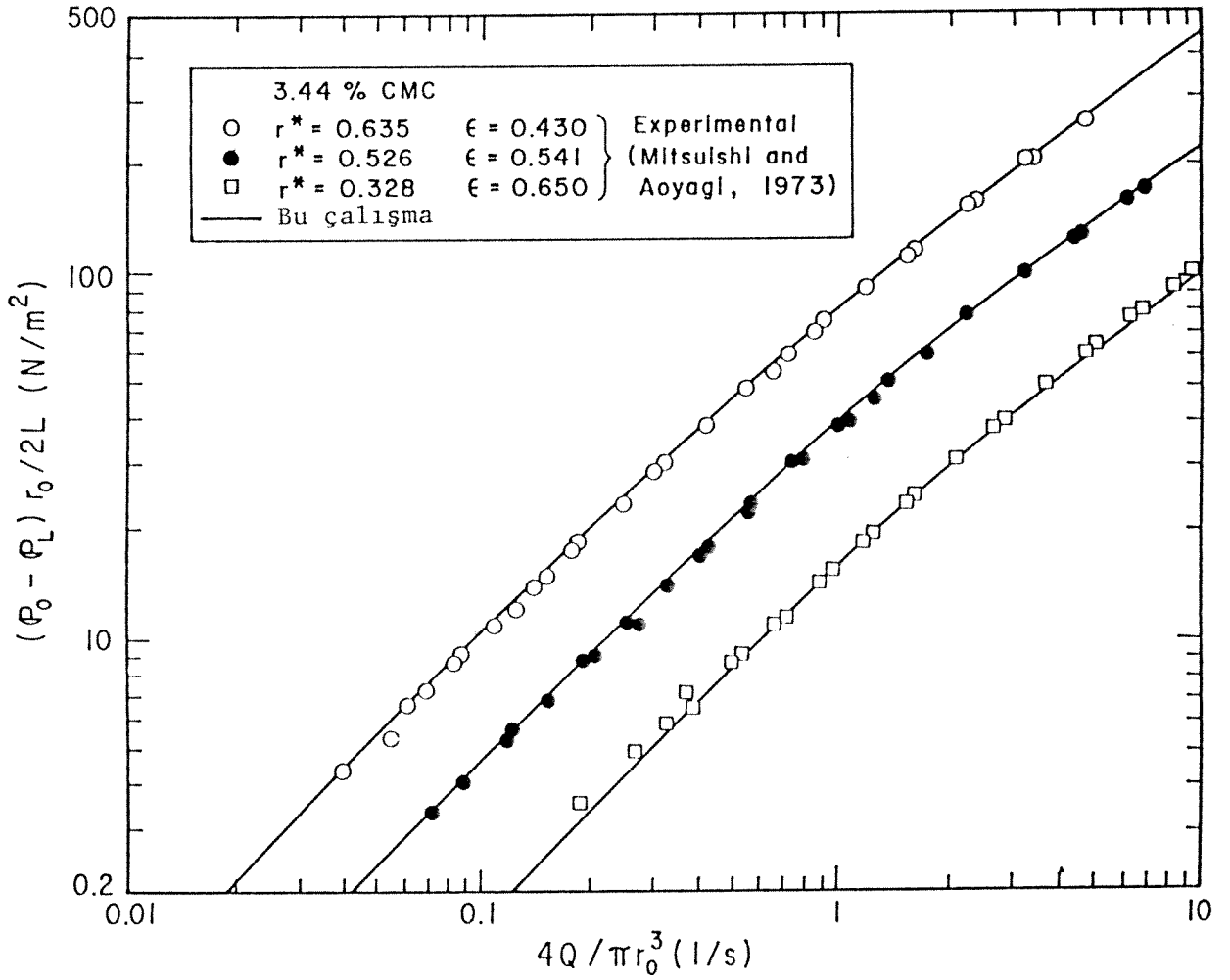


şekil 4.9. Bingham-plastik sıvısı için boyutsuz hacimsel debinin  $\epsilon$  ve  $T_0$  ile değişimi ( $r^*=0,3$ ).

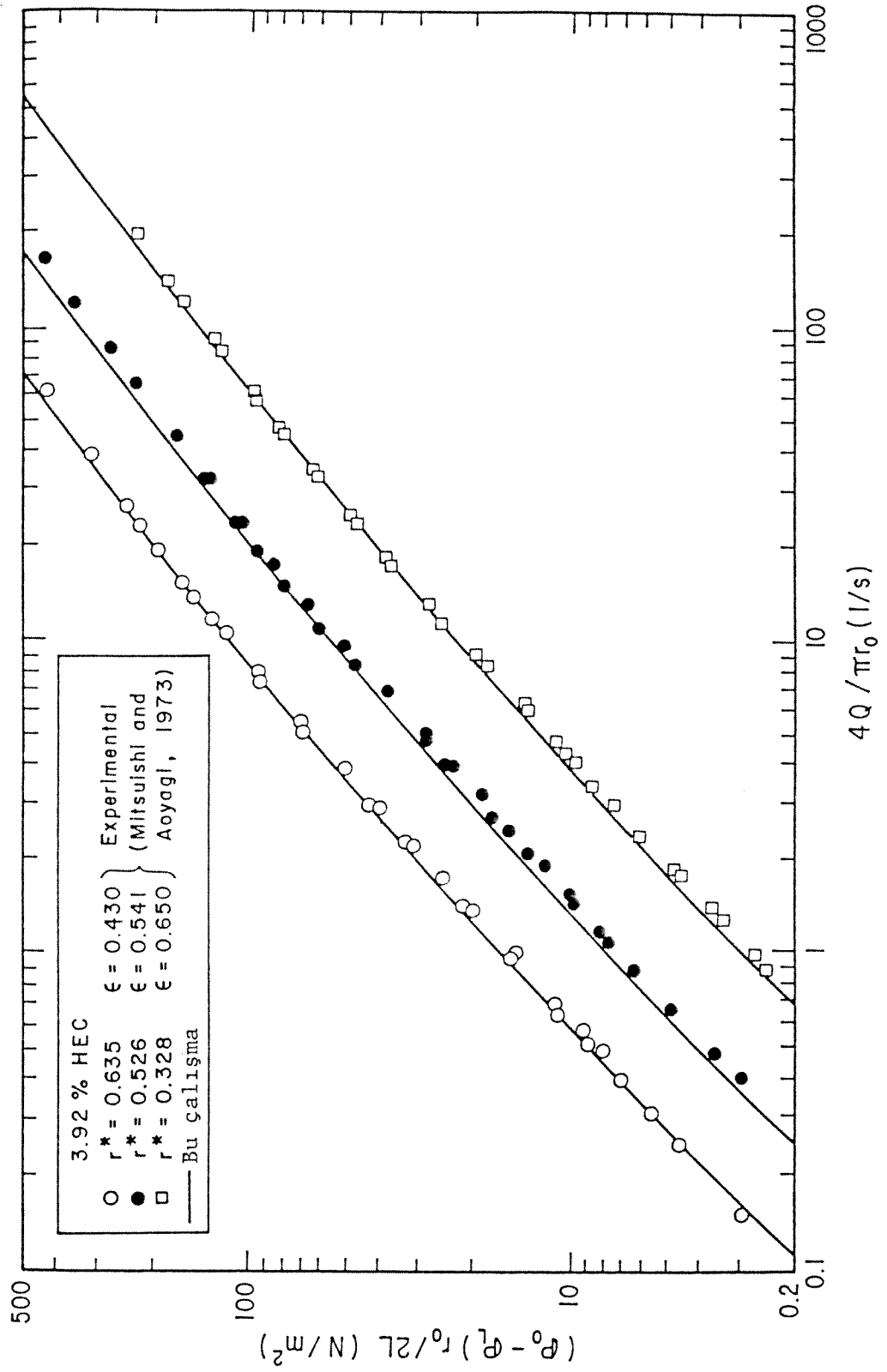


Şekil 4.10. Bingham-plastik sıvısı için boyutsuz hacimsel debinin  $\epsilon$  ve  $T_0$  ile değişimi ( $r^*=0,5$ ).

Sutterby modeli için Denklem (2.47) ve (2.50) kullanılarak  $4Q/\pi r_0^3$  değerleri,  $(P_0 - P_L)r_0/2L$  teriminin bir fonksiyonu olarak hesaplanmıştır. Şekil 4.11 ve 4.12'de gösterilen sonuçlar, Mitsuishi ve Aoyagi (1973) tarafından elde edilen deneysel sonuçlarla uyum içindedir.



Şekil 4.11. Sutterby modeli için boyutsuz ifadelerin  $\epsilon$  ve  $r^*$  ile değişimi.



Şekil 4.12. Sutterby modeli için boyutsuz ifadelerin  $\epsilon$  ve  $r^*$  ile değişimi.

#### 4.1.2. Deneysel çalışmalar

Hidrodinamik çalışmalar ağırlıkça % 1,5'lük karboksimetil selüloz (CMC) çözeltisiyle yapılmıştır. Viskometre ile yapılan deneylerden CMC-su karışımının Power-law modeline uygun olduğu gözlenerek Denklem (2.13)'deki m ve n katsayıları,  $m = 3,13 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$  ve  $n = 0,55$  olarak hesaplanmıştır.

Bu rapor kapsamında yapılan hidrodinamik çalışmalardan ancak bazı  $r^*$  değerlerinde olanlar verilecektir. Piyasadan çok değişik çapta boru sağlanabildiyse de,  $r^*$  değerinin 0,51'in üzerinde olduğu durumlarda kullanılan pompa yeterli olamamakta ve non-Newtonian sıvıların daralan halkasal boşluktan akması güçleşmektedir.

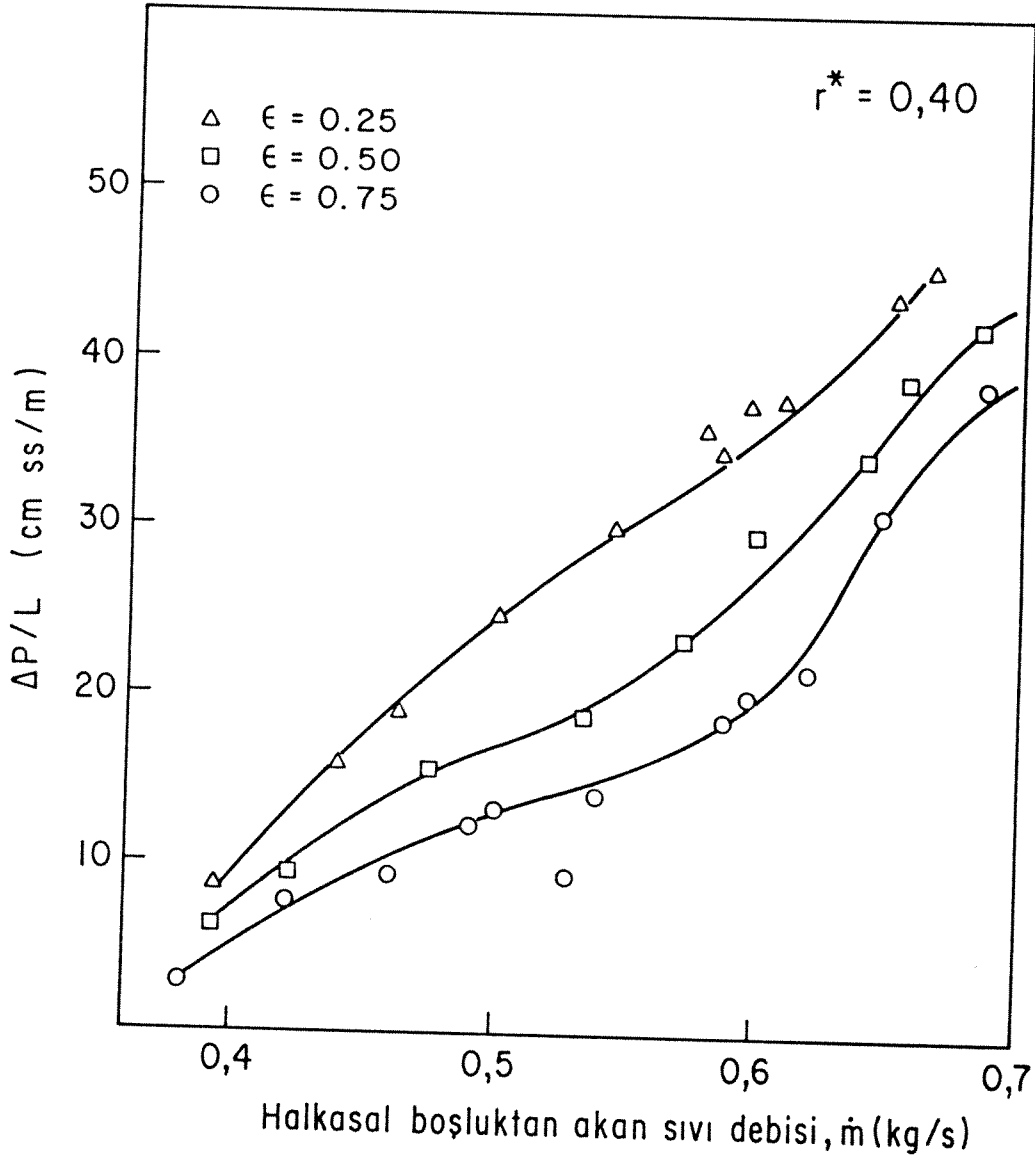
Şekil 3.2'de verilen deney düzenğinde yapılan çalışmalarda halkasal boşluk için ölçülen basınç düşmesi değerlerinin kütleli debiyle ve ayrı merkezlilik oranıyla değişimi Şekil 4.13'de gösterilmiştir.  $r^* = 0,40$  için verilen deney sonuçlarından görüldüğü gibi basınç düşmesi, aynı kütleli debi için, ayrı merkezlilik oranıyla ters orantılı olarak değişmektedir. Yarıçap oranının 0,32 ve 0,51 olduğu durumlarda benzer sonuçlar elde edilmiştir.

#### 4.2. Isı Transfer Çalışmaları

Ayrı merkezli borulardaki ısı transfer katsayısını hesaplamak amacıyla detayları MAG-582 Nolu projede verilmiş olan Wilson Çizim yöntemi kullanılmıştır. MAG-582 Nolu projede elde edilen ısı transfer katsayısı korelasyonunu geliştirmek amacıyla bu çalışmada yeni deneyler yapılmıştır.

Boru akışı için toplam ısı transfer katsayısı,

$$\frac{1}{U_o} = \frac{1}{h_o} + R_w + \frac{D_o/D_i}{h_i} \quad (4.1)$$



Şekil 4.13. Basınç düşmesi ile kütleli debinin değişik  $\epsilon$  değerlerindeki değişimi.

