

**Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratlarının Enflasyonist
Ekonomilerde Fiyatlandırılması:
Türkiye Örneği**

Proje No: 107K300

Yrd. Doç. Dr. Işıl EROL
Yrd. Doç. Dr. Ömür UĞUR
Yrd. Doç. Dr. Şahap Kasırga YILDIRAK
Özgenay ÇETİNKAYA

ARALIK 2009
ANKARA

Önsöz:

Mortgage finansman sistemi gelişmekte olan ekonomilerde finans sektörünün gelişmesini sağlayan temel faktörlerden biridir. Buna rağmen, gelişmekte olan ülkelerdeki özellikle enflasyon sorununu aşamayan ekonomilerdeki mortgage kontratlarının performansını inceleyen akademik çalışma sayısı yetersizdir. Bu projenin temel amacı, opsiyon fiyatlama modelini kullanarak Türkiye'deki bankalar tarafından verilen sabit faiz oranlı mortgage kredilerinin geri ödememe (temerrüt) ve erken kapama risklerinin hesaplanması ve kredilerin piyasa değerinin belirlenmesidir.

Gelişmiş ekonomilerde mortgage kredilerinin geri ödenmeme riski bankalar ve sigorta şirketleri arasında paylaşılmaktadır. Birçok ülkede konut piyasa değerinin %80'i üzerindeki konut kredilerinde zorunlu olarak kullanılan mortgage temerrüt sigortası ürünü ülkemiz finans piyasasında mevcut değildir. Bu projenin diğer amacı, mortgage temerrüt sigortası kontratlarının Türkiye'deki potansiyel finansal türev araçları olarak ele alınıp fiyatlandırılmasıdır.

TÜBİTAK SOBAG tarafından desteklenen proje, yirmi dört ay süreli bir çalışmadır ve üç araştırmacı ile yürütülmüştür.

İçindekiler

Tablo ve Şekil Listesi	5
Özet	9
Abstract	10
1. I. GELİŞME RAPORU ÖZETİ (15 Ekim 2007 – 15 Nisan 2008)	11
1.1. GİRİŞ: Türkiye’de Mortgage Piyasası ve Son Gelişmeler	11
1.2. Sabit Faizli Mortgage Kontratının Fiyatlandırılması: Borç bakiyesi, Temerrüt Opsiyonu, Krediyi Erken Ödeme Opsiyonu, Mortgage Sigortası ve Kredi Kontratının Piyasa Değerinin Belirlenmesi	12
1.2.1. Mortgage Kontratındaki Opsiyonlar	14
1.2.2. Kontrat vadesi sonunda, borçlunun borç bakiyesinin modellenmesi	15
1.2.3. Borçlunun temerrüt (krediyi geri ödememe) opsiyonu değeri ve mortgage kontratının piyasa değerinin modellenmesi	16
1.2.4. Kredinin erken ödenme opsiyonu piyasa değerinin modellenmesi	18
1.2.5. Mortgage kredisi sigortası piyasa değerinin modellenmesi	19
1.2.5.1. Mortgage Sigortası Fiyatlandırılması: ABD Örneği	19
1.2.5.2. Mortgage Sigortası Fiyatlandırılması: İngiltere Örneği	20
2. II. GELİŞME RAPORU ÖZETİ (15 Nisan 2008 – 15 Ekim 2008)	22
2.1. Giriş	22
2.2. Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı Fiyatlandırma Modelinin Nümerik Çözümü: Sonlu Farklar Metodu (Finite-Difference Methodology)	23
2.3. Cox-Ingersoll-Ross (CIR) Stokastik Prosesinin Parametre Değerlerinin Türkiye Verileri Kullanılarak Tahmin Edilmesi	30
2.4. Opsiyon Fiyatlama Modeli Nümerik Sonuçlarının Temel Ekonomik Senaryo-Temel Kontrat Yapısı ve Farklı Ekonomik Senaryo-Farklı Kontrat Yapıları İçin Yorumlanması	33
2.4.1. Temel Ekonomik Senaryo- Temel Kontrat Yapısı İçin Fiyatlama Modelinin Nümerik Sonuçları	34
2.4.2. Temel Ekonomik Senaryo - Farklı Kontrat Yapıları İçin Fiyatlama Modelinin Nümerik Sonuçları	42
2.4.3. Farklı Ekonomik Senaryolar İçin Fiyatlama Modelinin Nümerik Sonuçları	53

3. III. GELİŞME RAPORU ÖZETİ (15 Ekim 2008 – 15 Nisan 2009)	56
3.1. Giriş	56
4. PROJE SONUÇ RAPORU (15 Nisan 2009 – 15 EKİM 2009)	58
4.1. Giriş	58
Projenin ilk 12 Ayındaki Sonuç ve Çıktıları	58
Projenin ikinci 12 Ayındaki Sonuç ve Çıktıları	58
4.2. Kontrat Değerini Belirleyen Kısmi İntegro-diferansiyel Denklemin Açık-Açık Yöntemi (Explicit-Explicit Method) ile Nümerik Çözümü	60
4.2.1. İntegral Teriminin Ayrıklaştırılması	61
4.3. Opsiyon Fiyatlama Modeli Sonuçlarının Kısmi İntegro Diferansiyel Denklemin Nümerik Çözümü ile Elde Edilmesi	63
4.3.1. Temel Ekonomik Senaryo- Temel Kontrat Yapısı İçin Opsiyon Fiyatlama Modelinin Nümerik Sonuçları	63
4.3.2. Temel Ekonomik Senaryo–Farklı Kontrat Yapıları için Opsiyon Modelleme Sonuçları Analizi	70
4.3.3. Farklı Ekonomik Senaryo–Farklı Kontrat Yapıları için Opsiyon Modelleme Sonuçları Analizi	72
4.4. İki farklı modelden elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması ve yorumlanması	77
5. Referanslar	86
EK- 1 Projenin ilk Yıl Sonuçlarından Üretilen ve “Metu Studies in Development” Dergisinde Yayımlanan Makale	91
EK - 2 TÜBİTAK – Özet Bilgi Formu	127

Tablo ve Şekil Listesi

Tablolar:

Tablo 1: Temel Ekonomik Senaryo Parametre Değerleri ve Temel Mortgage Kontrat Özellikleri	33
Tablo 2-A: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Erken Ödeme Cezası =0%) Kredi Miktarının Konut Fiyatına Oranı (LTV Ratio) = %75	46
Tablo 2-B: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Erken Ödeme Cezası = %2) Kredi Miktarının Konut Fiyatına Oranı (LTV Ratio) = %75	47
Tablo 3-A: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Erken Ödeme Cezası = %0) Kredi Miktarının Konut Fiyatına Oranı (LTV Ratio) = %95	48
Tablo 3-B: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Erken Ödeme Cezası = %2) Kredi Miktarının Konut Fiyatına Oranı (LTV Ratio) = %95	49
Tablo 4-A: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Erken Ödeme Cezası = %0) Kredi Miktarının Konut Fiyatına Oranı (LTV Ratio) = % 100	50
Tablo 4-B: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Erken Ödeme Cezası = %2) Kredi Miktarının Konut Fiyatına Oranı (LTV Ratio) = % 100	51
Tablo 5: Erken Ödeme Cezası – Hizmet-Dosya Ücreti – Optimal Mortgage Faiz Oranları Arasındaki Takas (Trade-off)	52
Tablo 6-A: Faiz Oranı Volatilitesindeki Değişimin Mortgage Kontrat Değeri Üzerine Etkileri (Krediyi Erken Ödeme Cezası = %2)	54
Tablo 6-B: Faiz Oranı Volatilitesindeki Değişimin Mortgage Kontrat Değeri Üzerine Etkileri (Krediyi Erken Ödeme Cezası = %0)	54
Tablo 7-A: Konut Fiyatları Volatilitesindeki Değişimin Mortgage Kontrat Değeri Üzerine Etkileri (Krediyi Erken Ödeme Cezası = %2)	55

Tablo 7-B: Konut Fiyatları Volatilitesindeki Değişimin Mortgage Kontrat Değeri Üzerine Etkileri (Krediyi Erken Ödeme Cezası = %0)	55
Tablo 8: Temel Ekonomik Senaryo Parametre Değerleri ve Temel Mortgage Kontrat Özellikleri	63
Tablo 9: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Erken Ödeme Cezası = %2; Kredi Miktarının Konut Fiyatına Oranı (LTV Ratio) = %95)	74
Tablo 10: Erken Ödeme Cezası – Hizmet Dosya Ücreti – Optimal Mortgage Faiz Oranları Arasındaki Takas (Trade-off)	75
Tablo 11: Spot Faiz Oranları, Konut Fiyatları Volatilitesi ve Faiz Oranları Volatilitesindeki Değişimlerin Mortgage Kontrat Değeri ve Optimal Faiz Oranları Üzerine Etkileri (Erken Ödeme Cezası = %2; Kredi Miktarının Konut Fiyatına Oranı (LTV Ratio) = %95)	76
Tablo 12: İki Model Sonuçlarına göre Temerrüt Opsiyonu - Erken Ödeme Opsiyonu ve Temerrüt Sigortası Piyasa Değerleri	80
Tablo 13: Denge Faiz Oranlarındaki Değişim	84
Tablo 14: İki Model Sonuçlarına göre Erken Ödeme Cezası – Hizmet-Dosya Ücreti – Optimal Mortgage Faiz Oranları Arasındaki Takas (Trade-off)	85
<u>Şekiller:</u>	
Şekil 1-A: Kredi Geri Ödemelerinin Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Dahil)	36
Şekil 1-B: Kredi Geri Ödemelerinin Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Yok)	36
Şekil 2-A: Temerrüt Opsiyonu Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Dahil)	37

Şekil 2-B: Temerrüt Opsiyonu Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Yok)	38
Şekil 3-A: Mortgage Sigortası Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Dahil)	38
Şekil 3-B: Mortgage Sigortası Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Yok)	39
Şekil 4-A: Krediyi Erken Ödeme Opsiyonu Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Dahil)	40
Şekil 4-B: Krediyi Erken Ödeme Opsiyonu Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Yok)	41
Şekil 5-A: Mortgage Kontratının Kredi Veren Kuruluş için Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Dahil)	41
Şekil 5-B: Mortgage Kontratının Kredi Veren Kuruluş için Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Yok)	42
Şekil 6: Erken Ödeme Cezası – Hizmet-Dosya Ücreti – Optimal Mortgage Faiz Oranları Arasındaki Takas (Trade-off)	53
Şekil 7: Kredi Geri Ödemelerinin Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Dahil)	66
Şekil 8: Temerrüt Opsiyonu Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet- dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Dahil)	66
Şekil 9: Mortgage Sigortası Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet- dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Dahil)	67