şeklinde yazılır. Burada  $R_w$  duvar direncini,  $h_o$  ve  $h_i$  ise film ısı transfer katsayılarını ifade etmektedir ve aşağıdaki şekilde tanımlanmışlardır:

$$R_w = \frac{\Delta r}{k_w A_{l,n}} \quad (4.2)$$

$$\frac{h_o D_h}{k_o} = C_o Re_o^{0,8} Pr_o^{1/3} (\mu/\mu_w)_o^{0,14} \quad (4.3)$$

$$\frac{h_i D_i}{k_i} = C_i Re_i^{0,8} Pr_i^{1/3} (\mu/\mu_w)_i^{0,14} \quad (4.4)$$

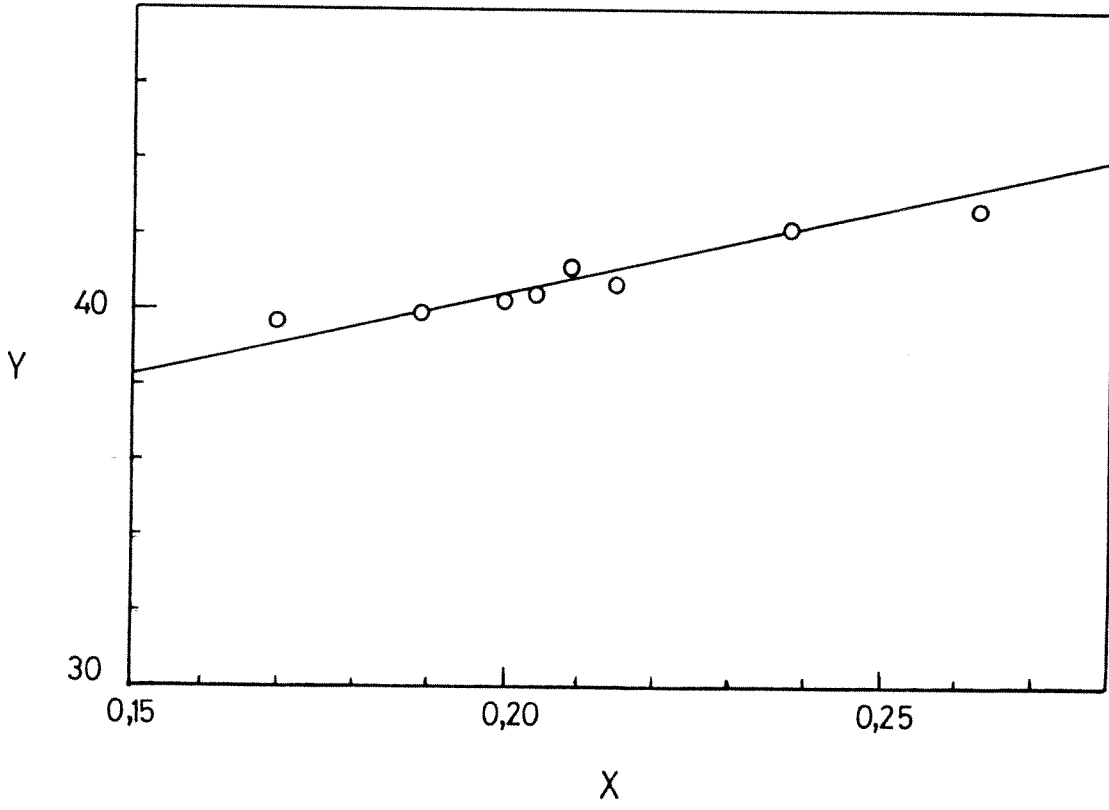
Deneyler önce eşmerkezli boruda yapılmış ve eşmerkezli borular için verilen Monrad-Pelton (1942) ve Wiegand (1945) korelasyonlarının geçerliliği incelenmiştir. Şekil 4.14 ve 4.15'de gösterilen deney sonuçları Monrad-Pelton korelasyonu ile uyum içindedir. Buradaki X ve Y değerleri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$X = \left[ \frac{D_o}{D_h} \right] \left[ \frac{k_o}{k_i} \right] \left[ \frac{Re_o}{Re_i} \right]^{0,8} \left[ \frac{Pr_o}{Pr_i} \right]^{1/3} \left[ \frac{\phi_o}{\phi_i} \right]^{0,14} \quad (4.5)$$

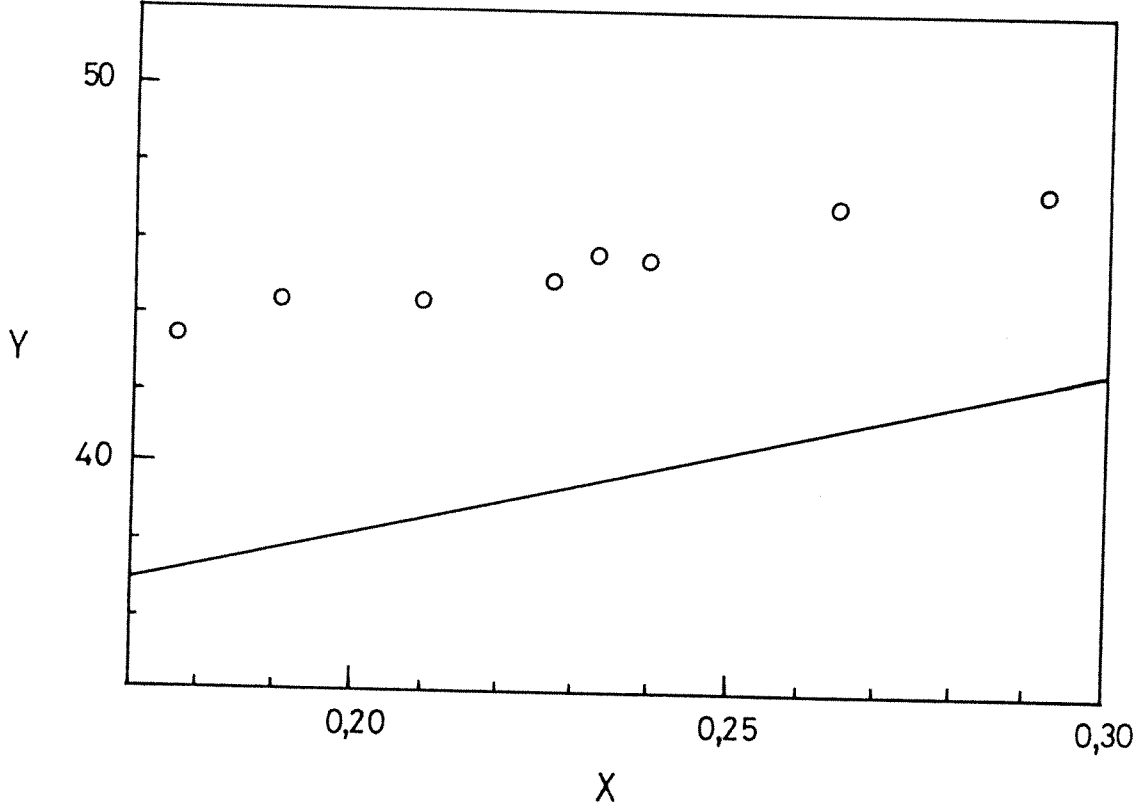
ve

$$Y = \left[ \frac{1}{U_o} - R_w \right] \left[ \frac{k_o}{D_h} \right] Re_o^{0,8} Pr_o^{1/3} \phi_o^{0,14} \quad (4.6)$$

Monrad-Pelton korelasyonu eşmerkezli borular için geçerli olduğundan  $C_o$  katsayısı sabittir. Bu katsayı, ayrı merkezli boru sisteminde ayrı merkezlilik ve yarıçap oranına bağımlı olduğundan aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:



Şekil 4.14. Eşmerkezli boru sistemi için Monrad-Pelton korelasyonu ile elde edilen Wilson Çizimi ( $r^* = 0,40$ ).



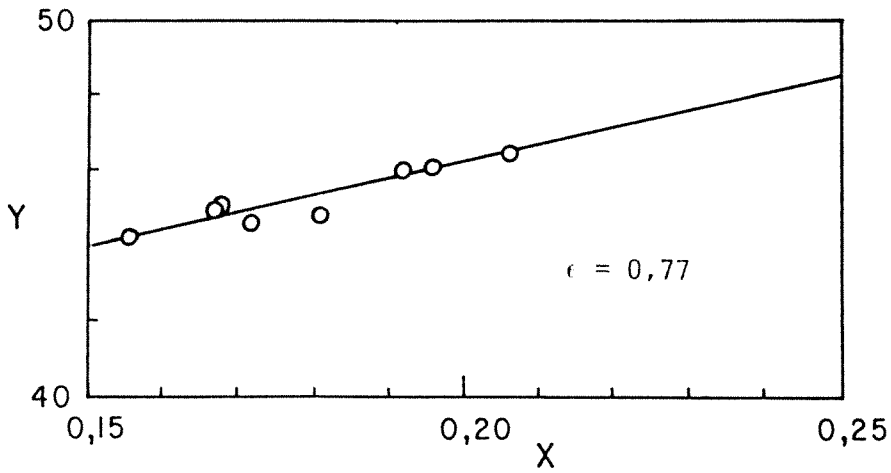
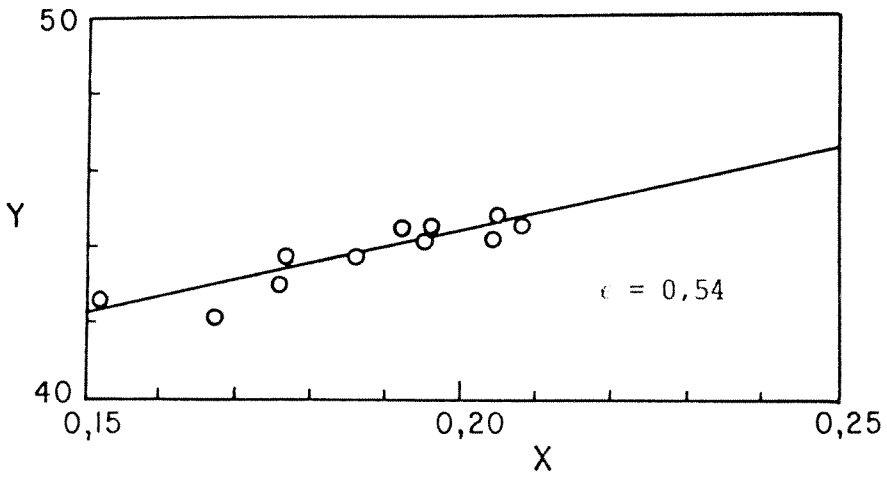
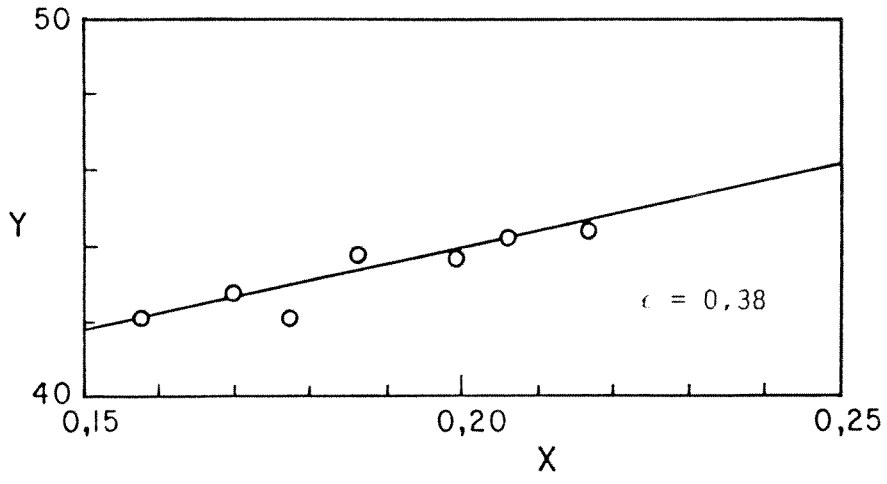
Şekil 4.15. Eşmerkezli boru sistemi için Wiegand korelasyonu ile elde edilen Wilson Çizimi ( $r^* = 0,40$ ).



$$C_o = a (r^*)^{-0,53} \epsilon^c \quad (4.7)$$

Denklem (4.7)'deki "a" ve "c" sabitlerinin hesaplanması için 3 değişik ayrı merkezlilik oranında (0,38, 0,54 ve 0,77) deneyler yapılmış ve elde edilen Wilson çizimleri Şekil 4.16'da gösterilmiştir. Böylece elde edilen ısı transfer katsayı korelasyonu aşağıda verilmiştir:

$$Nu_o = \frac{h_o D_h}{k_o} = 0,0166 Re_o^{0,8} Pr_o^{1/3} (r^*)^{-0,53} \epsilon^{-0,084} (\mu/\mu_w)_o^{0,14} \quad (4.8)$$



Şekil 4.16. Ayrı merkezli boru sistemi için elde edilen Wilson Çizimleri.

## BÖLÜM 5

### SONUÇ VE ÖNERİLER

Yapılan çalışmada aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

1. Ayrı merkezli boru sisteminde Newtonian ve non-Newtonian sıvılar için yaklaşık bir yöntemle "hacimsel debi-basınç düşmesi" ilişkileri bulunmuş ve literatürden bulunan verilerle karşılaştırılmıştır.
2. Deneysel hidrodinamik çalışmalardan aynı kütleli debi için basınç düşmesinin merkezlilik oranı ile ters orantılı olarak değiştiği gözlenmiştir.
3. Ayrı merkezli boru sistemi için ısı transfer korelasyonu

$$Nu_o = \frac{h_o D_h}{k_o} = 0,0166 Re_o^{0,8} Pr_o^{1/3} (r^*)^{-0,53} \epsilon^{-0,084} (\mu/\mu_w)_o^{0,14}$$

şeklinde bulunmuştur.

4. Yarıçap değerinin 0,50'nin üzerinde olduğu durumlarda, özellikle non-Newtonian sıvıların pompalanmasında güçlükler çıkmaktadır. Bu nedenle, daha sonraki çalışmalarda deneylerin değişik yarıçap oranlarında yapılabilmesi için uygun pompa elde edebilme imkanları araştırılacaktır.

## KAYNAKLAR

- Cheng, K.C. ve Hwang, G.J., "Laminar Forced Convection in Eccentric Annuli", *AIChEJ*, 14, 510 (1968).
- Dittus, F.W. ve Boelter, L.M.K., *Univ. Calif. (Berkeley) Publs. Eng.*, 2, 443 (1930).
- Guckes, T.L., "Laminar Flow of Non-Newtonian Fluids in an Eccentric Annulus", *J. Eng. Ind. Trans. ASME Ser B.*, 97, 498 (1975).
- Hanks, R.W. ve Larsen, K.M., "The Flow of Power-Law Non-Newtonian Fluids in Concentric Annuli", *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 18, 33 (1979).
- Iyoho, A.W. ve Azar, J.J., "An Accurate Slot-Flow Model for Non-Newtonian Fluid Flow Through Eccentric Annuli", *Soc. Pet. Eng. J.*, 21, 565-572 (1981).
- Judd, R.L., Wade, J.H.T. ve Wilson, N.W., "Forced Convection Heat Transfer in Eccentric Annular Passages", *Heat Trans. and Fluid Mech. Inst.*, Stanford Univ., CA, 1963.
- Lee, Y. ve Barrow, H., "Turbulent Flow and Heat Transfer in Concentric and Eccentric Annuli", *Proc. Thermodyn. and Fluid Mech. Convention*, Inst. Mech. Engrs., Paper No. 12, London, 1964.
- Mitsuishi, N. ve Aoyogi, Y., "Non-Newtonian Fluid Flow in an Eccentric Annulus", *J. Chem. Eng. Japan*, 6, 402 (1973).
- Monrad, C. ve Pelton, J.F., "Heat Transfer by Convection in Annular Spaces", *Trans. AIChE*, 38, 593 (1942).
- Redberger, P.J. ve Charles, M.E., "Axial Laminar Flow in a Circular Pipe Containing a Fixed Eccentric Core", *Can. J. Chem. Eng.*, 40, 148 (1962).
- Redberger, P.J. ve Charles, M.E., "Axial Laminar Flow Correction", *Can. J. Chem. Eng.*, 41, 86 (1963).
- Sieder, E.N. ve Tate, G.E., *Ind. Eng. Chem.*, 228, 1429 (1936).
- Skelland, A.H.P., *Non-Newtonian Flow and Heat Transfer*, Wiley, NY, 1967.

Snyder, W.T., "An Analysis of Slug Flow Heat Transfer in an Eccentric Annulus", *AICHEJ*, 9, 503 (1963).

Tao, L.N. ve Donovan, W.F., "Through-Flow in Concentric and Eccentric Annuli of Fine Clearance With and Without Relative Motion of the Boundaries", *Trans. ASME*, 77, 1291 (1955).

Tosun, I., "Axial Laminar Flow in an Eccentric Annulus: An Approximate Solution", *AICHEJ*, 30, 877 (1984).

Trombetta, M.L., "Laminar Forced Convection in Eccentric Annuli", *Int. J. Heat Mass Trans.*, 14, 1161 (1971).

Yu, W.S., ve Dwyer, O.E., "Heat Transfer to Liquid Metals Flowing Turbulently in Eccentric Annuli-I", *Nucl. Sci. Eng.*, 24, 105 (1966).

Wiegand, J.H. ve Baker, E.M., "Transfer Processes in Annuli", *Trans. AICHE*, 38, 593 (1942).

# An Approximate Solution for Non-Newtonian Flow in Eccentric Annuli

Deniz Uner, Canan Ozgen, and Ismail Tosun\*

Department of Chemical Engineering, Middle East Technical University, Ankara 06531, Turkey

An approximate solution to predict the relationship between volume rate of flow and pressure drop for steady-state laminar flow of non-Newtonian fluids in an eccentric annulus is described. An eccentric annulus is modeled as a slit of variable height, and the equations of continuity and motion are solved for the power-law, Bingham-plastic, and Sutterby models. The results compare reasonably well with the previously published theoretical and experimental data for radius ratio greater than 0.5.

Axial laminar flow of non-Newtonian fluids in concentric and/or eccentric annuli is of considerable industrial significance in well drilling and plastic extrusion. Analytical solutions to the equations of motion in such geometries are usually difficult to obtain due to the nonlinear nature of the shear stress-shear rate relationship. Besides, in the case of an eccentric annulus, the geometrical complexity creates an additional difficulty. The flow in an eccentric annulus is analyzed in bipolar coordinates. However, in this coordinate system, analytical solutions of the equations of change for non-Newtonian fluids are not possible.

Guckes (1975) used a finite difference technique to solve the equations of motion for flow of power-law and Bingham-plastic fluids in an eccentric annulus. Mitsuishi and Aoyagi (1973) experimentally determined the relation between the volume rate of flow and pressure drop for flow of a Sutterby model fluid in an eccentric annulus. For this purpose, 3.92 wt % (hydroxyethyl)cellulose (HEC) and 3.44 wt % (carboxymethyl)cellulose (CMC) aqueous solutions were used. They also presented the predictions by using the variational principle.

For an axial flow in a very thin concentric annulus, it is a well-known practice to neglect curvature. Hence, the original problem becomes equivalent to the plane-slit problem. Following the same lines, when the ratio of the radius of the inner pipe to that of the outer pipe is close to unity, an eccentric annulus may be considered as a slit of variable height (Tao and Donovan, 1955; Iyoho and Azar, 1981; Tosun, 1984). Iyoho and Azar (1981) determined the velocity profile for a power-law fluid by using this model. However, they calculated the volume rate of flow by using the modified version of the formula given by Skelland (1967) in which the eccentricity ratio was not taken into account.

In this work an eccentric annulus is modeled as a slit of variable height, and the volume rate of flow-pressure drop relationship is obtained for the power-law, Bingham-plastic, and Sutterby models. The results are compared with those of Guckes (1975) and Mitsuishi and Aoyagi (1973).

## Mathematical Formulation

Figure 1 shows the slit equivalent of an eccentric annulus. An eccentric annulus system can be characterized by two parameters, namely, an eccentricity ratio,  $\epsilon$ , and a radius ratio,  $r^*$ , defined by

$$\epsilon = \frac{e}{r_o - r_i} \quad (1)$$

$$r^* = r_i/r_o \quad (2)$$

The slit height  $h$  as a function of the angle  $\theta$  is given as (Iyoho and Azar, 1981)

$$h = r_o[(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} + k \cos \theta - r^*] \quad (3)$$

where

$$k = \epsilon(1 - r^*) \quad (4)$$

For steady-state laminar flow of an incompressible non-Newtonian fluid in the flow geometry shown in Figure 2, the  $z$  component of the equation of motion reduces to

$$d\tau_{yz}/dy = -dP/dz \quad (5)$$

Making use of the boundary condition  $\tau_{yz} = 0$  at  $y = 0$ , eq 5 becomes

$$\tau_{yz} = \left( \frac{P_0 - P_L}{L} \right) y \quad (6)$$

where  $P_0 - P_L$  is the modified pressure drop between  $z = 0$  and  $z = L$ .

For a non-Newtonian fluid, the shear stress tensor  $\tau$  is expressed in the form

$$\tau = -\eta \dot{\gamma} \quad (7)$$

in which  $\dot{\gamma}$  is the rate-of-deformation (or, rate-of-strain) tensor defined by

$$\dot{\gamma} = \nabla v + (\nabla v)^T \quad (8)$$

The shear-rate-dependent viscosity,  $\eta$ , in eq 7 depends on the type of the fluid. For the three types of models, i.e., power-law, Bingham-plastic, and Sutterby, that will be considered in this study, the expressions for  $\eta$  are

$$\eta = \begin{cases} m\dot{\gamma}^{n-1} & \text{power-law} \\ \infty & \tau \leq \tau_0 \\ \mu_0 + \tau_0/\dot{\gamma} & \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{Bingham-plastic} \quad (10)$$

$$\eta_0[\text{arcsinh } B\dot{\gamma}/B\dot{\gamma}]^A \quad \text{Sutterby} \quad (11)$$

where  $\dot{\gamma}$  and  $\tau$  are the magnitudes of  $\dot{\gamma}$  and  $\tau$ , respectively, and are defined by

$$\dot{\gamma} = [|\dot{\gamma}|^2]^{1/2} \quad (12)$$

and

$$\tau = [|\tau|^2]^{1/2} \quad (13)$$

In the present case, the only non-zero velocity component,  $v_z$ , depends on  $y$ , and it decreases with increasing  $y$ . Therefore,  $\dot{\gamma} = -dv_z/dy$  and  $\tau = \tau_{yz}$ . Equation 7, on the other hand, reduces to

$$\tau_{yz} = -\eta dv_z/dy \quad (14)$$

**Power-Law Fluid.** Substitution of eq 9 in eq 14 gives

$$\tau_{yz} = m(-dv_z/dy)^n \quad (15)$$

\* Present address: Department of Chemical Engineering, University of Akron, Akron, OH 44325.

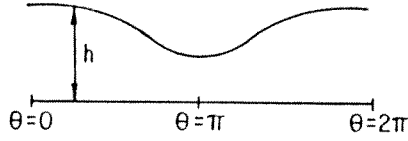
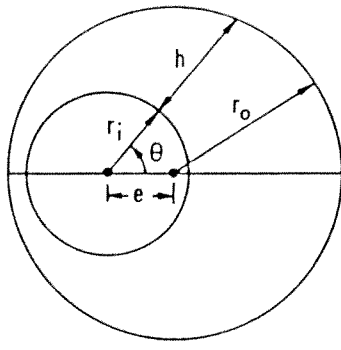


Figure 1. Slit equivalent of an eccentric annulus.

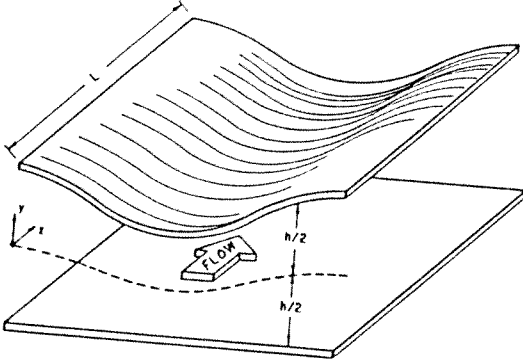


Figure 2. Flow geometry for a slit of variable height.

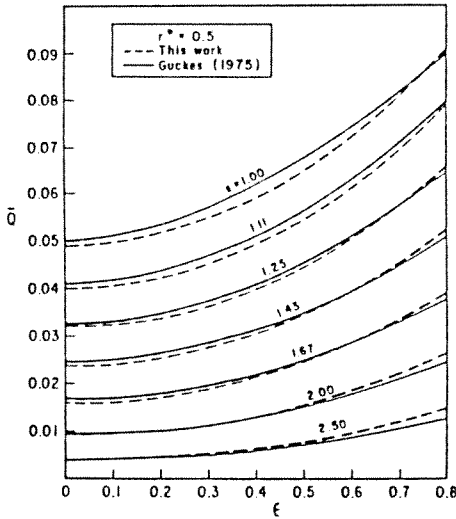


Figure 3. Plot of  $\bar{Q}$  versus  $\epsilon$  with  $s$  as a parameter for  $r^* = 0.5$ .

Combination of eq 6 and 15 and integration with the boundary condition that  $v_z = 0$  at  $y = h/2$  leads to

$$v_z = \frac{1}{s+1} \left( \frac{P_0 - P_L}{mL} \right)^s \left( \frac{h}{2} \right)^{s+1} \left[ 1 - \left( \frac{y}{h/2} \right)^{s+1} \right] \quad (16)$$

where

$$s = 1/n \quad (17)$$

The volume rate of flow,  $Q$ , can be determined by integrating the velocity distribution over the cross-sectional area of a slit as

$$Q = \lambda \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} v_z dy d\theta = 4\lambda \int_0^\pi \int_0^{h/2} v_z dy d\theta \quad (18)$$

The correction factor,  $\lambda$ , in eq 18, which is proposed by Tosun (1984) based on the argument that the flow area of a slit must be equal to that of an eccentric annulus, is given by

$$\lambda = \frac{\pi r_o}{2} \left( \frac{1 - r^{*2}}{2E - \pi r^*} \right) \quad (19)$$

where  $E$ , the complete elliptic integral of the second kind, is defined by

$$E = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta \quad (20)$$

The use of eq 16 in eq 18 yields

$$\bar{Q} = \frac{\pi}{s+2} \left( \frac{1}{2} \right)^{s+1} \left( \frac{1 - r^{*2}}{2E - \pi r^*} \right) \int_0^\pi [(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} + k \cos \theta - r^*]^{s+2} d\theta \quad (21)$$

in which the dimensionless volume rate of flow,  $\bar{Q}$ , is

$$\bar{Q} = \frac{Q}{r_o^{s+3} \left( \frac{P_0 - P_L}{mL} \right)^s} \quad (22)$$

In Figure 3, the dimensionless volume rate of flow,  $\bar{Q}$ , is plotted versus the eccentricity ratio,  $\epsilon$ , with  $s$  (or  $1/n$ ) as a parameter, for  $r^* = 0.5$ . The integral in eq 21 is evaluated numerically using 15-point Gauss-Legendre quadrature (Carnahan et al., 1969) and the elliptic integral  $E$  is calculated by the arithmetic-geometric mean process as described by Abramowitz and Stegun (1965). As can be seen from the figure, the predicted values of the proposed model agree well with those of Guckes (1975).

**Bingham-Plastic Fluid.** If  $y_0$  is the value of  $y$  for which  $\tau_{yz} = \tau_0$ , eq 6 gives

$$y_0 = \frac{\tau_0}{(P_0 - P_L)/L} \quad (23)$$

Due to the symmetry of the problem, it is sufficient to consider the upper part of the flow domain, i.e.,  $0 \leq y \leq h/2$ , in which two regions exist: namely, the plug flow region for  $0 \leq y \leq y_0$  and the plastic flow region for  $y_0 \leq y \leq h/2$ .

Combination of eq 10 and 14 leads to

$$\tau_{yz} = \tau_0 - \mu_0 dv_z/dy \quad \text{for } y_0 \leq y \leq h/2 \quad (24)$$

$$dv_z/dy = 0 \quad \text{for } 0 \leq y \leq y_0 \quad (25)$$

Substitution of eq 6 in eq 24 and integration yield

$$v_z = \frac{P_0 - P_L}{2\mu_0 L} \left( \frac{h}{2} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{y}{h/2} \right)^2 \right] - \frac{\tau_0}{\mu_0} \left( \frac{h}{2} \right) \left[ 1 - \left( \frac{y}{h/2} \right) \right] \quad \text{for } y_0 \leq y \leq h/2 \quad (26)$$

and

$$v_z = \frac{P_0 - P_L}{2\mu_0 L} \left( \frac{h}{2} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{y_0}{h/2} \right)^2 \right] - \frac{\tau_0}{\mu_0} \left( \frac{h}{2} \right) \left[ 1 - \left( \frac{y_0}{h/2} \right) \right] \quad \text{for } 0 \leq y \leq y_0 \quad (27)$$

in which the boundary condition  $v_z = 0$  at  $y = h/2$  has been used.

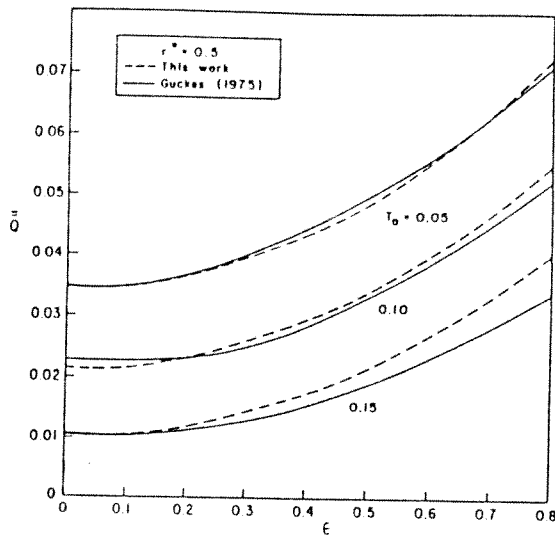


Figure 4. Plot of  $\bar{Q}$  versus  $\epsilon$  with  $T_0$  as a parameter for  $r^* = 0.5$ .

The volume rate of flow can be calculated from eq 18. However, a simplified formula can be obtained by integrating eq 18 by parts in the form

$$Q = -4\lambda \int_0^\pi \int_0^{h/2} y (dv_z/dy) dy d\theta \quad (28)$$

Considering the fact that  $dv_z/dy = 0$  for  $0 \leq y \leq y_0$ , eq 28 reduces to

$$Q = -4\lambda \int_0^\pi \int_{y_0}^{h/2} y (dv_z/dy) dy d\theta \quad (29)$$

The use of eq 26 in eq 29 results in

$$\bar{Q} = \frac{\pi}{12} \left( \frac{1 - r^{*2}}{2E - \pi r^{*2}} \right) (H + 4\pi T_0^3 - 3GT_0) \quad (30)$$

where the dimensionless parameters  $\bar{Q}$ ,  $H$ ,  $T_0$ , and  $G$  are

$$\bar{Q} = \frac{Q}{r_0^4 \left( \frac{P_0 - P_L}{\mu_0 L} \right)} \quad (31)$$

$$H = 2E \left( \frac{k^2 + 7}{3} + 3r^{*2} \right) - \frac{8}{3} K(1 - k^2) - \pi r^{*2} (3 + r^{*2}) \quad (32)$$

$$T_0 = y_0/r_0 \quad (33)$$

$$G = \pi(1 + r^{*2}) - 4Er^{*2} \quad (34)$$

The term  $K$  in eq 32 is the complete elliptic integral of the first kind defined by

$$K = \int_0^{\pi/2} d\theta / (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \quad (35)$$

In Figure 4 the dimensionless volume rate of flow,  $\bar{Q}$ , is plotted versus the eccentricity ratio,  $\epsilon$ , with  $T_0$  as a parameter, for  $r^* = 0.5$ . The elliptic integral  $K$  is calculated by using the arithmetic-geometric mean process (Abramowitz and Stegun, 1965). As in the case of a power-law fluid, the calculated values agree well with those of Guckes (1975). The agreement is perfect especially when  $T_0$  is small.