Şekil 10: Krediyi Erken Ödeme Opsiyonu Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Dahil)	68
Şekil 11: Mortgage Kontratının Kredi Veren Kuruluş için Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Dahil)	68
Şekil 12: İki Model Sonuçlarına göre Mortgage Kontratının Piyasa Değeri: (Dosya Ücreti ve Mortgage Temerrüt Sigortası yok)	81
Şekil 13: İki Model Sonuçlarına göre Mortgage Kontratının Piyasa Değeri: (%2 Dosya Ücreti – Mortgage Temerrüt Sigortası yok)	81
Şekil 14: İki Model Sonuçlarına göre Mortgage Kontratının Piyasa Değeri: (Dosya Ücreti Yok – Mortgage Temerrüt Sigortası var)	82
Şekil 15: İki Model Sonuçlarına göre Mortgage Kontratının Piyasa Değeri: (%2 Dosya Ücreti – Mortgage Temerrüt Sigortası var)	82

Özet

Bu projenin temel amacı, opsiyon fiyatlama model ve tekniklerini kullanarak Türkiye'deki mevduat bankaları tarafından verilen sabit faiz oranlı mortgage kredilerinin geri ödenmeme ve vadeden önce ödenme risklerinin hesaplanması ve kredilerin piyasa değerinin belirlenmesidir. Türkiye'deki konut kredisi sektörü 1990'lı yılların sonlarından itibaren hızla büyümektedir. Özellikle son yıllarda bankalar portföyündeki mortgage kredilerinin payını önemli ölçüde artırmışlardır. Buna rağmen, bilgimiz dahilinde mortgage kredilerini ve krediler üzerine yazılmış olan finansal türev araçlarını (kredinin geri ödenmeme ve vadeden önce ödenme opsiyonları) fiyatlandırma bilimsel çalışmalar mevcut değildir. Gelişmiş ekonomilerde, mortgage kredilerinin geri dönmeme riskinin yönetimini sigorta şirketleri üstlenmiştir. Ülkemiz finans piyasasında mortgage sigorta kontratları mevcut değildir. Bu projenin diğer amacı, mortgage sigorta kontratlarını Türkiye'deki potansiyel finansal türev araçları olarak ele alınıp fiyatlandırmaktır.

Bu çalışmada iki farklı fiyatlama modeli kullanılmıştır. İlk olarak, ülkemizdeki enflasyonist ortamda sabit faiz oranlı mortgage kredileri klasik opsiyon fiyatlama modeli kullanılarak ilk kez fiyatlandırılmıştır. İkinci modelde, enflasyon riski nedeniyle faiz oranları mevcut literatürde kullanılmakta olan klasik difüzyon süreçleri yerine, sıçramalı difüzyon hareketi ile modellenmiştir. Elde edilen kısmi integro-diferansiyel denkleme ilişkin sayısal analizler, sabit faiz oranlı mortgage kontratlarının enflasyonist ekonomilerde fiyatlandırılması için ilk kez kullanılmıştır.

Elde edilen nümerik sonuçlara göre, faiz oranı volatilitesi arttıkça kredi alan kişinin temerrüt riski de krediyi erken kapama riski de artmaktadır. Fakat, faiz oranı volatilitesinin kredinin erken ödenme riski üzerindeki etkisi çok daha fazladır. Diğer bir deyişle, erken ödeme opsiyon değerleri faiz oranı volatilitesi ile birlikte büyük artış göstermektedir. Konut fiyatlarındaki dalgalanma (volatilité) arttıkça kişilerin temerrüte düşme riski artacak ve dolayısıyla temerrüt opsiyonu değerinde artış görülecektir. Temerrüt opsiyonu değerindeki artış ile birlikte mortgage sigortası değeri de artacaktır. Diğer bir deyişle, konut fiyatlarındaki volatilitenin yüksek olduğu ortamlarda temerrüt riskinden korunmak amacıyla bankaların mortgage sigortası almaları beklenmektedir. Bununla birlikte, konut fiyatlarındaki dalgalanmalardan dolayı temerrüt riski artarken, krediyi erken ödeme riskinin azaltıldığını görmekteyiz. Kişiler temerrüt opsiyonunu kullanmayı tercih ettikçe, erken ödeme opsiyonunun piyasa değeri sifıra yaklaşacaktır.

Faiz oranlarının enflasyonist ortamlardaki belirsizlikler göz önüne alınarak, sıçramalı stokastik hareketlerle modellenmesi, banka açısından mortgage kredi kontratının piyasa değerini azaltmaktadır. Banka bu durumda daha yüksek kredi faizi uygulamasına gitmektedir. Her iki modelin nümerik sonuçları beklenen sonuçları vermekle beraber, iki model arasındaki uygulanması gereken denge faiz oranlarındaki farklılaşma beklenilenden az bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Opsiyon fiyatlama modeli, sabit faiz oranlı mortgage kontratı, temerrüt opsiyonu, erken ödeme opsiyonu, mortgage temerrüt sigortası, kısmi diferansiyel denklem, kısmi-integro diferansiyel denklem, nümerik analizi, açık farklı sonlar metodu.

Abstract

The main objective of this project is to price both the default risk and the prepayment risk of the fixed-rate mortgages (FRMs) that are currently originated by the Turkish banks using the well-known option pricing models, and to evaluate the market value of the FRM contracts. Turkey has a rapidly growing sector for housing loans since the late 1990s. Especially during the last few years, the banking sector has expanded the mortgage loan products significantly. However, there is not any academic research, to the best of our knowledge, to analyse these financial instruments with their embedded options to default and prepay the loan. In developed economies, the insurance companies provide default risk management in mortgage markets. Currently, there are not any mortgage insurance contracts traded in the Turkish financial markets. This project also aims to price mortgage insurance product as a potential financial derivative in the Turkish capital markets.

This study uses 2 different option pricing models. The first model is the first attempt to use the classical option pricing model to price fixed-rate mortgages (FRMs) in a developing country with high inflation risk. In the second model, due to the high inflation risk, interest rates are modeled by jump diffusion models instead of the classical diffusion models used widely in the literature. A numerical analysis of the Partial Integro Differential Equation (PIDE) for jump processes is carried out for the first time to price FRMs in inflationary economies.

Our numerical results show that interest rate volatility increases both the default and prepayment risk of the mortgage loan. The effect of interest rate volatility on the prepayment risk is significantly greater than that of the default risk. Specifically, from the perspective of the borrowers, prepayment option value increases considerably with the interest rate volatility. Another important finding of the study is, house price volatility notably increases the default risk of the mortgages. In line with the increase in the default option value, the market value of the default insurance product also increases. Hence, it is beneficial for the mortgage lenders to have default insurance product in order to cover their foreclosure losses especially for the high loan-to-value (LTV) loans. As the house price volatility increases the default option value, it results in low values for the prepayment option. In other words, as the borrower finds it profitable to default on the loan, the market value of the prepayment option will approach to zero.

We also found that, modeling interest rates with jump diffusion processes, with the aim of considering uncertainty under inflationary environments, noticeably decreases the market value of the mortgage loans for the lenders (banks). Under these circumstances, it is highly likely for the banks to use higher mortgage coupon rates. Finally, both option pricing models used in this project perform properly by giving financially expected and meaningful results. However, the numerical differences (option values, mortgage contract values, equilibrium coupon rates) between two models are less pronounced than expected.

Key Words: Option pricing model, fixed-rate mortgage (FRM), default option, prepayment option, mortgage default insurance, partial differential equation (PDE), partial integro-differential equation (PIDE), numerical analysis, explicit finite difference method.

1. I. GELİŞME RAPORU ÖZETİ (15 Ekim 2007 – 15 Nisan 2008)

1.1. Giriş: Türkiye’de Mortgage Piyasası ve Son Gelişmeler

Mortgage sistemi iki yüz yılı aşkın bir süredir dünyanın çeşitli ülkelerinde kısmi farklılıklar olmakla birlikte uygulanmaktadır. Sistem, konut edinmeyi kolaylaştırdığı gibi, yapı kalitesinin yükselmesine, şehir planlamacılığın etkin hale gelmesine, mülkiyetin ve alım-satımların kayıt altına alınmasına da büyük bir katkı sağlamaktadır.

Ülkemizdeki yeni Konut Finansman Sistemi 6 Mart 2007’de devreye girmiştir. Yeni Konut Finansman Sistemi’ni mevcut konut kredileri sisteminden ayıran en önemli özellik; ikincil mortgage piyasaların oluşturulmasıdır. İkincil piyasalar aracılığıyla yatırımcılara satılan İpoteğe Dayalı Menkul Kıymetler (Mortgage Backed Securities) sayesinde banka ve diğer mortgage finansmanı kuruluşlarının kredilerini daha ucuza fonlayarak yeni ve daha düşük faiz oranlı konut kredisi sunabilecek olmalarıdır. Türkiye’de eski sistemde borçlar genellikle 1-2 yıl vadeli iken, konut kredisi kullandırımından oluşan alacakların vadeleri 20 yıla kadar çıktığı için önemli bir vade uyumsuzluğu sorunu oluşmakta ve bu sorun bilançoyu olumsuz etkilemektedir. Kredi kullandıran kuruluşlar, yeni sistemle oluşacak ikincil piyasalarda kredi alacaklarını ipoteğe dayalı menkul kıymet veya tahvil olarak satabilecek, böylece ikincil piyasalar ile vade riski sorunu ortadan kalkacak, kredilerin fonlanması kolaylaşacak ve bilanço vadeleri birbirlerine yaklaşacaktır.

Yeni düzenleme, hem birincil hem de ikincil mortgage piyasalarına yönelik değişiklikleri kapsamaktadır.

Yeni Düzenleme ile Birincil Piyasalara Yönelik Değişiklikler: 1)Yeni kanun ile değişken faizli konut kredisi kullandırımı 1 Haziran 2007 tarihinden itibaren yapılabilmektedir. 2) Değişken faizli krediler için faiz oranlarına bir üst limit belirlenmekte, ayrıca sözleşme aşamasında başlangıç ve azami faiz oranları müşteri ile paylaşılmaktadır. 3) Sabit faizli kredilerde en fazla %2 oranında olmak üzere erken kapama cezası müşteriden talep edilebilmektedir. 4) Konut kredisi alan kişilerin %5 oranında BSMV (Banka ve Sigorta Muameleri Vergisi)’nden muaf olması beklenmektedir.