**Sutterby Model.** The Sutterby model parameters of the solutions used in the experimental work of Mitsuishi and Aoyagi (1973) are given in Table I.

To relate the volume rate of flow to the pressure drop for flow in a slit of variable height, the procedure described

Table I. Sutterby Model Parameters (from Mitsuishi and Aoyagi (1973))

solution	A	B, s	$\eta_0$ , (N·s)/m <sup>2</sup>
3.92% HEC	0.30	0.368	1.21
3.44% CMC	0.45	0.715	7.15

by Sutterby (1966) is used as follows:

It can be shown from eq 6 that

$$\tau_{yz} = \tau_w \left( \frac{y}{h/2} \right) \quad (36)$$

where  $\tau_w$  is the shear stress at the wall of the slit and is given by

$$\tau_w = \frac{P_0 - P_L}{L} \left( \frac{h}{2} \right) \quad (37)$$

If the variable of integration in eq 28 is changed from  $y$  to  $\tau_{yz}$  according to eq 36, the result is

$$Q = \lambda \int_0^\pi h^2 d\theta \int_0^{\tau_w} \dot{\gamma} (\tau_{yz}/\tau_w^2) d\tau_{yz} \quad (38)$$

Integration of eq 38 by parts once more gives

$$Q = \frac{\lambda}{2} \int_0^\pi h^2 \left[ \dot{\gamma}_w - \int_0^{\tau_w} \left( \frac{\tau_{yz}}{\tau_w} \right)^2 d\dot{\gamma} \right] d\theta \quad (39)$$

where  $\dot{\gamma}_w$  is the value of  $\dot{\gamma}$  at the wall of the slit. Combination of eq 11 and 14 leads to

$$\tau_{yz} = \eta_0 \left( \frac{\operatorname{arcsinh} B\dot{\gamma}}{B\dot{\gamma}} \right)^A \dot{\gamma} \quad (40)$$

At the wall of the slit, i.e., at  $y = h/2$ , eq 40 takes the form

$$\tau_w = \eta_0 \left( \frac{\operatorname{arcsinh} \alpha}{\alpha} \right)^A \dot{\gamma}_w \quad (41)$$

where

$$\alpha = B\dot{\gamma}_w \quad (42)$$

Substitution of eq 3, 40, and 41 in eq 39 yields

$$\frac{4Q}{\pi r_0^3} = \frac{1}{B} \left( \frac{1 - r^{*2}}{2E - \pi r^{*2}} \right) \int_0^\pi \alpha [(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} + k \cos \theta - r^{*2}]^2 \left[ 1 - \left( \frac{\operatorname{arcsinh} \alpha}{\alpha} \right)^{-2A} \phi \right] d\theta \quad (43)$$

where

$$\phi = \int_0^1 \left( \frac{\operatorname{arcsinh} \alpha \dot{\gamma}^*}{\alpha \dot{\gamma}^*} \right)^{2A} \dot{\gamma}^{*2} d\dot{\gamma}^* \quad (44)$$

in which

$$\dot{\gamma}^* = \dot{\gamma}/\dot{\gamma}_w \quad (45)$$

On the other hand, combination of eq 37 and 41, with the aid of eq 3, gives

$$\frac{(P_0 - P_L)r_0}{2L} = \frac{\alpha \eta_0}{B[(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} + k \cos \theta - r^{*2}]} \left( \frac{\operatorname{arcsinh} \alpha}{\alpha} \right)^A \quad (46)$$

Equations 43 and 46 indicate that  $4Q/\pi r_0^3$  and  $(P_0 - P_L)r_0/2L$  are both functions of  $\alpha$  (or  $B\dot{\gamma}_w$ ) and  $A$ . The computational procedure to determine  $4Q/\pi r_0^3$  as a function of  $(P_0 - P_L)r_0/2L$  is given elsewhere (Uner, 1987). The results, which are plotted in Figures 5 and 6, show fairly good agreement with the experimental results of



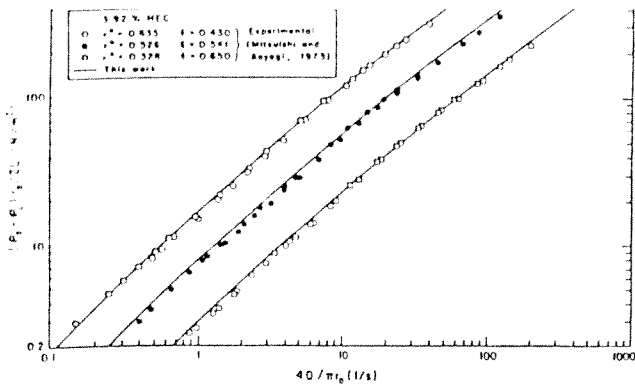


Figure 5. Comparison of the experimental flow data on 3.92% HEC with the predicted values.

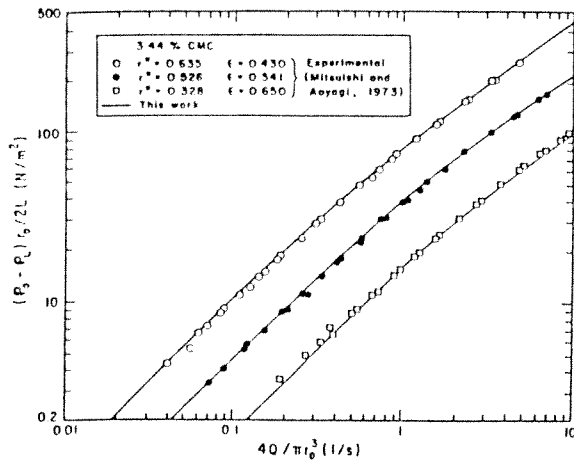


Figure 6. Comparison of the experimental flow data on 3.44% CMC with the predicted values.

Mitsuiishi and Aoyagi (1973).

## Conclusions

An eccentric annulus has been modeled as a slit of variable height. The volume rate of flow–pressure drop relationship for various non-Newtonian models (power-law, Bingham-plastic, and Sutterby) has been presented as a function of eccentricity and radius ratios.

It is important to note that when the radius ratio,  $r^*$ , is small the predictions of this approach, as expected, are not accurate. However, satisfactory results are obtained as  $r^*$  gets larger. For  $r^* \geq 0.5$ , the use of the proposed model enables one to predict the flow behavior of non-Newtonian fluids in an eccentric annulus without going into too much mathematical complexity.

## Acknowledgment

This work was supported by the Turkish Scientific and Technical Research Council (TUBITAK) Grants MAG-582 and MAG-721.

## Nomenclature

$A$  = parameter in Sutterby viscosity model, dimensionless  
 $B$  = parameter in Sutterby viscosity model, s

$E$  = complete elliptic integral of the second kind, defined by eq 20  
 $e$  = distance between centers of inner and outer pipe, m  
 $G$  = function defined by eq 34, dimensionless  
 $g$  = gravitational acceleration,  $m/s^2$   
 $H$  = function defined by eq 32, dimensionless  
 $h$  = slit height, defined by eq 3, m  
 $K$  = complete elliptic integral of the first kind, defined by eq 35  
 $k$  = function defined by eq 4, dimensionless  
 $L$  = length of slit, m  
 $m$  = parameter in power-law viscosity model,  $(N \cdot s^n)/m^2$   
 $n$  = parameter in power-law viscosity model, dimensionless  
 $P$  = pressure,  $N/m^2$   
 $\mathcal{P}$  = modified pressure,  $P + \rho gy$ ,  $N/m^2$   
 $Q$  = volume rate of flow,  $m^3/s$   
 $\bar{Q}$  = dimensionless volume rate of flow defined by eq 22  
 $\hat{Q}$  = dimensionless volume rate of flow defined by eq 31  
 $r_i$  = radius of inner pipe, m  
 $r_o$  = radius of outer pipe, m  
 $r^*$  = radius ratio defined by eq 2, dimensionless  
 $s$  = reciprocal of power-law model  $n$ , dimensionless  
 $T_0$  = function defined by eq 33, dimensionless  
 $v_z$  =  $z$  component of velocity,  $m/s$   
 $x, y, z$  = rectangular coordinates

## Greek Symbols

$\alpha$  = function defined by eq 42, dimensionless  
 $\dot{\gamma}$  = magnitude of the  $\dot{\gamma}$  tensor, defined by eq 12,  $1/s$   
 $\dot{\gamma}$  = rate-of-deformation tensor,  $1/s$   
 $\dot{\gamma}_w = \dot{\gamma}$  at  $y = h/2$ ,  $1/s$   
 $\dot{\gamma}^*$  = dimensionless rate of deformation, defined by eq 45  
 $\epsilon$  = eccentricity ratio defined by eq 1, dimensionless  
 $\eta$  = shear-rate-dependent viscosity,  $(N \cdot s)/m^2$   
 $\eta_0$  = limiting viscosity at zero shear rate,  $(N \cdot s)/m^2$   
 $\theta$  = angle  
 $\lambda$  = correction factor defined by eq 19, m  
 $\mu_0$  = parameter in Bingham model,  $(N \cdot s)/m^2$   
 $\tau$  = magnitude of  $\tau$ , defined by eq 13,  $N/m^2$   
 $\tau$  = shear stress tensor,  $N/m^2$   
 $\tau_0$  = parameter in Bingham model,  $N/m^2$   
 $\tau_w$  = shear stress at the slit wall,  $N/m^2$   
 $\phi$  = function defined by eq 44, dimensionless

## Superscript

T = transpose

## Literature Cited

- Abramowitz, M.; Stegun, I. A. *Handbook of Mathematical Functions*; Dover: New York, 1965.  
 Carnahan, B.; Luther, H. A.; Wilkes, J. O. *Applied Numerical Methods*; Wiley: New York, 1969.  
 Guckes, T. L. *J. Eng. Ind. Trans. ASME Ser. B.* 1975, 97, 498.  
 Iyoho, A. W.; Azar, J. J. *Soc. Pet. Eng. J.* 1981, 21, 565.  
 Mitsuiishi, N.; Aoyagi, Y. *J. Chem. Eng. Jpn.* 1973, 6, 402.  
 Skelland, A. H. P. *Non-Newtonian Flow and Heat Transfer*; Wiley: New York, 1967.  
 Sutterby, J. L. *AIChE J.* 1966, 12, 63.  
 Tao, L. N.; Donovan, W. F. *Trans. ASME* 1955, 77, 1291.  
 Tosun, I. *AIChE J.* 1984, 30, 877.  
 Uner, D. M.S. Thesis, Middle East Technical University, Ankara, Turkey, 1987.

Received for review February 24, 1987

Revised manuscript received November 16, 1987

Accepted December 16, 1987

# Flow of a Power-Law Fluid in an Eccentric Annulus

Deniz Uner,\* Canan Ozgen, and Ismail Tosun,\*\* Middle East Technical U.

**Summary.** An eccentric annulus is modeled as a slit of variable height, and the volumetric flow rate of a power-law fluid in an eccentric annulus is compared with that in a concentric annulus for a given pressure drop. The results indicate an increase in the volumetric flow rate as the inner pipe is displaced from a concentric position. The effect of the eccentricity ratio on the volumetric flow rate becomes predominant, especially when the power-law index,  $n$ , is small.

## Introduction

Flow of drilling muds in concentric or eccentric annular spaces is quite important in the petroleum industry. When the ratio of the radius of the inner pipe to that of the outer pipe is close to unity, a concentric annulus may be considered to be a thin-plane slit and its curvature can be neglected. In the case of a narrow, eccentric annulus, on the other hand, the annular space is approximated by a slit of variable height.<sup>1-4</sup> Iyoho and Azar<sup>3</sup> determined power-law velocity profiles inside an eccentric annulus using this approach.

In process calculations, the volumetric flow rate is of more interest than the distribution of velocity inside an eccentric annulus. Iyoho and Azar calculated the volumetric flow rate by using the modified version of Skelland's<sup>5</sup> equation. This equation is originally derived for flow through a concentric annulus and is therefore independent of the eccentricity ratio. It is widely known that the displacement of an inner pipe from a concentric position causes an increase in the volumetric flow rate of a Newtonian fluid for the same pressure drop.<sup>4,6</sup> Depending on the values of the eccentricity and radius ratios, this increase may be up to 240%. Therefore, the formula used by Iyoho and Azar in the calculation of the volumetric flow rate in an eccentric annulus is not appropriate.

Tosun<sup>4</sup> used the model of Iyoho and Azar to calculate the volumetric flow rate of a Newtonian fluid through an eccentric annulus as a function of eccentricity and radius ratios. The results are shown to be in good agreement with the exact values for radius ratios greater than 0.3. In the present analysis, Tosun's procedure is extended to calculate the volumetric flow rate of power-law fluids through an eccentric annulus. The results indicate that as the power-law index,  $n$ , decreases, the displacement of the inner pipe from a concentric position causes a tremendous increase in the volumetric flow rate of a power-law fluid at constant pressure drop.

## Velocity Distribution

The slit equivalent of an eccentric annulus is shown in Fig. 1. An eccentric annulus system can be characterized by two parameters—an eccentricity ratio,  $R_e$ , and a radius ratio,  $R_r$ , defined by

$$R_e = L_p / (r_o - r_i) \quad (1)$$

$$\text{and } R_r = r_i / r_o \quad (2)$$

The values of  $R_e$  vary between 0 and 1. When  $R_e = 1$ , the inner pipe is in contact with the outer pipe. On the other hand,  $R_e = 0$  represents a concentric annulus system.

The exact representation of the slit height,  $h$ , is given by Iyoho and Azar as a function of the angle  $\theta$ :

$$h = r_o (\sqrt{1 - f^2 \sin^2 \theta} + f \cos \theta - R_r), \quad (3)$$

$$\text{where } f = R_e(1 - R_r). \quad (4)$$

For steady-state laminar flow of an incompressible power-law fluid in the flow geometry shown in Fig. 2, the  $z$  component of the equation of motion is

$$d\tau_{yz} / dy = -(dp' / dz), \quad (5)$$

where  $p'$  is defined by

$$p' = p + \rho gy. \quad (6)$$

Integration of Eq. 5, using the boundary condition  $\tau_{yz} = 0$  at  $y = 0$ , gives

$$\tau_{yz} = (\Delta p' / L_s) y, \quad (7)$$

where  $\Delta p' = p'_o - p'_i$  is the modified pressure drop between  $z = 0$  and  $z = L_s$ .

For a power-law fluid, the shear-stress/shear-rate relationship is expressed as

$$\tau_{yz} = -m \left| dv_z / dy \right|^{n-1} (dv_z / dy). \quad (8)$$

Because of the symmetry of the problem, it is sufficient to consider the upper part of the flow domain—i.e.,  $0 \leq y \leq h/2$ . In this region,  $v_z$  decreases with increasing  $y$ . Therefore, Eq. 8 reduces to

$$\tau_{yz} = m (-dv_z / dy)^n. \quad (9)$$

Combination and integration of Eqs. 7 and 9 yields

$$v_z = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\Delta p'}{mL_s} \right)^{1/n} \left( \frac{h}{2} \right)^{1+(1/n)} \left[ 1 - \left( \frac{y}{h/2} \right)^{1+(1/n)} \right], \quad (10)$$

in which the boundary condition  $v_z = 0$  at  $y = h/2$  is used. Note that Eq. 10 was originally obtained by Iyoho and Azar.

## Volumetric Flow Rate

**Concentric Annulus.** For flow of a power-law fluid between two parallel plates, the volumetric flow rate<sup>7</sup> is

$$q = 2bh^2 \frac{1}{2} [n / (2n+1)] (\Delta p' h / mL_s)^{1/n}. \quad (11)$$

Approximation of the annular space by a plane slit gives the slit height as

$$2h_{1/2} = r_o - r_i = r_o(1 - R_r). \quad (12)$$

On the other hand, the flow area of the plane slit must be equal to the flow area of the concentric annulus so that

$$br_o(1 - R_r) = \pi(r_o^2 - r_i^2). \quad (13)$$

Eq. 13 gives the width of the plate as

$$b = \pi r_o(1 + R_r). \quad (14)$$

Substitution of Eqs. 12 and 14 into Eq. 11 results in the approximate expression for the volumetric flow rate in a concentric annulus:

$$q_c^e = \frac{\pi r_o^3}{2} \frac{n}{2n+1} \left( \frac{\Delta p' r_o}{2mL_s} \right)^{1/n} (1 + R_r)(1 - R_r)^{2+(1/n)}, \quad (15)$$

which was originally obtained by Savins.<sup>8</sup> Iyoho and Azar used Eq. 15 for an eccentric annulus.

It is worthwhile to compare Eq. 15 with the exact expression to investigate its validity. Fredrickson and Bird<sup>9</sup> determined the volumetric flow rate of a power-law fluid in a concentric annulus to be

$$q_c^e = \pi r_o^3 \left( \frac{\Delta p' r_o}{2mL_s} \right)^{1/n} \int_{R_r}^1 u^{-1/n} |\lambda^2 - u^2|^{1+(1/n)} du. \quad (16)$$

\*Now at Iowa State U.

\*\*Now at U. of Akron.

Copyright 1989 Society of Petroleum Engineers

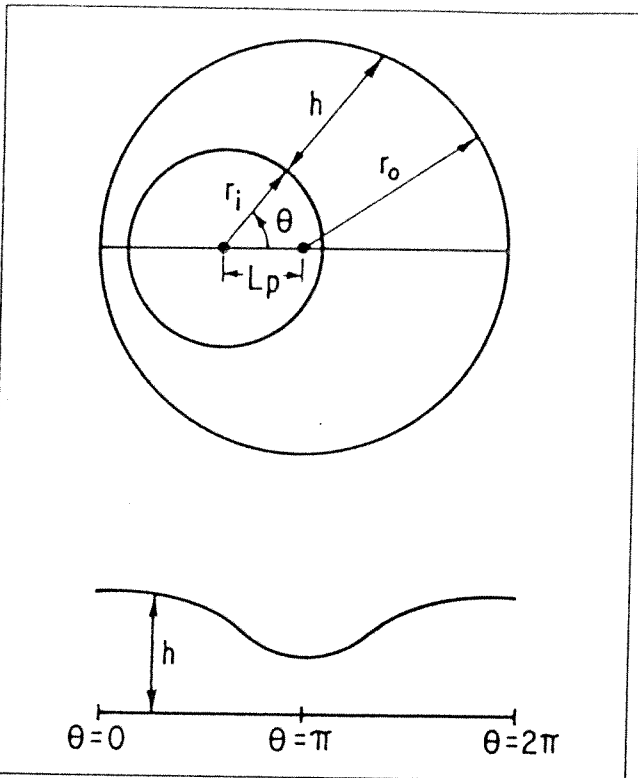


Fig. 1—Slit equivalent of eccentric annulus.

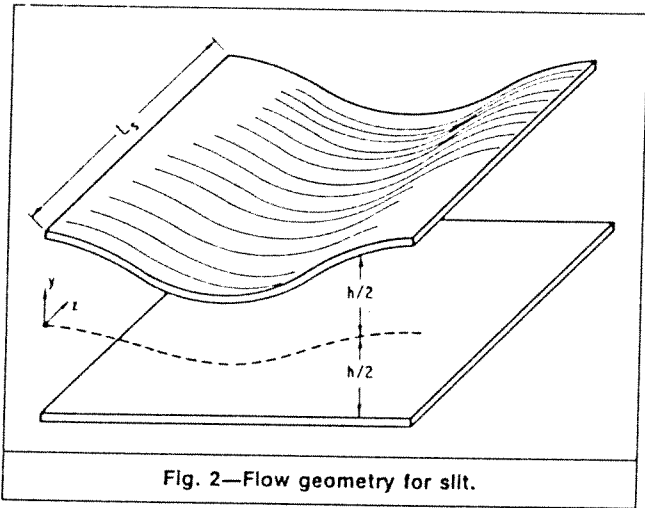


Fig. 2—Flow geometry for slit.

Hanks and Larsen<sup>10</sup> later analytically evaluated the integral in Eq. 16 and obtained

$$q_e^e = \pi r_o^3 \left[ \frac{n}{3n+1} \right] (\Delta p' r_o / 2mL_s)^{1/n} \left[ (1-\lambda^2)^{1+(1/n)} - R_r^{1-(1/n)} \times (\lambda^2 - R_r^2)^{1+(1/n)} \right] \quad (17)$$

The term  $\lambda$  in Eqs. 16 and 17 represents the dimensionless radial position at which velocity is maximum. Hanks and Larsen<sup>9</sup> also tabulated  $\lambda$  values as functions of  $n$  and  $R_r$ . Using Eqs. 15 and 17 allows the ratio of the exact and approximate volumetric flow rates in a concentric annulus to be calculated as a function of  $n$  and  $R_r$ . It is obvious from the results (Table 1) that Eqs. 15 and 17 yield almost identical volumetric flow rates for the ranges in diameter ratio and power-law index experienced in normal drilling operations. Eq. 17, however, should be preferred over Eq. 15 for small values of  $n$  and  $R_r$ .

**Eccentric Annulus.** Tosun<sup>4</sup> indicated that the flow area of the slit of variable height must be equal to the flow area of the eccentric

TABLE 1—RATIO OF EXACT AND APPROXIMATE FLOW RATES IN A CONCENTRIC ANNULUS

$R_r$	$q_e^e/q_c^e$			
	$n=0.10$	$n=0.25$	$n=0.50$	$n=1.00$
0.1	1.3390	1.2284	1.1401	1.0740
0.2	1.1866	1.1235	1.0741	1.0396
0.3	1.1092	1.0718	1.0434	1.0233
0.4	1.0645	1.0439	1.0257	1.0139
0.5	1.0409	1.0246	1.0145	1.0085
0.6	1.0118	1.0106	1.0087	1.0036
0.7	0.9964	1.0036	1.0047	1.0043
0.8	0.9609	0.9952	1.0037	1.0062
0.9	1.0109	1.0363	1.0381	0.9779

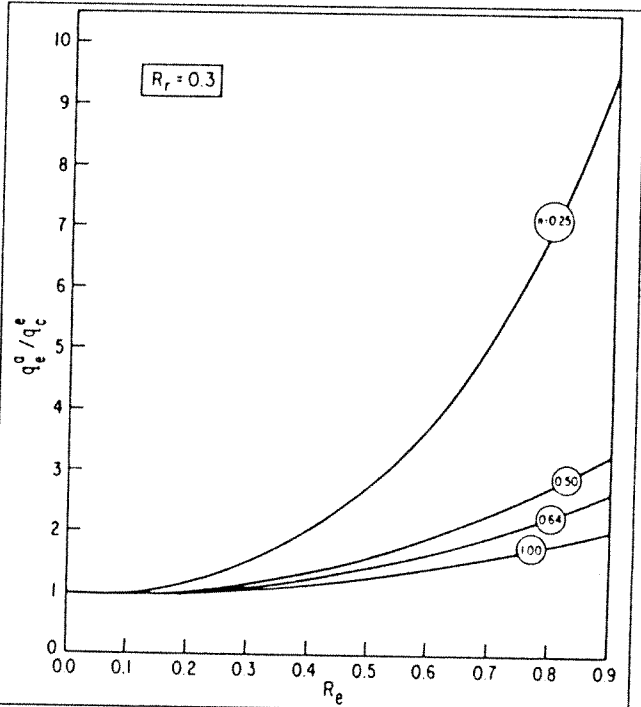


Fig. 3—Plot of computed values of  $q_e^e/q_c^e$  vs.  $R_e$  with  $n$  as a parameter for  $R_r = 0.3$ .

annulus so that

$$\pi(r_o^2 - r_i^2) = F_{cor} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} dy d\theta \quad (18)$$

where  $F_{cor}$  is a function of  $R_e$  and  $R_r$ . From Eq. 18,  $F_{cor}$  becomes

$$F_{cor} = (\pi r_o^2 / 2) [(1 - R_r^2) / (2E - \pi R_r)], \quad (19)$$

in which  $E$  is defined by

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - f^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (20)$$

The volumetric flow rate can be calculated from

$$q_e^e = F_{cor} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} v_z dy d\theta \quad (21)$$

The use of Eqs. 3 and 10 in Eq. 21 gives

$$q_e^e = \frac{\pi r_o^3}{2} \frac{n}{2n+1} \left( \frac{1 - R_r^2}{2E - \pi R_r} \right) \left( \frac{\Delta p' r_o}{2mL_s} \right)^{1/n} \int_0^{\pi} \left( \sqrt{1 - f^2 \sin^2 \theta} + f \cos \theta - R_r \right)^{2+(1/n)} d\theta \quad (22)$$

TABLE 2—VALUES OF  $q_e^a/q_e^c$  AS A FUNCTION OF  $R_r$  AND  $R_e$  FOR  $n=0.10$

$R_r$	$R_e$								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	0.9797	0.9458	0.9187	0.9000	0.8890	0.8861	0.8921	0.9095	0.9431
0.2	0.9819	0.9515	0.9269	0.9095	0.8987	0.8945	0.8977	0.9094	0.9321
0.3	0.9842	0.9574	0.9353	0.9193	0.9089	0.9041	0.9050	0.9126	0.9279
0.4	0.9864	0.9632	0.9439	0.9296	0.9198	0.9146	0.9140	0.9184	0.9286
0.5	0.9887	0.9692	0.9527	0.9402	0.9314	0.9261	0.9244	0.9266	0.9329
0.6	0.9909	0.9752	0.9617	0.9513	0.9436	0.9386	0.9364	0.9369	0.9405
0.7	0.9932	0.9813	0.9709	0.9627	0.9565	0.9522	0.9498	0.9494	0.9509
0.8	0.9954	0.9874	0.9804	0.9746	0.9702	0.9669	0.9648	0.9639	0.9643
0.9	0.9977	0.9936	0.9900	0.9870	0.9846	0.9828	0.9815	0.9807	0.9806

TABLE 3—VALUES OF  $q_e^a/q_e^c$  AS A FUNCTION OF  $R_r$  AND  $R_e$  FOR  $n=0.25$

$R_r$	$R_e$								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	0.9894	0.9645	0.9370	0.9145	0.8996	0.8932	0.8961	0.9105	0.9409
0.2	0.9906	0.9684	0.9437	0.9233	0.9093	0.9024	0.9031	0.9124	0.9327
0.3	0.9918	0.9722	0.9505	0.9322	0.9193	0.9123	0.9114	0.9171	0.9307
0.4	0.9930	0.9761	0.9573	0.9413	0.9297	0.9228	0.9209	0.9240	0.9329
0.5	0.9941	0.9801	0.9642	0.9506	0.9404	0.9340	0.9314	0.9327	0.9382
0.6	0.9953	0.9840	0.9712	0.9600	0.9515	0.9458	0.9430	0.9431	0.9461
0.7	0.9965	0.9880	0.9783	0.9697	0.9630	0.9583	0.9556	0.9550	0.9563
0.8	0.9976	0.9919	0.9854	0.9795	0.9748	0.9714	0.9693	0.9684	0.9687
0.9	0.9988	0.9959	0.9926	0.9896	0.9872	0.9853	0.9840	0.9833	0.9832

TABLE 4—VALUES OF  $q_e^a/q_e^c$  AS A FUNCTION OF  $R_r$  AND  $R_e$  FOR  $n=0.50$

$R_r$	$R_e$								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	0.9935	0.9762	0.9537	0.9316	0.9141	0.9039	0.9030	0.9136	0.9403
0.2	0.9942	0.9788	0.9588	0.9389	0.9230	0.9132	0.9108	0.9173	0.9349
0.3	0.9949	0.9815	0.9638	0.9463	0.9321	0.9228	0.9196	0.9232	0.9348
0.4	0.9956	0.9841	0.9689	0.9538	0.9412	0.9327	0.9291	0.9307	0.9382
0.5	0.9963	0.9867	0.9740	0.9612	0.9505	0.9430	0.9393	0.9395	0.9440
0.6	0.9971	0.9894	0.9791	0.9688	0.9600	0.9536	0.9501	0.9495	0.9520
0.7	0.9978	0.9920	0.9843	0.9764	0.9697	0.9646	0.9615	0.9605	0.9616
0.8	0.9985	0.9947	0.9895	0.9842	0.9795	0.9760	0.9736	0.9726	0.9728
0.9	0.9992	0.9973	0.9947	0.9920	0.9896	0.9877	0.9864	0.9857	0.9856

TABLE 5—VALUES OF  $q_e^a/q_e^c$  AS A FUNCTION OF  $R_r$  AND  $R_e$  FOR  $n=1.00$

$R_r$	$R_e$								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	0.9956	0.9834	0.9660	0.9470	0.9297	0.9174	0.9128	0.9192	0.9414
0.2	0.9961	0.9852	0.9698	0.9528	0.9373	0.9260	0.9209	0.9242	0.9386
0.3	0.9966	0.9871	0.9735	0.9586	0.9450	0.9346	0.9294	0.9307	0.9400
0.4	0.9971	0.9889	0.9773	0.9645	0.9526	0.9435	0.9384	0.9383	0.9442
0.5	0.9975	0.9907	0.9810	0.9703	0.9603	0.9524	0.9477	0.9468	0.9503
0.6	0.9980	0.9926	0.9848	0.9762	0.9680	0.9615	0.9574	0.9561	0.9579
0.7	0.9985	0.9944	0.9886	0.9821	0.9759	0.9708	0.9674	0.9660	0.9668
0.8	0.9990	0.9963	0.9924	0.9880	0.9838	0.9803	0.9779	0.9766	0.9767
0.9	0.9995	0.9981	0.9962	0.9939	0.9918	0.9900	0.9887	0.9879	0.9878

With Eqs. 17 and 22, the ratio of the volumetric flow rates in eccentric and concentric annuli at constant pressure drop becomes

$$\frac{q_e^a}{q_e^c} = \frac{3n+1}{2(2n+1)} \left( \frac{1-R_r^2}{2E-\pi R_r} \right) \times \frac{\int_0^\pi (\sqrt{1-f^2 \sin^2 \theta} + f \cos \theta - R_r)^{2+(1/n)} d\theta}{[(1-\lambda^2)^{1+(1/n)} - R_r^{1-(1/n)}(\lambda^2 - R_r^2)^{1+(1/n)}]} \dots (23)$$

The integral in Eq. 23 is evaluated numerically with a 15-point Gauss-Legendre quadrature,<sup>11</sup> and the elliptic integral,  $E$ , is calculated by the arithmetic/geometric mean process described by

Abramowitz and Stegun.<sup>12</sup> The results for  $R_r=0.3$  are shown in Fig. 3. \* As can be seen in this figure, the eccentricity ratio,  $R_e$ , has a profound effect on the volumetric flow rate, especially at low values of the power-law index,  $n$ .