Yeni Düzenleme ile İkincil Piyasalara Yönelik Değişiklikler:

Yeni kanun ile, bankalar kullandıkları konut kredilerini içeren teminat havuzları yaratabilecek ve yatırımcılara bu havuzlara dayalı olarak, İpotek Teminatlı Menkul Kıymetler (Kıta Avrupası’nda yaygın olarak kullanılan) ve/veya İngiltere ve ABD’de kullanılan İpoteğe Dayalı Menkul Kıymetler (MBS) olmak üzere iki farklı ipotekli sermaye piyasası aracı sunabileceklerdir. Bu teminat havuzlarına, yapı kullanma izni alınmış konutlar; diğer gayrimenkuller üzerine ipotek tesis edilmek suretiyle teminat altına alınmış alacaklar; ikame varlıklar ve riskten korunma amacıyla yapılmış sözleşmeler dahil edilebilecektir.

Proje önerisinde belirtildiği üzere bu çalışma öncelikle, gelişmekte olan ülkelerdeki enflasyonist ortamlarda mortgage kontratlarını klasik opsiyon fiyatlama yaklaşımı ile fiyatlandıran ilk çalışma olacaktır. Literatürde, gelişmiş ülkelerin temel mortgage kontratı olan sabit faiz oranlı konut kredilerinin gelişmekte olan ülkelerde özellikle enflasyonist ortamlarda nasıl performans göstereceği üzerine akademik bir çalışma mevcut değildir. İkinci önemli konu ise, Türkiye’de henüz mortgage kredileri için sigorta poliçelerinin bulunmamasıdır. Mortgage piyasasının temelini oluşturan, ancak ülkemiz finans piyasalarında henüz işlem görmeyen, mortgage sigortası kontratının (mortgage default insurance) potansiyel finansal türev aracı olarak ele alınıp fiyatlandırılması ve bu sigorta

kontratlarının bankalar açısından öneminin analiz edilmesi projenin diğer amacını oluşturmaktadır.

Proje önerisinin “Çalışma Takvimi” bölümünde belirtildiği gibi, ilk aşamada yapılan çalışmaları aşağıdaki gibi özetlemek mümkündür:

- Mortgage portföyü büyük olan 8 farklı bankadan temel mortgage kontrat bilgileri toplanmıştır. Bu bankalar; Oyak Bank, Vakıf Bank, Akbank, İş Bankası, HSBC Bankası, Finansbank, Yapı Kredi Bankası ve Garanti Bankası'dır.

Bu bankalara ait kredi vade uzunluğu, kredi faiz oranı, kredinin konut fiyatına oranı, konut kredisi servis ve sözleşme ücreti, krediyi erken ödeme cezası ve borçludan talep edilen sigortalar ile ilgili veriler toplanmış ve fiyatlandırılacak temel kontrat yapısı oluşturulmuştur.

- Sabit faiz oranlı mortgage kredisinin amortisman planı, geri ödenmeme ve vadeden önce ödeme opsiyon değerleri literatürdeki çalışmalara paralel olarak modellenmiştir. Ayrıca, kredi veren kuruluş ya da banka açısından mortgage kontratının piyasa değerini belirleyen eşitlikler açıklanmıştır.
- Klasik opsiyon fiyatlama modeline göre, faiz oranları Cox, Ingersoll ve Ross (CIR) stokastik prosesi ile konut fiyatları da geometrik Brownian hareketi ile tanımlanmış ve nümerik olarak çözülecek kısmi diferansiyel denklem literatür paralelinde elde edilmiştir.
- Mevcut literatür taranarak, Amerika ve İngiltere'de kullanılan mortgage sigortası kontratları incelenmiştir ve Türkiye için fiyatlandırılacak mortgage sigortası kontratı belirlenmiştir.

1.2. Sabit Faizli Mortgage Kontratının Fiyatlandırılması: Borç bakiyesi, Temerrüt Opsiyonu, Krediyi Erken Ödeme Opsiyonu, Mortgage Sigortası ve Kredi Kontratının Piyasa Değerinin Belirlenmesi

Mortgage kontratlarının fiyatlandırılmasında kullanılan en yaygın yöntem, alınan gayrimenkul kredisinin spesifik opsiyonlara sahip, normal bir borç aracı olarak kabul edilmesidir. Gayrimenkul kredisi alan kişi aynı zamanda iki farklı gizli opsiyon satın almaktadır. Bu opsiyonlar, borçlunun krediyi geri ödememe (temerrüt) opsiyonu ve krediyi vadeden önce peşin ödeme opsiyonudur. Borçlunun krediyi geri ödememe opsiyonu (default) satış opsiyonu, $D(H,r,t)$, olarak tanımlanmaktadır. Kredisini geri ödemeyen borçlu mortgage kontratının teminatı olan konutu satıp bankaya olan borcunu kapatmak durumundadır. Borçlunun temerrüte düşerek mortgage kontratını sonlandırması, Avrupa tipi satış opsiyonu olarak tanımlanmaktadır. Bunun nedeni, rasyonel bir kişinin kredinin geri ödeme tarihinden önce temerrüte düşmeyeceğidir. Borçlunun krediyi erken ödeme opsiyonu (call option), $C(H,r,t)$, ise Amerikan tipi alış opsiyonu olarak tanımlanmaktadır. Bunun nedeni ise, kredi alan kişinin vade süresince istediği herhangi bir zamanda borcunu kapatıp konuta sahip olabilmesidir. Sonuç olarak, mortgage kontratındaki gizli opsiyonları, hisse senetleri alış-satış opsiyonlarını kullanarak modellemek mümkündür.

Genel olarak, finansal varlıkların fiyatlandırılması iki temel faktöre dayanmaktadır. Bunlar,

finansal varlığın nakit akışı yapısı ve finansal varlığın işlem gördüğü ekonomik ortamdır. Belirlilik koşulu altında, yatırım araçlarını fiyatlandırma işlemi bugünkü değer yöntemi ile hesaplanmaktadır. Mortgage kontratlarında, borçlunun sahip olduğu iki farklı opsiyondan birini kullanarak mortgage kontratını sonlandırması fiyatlandırma işlemini zorlaştırmaktadır. Banka, kredi alan kişinin opsiyonları ne zaman, hangi koşullarda kullanacağını hesaba katmak durumundadır. Değişken ekonomik koşullar altında, diğer bir deyişle belirsizlik ortamında mortgage kontratlarının fiyatlandırılması daha karmaşık hale gelmektedir. Mortgage kontratının ve kontrattaki gizli opsiyonların piyasa değerini belirlemede kullanılan en yaygın metod **opsiyon fiyatlama modelidir**. Opsiyon fiyatlama modelinde, ekonomik ortamı tanımlayan faktörler, piyasa faiz oranları, $r(t)$, ve mortgage kontratına konu olan varlığın değeri, yani konutun fiyatıdır, $H(t)$. Faiz oranı ve konut fiyatlarındaki dalgalanmalardan doğan riskler konut kredisi veren kurumun karşı karşıya olduğu iki temel riski oluşturmaktadır. Mortgage kontratı nakit akışı yapısını belirleyen iki önemli faktör ise kontrat faiz oranı ve kredi kontratının şartlarıdır.

Klasik opsiyon fiyatlama modelinde, ipotek altında olan konutun piyasa değeri lognormal difüzyon denklemi ile modellenmektedir. Geometrik Brownian hareketi olarak da adlandırılan bu denklemi aşağıdaki gibi tanımlamak mümkündür:

$$\frac{dH}{H} = (\mu - s)dt + \sigma_H dz_H \quad (1.1)$$

Bu denklemde, μ konut fiyatlarındaki ortalama artış miktarını; σ_H konut piyasa değeri artışındaki volatilitiyi göstermektedir. z_H terimi ise, konut fiyatlarındaki belirsizlik, yani beklenmeyen değişimlerin modellenmesini sağlayan Wiener prosesini ifade etmektedir. Faiz oranlarının zaman içerisindeki hareketini belirleyen stokastik proses ise, CIR modeli olarak adlandırılan Cox-Ingersoll-Ross (1985) modelidir.

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma_r \sqrt{r} dz_r \quad (1.2)$$

Bu denklemde, θ nominal faiz oranlarının uzun dönemdeki ortalama değerini, κ parametresi ise kısa dönemdeki faiz oranlarının uzun dönem ortalamasına yaklaşma (mean-reverting) hızını ve σ_r faiz oranlarındaki standart sapma değerini göstermektedir.

Opsiyon fiyatlama modelinde, konut piyasa değerindeki beklenmeyen değişimlerin faiz oranlarındaki tahmin edilemeyen değişimlerle bağlantılı olduğu varsayılmaktadır. Korelasyon katsayısı ρ olarak tanımlanırsa, konut fiyatları ve faiz oranlarındaki beklenmeyen değişimler arasındaki korelasyonu aşağıdaki gibi modellemek mümkündür:

$$dz_H(t) dz_r(t) = \rho dt \quad (1.3)$$

1. ve 2. stokastik proseslerden oluşturulacak olan kısmi diferansiyel denklemi (partial differential equation, PDE) aşağıdaki gibi tanımlamak mümkündür. Bu denklem, mortgage kontratı piyasa değerini (V), iki stokastik değişkenin (konut fiyatları (H) ve faiz oranları (r)) ve zamanın (t) bir fonksiyonu olarak tanımlamaktadır:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}H^2\sigma_H^2\frac{\partial^2V}{\partial H^2} + \rho H\sqrt{r}\sigma_H\sigma_r\frac{\partial^2V}{\partial H\partial r} + \frac{1}{2}r\sigma_r^2\frac{\partial^2V}{\partial r^2} + \kappa(\theta-r)\frac{\delta V}{\delta r} \\ + (r-s)H\frac{\delta V}{\delta H} + \frac{\delta V}{\delta t} - rV = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Bu kısmi diferansiyel denklemin, nümerik metotlarla çözülebilmesi için, başlangıç ve sınır (boundary conditions) koşullarının tanımlanması gerekmektedir. Bu koşullar mortgage kontrat yapısından gelecek olan, gerçekleştirilen aylık ödemelerle belirlenecektir. Kısmi diferansiyel denklemin çözümünde kullanılacak olan başlangıç koşulları detaylı olarak aşağıdaki bölümlerde açıklanmıştır.

1.2.1. Mortgage Kontratındaki Opsiyonlar:

Mortgage kredisi alan kişinin sahip olduğu iki farklı opsiyonu bir arada, birleşik opsiyon (joint option) olarak modellemek mümkündür. Opsiyon fiyatlama modeline göre birleşik opsiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$J(H, r, t) = C(H, r, t) + D(H, r, t) \quad (1.5)$$

$J(H, r, t)$ = Birleşik (joint) opsiyon değeri

$C(H, r, t)$ = Krediyi erken ödeme opsiyonu (call option) değeri

$D(H, r, t)$ = Krediyi geri ödememe opsiyonu (default option) değeri

Kredi veren kuruluş ya da banka açısından mortgage kredisinin değeri (V_L):

$$V_L(H, r, t) = A(r, t) - C(H, r, t) - D(H, r, t) \quad (1.6)$$

Bu denklemde; $A(r, t)$ = t zamanındaki borç bakiyesi değeridir. 6. denklemde görüldüğü gibi, banka açısından mortgage kredisinin değeri belirlenirken bankanın borçludan alacakları yani borç bakiyesi değerinden birleşik opsiyonun değeri çıkarılmaktadır. Diğer bir deyişle, banka için mortgage kredisinin değerini belirleyen faktör sadece borçlunun geri kalan ödemeleri yani borç bakiyesi değildir. Borçlunun temerrüte düşmesi ya da krediyi erken ödeme opsiyonlarının değeri banka açısından zarar kalemi olarak kredi fiyatlamasına dahil edilmektedir.

Borçlunun krediyi geri ödememe riskini azaltmak amacıyla Avrupa ve Amerika'da birçok banka kredi alan kişilerden "Mortgage kredisi sigortası" talep etmektedir. Sigorta primleri kredi alan kişi tarafından yıllık ya da aylık aralıklarla bankaya ödenmektedir. Banka da bu prim ödemelerini sigorta şirketine göndermektedir. Mortgage kredi sigortası talep eden bankalar için mortgage kredisinin değeri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned} V_L(H, r, t) &= A(r, t) - C(H, r, t) - D(H, r, t) + I(H, r, t) \\ &= A(r, t) - J(H, r, t) + I(H, r, t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$I(H, r, t)$ = Mortgage sigortası değeridir.

Yukarıda belirtildiği üzere, mortgage kontratlarında borçlunun sahip olduğu iki farklı opsiyondan birini kullanarak mortgage kontratını sonlandırması fiyatlandırma işlemi

zorlaştırmaktadır. Banka, kredi alan kişinin opsiyonları ne zaman ve hangi koşullarda kullanacağını bilmemektedir. Bu nedenle mortgage kontratları fiyatlandırılırken Monte Carlo simulasyon metodu gibi zaman içerisinde ileriye dönük fiyatlama metodları (forward pricing methods) yerine, zamanda geriye dönük fiyatlama metodları (backward pricing methods) kullanılmaktadır. Diğer bir deyişle, mortgage kontratının fiyatlandırılması kontrat vadesi sonundan başlamaktadır. Örneğin, 10 yıllık bir mortgage kredisi fiyatlandırılırken öncelikle, 10. yılın son ayındaki mevcut borç bakiyesi, $A(r,t)$, borçlunun temerrüt opsiyonu, $D(H,r,t)$, ve erken ödeme opsiyon, $C(H,r,t)$, değerleri, mortgage sigortası değeri ve kredinin banka açısından piyasa değeri, $V_L(H,r,t)$ belirlenmektedir. Daha sonra, zaman içerisinde sondan başa ilerleyerek, kontratın bugünkü piyasa değeri hesaplanabilmektedir.

1.2.2. Kontrat vadesi sonunda, borçlunun borç bakiyesinin modellenmesi:

$$A^-(r,t) = MP \quad \text{for } t = \eta(n) \quad (1.8)$$

n = mortgage kontratının ay sayısı olarak vade uzunluğu (Örneğin, 10 yıllık kontrat için $n=120$ ay)

$\eta(i)$ = i . aylık ödeme zamanı

MP = Sabit faizli mortgage kredisi aylık sabit ödeme miktarı (monthly payment)

8. denklemde, $A^-(r,t) = n$. yani 10 yıllık kontrat için 120. aylık ödeme yapılmadan önceki borç bakiyesini göstermektedir. 120. ayın başlangıcındaki borç bakiyesi, son aylık kredi ödemesine (MP) eşittir.

Vade süresi boyunca geriye doğru hareket edildiğinde her aylık ödeme (MP) gerçekleştirildiğinde, kişinin borç bakiyesi de aylık ödeme miktarı kadar değişmektedir:

$$A^-(r,t) = A^+(r,t) + MP \quad \text{for } t = \eta(1), \dots, \eta(n-1) \quad (1.9)$$

Bu aşamada önemli bir nokta, aylık kredi ödeme miktarı (MP) ve dolayısıyla her ay mevcut borç bakiyesinin (outstanding balance, OB) nasıl hesaplandığı sorusudur. Sabit faiz oranlı mortgage kredilerinde aylık ödeme miktarı belirlenirken uygulanan temel kural; kontrat başında belirlenen ana borç miktarının kontrat sonunda tamamen ödenmiş olmasını sağlamaktır. Aylık kredi ödemeleri ve borç bakiyesi aşağıdaki gibi modellenmektedir:

$$MP = \frac{\left(\frac{c}{12}\right) \left[1 + \left(\frac{c}{12}\right)\right]^n OB(0)}{\left[1 + \left(\frac{c}{12}\right)\right]^n - 1} \quad (1.10)$$

Bu denklemde,

$OB(0)$ = Kontrat başında, $t=0$ anındaki borç bakiyesi

c = Mortgage kredisi faiz oranı

n = kredi vade uzunluğudur.

Her hangi bir aylık kredi ödemesi yapıldıktan sonraki mevcut borç bakiyesi aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$OB(i) = \frac{\left[\left(1 + \frac{c}{12}\right)^n - \left(1 + \frac{c}{12}\right)^i \right]}{\left(1 + \frac{c}{12}\right)^n - 1} \times OB(0) \quad (1.11)$$

Bu denklemde, $OB(i)$ = i. aylık ödeme sonrasındaki mevcut borç bakiyesini göstermektedir.

1.2.3. Borçlunun temerrüt (krediyi geri ödememe) opsiyonu değeri ve mortgage kontratının piyasa değerinin modellenmesi:

Kontrat vadesi sonunda diğer bir deyişle son aylık ödeme öncesinde borçlunun alabileceği iki pozisyon vardır. Borçlu ya son aylık ödemesini gerçekleştirecek ve konutun sahibi olacak ya da temerrüt opsiyonunu kullanarak aylık ödemeyi gerçekleştirmeyecek ve konutu bankaya geri verecektir. 12. denklemde görüldüğü gibi, konutun piyasa değeri (H) son aylık ödeme miktarından (MP) büyük olduğu sürece borçlu temerrüte düşmeyecektir. Bu durumda temerrüt opsiyonunun değeri 0 olacaktır.

$$D^-(H, r, t) = \max(0, [MP - H]) \quad \text{for } t = \eta(n) \quad (1.12)$$

Kontrat vadesi sonunda, borçlu için mortgage kontratının değeri ise 13. denklemde verilmektedir:

$$V_B^-(H, r, t) = \min(MP, H) \quad \text{for } t = \eta(n) \quad (1.13)$$

Vade sonunda son aylık ödeme miktarı konutun piyasa değerinden büyük ise, borçlu temerrüte düşecektir. Bu durumda temerrüt opsiyonunun değeri $MP - H$ olacaktır (Denklem 12). Borçlu için kontratın değeri ise konutun piyasa değerine (H) eşit olacaktır. Çünkü kişi temerrüt opsiyonunu kullanarak konutu bankaya geri vermek durumundadır.

Mevcut literatürde, mortgage kredisi alan kişinin krediyi geri ödememe riskini, krediyi vadeden önce ödeme riskini ya da her iki riski bir arada fiyatlandırılan ampirik ve teorik birçok çalışma mevcuttur. Ampirik çalışmalarda, kredinin geri ödenmemesi ya da kredinin vadeden önce ödenmesi ölüm, boşanma, iş değiştirme, işini kaybetme, şehir değiştirme gibi kişiye özel nedenlerden kaynaklanmaktadır. Ampirik çalışmalar literatürde, indirgenmiş formda modeller (reduced form models) olarak adlandırılmaktadır. Bu modellerin kullanılabilmesi için, kredi alan kişiye ait bilgiler (yaş, meslek, cinsiyet), satın alınan konutun özellikleri (binanın yaşı, büyüklüğü, lokasyonu, piyasa değeri) ve kişinin gerçekleştirdiği ödeme planı (kredinin amortismanı) gibi bilgilere ihtiyaç duyulmaktadır. Bankalar genellikle, müşterilerine ait bu tür detaylı bilgileri paylaşmadıkları için indirgenmiş formdaki modelleri kullanmak oldukça zordur. Teorik çalışmalarda ise,

borçlunun krediyi geri ödememe ya da krediyi vadeden önce ödeme riski tamamen finansal nedenlere dayanmaktadır. Kredi alan kişi bu iki opsiyonu, kontrat maliyetini minimize etmek amacıyla kullanmaktadır. Teorik çalışmalar literatürde, yapısal modeller olarak adlandırılmaktadır.

Yapısal opsiyon fiyatlama modellerine göre, kredi alan kişi mortgage kontrat değerinin (V_B) (temerrüte düşme ve erken ödeme opsiyon değerleri ile birlikte) konutun piyasa değerinden (H) yüksek olması durumunda temerrüt etmektedir. Eğer $V^-(H, r, t) \geq H$ koşulu sağlanıyorsa, borçlu temerrüte düşecektir. Çünkü borçlu satın aldığı konutun piyasa değerinden yüksek değerde bir kredi miktarını ödemek istemeyecektir. Bu durumda temerrüt opsiyonun değeri; mevcut borç bakiyesi ile konutun piyasa değeri arasındaki farka ($A(r, t) - H$) eşittir (Denklem 14).