Vaughn<sup>2</sup> also treated the eccentric annulus as a slit of variable height and obtained the following expression for the volumetric flow rate:

$$q_e^a = (r_o^3/4)[n/(2n+1)](1-R_r^2)(1-R_r)^{1+(1/n)} \times \int_0^{2\pi} (1+R_e \cos \theta)^{2+(1/n)} d\theta \dots (24)$$

\*Results for  $R_r$  values of 0.5, 0.7, and 0.9 are available from the authors

Therefore, the ratio of the volumetric flow rates for the same pressure drop becomes

$$q_e^{a'}/q_e^{a''} = 2\pi / [(2E - \pi R_r)(1 - R_r)^{1+(1/n)}] \psi, \dots (25)$$

$$\text{where } \psi = \frac{\int_0^\pi (\sqrt{1-f^2 \sin^2 \theta} + f \cos \theta - R_r)^{2+(1/n)} d\theta}{\int_0^{2\pi} (1 + R_e \cos \theta)^{2+(1/n)} d\theta} \dots (26)$$

The ratio of the volumetric flow rates (Eq. 25) as a function of  $R_r$ ,  $R_e$ , and  $n$  is given in Tables 2 through 5. As expected, the ratio converges to unity at  $n=1$  as  $R_r$  and  $R_e$  approach one and zero, respectively. In general, the expression developed by Vaughn<sup>2</sup> slightly overestimates (1 to 10%) the volumetric flow rates compared with the expression presented in this work.

### Conclusions

An approximate solution was presented to calculate the volumetric flow rate of a power-law fluid in an eccentric annulus. The ratio of the volumetric flow rates in eccentric and concentric annuli at the same pressure drop is calculated as a function of the eccentricity ratio, power-law index, and radius ratio. The results indicate a strong dependence of volumetric flow rate on the eccentricity ratio when the power-law index is small.

### Nomenclature

- $b$  = slit width, ft [m]
- $E$  = complete elliptic integral of second kind, defined by Eq. 20
- $f$  = function defined by Eq. 4, dimensionless
- $F_{cor}$  = correction factor defined by Eq. 19, ft [m]
- $g$  = acceleration of gravity, ft/sec<sup>2</sup> [m/s<sup>2</sup>]
- $h$  = slit height, defined by Eq. 3, ft [m]
- $h_{1/2}$  = half-thickness of plane slit, ft [m]
- $L_p$  = distance between centers of inner and outer pipe, ft [m]
- $L_s$  = length of slit, ft [m]
- $m$  = parameter in power-law viscosity model, lbf-sec <sup>$n$</sup> /ft<sup>2</sup> [Pa·s <sup>$n$</sup> ]
- $n$  = parameter in power-law viscosity model, dimensionless
- $p$  = pressure, psi [MPa]
- $p'$  = modified pressure, defined by Eq. 6, psi [MPa]
- $\Delta p'$  = modified pressure drop, psi [MPa]
- $q$  = volumetric flow rate, ft<sup>3</sup>/sec [m<sup>3</sup>/s]
- $q_e^{a'}, q_e^{a''}$  = volumetric flow rates for this work and Vaughn's work, respectively
- $r_i$  = inner pipe radius, ft [m]
- $r_o$  = outer pipe radius, ft [m]
- $R_e$  = eccentricity ratio, defined by Eq. 1, dimensionless
- $R_r$  = radius ratio, defined by Eq. 2, dimensionless
- $u$  = dummy variable in Eq. 16, dimensionless

- $v_z$  =  $z$  component of velocity, ft/sec [m/s]
- $x, y, z$  = rectangular coordinates
- $\theta$  = angle, degrees
- $\lambda$  = dimensionless radial position ( $r/r_o$ , at which velocity is maximum)
- $\rho$  = density, lbm/ft<sup>3</sup> [kg/m<sup>3</sup>]
- $\tau_{yz}$  = shear stress (flux of  $z$  momentum in  $y$  direction), lbf/ft<sup>2</sup> [Pa]
- $\psi$  = function defined by Eq. 25, dimensionless

### Subscripts

- $c$  = concentric
- $e$  = eccentric

### Superscripts

- $a$  = approximate
- $e$  = exact

### Acknowledgments

This work was supported by the Turkish Scientific and Technical Research Council (TUBITAK) Grant MAG-721.

### References

1. Tao, L.N. and Donovan, W.F.: "Through-Flow in Concentric and Eccentric Annuli of Fine Clearance With and Without Relative Motion of the Boundaries," *Trans., ASME* (Nov. 1955) **77**, 1291-1301.
2. Vaughn, R.D.: "Axial Laminar Flow of Non-Newtonian Fluids in Narrow Eccentric Annuli," *SPEJ* (Dec. 1965) 277-80; *Trans., AIME*, **234**.
3. Iyoho, A.W. and Azar, J.J.: "An Accurate Slot-Flow Model for Non-Newtonian Fluid Flow Through Eccentric Annuli," *SPEJ* (Oct. 1981) 565-72.
4. Tosun, I.: "Axial Laminar Flow in an Eccentric Annulus: An Approximate Solution," *AIChE J.* (Sept. 1984) **30**, 877-78.
5. Skelland, A.H.P.: *Non-Newtonian Flow and Heat Transfer*, John Wiley and Sons Inc., New York City (1967).
6. Redberger, P.J. and Charles, M.E.: "Axial Laminar Flow in a Circular Pipe Containing a Fixed Eccentric Core," *Cdn. J. Chem. Eng.* (Aug. 1962) **40**, 148-51.
7. Mooney, M. and Black, S.A.: "A Generalized Power Law and Laws of Extrusion," *J. Colloid Sci.* (1952) **7**, 204-17.
8. Savins, J.G.: "Generalized Newtonian (Pseudoplastic) Flow in Stationary Pipes and Annuli," *Trans., AIME* (1958) **213**, 325-32.
9. Fredrickson, A.G. and Bird, R.B.: "Non-Newtonian Flow in Annuli," *Ind. & Eng. Chem.* (March 1958) **50**, 347-52.
10. Hanks, R.W. and Larsen, K.M.: "The Flow of Power-Law Non-Newtonian Fluids in Concentric Annuli," *Ind. & Eng. Chem. Fund.* (Feb. 1979) **18**, 33-35.
11. Carnahan, B., Luther, H.A., and Wilkes, J.O.: *Applied Numerical Methods*, John Wiley and Sons Inc., New York City (1969) 101-05.
12. Abramowitz, M. and Stegun, I.A.: *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York City (1965) 598-99.

SPEDE

Original SPE manuscript received for review April 13, 1987. Paper (SPE 17002) accepted for publication Feb. 1, 1989. Revised manuscript received Feb. 12, 1988.

HEAT TRANSFER STUDIES IN AN ECCENTRIC ANNULUS

Deniz Üner, İsmail Tosun and Canan Özgen

Department of Chemical Engineering

Middle East Technical University

Ankara 06531, Turkey

Presentation

AIChE 1988 ANNUAL MEETING

Nov. 27 - Dec. 2, 1988

The Washington Hilton and Towers

Washington, DC

ABSTRACT

The laminar flow heat transfer problem is solved analytically by using an approximate method in which the eccentric annulus is modelled as a slit of variable height. The fully developed Nusselt numbers are evaluated for the fundamental boundary condition of the first kind.

An empirical correlation for turbulent flow is obtained by using the Wilson-plot technique in the form

$$Nu_o = 0.0166 Re_o^{0.8} Pr_o^{1/3} r^{*-0.53} \epsilon^{-0.084} (\mu/\mu_w)_o^{0.14}$$

## INTRODUCTION

The transfer of heat to or from fluids flowing in doubly connected ducts is one of the most important modes of heat transfer in industry. In cases where analytical solution is possible the first step is to obtain the velocity distribution. Then the energy equation can be solved together with the boundary conditions suitable for the system characteristics. The fundamental thermal boundary conditions for doubly connected ducts can be classified as follows (Shah and London, 1978):

1. *Fundamental Boundary Condition of the First Kind*: On one wall constant temperature, different from the entering fluid temperature, is specified. The other wall is at the constant temperature of the entering fluid.
2. *Fundamental Boundary Condition of the Second Kind*: On one wall constant axial and peripheral wall heat flux is specified. The other wall is insulated.
3. *Fundamental Boundary Condition of the Third Kind*: On one wall constant temperature, different from the entering fluid, is specified. The other wall is insulated.
4. *Fundamental Boundary Condition of the Fourth Kind*: On one wall constant axial and peripheral wall heat flux is specified. The other wall is at the constant temperature of the entering fluid.

Laminar forced convection in eccentric annuli has been studied by a few investigators. Snyder (1963) studied slug flow heat transfer and obtained the following correlation for liquid metals:



$$\text{Nu} = 0.667 \text{Nu}_s + 0.025 \text{Pe}^{0.8} \quad (1)$$

where  $\text{Nu}_s$  is the slug flow Nusselt number and

$$\text{Pe} = \text{Re Pr} = \frac{D_h \langle v \rangle \hat{C}_p \rho}{k} \quad (2)$$

Cheng and Hwang (1968) used a 20-point matching method and obtained Nusselt numbers for constant and equal temperatures on both walls.

Trombetta (1971) analyzed the laminar flow heat transfer problem in eccentric annuli by using the boundary conditions of the first, second and fourth kinds. He used a discrete least squares method to evaluate the Nusselt numbers.

Although the energy equation is valid for both laminar and turbulent flows, the complicated nature of turbulent flow makes it impossible to develop an analytical solution. As a result, the heat transfer mechanism in turbulent flow is interpreted in terms of empirical or semiempirical correlations for most flow geometries.

Up to 1936 a large number of turbulent heat transfer data had been obtained for circular pipes. Most of these were correlated by three groups of workers: namely, Dittus and Boelter (1930), Colburn (1933), and Sieder and Tate (1936).

Monrad and Pelton (1942) and Wiegand (1945) independently studied the turbulent heat transfer in concentric annuli. The proposed correlations were similar to those for circular pipes. However, an additional term, radius ratio, is included to take the effect of the concentric system geometry into account.

All the correlations mentioned above are of the form

$$Nu = C Re^{\alpha} Pr^{\beta} r^{*\gamma} \quad (3)$$

where

$$Nu = \frac{hD_h}{k} \quad (4)$$

$$Re = \frac{D_h \langle v \rangle \rho}{\mu} \quad (5)$$

$$Pr = \frac{\mu \hat{C}_P}{k} \quad (6)$$

$$r^* = \frac{r_i}{r_o} \quad (7)$$

The values of the coefficient  $C$ , and the constants  $\alpha$ ,  $\beta$ , and  $\gamma$  are given in Table 1.

Table 1. Turbulent flow heat transfer coefficient correlations.

Geometry	C	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	Reference
Pipe	0.023	0.8	1/3	0	Sieder & Tate (1936)
	0.023	0.8	0.4 (heating)	0	Dittus & Boelter (1930)
	0.023	0.8	0.3 (cooling)		
Concentric annulus	0.020	0.8	1/3	-0.53	Monrad & Pelton (1942)
	0.023	0.8	0.4	-0.45	Wiegand (1945)

Turbulent flow heat transfer characteristics of eccentric annular ducts, as in the case of laminar flow, have received sparse attention in the literature (Judd et al., 1963; Lee and Barrow, 1964; Yu and Dwyer, 1966) and no correlation is available.

#### THEORETICAL DEVELOPMENT

When the ratio of the radius of the inner pipe to that of outer pipe is close to unity, an eccentric annulus can be modelled as a slit of variable height ( Tao and Donovan, 1955; Iyoho and Azar, 1981, Tosun, 1984; Uner et al., 1988) as shown in Figure 1. The slit height,  $\lambda$ , is given by Iyoho and Azar (1981) as

$$\lambda = r_o \left[ \sqrt{1 - l^2 \sin^2 \theta} + l \cos \theta - r^* \right] \quad (8)$$

where the eccentricity ratio,  $\epsilon$ , and the function  $l$  are defined by

$$\epsilon = \frac{\text{distance between tube centers}}{r_o - r_i} \quad (9)$$

$$l = \epsilon (1 - r^*) \quad (10)$$

For the fundamental boundary condition of the first kind, the fully developed temperature distribution and the bulk temperature are given by

$$T = (T_w - T_e) \frac{y}{\lambda} + \frac{T_w + T_e}{2} \quad (11)$$

$$T_b = \frac{T_w + T_e}{2} \quad (12)$$

The Nusselt number is defined as

$$Nu = \frac{(dT/dy)_{y=\lambda/2}}{(T_w - T_b)/D_h} \quad (13)$$

where  $D_h$ , hydraulic equivalent diameter, is given by

$$D_h = 2r_o(1-r^*) \quad (14)$$

Substitution of Eqs. 11, 12, and 14 into Eq. 13 gives

$$Nu = \frac{4(1-r^*)}{\sqrt{1-t^2\sin^2\theta} + t\cos\theta - r^*} \quad (15)$$

Thus, the average Nusselt number can be evaluated from

$$\bar{Nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Nu \, d\theta \quad (16)$$

In Figure 2 the calculated average Nusselt numbers are plotted as a function of  $r^*$  with  $\epsilon$  as a parameter. When  $\epsilon$  is low, the Nusselt number is almost independent of  $r^*$ . In the limiting case, i.e.,  $\epsilon \rightarrow 0$ , Eq. 15 indicates that  $Nu = 4$  which is the fully developed Nusselt number for parallel plates. The results agree well with those of Trombetta's when  $\epsilon < 0.7$  and  $r^* > 0.5$ .

## EXPERIMENTAL STUDIES

### Experimental Apparatus

The experimental apparatus consists of a test section, a hot water line and a cold water line as shown in Figure 3.

The test section is a 3 m vertical double-pipe heat exchanger with pipes made of copper. The outer pipe has an inside diameter of 45 mm and an outside diameter of 50 mm. Two inner pipes with outer diameters of 19 mm and 25 mm are used to provide different radius ratios. Vertical installation is preferred to avoid bending, which disturbs true eccentricity adjustment. The eccentricity ratio is adjusted by a flange system specifically designed for this purpose.

Demineralized water is heated in a tank using a steam jacket and circulated through the annulus by a pump. Bulk temperatures at the inlet and the outlet of the test section are measured by resistance temperature detectors. Hot water flow rate is measured by an orifice meter. The outer surface temperature of the inner pipe is measured by iron constantan sheathed thermocouples.

Cold water is pumped through the inside tube. The construction of this line is similar to the hot water line.

### The Wilson-Plot Technique (Briggs and Young, 1969)

This technique aims to resolve the individual coefficients from the overall coefficient, which is easier to determine as compared to the measurement of the film resistances.