Vade boyunca, her aylık ödeme tarihinde temerrüt opsiyonu değerini ve kontratın piyasa değerini aşağıdaki gibi modellemek mümkündür:

$$D^-(H, r, t) = \begin{cases} D^+(H, r, t) & \text{if } V_B^-(H, r, t) = V_B^+(H, r, t) + MP \text{ (Temerrüt yok)} \\ A^-(r, t) - H & \text{if } V_B^-(H, r, t) = H \text{ (Temerrüt)} \end{cases}$$

for $t = \eta(1), \dots, \eta(n-1)$

(1.14)

$$V_B^-(H, r, t) = \min\left(\left[V_B^+(H, r, t) + MP\right], H\right) \text{ for } t = \eta(1), \dots, \eta(n-1) \quad (1.15)$$

Borçlunun temerrüte düşmesi durumunda ($V_B \geq H$), borçlu için kontratın değeri konutun piyasa değerine (H) eşit olacaktır (Denklem 15). Çünkü kişi temerrüt opsiyonunu kullanarak konutu bankaya satmak, iade etmek durumundadır.

1.2.4. Kredinin erken ödeme opsiyonu piyasa değerinin modellenmesi:

Yukarıda bahsedildiği üzere, kontrat vadesi sonunda diğer bir deyişle son aylık ödeme öncesinde borçlunun alabileceği iki pozisyon vardır. Borçlu ya son aylık ödemesini gerçekleştirecek ve evin sahibi olacak ya da temerrüt opsiyonunu kullanarak aylık ödemeyi gerçekleştirmeyecek ve konutu bankaya geri verecektir. Sonuç olarak borçlu, kontrat vadesi sonunda krediyi erken ödeme opsiyonunu kullanmayacaktır. 16. denklemde görüldüğü gibi, kontrat vadesi sonunda, $t = \eta(n)$, krediyi erken ödeme opsiyonunun değeri sıfırdır.

$$C^-(H, r, t) = 0 \text{ for } t = \eta(n) \quad (1.16)$$

Vade boyunca, her aylık ödeme tarihinde krediyi erken ödeme opsiyonu değerini aşağıdaki gibi modellemek mümkündür:

$$C^-(H, r, t) = \begin{cases} C^+(H, r, t) & \text{if } V_B^-(H, r, t) = V_B^+(H, r, t) + MP \text{ (Temerrüt yok)} \\ 0 & \text{if } V_B^-(H, r, t) = H \text{ (Temerrüt)} \end{cases} \quad (1.17)$$

17. denkleme göre, borçlu temerrüt opsiyonunu kullanıp krediyi geri ödemediği zaman, erken ödeme opsiyonununun vazgeçmiş olacak ve bu opsiyonun değeri sıfıra eşit olacaktır. Kişi temerrüte düşmeyip kredi ödemelerine devam ettiği sürece, erken ödeme opsiyonunun positif bir piyasa değeri $C^+(H, r, t)$ mevcut olacaktır. (6). denklemi kullanarak, erken ödeme opsiyon değerini aşağıdaki gibi hesaplamak mümkündür:

$$C(H, r, t) = A(r, t) - V_B(H, r, t) - D(H, r, t) \quad (1.18)$$

Borçlu herhangi bir t anında (i . ve $i+1$. aylık kredi ödeme tarihleri arasında herhangi bir tarihte) kredisini erken kapatma opsiyonunu seçer ise, sözkonusu t anındaki mevcut borç bakiyesi, $TD(t)$, hesaplanırken son aylık ödeme tarihinden itibaren biriken faiz toplamı da borç miktarına eklenmektedir.

$$TD(t) = \{1 + c[t - \eta(i)]\} OB(i) \quad \text{for } \eta(i) \leq t \leq \eta(i+1) \quad (1.19)$$

Ülkemizde, kanun kapsamında sadece sabit faizli krediler için, kalan bakiye üzerinden en fazla %2 oranında bir erken ödeme ücreti talep edilebilmektedir. Değişken faizli kredilerin erken geri ödenmesi halindeyse, erken ödeme ücreti ödenmesi söz konusu olmayacaktır.

İngiltere'de borçlu kredisini erken kapatma opsiyonunu kullanırsa, belirli bir ceza (prepayment penalty) miktarını ödemek zorundadır. 20. denklemde görüldüğü gibi, bu ceza miktarı kredinin peşin olarak ödendiği tarihteki (t anındaki) toplam borç bakiyesine, genellikle %2 oranında eklenmektedir.

$$TD(t) = \{(1 + \pi)\{1 + c[t - \eta(i)]\} OB(i)\} \quad \text{for } \eta(i) \leq t \leq \eta(i+1) \quad (1.20)$$

Yukarıdaki denklemde,

π = krediyi erken ödeme cezası (genellikle %2 olarak kabul edilmektedir).

1.2.5. Mortgage kredisi sigortası piyasa değerinin modellenmesi:

Ülkemizdeki yeni Konut Finansman Sistemi'nde, mevcut 4077 sayılı Tüketici'nin Korunması Hakkında Kanun'da öngörüldüğü üzere, bankalar ancak üst üste iki adet taksitini ödemeyen tüketicilere, bir ay süre vererek muacceliyet (borcun tamamının geri ödenmesini talep etme) uyarısında bulunabilecektir. Ancak bu talebi yerine getirmeyen tüketiciler hakkında yasal takip yapılması mümkün olabilecektir. Ayrıca temerrüde düşen tüketicilere, temerrüt tarihinden itibaren 5 iş günü içerisinde iadeli taahhütlü posta yoluyla bildirim yapılacaktır. Kanun herhangi bir sigorta zorunluluğu öngörmemektedir. Ancak, konut finansmanı kapsamında yapılacak sigorta sözleşmeleriyle ilgili usul ve esasların belirlenmesinde Hazine Müsteşarlığı'nın yetkili olduğu da belirtilmektedir. Bankaların mevcut politikalarını devam ettirerek, konut sigortası, DASK ve hayat sigortası talep etmeleri beklenmektedir.

Gelişmiş ülkelerdeki mortgage kontratlarını incelediğimizde, sigorta poliçelerinin mortgage kontrat yapısının oldukça önemli bir bölümünü oluşturduğunu görmekteyiz. Mortgage kredisi sigortası, borçlunun temerrüt ve erken ödeme opsiyonu gibi ayrı bir finansal türev aracı olarak tanımlanmakta ve fiyatlandırılmaktadır.

En basit haliyle, mortgage sigortası, kredi veren banka ile sigorta şirketi arasında imzalanan bir kontrattır. Mortgage sigortası, konut piyasa değerinin %80 ve üstü oranda kredi alan kişilerin yaptırması gereken zorunlu bir sigorta kontratıdır. Bu kontrata göre, sigorta şirketi, bankanın temerrüte düşen her kredisi için gerçekleşen toplam zararını ödemeyi taahhüt etmektedir. Mortgage sigortası kontratları, ülkeler, ekonomiler ve sigorta şirketleri arasında farklılıklar göstermektedir. Mevcut literatürde yaygın olarak fiyatlandırılan mortgage sigortası kontratları Amerika Birleşik Devletleri (ABD) ve İngiltere’de kullanılan kontratlarıdır. Raporun bu kısmında, sırasıyla, ABD ve İngiltere’de kullanılan mortgage sigortası kontratının nasıl fiyatlandırıldığı tartışılacaktır. Kısaca, kredi vadesi sonunda ve herhangi bir aylık geri ödeme zamanında, mortgage sigorta kontratlarının piyasa değerinin nasıl modellendiği incelenecektir.

1.2.5.1. Mortgage Sigortası Fiyatlandırılması: ABD Örneği:

Mevcut literatürde, ABD’deki mortgage sigortası kontratlarını fiyatlandırılan çalışmalara baktığımızda, kredi vadesi sonunda mortgage sigortasının piyasa değeri aşağıdaki gibi belirlendiğini görmekteyiz.

$$I^-(H, r, t) = \max \left[0, \min (MP - H, \phi MP) \right] \quad (1.21)$$

Borçlunun sonuncu aylık ödemeyi gerçekleştirilerek temerrüte düşmesi durumunda, sigorta şirketi bankaya, ya konutun piyasa değeri ile son aylık geri ödeme miktarı (mevcut borç bakiyesi) arasındaki farkı ($MP-H$) ya da mevcut borç bakiyesinin belirli bir yüzdesini (ϕ) ödemektedir. Sigorta şirketleri genellikle, bu iki sigorta ödemesi miktarından küçük olanı ödemeyi taahhüt etmektedir.

Vade boyunca, her aylık kredi ödemesinde mortgage sigortası değerini 22. denklemi kullanarak modellemek mümkündür:

$$I^-(H, r, t) = \begin{cases} I^+(H, r, t) & \text{if } V_B^-(H, r, t) = V_B^+(H, r, t) + MP \text{ (Temerrüt yok)} \\ \max \left[0, \min (TD^-(t) - H, \phi TD^-(t)) \right] & \text{if } V_B^-(H, r, t) = H \text{ (Temerrüt)} \end{cases} \quad (1.22)$$

for $t = \eta(1), \dots, \eta(n-1)$

Bu denklemde,

$TD = t$ anındaki toplam borç bakiyesini (total debt) göstermektedir (*Kau, Keenan, Muller ve Epperson, 1993, Journal of Business, 595-618*).

$$TD^-(t) = \{1 + c[t - \eta(i)]\} OB(i)$$

$\phi =$ ABD’de genellikle %25 olarak kabul edilen, sigorta kapsamına giren zarar ödemesi.

22. denkleme göre, borçlunun temerrüte düşmesi yani krediyi geri ödeyememesi durumunda sigorta şirketi bankaya aşağıda tanımlanan sigorta ödemesi miktarından küçük olanı ödemeyi taahhüt etmektedir:

* Temerrüt anındaki borç bakiyesi ve konutun piyasa değeri arasındaki farkı $TD^-(t) - H$

* Mevcut borç bakiyesinin belirli bir yüzdesini $\phi TD^-(t)$

1.2.5.2. Mortgage Sigortası Fiyatlandırılması: İngiltere Örneği:

İngiltere'de kullanılan mortgage sigortası kontratlarında sigorta şirketleri bankanın toplam zararının belirli bir yüzdesini (γ) ödemeyi garanti etmektedir. Fakat, sigorta kapsamında ödenecek miktara maksimum tazminat limiti (maximum indemnity cap) uygulanmaktadır.