The overall heat transfer coefficient is expressed as

$$\frac{1}{U_o} = \frac{1}{h_o} + R_w + \frac{D_o/D_i}{h_i} \quad (17)$$

In Eq. 17 the wall resistance,  $R_w$ , and the inside and outside tube heat transfer coefficients are defined in the form

$$R_w = \frac{\Delta r}{k_w A_{lm}} \quad (18)$$

$$\frac{h_o D_o}{k_o} = C_o Re_o^{0.8} Pr_o^{1/3} r^{*\gamma} \epsilon^\sigma \phi_o^{0.14} \quad (19)$$

$$\frac{h_i D_i}{k_i} = C_i Re_i^{0.8} Pr_i^{1/3} \phi_i^{0.14} \quad (20)$$

Substitution of Eqs. 19 and 20 into Eq. 17 and rearrangement gives

$$Y = \frac{1}{C_i} X + \frac{1}{C_o r^{*\gamma} \epsilon^\sigma} \quad (21)$$

where

$$X = \left[ \frac{D_o}{D_h} \right] \left[ \frac{k_o}{k_i} \right] \left[ \frac{Re_o}{Re_i} \right]^{0.8} \left[ \frac{Pr_o}{Pr_i} \right]^{1/3} \left[ \frac{\phi_o}{\phi_i} \right]^{0.14} \quad (22)$$

and

$$Y = \left[ \frac{1}{U_o} - R_w \right] \left[ \frac{k_o}{D_h} \right] Re_o^{0.8} Pr_o^{1/3} \phi_o^{0.14} \quad (23)$$

Therefore, X versus Y plot can be prepared by changing the tube side and the annulus side flow rates. The values of  $C_o$ ,  $\gamma$ , and  $\sigma$  are evaluated from the intercept of the resulting straight line.

### Experimental Results

The first set of experiments is carried out with the inner and outer pipes positioned as a concentric annulus with a radius ratio of 0.42. The results are compared with the Monrad and Pelton (1942) and Wiegand (1945) correlations in Figures 4 and 5, respectively. Since the correlation proposed by Monrad and Pelton agrees well with the experimental data, the power of radius ratio,  $\gamma$ , is taken as -0.53.

Then, by keeping the radius ratio constant at 0.42, the inner pipe is displaced from the concentric position and the experimental data are obtained at the eccentricity ratios of 0.38, 0.54, and 0.77. The values of  $C_o$  and  $\sigma$  are determined from the corresponding Wilson plots given in Figures 6-8. The final form of the heat transfer correlation becomes

$$Nu_o = \frac{h_o D_h}{k_o} = 0.0166 Re_o^{0.8} Pr_o^{1/3} r^{*-0.53} \epsilon^{-0.084} (\mu/\mu_w)_o^{0.14} \quad (24)$$

To check the validity of the proposed correlation for the other values of  $r^*$  and  $\epsilon$ , another set of experiments are conducted at  $r^* = 0.56$ . The results for a concentric case, however, reveal some interesting phenomena. First of all, the experimental data do not follow the Monrad and Pelton

correlation as shown in Figure 9. Besides, the heat transfer coefficient,  $h_o$ , is greater than the one for  $r^* = 0.42$ . Although the increase in  $h_o$  with an increase in  $r^*$  may seem contradictory to Monrad and Pelton correlation, the similar behavior is also observed by Wiegand and Baker (1942) for  $0.518 < r^* < 0.602$ .

#### CONCLUSIONS

When the eccentricity ratio is large, it is possible to model an eccentric annulus as a slit of variable height. This geometry can be successfully used to solve heat transfer problems in eccentric annulus.

The proposed correlation has a limited applicability and should be used with caution. An extensive experimental study, which covers a wide range of  $r^*$  and  $\epsilon$  values, is in progress.

#### ACKNOWLEDGMENT

This work was supported by the Turkish Scientific and Technical Research Council (TUBITAK) Grants MAG-582 and MAG-721.



## NOTATION

- $A_{lm}$  = log-mean area
- $C_i$  = inside heat transfer coefficient constant
- $C_o$  = outside heat transfer coefficient constant
- $\hat{C}_p$  = heat capacity at constant pressure per unit mass, J/(kg.K)
- $D_h$  = hydraulic equivalent diameter, m
- $h$  = heat transfer coefficient, W/(m<sup>2</sup>.K)
- $h_i$  = inside tube heat transfer coefficient, W/(m<sup>2</sup>.K)
- $h_o$  = outside tube heat transfer coefficient, W/(m<sup>2</sup>.K)
- $k$  = thermal conductivity, W/(m.K)
- $l$  = function defined by Eq. 10, dimensionless
- $\overline{Nu}$  = average Nusselt number
- $Nu_i$  = inside tube Nusselt number
- $Nu_o$  = outside tube Nusselt number
- $Pe$  = Peclet number
- $Pr$  = Prandtl number
- $R_w$  = wall resistance defined by Eq. 18, W/K
- $Re$  = Reynolds number
- $r_i$  = outside radius of the inner tube, m
- $r_o$  = inside radius of the outer tube, m
- $r^*$  = radius ratio defined by Eq. 7, dimensionless
- $T$  = temperature, K
- $T_b$  = bulk temperature, K
- $T_e$  = inlet temperature, K
- $T_w$  = wall temperature, K
- $U$  = overall heat transfer coefficient

$\langle v \rangle$  = average velocity, m/s

X,Y = coordinates of the Wilson-plot

x,y,z= rectangular coordinates

*Greek letters*

$\epsilon$  = eccentricity ratio defined by Eq. 9, dimensionless

$\mu$  = viscosity, Pa.s

$\mu_w$  = viscosity at wall temperature, Pa.s

$\lambda$  = slit height defined by Eq. 8, m

$\rho$  = density, kg/m<sup>3</sup>

$\phi$  = viscosity ratio,  $\mu/\mu_w$ , dimensionless

*Subscripts*

i = inner tube

o = outer tube

w = wall

## REFERENCES

- Briggs, D. E., and E. H. Young, "Modified Wilson Plot Techniques for Obtaining Heat Transfer Correlation for Shell and Tube Heat Exchangers," *Chem. Eng. Prog. Symp. Ser.*, 65, 35 (1969).
- Cheng, K. C., and G. J. Hwang, "Laminar Forced Convection in Eccentric Annuli," *AIChEJ*, 14, 510 (1968).
- Colburn, A. P., "A Method of Correlating Forced Convection Heat Transfer Data and a Comparison With Fluid Friction," *Trans. AIChE*, 29, 174 (1933).
- Dittus, F. W., and L. M. K. Boelter, Univ. Calif. (Berkeley) *Publs. Eng.*, 2, 443 (1930).
- Iyoho, A. W., and J. J. Azar, "An Accurate Slot-Flow Model for Non-Newtonian Fluid Flow Through Eccentric Annuli," *Soc. Pet. Eng. J.*, 21, 565 (1981).
- Judd, R. L., J. H. T. Wade and N. W. Wilson, *Forced Convection Heat Transfer in Eccentric Annular Passages*, Heat Trans. and Fluid Mech. Inst., Stanford Univ., CA, 1963.
- Lee, Y., and H. Barrow, "Turbulent Flow and Heat Transfer in Concentric and Eccentric Annuli," *Proc. Thermodyn. and Fluid Mech. Convention, Inst. Mech. Engrs*, London, Paper No. 12 (1964).
- Monrad, C., and J. F. Pelton, "Heat Transfer by Convection in Annular Spaces," *Trans. AIChE*, 38, 593 (1942).
- Shah, R. K., and A. L. London, *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*, Academic Press, New York, 1978.
- Sieder, E. N., and G. E. Tate, *Ind. Eng. Chem.*, 28, 1429 (1936).
- Snyder, W. T., "An Analysis of Slug Flow Heat Transfer in an Eccentric Annulus," *AIChEJ*, 9, 503 (1963).

- Tao, L. N., and W. F. Donovan, "Through-Flow in Concentric and Eccentric Annuli of Fine Clearance With and Without Relative Motion of the Boundaries," *Trans. ASME*, 77, 1291 (1955).
- Tosun, I., "Axial Laminar Flow in an Eccentric Annulus: An Approximate Solution," *AIChEJ*, 30, 877 (1984).
- Trombetta, M. L., "Laminar Forced Convection in Eccentric Annuli," *Int. J. Heat Mass Trans.*, 14, 1161 (1971).
- Uner, D., C. Ozgen and I. Tosun, "An Approximate Solution for Non-Newtonian Flow in Eccentric Annuli," *Ind. Eng. Chem. Res.*, 27, 698 (1988).
- Yu, W. S., and O. E. Dwyer, "Heat Transfer to Liquid Metals Flowing Turbulently in Eccentric Annuli - I," *Nucl. Sci. Eng.*, 24, 105 (1966).
- Wiegand, J. H., "Annular Heat Transfer Coefficients for Turbulent Flow," *Trans. AIChE*, 41, 147 (1945).
- Wiegand, J. H., and E. M. Baker, "Transfer Processes in Annuli," *Trans. AIChE*, 38, 593 (1942).

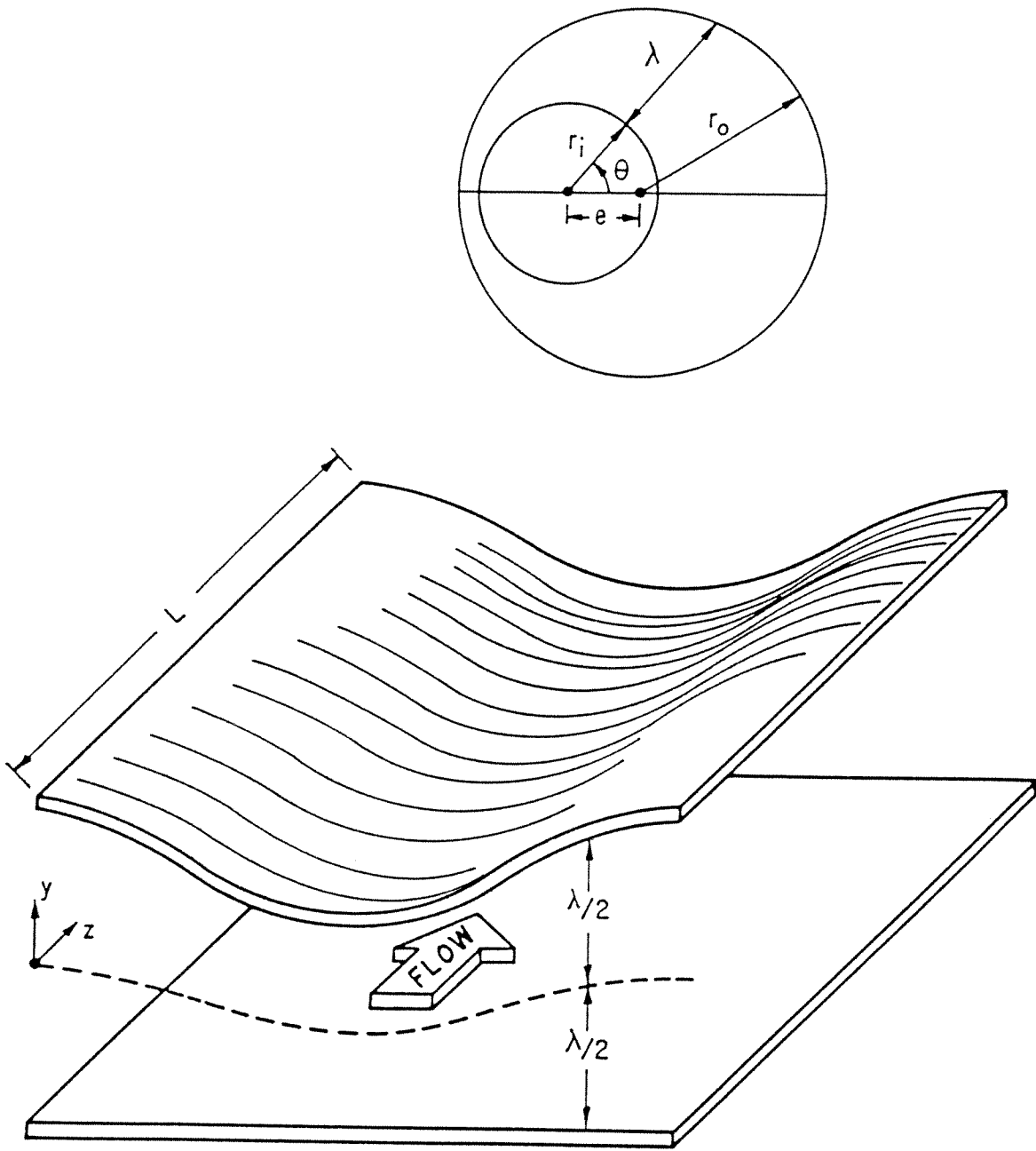


Figure 1. Slit equivalent of an eccentric annulus.

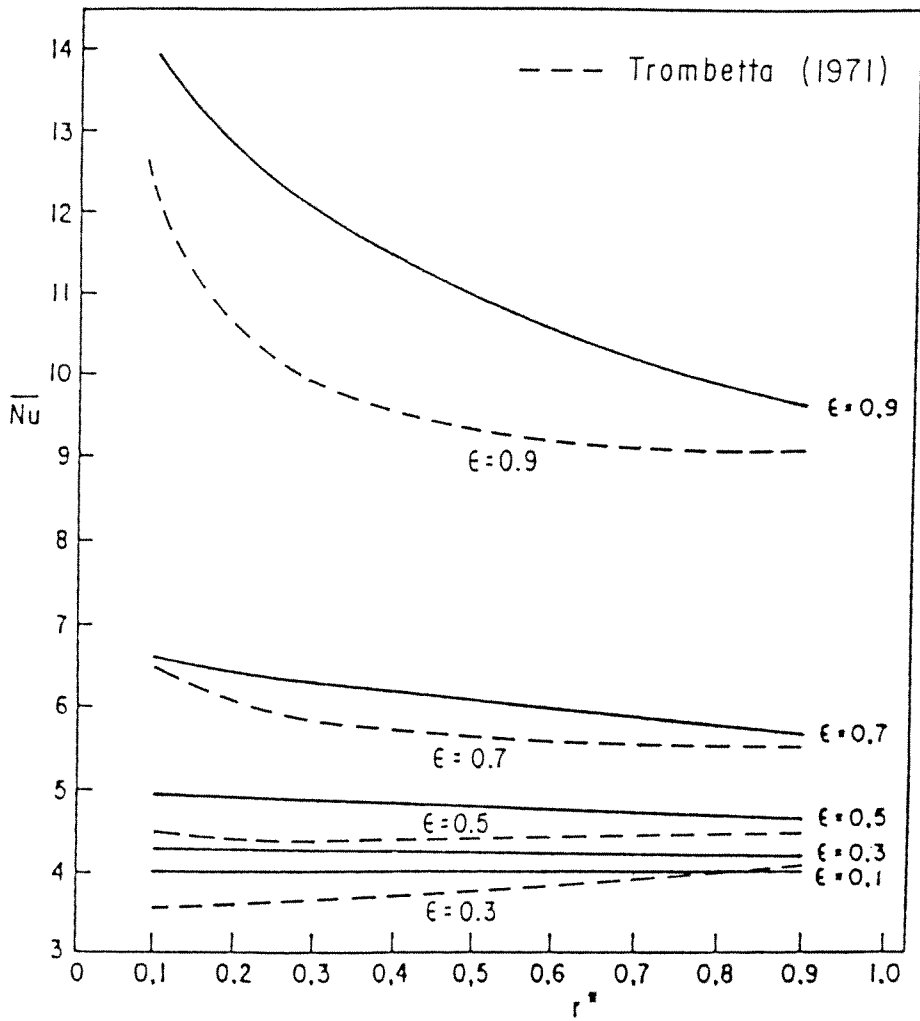


Figure 2. The average Nusselt number vs.  $r^*$  with  $\epsilon$  as a parameter.