Literatürde, İngiltere'deki mortgage sigortası kontratlarını fiyatlandıran çalışmalara baktığımızda, kredi vadesi sonunda mortgage sigortasının piyasa değeri aşağıdaki gibi belirlendiğini görmekteyiz.

$$I^-(H, r, t) = \begin{cases} 0 & \text{if } V_B^-(H, r, t) = MP \quad (\text{Temerrüt yok}) \\ \min \{ [\gamma(MP - H)], \Gamma \} & \text{if } V_B^-(H, r, t) = H \quad (\text{Temerrüt}) \end{cases} \quad \text{for } t = \eta(n) \quad (1.23)$$

Borçlunun sonuncu ayda temerrüte düşmesi durumunda, sigorta şirketi bankaya, konutun piyasa değeri ile son aylık geri ödeme miktarı (mevcut borç bakiyesi) arasındaki farkın ($MP - H$) belirli bir yüzdesini $[\gamma(MP - H)]$ ödemeyi taahhüt etmektedir. Fakat sigorta şirketleri aynı zamanda, sigorta kapsamında ödeyecekleri bu miktara maksimum tazminat limiti (Γ) uygulamaktadır.

23. denkleme,

Γ = sigorta şirketinin maksimum tazminat limiti

$$\Gamma = (LTV - LTV^*)H(0)$$

LTV = Alınan toplam kredi miktarının konutun kontrat başındaki fiyatına, $H(0)$, olan oranı

LTV^* = Normal kabul edilen kredi miktarı-konut fiyatı rasyosu

Genellikle, kredi veren kurum ya da banka için kabul edilen değerlerin

$$(LTV - LTV^*) \cong 0,20$$

$$\gamma = 0,80$$

olduğu bilinmektedir (Azevedo-Pereira, Newton ve Paxson, 2002, *Real Estate Economics*, 185-211).

Vade boyunca, her aylık kredi ödemesinde mortgage sigortası değerini 24. denkleme kullanarak modellemek mümkündür:

$$I^-(H, r, t) = \begin{cases} I^+(H, r, t) & \text{if } V_B^-(H, r, t) = V_B^+(H, r, t) + MP \text{ (Temerrüt yok)} \\ \min \left\{ \left\{ \gamma [TD^-(t) - H] \right\}, \Gamma \right\} & \text{if } V_B^-(H, r, t) = H \text{ (Temerrüt)} \end{cases}$$

for $t = \eta(1), \dots, \eta(n-1)$ (1.24)

Mevcut projede Türkiye'deki sabit faiz oranlı konut kredileri için "mortgage sigortası" ayrı bir finansal türev aracı olarak fiyatlandırılırken, hem Amerika örneği hem de İngiltere örneği göz önüne alınacaktır.

2. II. GELİŞME RAPORU ÖZETİ (15 Nisan 2008 – 15 Ekim 2008)

2.1. Giriş:

Proje önerisinin “Çalışma Takvimi” bölümünde belirtildiği gibi, ikinci aşamada yapılan çalışmaları aşağıdaki gibi özetlemek mümkündür:

- 28 Şubat 2002 ve 21 Kasım 2007 tarihleri arasındaki Hazine Bonosu verileri kullanılarak, ülkemizdeki faiz oranlarının zaman içerisindeki hareketini belirleyen Cox-Ingersoll-Ross (1985) modeli parametre değerleri tahmin edilmiştir. Bu parametreler: i)faiz oranlarının uzun dönemdeki ortalama değerini, ii)kısa dönemdeki faiz oranlarının uzun dönem ortalamasına yaklaşma (mean-reverting) hızını ve iii)faiz oranlarındaki volatilité ya da standart sapma değerlerini vermektedir.
 - Ayrıca, Tüketici Fiyat Endeksi'nin önemli bir ana harcama grubunu oluşturan “Konut Endeksi” 2003-2007 verisi kullanılarak konut fiyatlarındaki ortalama artış miktarı ve konut piyasa değeri artışındaki volatilité hesaplanmıştır.
- Faiz oranları Cox, Ingersoll ve Ross (CIR) stokastik prosesi ile konut fiyatları ise geometrik Brownian hareketi ile modellenmiştir. İki stokastik denklemden elde edilen kısmi diferansiyel denklemin Matlab ortamında nümerik çözümü tamamlanmıştır.
- Faiz oranları ve konut fiyatlarını modellemek amacıyla kullanılan her iki stokastik prosese ait parametre değerleri, mortgage kontratı fiyatlama modelinin girdi (input) değerlerini oluşturmaktadır.
- 1. gelişme raporunda belirtildiği üzere, Türkiye'deki mortgage (ipotekli konut kredisi) portföyü büyük olan 8 farklı bankadan temel mortgage kontrat bilgileri toplanmıştır. Bu kontrat bilgileri, dikkate alınarak, fiyatlama modelinde kullanılacak olan temel senaryo (base-case scenario) kontrat özellikleri tanımlanmıştır.
- Modelin nümerik çözümü farklı parametreler (konut fiyatlarında ve faiz oranlarındaki volatilité, kısa dönem faiz oranlarının uzun dönem ortalama değere yaklaşma hızı, alınan kredinin konutun değerine oranı, vb) kullanılarak farklı ekonomik senaryolar altında tekrarlanmıştır. Sonuç olarak, sabit faiz oranlı mortgage kontratının farklı ekonomik koşullar altında alacağı değerler hesaplanmış ve yorumlanmıştır.
- Projenin 1. yıl sonundaki sonuçları sorunsuz bir şekilde elde edilmiştir. Bu aşamada, sonuçlardan derlenen uluslararası bir makale yazılmaktadır. Bu makalenin Temmuz 2009 tarihinde uluslararası AREUEA konferansında sunulması ve alınan eleştiriler/fikirler doğrultusunda uluslararası bir dergide yayınlanmak üzere gönderilmesi planlanmaktadır.

Projenin 1. Gelişme Raporu'nda belirtildiği üzere, klasik opsiyon fiyatlama modelinde ipotek altında olan konutun piyasa değeri, geometrik Brownian hareketi olarak da adlandırılan lognormal difüzyon denklemi ile modellenmektedir. Faiz oranlarının zaman içerisindeki hareketini belirleyen stokastik proses ise, CIR modeli olarak adlandırılan Cox-Ingersoll-Ross (1985) modelidir. Her iki stokastik prosesden oluşturulacak olan kısmi

diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi tanımlamak mümkündür. Bu denklem, mortgage kontratı piyasa değerini (V), iki stokastik değişkenin (konut fiyatları (H) ve faiz oranları (r)) ve zamanın (t) bir fonksiyonu olarak tanımlamaktadır:

$$\frac{1}{2}H^2\sigma_H^2\frac{\partial^2V}{\partial H^2} + \rho H\sqrt{r}\sigma_H\sigma_r\frac{\partial^2V}{\partial H\partial r} + \frac{1}{2}r\sigma_r^2\frac{\partial^2V}{\partial r^2} + \kappa(\theta - r)\frac{\delta V}{\delta r} + (r - s)H\frac{\delta V}{\delta H} + \frac{\delta V}{\delta t} - rV = 0$$

Bu kısmi diferansiyel denklemin, nümerik metotlarla çözülebilmesi için, başlangıç (initial) ve sınır (boundary conditions) koşullarının tanımlanması gerekmektedir. Bu koşullar mortgage kontrat yapısından gelecek olan, gerçekleştirilen aylık ödemelerle belirlenecektir. Kısmi diferansiyel denklemin çözümünde kullanılacak olan başlangıç koşulları detaylı olarak 1. Gelişme Raporu'nda açıklanmıştır.

2. Gelişme Raporu'nda öncelikle, Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı Fiyatlama Modelinin Nümerik Çözümü anlatılacaktır. Yukarıda tanımlanan (Denklem 1) kısmi diferansiyel denklemin nümerik çözümü için kullanılan metot, "Explicit Finite Difference" metodudur. Raporun diğer bölümlerinde elde edilen nümerik sonuçlar yorumlanacaktır.

2.2. Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı Fiyatlandırma Modelinin Nümerik Çözümü: Sonlu Farklar Metodu (Finite-Difference Methodology)

Sonlu Farklar yöntemi sürekli zamanda tasarlanmış kısmi diferansiyel denklemleri kesikli zamanda çözen yaygın bir yöntemdir. Wilmott ve diğerlerinin (1995) da belirttiği üzere sonlu farklar yöntemi doğru tasarlanıp uygulandığı takdirde fizik ve finans problemlerinin çözümünde güçlü ve esnek bir teknik olarak karşımıza çıkar. Sonlu farklar metoduna ilişkin teori oldukça sağlam bir şekilde geliştirilmiştir. Bu konuda bir çok ders kitabı farklı alanda mevcuttur. Matematik için Ames, 1992; Lapidus and Pinder, 1982 ve finans için de Wilmott *et al.*, 1995, Wilmott, 2000, and Hull, 2003 kitapları rahatlıkla önerilebilir. Mevcut projenin bu bölümünde Lapidus and Pinder (1982) tarafından yazılmış olan ders kitabını takip etmek kaydı ile sonlu farklar yöntemi hakkındaki gerekli temel bilgi ve kavramları aktaracağız.

Notasyon

$u(x, y)$ x ve y değişkenlerinin sürekli bir fonksiyonu olsun. Bu fonksiyonun düğüm noktalarındaki spesifikasyonu aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$u(x_i, y_j) \equiv u(ih, jl) \equiv u_{i,j}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \text{ ve } j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

x_i yerine ih konularak koordinatlar bire eşit ve küçük olacak şekilde normalize edilmiş düğüm dağılım değişkeni sabit h ile tam sayı i 'nin çarpımı halinde yazılır. Tam sayı i x koordinatı boyunca ilgili pozisyonu gösterir. h sabit olduğunda, $u(ih)$ ifadesinin yerini u_i ifadesi alabilir. Aynı şekilde, y ekseninde düğümlerin dağılımı için j ve l harfleri kullanılır. Diferans ve diferansiyel denklemler $x = ih$, $y = jl$, and $t = nk$ notalarında sırası ile $U_{i,j}^n$ and $u_{i,j}^n$ ifadeleri ile temsil edilirler.

Taylor serileri genişmesinin sonlu farkların kurgulanışında çok önemli bir yeri vardır.

Eğer $u(x)$ ve türevleri tek değerli ise, x 'in sonlu ve sürekli fonksiyonları x_i noktalarında aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$u(x_i + h) = u(x_i) + hu_x|_i + \frac{h^2}{2!}u_{xx}|_i + \frac{h^3}{3!}u_{xxx}|_i + \dots \quad (2.2a)$$

Ya da

$$u(x_i - h) = u(x_i) - hu_x|_i + \frac{h^2}{2!}u_{xx}|_i - \frac{h^3}{3!}u_{xxx}|_i + \dots \quad (2.2b)$$

h 'nin ikinci ve daha büyük kuvvetlerini göz önüne almadan tekrardan düzenlenirse aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$u_x|_i \approx \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} \equiv \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \approx \frac{U_{i+1} - U_i}{h} \quad (2.3a)$$

$$u_x|_i \approx \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} \equiv \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \approx \frac{U_i - U_{i-1}}{h} \quad (2.3b)$$

(2.3a) numaralı denklem t yönünde ileri doğru hareket ettiğinden ileri sonlu fark denklemi adını alır. Aynı mantık ile (2.3b) numaralı denklem ise geriye doğru sonlu fark denklemi adını alır.

Normal olarak yüksek kuvvetdeki ifadelerin atılması durumu bir yaklaşım hatasına sebep olur. (2.3a) ve (2.3b) numaralı denklemler için bu hata h 'inci sıradır ve $O(h)$ ifadesi ile temsil edilir. Eğer (2.2a) ve (2.2b) eklenir ve $u_x|_i$ için çözülür ise

$$u_x|_i \approx \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} \quad (2.4)$$

ifadesi $O(h^2)$ hatası ile elde edilir. Bu metot merkezi sonlu farklar yöntemi olarak anılır. Yaklaşımların doğruluğu doğal olarak hata ile orantılıdır. Bu sebep ile mümkün olduğu sürece merkezi sonlu farklar yöntemi diğer yöntemlere göre tercih edilir (Azevedo-Pereira, 1997). Aynı şekilde (2.2a) ve (2.2b) eklenerek ve $O(h^4)$ göz ardı edilerek ikinci türev için merkezi differansiyel yaklaşım elde edilebilir.

$$u_{xx}|_i \approx \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} \quad (2.5)$$

Aşağıdaki ifadeler bu çalışmada çözülen birinci sıra ikinci sıra ve iki boyutlu temel kısmi denklemlere yaklaşım için temel yaklaşımları vermektedir.

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \equiv u_x|_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h} + O(h) \quad (2.6a)$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} \equiv u_y|_{i,j} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{l} + O(l) \quad (2.6b)$$

Bu sebeple $u_x|_{i,j}$ ifadesini yaklaşık olarak yazarken, j sabit tutulur ($y = \text{sabit}$), $u_y|_{i,j}$ için ise i sabit tutulur ($x = \text{sabit}$). Budama hatası $O(h)$ and $O(l)$, olan iki boyutlu birinci dereceden kısmi türev ileri sonlu fark yaklaşımı (2.6a-b) numaralı denklem ile gösterilmektedir.

Aynı şekilde, (2.7a) ve (2.7b) numaralı denklemler aynı türevin geriye doğru sonlu fark yöntemi ile sağlanmış yaklaşımını verir.

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \equiv u_x|_{i,j} = \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{h} + O(h) \quad (2.7a)$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} \equiv u_y|_{i,j} = \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{l} + O(l) \quad (2.7b)$$

Sonuç olarak, (2.8a) ve (2.8b) numaralı denklemler ise merkezi sonlu fark yaklaşımını verir. Budama hataları ise sırası ile $O(h^2)$ ve $O(l^2)$ dir.

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \equiv u_x|_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h} + O(h^2) \quad (2.8a)$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} \equiv u_y|_{i,j} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2l} + O(l^2) \quad (2.8b)$$

(2.5) numaralı ifadenin iki boyutlu karşılığı aynı şekilde (2.9a) ve (2.9b) denklemler kullanılarak elde edilir.

$$u_{xx}|_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2) \quad (2.9a)$$

$$u_{yy}|_{i,j} = \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{l^2} + O(l^2) \quad (2.9b)$$

Bize gereken son önemli yaklaşım ise kısmi türevin karışık kısmının yaklaşıldığı ifadedir: $u_{xy}|_{i,j}$. Taylor yaklaşımının kullanımı ve yeniden düzenlemeler yapılmak kaydı ile (2.10) numaralı denklemdeki çapraz türev, (2.11) ifadesini verir.

$$u_{xy}|_{i,j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} |_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial y} |_{i,j} \right] \quad (2.10)$$

$$u_{xy}|_{i,j} = \frac{U_{i+1,j+1} - U_{i+1,j-1} - U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j-1}}{4hl} + O(h^2) + O(l^2) \quad (2.11)$$

h ve l in eşit olması halinde (2.11) numaralı ifade aşağıdaki hali alır:

$$u_{xy}|_{i,j} = \frac{U_{j+1,i+1} - U_{j+1,i-1} - U_{j-1,i+1} + U_{j-1,i-1}}{4hl} + O(h^2) + O(l^2) \quad (2.12)$$

Nümerik Çözüm

Temel kısmi diferansiyel denklemin çözümü olan (1) ifadesi sonsuz bir domain'e sahiptir. Bu sebeple, ev fiyatları ve faiz hadlerine ait durum değişkenlerinin sonsuz sınır şartlarını elimine edecek şekilde dönüştürülmesi gerekmektedir. Daha açıkcası $(0, \infty) \times (0, \infty)$ ile gösterilen sonsuz alanı $(0,1) \times (0,1)$ birim kare alanda tanımlayabilmek gereklidir. Zira bu işlem nümerik çözüm için gerekli işlemleri kolaylaştıracaktır. Azevedo-Pereira *et al.* (1997, 2000) ve Stanton and Wallace (1995, 1999) izleyerek durum değişkenleri için alt dönüşümler¹

$$y = \frac{1}{1 + \psi w} \quad \psi > 0 \quad (2.13)$$

$$x = \frac{1}{1 + \omega H} \quad \omega > 0 \quad (2.14)$$

ψ and ω ölçek değişkenleri çözüm düğümündeki noktaların yoğunluğunu hissedilir şekilde etkiler. Bu değerlerin seçimi piyasada gerçekleşmiş ya da gerçekleşmesi muhtemel değerler civarındadır.

Temel kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde ileriye doğru denklem haline dönüştürülebilir (see Wilmott *et al.*, 1993)

$$\tau = T - t \quad (2.15)$$

Tüm bu dönüşümlerden sonra, sabit faiz oranlı mortgage kontratının fiyatlanmasında kullanılan orijinal kısmi difransiyel denklem $V(H(x), w(y), t(\tau))$, $Z(x, y, \tau)$.cinsinden yazılabilir. Bu durumda dönüştürülmüş denklem aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} H(x)^2 \sigma_H^2 \omega^2 x^4 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \rho H(x) \sqrt{w(y)} \sigma_H \sigma_w \psi \omega x^2 y^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \\ & + \frac{1}{2} w(y) \sigma_w^2 \psi^2 y^4 \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \left\{ w(y) \sigma_w^2 \psi^2 y^3 - \left[\kappa (\theta_w - w(y)) - \sigma_w \sqrt{w(y)} \lambda_w \right] \psi y^2 \right\} \frac{\partial Z}{\partial y} \\ & + \left\{ H(x)^2 \sigma_H^2 \omega^2 x^3 - \left[(r(y) - s) H(x) \omega x^2 \right] \right\} \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial \tau(t)} - r(y) Z = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

¹ Bu dönüşümler neticesinde, $y \rightarrow w \rightarrow \infty$ olduğunda 0 ve $w = 0$ olduğunda 1 değerini alır. Aynı şekilde $x \rightarrow H \rightarrow \infty$ durumunda 0 ve $H = 0$ durumunda 1 değerini alacaktır.

Raporun bu bölümünde (2.16) numaralı denklemi detaylı olarak inceleyeceğiz. (Hxw) ile gösterebileceğimiz durum-uzay gösteriminin kesikli zamandaki ifadesi aşağıdaki şekilde elde edilir. Öncelikle ev fiyatları ve faizt oranları için birim uzay $[0,1]$ is I ve J aralıklarına bölünür.

$$Ih = x_I = 1 \quad \text{and} \quad ih = x_i \quad (2.17a)$$

$$Jl = y_J = 1 \quad \text{and} \quad jl = y_j \quad (2.17b)$$

Aynı şekilde vadeye kalan zaman için (τ) , $[0,T]$ aralığı N adet alt aralıklara bölünür

$$Nk = \tau_N = 1 \quad \text{ve} \quad nk = \tau_n \quad (2.17c)$$

Böylece Mortgage değeri $V(H, w, t)$ $U_{i,j}^n$ ile yaklaşık olarak temsil edilir. Kau *et al.* (1993) ve Azevedo-Pereira *et al.* (2002, 2003), tavsiye ettiği gibi jeografiksel olarak düğüm ölçüsü olarak 0.02 kullanılarak (H, w) kesikli hale getirildi. Başka bir ifade ile, nümerik çözüm için 50x50 ölçüsünde düğüm tablosu elde edilir. Nümerik stabilite için bir ay 66 ya bölünmektedir.