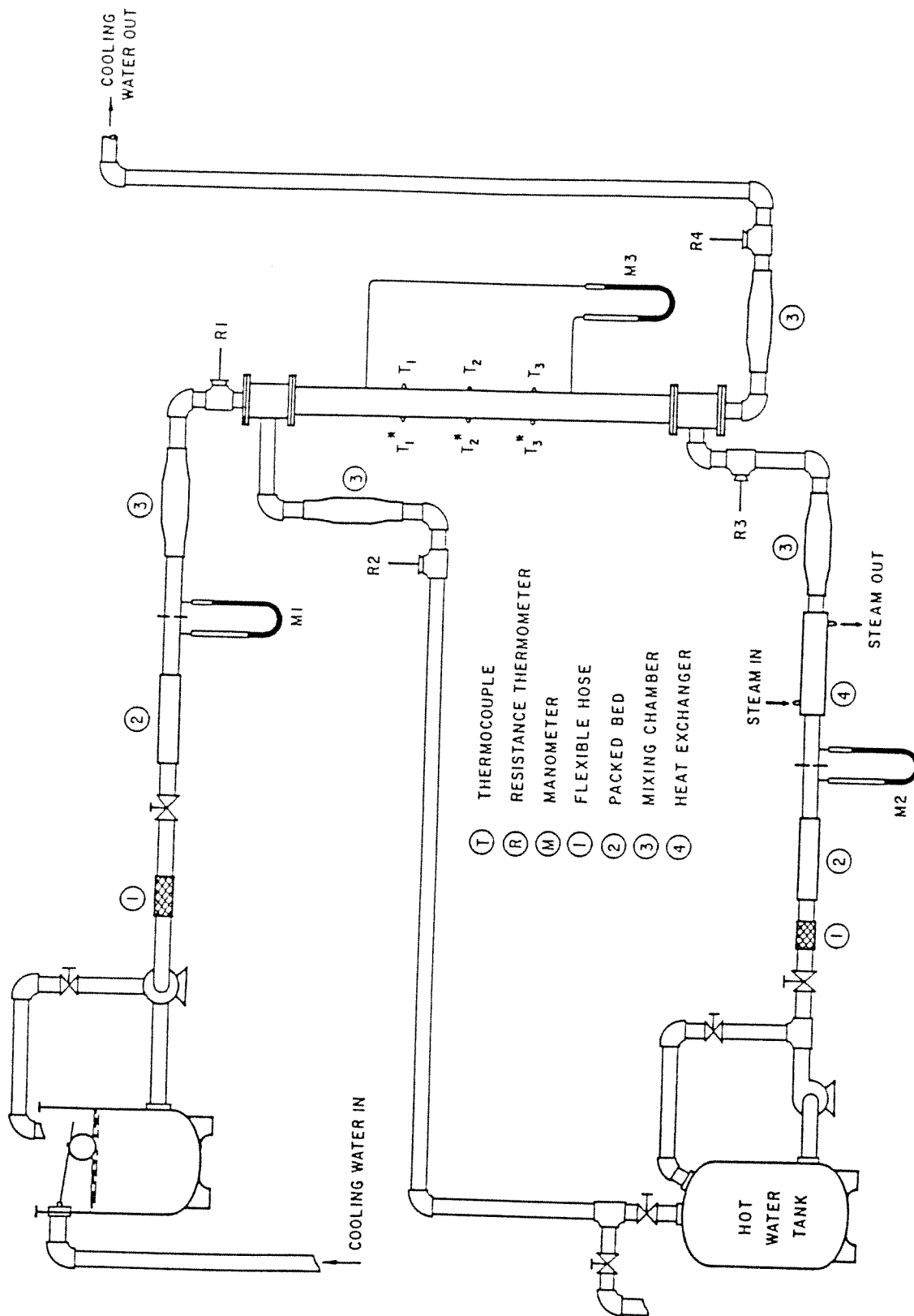


Figure 3. Schematic diagram of the experimental setup.

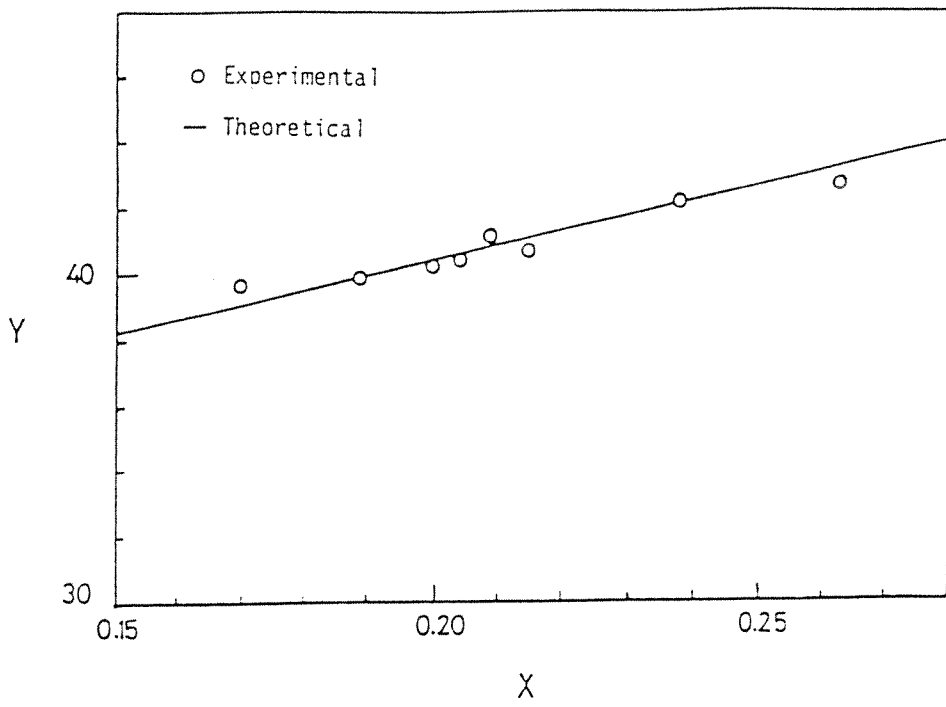


Figure 4. The Wilson-plot of concentric annulus ( $r^* = 0.42$ ) using Monrad and Pelton Correlation.

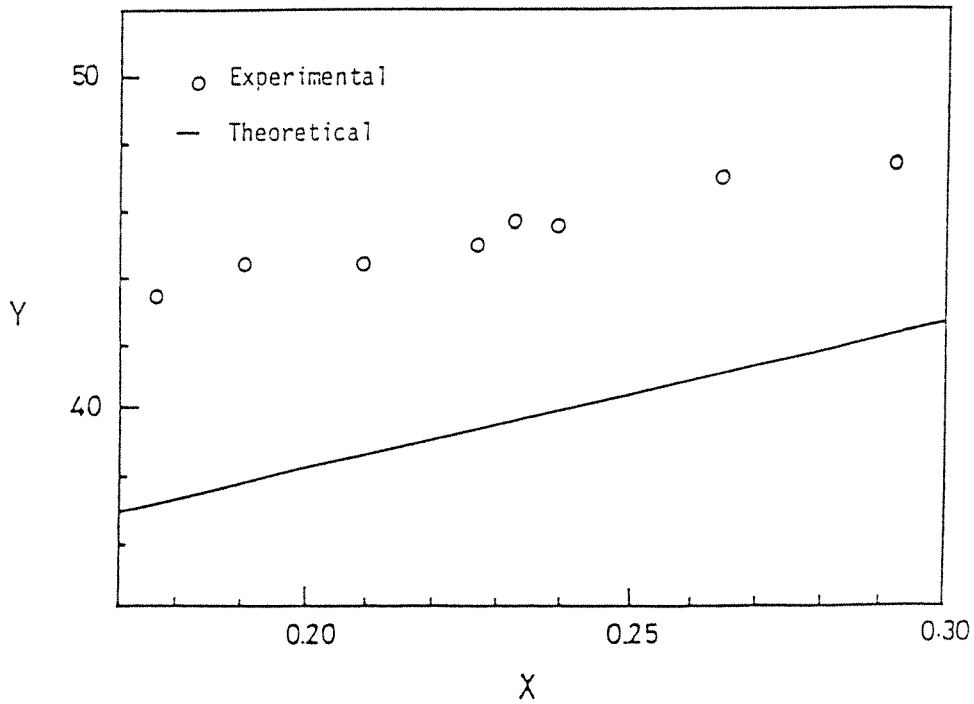


Figure 5. The Wilson-plot of concentric annulus ( $r^* = 0.42$ ) using Wiegand (1945) correlation.



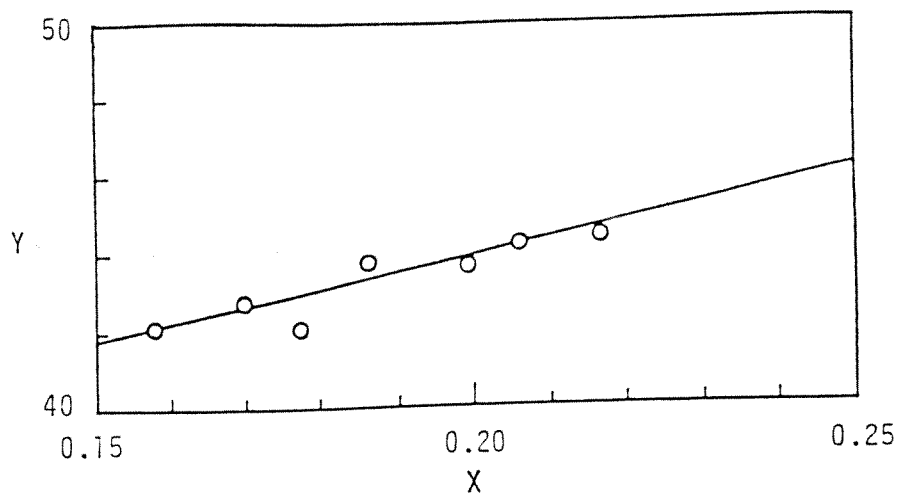


Figure 6. The Wilson-plot for  $r^* = 0.42$  and  $\epsilon = 0.38$ .

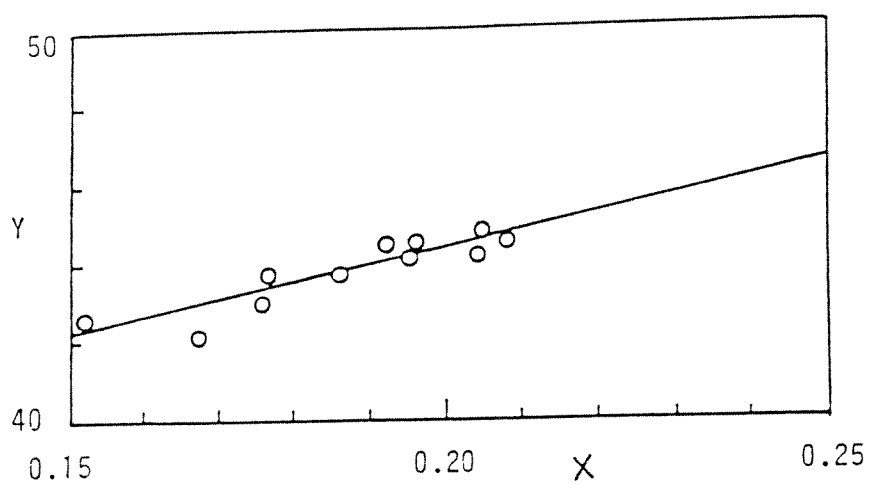


Figure 7. The Wilson-plot for  $r^* = 0.42$  and  $\epsilon = 0.54$ .

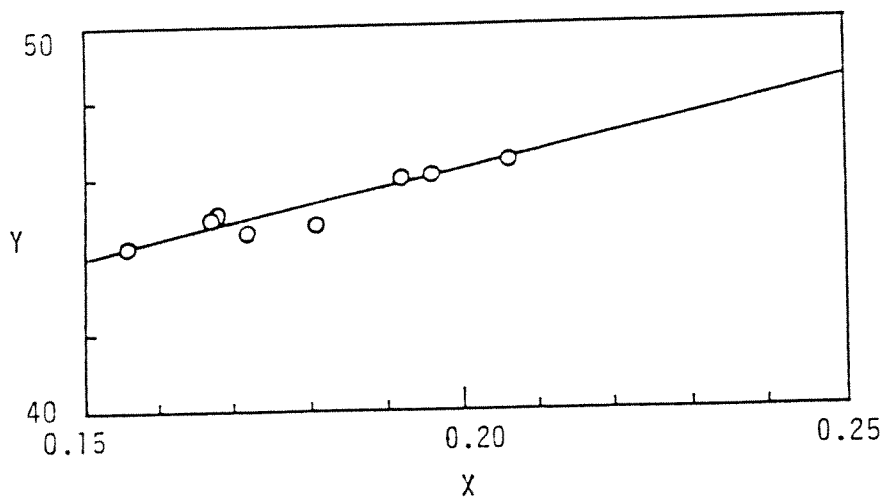


Figure 8. The Wilson-plot for  $r^* = 0.42$  and  $\epsilon = 0.77$ .

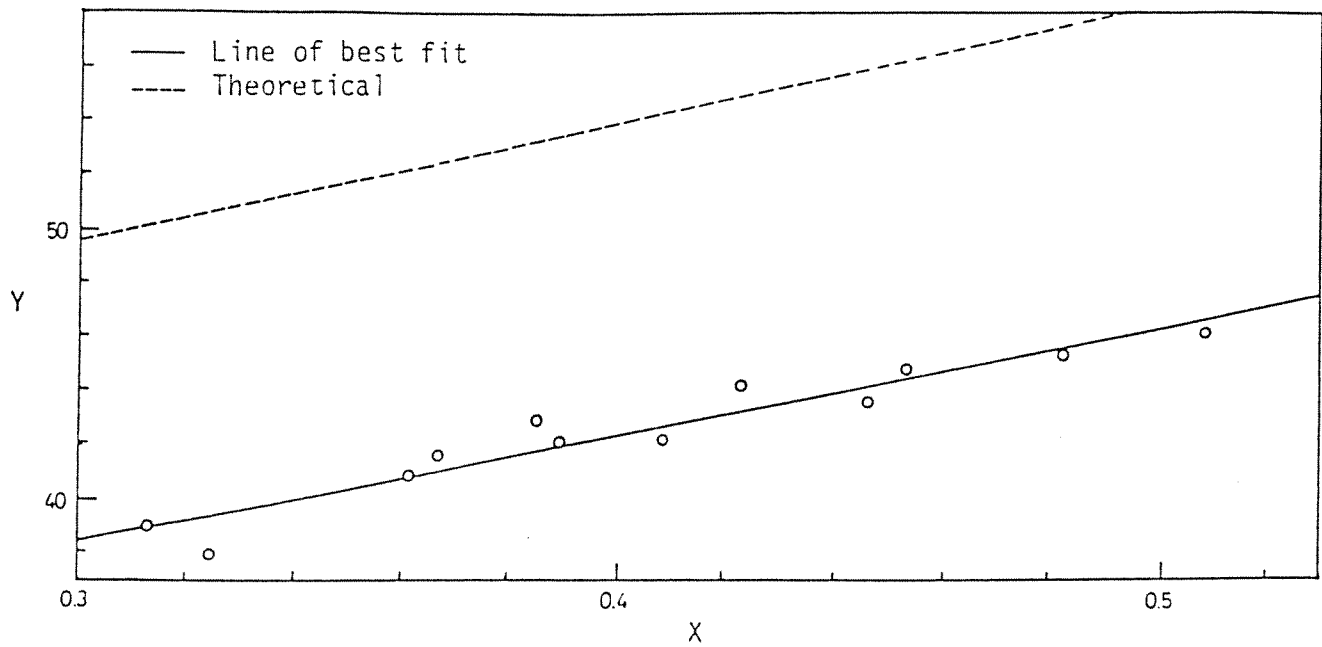


Figure 9. The Wilson-plot of concentric annulus ( $r^* = 0.56$ ) using Monrad and Pelton (1942) correlation.