Bir önceki bölümdeki notasyon kapsamında (2.16) nolu denklem aşağıdaki şekilde yazılır;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} H(x)^2 \sigma_H^2 \omega^2 x^4 \frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{h^2} \\ & + \rho H(x) \sqrt{w(y)} \sigma_H \sigma_w \psi \omega x^2 y^2 \frac{U_{i+1,j+1}^n - U_{i+1,j-1}^n - U_{i-1,j+1}^n + U_{i-1,j-1}^n}{4lh} \\ & + \frac{1}{2} w(y) \sigma_w^2 \psi^2 y^4 \frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{l^2} \\ & + \left\{ w(y) \sigma_w^2 \psi^2 y^3 - \left[\kappa(\theta_w - w(y)) - \sigma_w \sqrt{w(y)} \lambda_w \right] \psi y^2 \right\} \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2l} \\ & + \left\{ H(x)^2 \sigma_H^2 \omega^2 x^3 - \left[(r(y) - s) H(x) \omega x^2 \right] \right\} \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h} \\ & - \frac{U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j}^n}{k} - r(y) U_{i,j}^n = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Uzay türevleri için merkezi yaklaşımı, zaman türevleri için ise ileriye doğru yaklaşımı kullanılmıştır. (2.18) numaralı denklemi aşağıdaki şekilde ifade ederek mortgage değerini bir önceki değeri üzerinde tanımlayabiliriz.

$$U_{i,j}^{n+1} = \left\{ 1 - \left[H(x)^2 \sigma_H^2 \omega^2 x^4 \left(\frac{k}{h^2} \right) \right] - \left[w(y) \sigma_w^2 \psi^2 y^4 \left(\frac{k}{l^2} \right) \right] - r(y) k \right\} U_{i,j}^n$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{1}{2} H(x)^2 \sigma_H^2 \omega^2 x^4 \left(\frac{k}{h^2} \right) \right\} (U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n) \\
& + \left\{ \frac{1}{2} w(y) \sigma_w^2 \psi^2 y^4 \left(\frac{k}{l^2} \right) \right\} (U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n) \\
& + \left\{ H(x)^2 \sigma_H^2 \omega^2 x^3 - [(r(y) - s) H(x) \omega x^2] \right\} \left(\frac{k}{2h} \right) \left\{ U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n \right\} \\
& + \left\{ w(y) \sigma_w^2 \psi^2 y^3 - [\kappa(\theta_w - w(y)) - \sigma_w \sqrt{w(y)} \lambda_w] \psi y^2 \right\} \left(\frac{k}{2l} \right) \left\{ U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n \right\} \\
& + \rho H(x) \sqrt{w(y)} \sigma_H \sigma_w \psi \omega x^2 y^2 \left(\frac{k}{4lh} \right) (U_{i+1,j+1}^n - U_{i+1,j-1}^n - U_{i-1,j+1}^n + U_{i-1,j-1}^n) \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Alternatif gösterim olarak, $U_{i,j}^n$ değerlerinin isole edildiği aşağıdaki eşitliği kullanılmaktadır:

$$\begin{aligned}
U_{i,j}^{n+1} = & \left\{ 1 - \left[H(x)^2 \sigma_H^2 \omega^2 x^4 \left(\frac{k}{h^2} \right) \right] - \left[w(y) \sigma_w^2 \psi^2 y^4 \left(\frac{k}{l^2} \right) \right] - r(y) k \right. \\
& - \left\{ H(x)^2 \sigma_H^2 \omega^2 x^3 - [(r(y) - s) H(x) \omega x^2] \right\} \left(\frac{k}{h} \right) \\
& - \left. \left\{ w(y) \sigma_w^2 \psi^2 y^3 - [\kappa(\theta_w - w(y)) - \sigma_w \sqrt{w(y)} \lambda_w] \psi y^2 \right\} \left(\frac{k}{l} \right) \right\} U_{i,j}^n \\
& + \left\{ \frac{1}{2} H(x)^2 \sigma_H^2 \omega^2 x^4 \left(\frac{k}{h^2} \right) \right\} U_{i-1,j}^n \\
& + \left\{ \frac{1}{2} w(y) \sigma_w^2 \psi^2 y^4 \left(\frac{k}{l^2} \right) \right\} U_{i,j-1}^n \\
& + \left\{ \left[\frac{1}{2} H(x)^2 \sigma_H^2 \omega^2 x^4 \left(\frac{k}{h^2} \right) \right] + \left\{ H(x)^2 \sigma_H^2 \omega^2 x^3 - [(r(y) - s) H(x) \omega x^2] \right\} \left(\frac{k}{h} \right) \right\} U_{i+1,j}^n \\
& + \left\{ \left[\frac{1}{2} w(y) \sigma_w^2 \psi^2 y^4 \left(\frac{k}{l^2} \right) \right] + \left\{ w(y) \sigma_w^2 \psi^2 y^3 - [\kappa(\theta_w - w(y)) - \sigma_w \sqrt{w(y)} \lambda_w] \psi y^2 \right\} \left(\frac{k}{l} \right) \right\} U_{i,j+1}^n \tag{2.20}
\end{aligned}$$

(2.20) numaralı eşitliği kullanmak sureti ile merkezi farklar yerine tek taraflı ileri fark yöntemi kullanılmaktadır. Bu da uzay boyutundaki adımlar üzerindeki sınırlamayı kaldırmakta ve nümerik olarak daha ileri seviye stabilite kazandırmaktadır.

Fiyatlandırmada kullanılan temel kısmi diferansiyel denklem, (1) numaralı ifade bağlamında özelleştirecek olursak, ikinci türeve ait katsayılar her zaman pozitif olmasına karşın bu birinci türev katsayıları için geçerli olmamaktadır. Halbuki sonlu farklar problemi ile ilişkin hataları kabul edilir bölgenin içinde tutmak için U^n ilişkin tüm katsayıların pozitif

olması gerekir. Bu problem merkezi farklar yerine ileriye ya da geriye doğru farklar kullanılarak çözülür (Azevedo-Pereira, 1997 ve Wilmott, 2000).

Mevcut problemde iki adet durum değişkeni olduğundan birinci türeve ilişkin 4 farklı katsayı olacaktır. Yazılan Matlab program kodu uygun yaklaşımı vermektedir. Zira işaretin fonksiyonu olarak otomatik olarak hesap edilmektedir.

Sınır Koşulları

Bilindiği üzere açık sonlu farklar yönteminin tek ve eşsiz çözümünü garanti etmek için sınır koşullarının belirlenmesi gerekmektedir. Durum değişkenleri için dönüştürülmüş yapılar kullanılıyor olsa da, H ve w ilişkin durum değişkenleri halen orjinal değerlerini muhafaza etmektedirler. Bu sebeple, mortgage bileşenlerinin değerleri konut fiyatları ve faiz oranları ekstrem iken belirlenmektedir. Yani, $w = H = 0$, ila $w \rightarrow \infty$ ve $H \rightarrow \infty$ durumlarında.

Konut Fiyatları için Sınır Koşulları

$H = 0$ durumunda, mortgage sözleşmesinin değeri kesinlikle ev değerinden daha yüksektir. Bu durumda temerrüt kesindir. Temerrüt halinde mortgage değeri ev değerine eşit olur.

$$V(0, w) = H = 0 \quad (2.21)$$

$$D(0, w) = A(w) \quad (2.22)$$

$H \rightarrow \infty$ durumunda ise, temerrütün değeri yoktur. Bu sebeple mortgage değeri gelecek nakit akımlarına bağlıdır.

$$\lim_{H \rightarrow \infty} D(H, w) = 0 \quad (2.23)$$

$$\lim_{H \rightarrow \infty} V(H, w) = A(w) \quad (2.24)$$

Gelecekteki ödemelerin değeri, A , H değerine bağlı olmadığından; sadece w için kısmi diferansiyel denklem çözülerek gelecek ödemelerin değeri bulunur.

$$\frac{1}{2} w \sigma_w^2 \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} + \left[\kappa (\theta_w - w) - \lambda_w \sigma_w \sqrt{w} \right] \frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial t} - r f = 0 \quad (2.25)$$

Aşağıdaki denklemler Matlab programının kullandığı açık sonlu fark yöntemine aittir.

Eğer $\frac{\partial V}{\partial w} < 0$, geriye doğru fark almaktayız.

$$\begin{aligned} A_j^{n+1} = & \left\{ 1 - \left[w(y) \sigma_w^2 \psi^2 y^4 \left(\frac{k}{l^2} \right) \right] - r(y) k \right\} A_i^n + \left\{ \frac{1}{2} w(y) \sigma_w^2 \psi^2 y^4 \left(\frac{k}{l^2} \right) \right\} (A_{j+1}^n + A_{j-1}^n) \\ & + \left\{ w(y) \sigma_w^2 \psi^2 y^3 - \left[\kappa (\theta_w - w(y)) - \sigma_w \sqrt{w(y)} \lambda_w \right] \psi y^2 \right\} \left(\frac{k}{l} \right) (A_j^n - A_{j-1}^n) \end{aligned} \quad (2.26a)$$

Eğer $\frac{\partial V}{\partial w} > 0$, ileriye doğru fark almaktayız

$$\begin{aligned}
A_j^{n+1} = & \left\{ 1 - \left[w(y) \sigma_w^2 \psi^2 y^4 \left(\frac{k}{l^2} \right) \right] - r(y)k \right\} A_j^n + \left\{ \frac{1}{2} w(y) \sigma_w^2 \psi^2 y^4 \left(\frac{k}{l^2} \right) \right\} (A_{j+1}^n + A_{j-1}^n) \\
& + \left\{ w(y) \sigma_w^2 \psi^2 y^3 - \left[\kappa(\theta_w - w(y)) - \sigma_w \sqrt{w(y)} \lambda_w \right] \psi y^2 \right\} \left(\frac{k}{l} \right) (A_{j+1}^n - A_j^n) \quad (2.26b)
\end{aligned}$$

Faiz Haddi için Sınır Koşulları

$w=0$ durumunda, ileriye ait ödeme değerlerinin hesabı için iskonto sözkonusudur. Çünkü reel faiz haddine bağlı olarak nominal faiz haddi 0 değildir, $r \neq 0$. Durum değişkenlerinin 0 değeri alması türevlerinin 0 olacağı manasına gelmez. Bu sebeple aşağıdaki denklemler A when $w=0$ iken A değerini bulmak için kullanılmıştır.

$$\kappa \theta_w \frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial t} - rf = 0 \quad (2.27)$$

$$A_j^{n+1} = (1 - r(y)k) A_j^n - \left(\kappa \theta_w \psi y^2 \frac{k}{l} \right) (A_j^n - A_{j-1}^n) \quad (2.28)$$

Dikkat edilirse $w(y)=0$ durumunda (2.28) ile (2.26a) numaralı eşitliklerin aynı olduğu görülür. Temerrüt değeri $D(H,0,t)$, ve mortgage sözleşmesi $V(H,0,t)$ temel kısmi diferansiyel denklemin çözümü olarak verilir

$$\frac{1}{2} H^2 \sigma_H^2 \frac{\partial^2 V}{\partial H^2} + (r-s)H \frac{\partial V}{\partial H} + \kappa \theta_w \frac{\partial V}{\partial w} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0 \quad (2.29)$$

Nihayet, $w \rightarrow \infty$, ve dolayısı ile $r \rightarrow \infty$ durumunda, tüm varlıklar değersiz hale gelir.

$$\lim_{w \rightarrow \infty} A(w) = 0 \quad (2.30)$$

$$\lim_{w \rightarrow \infty} D(H, w) = 0 \quad (2.31)$$

$$\lim_{w \rightarrow \infty} V(H, w) = 0 \quad (2.32)$$

2.3. Cox-Ingersoll-Ross (CIR) Stokastik Prosesinin Parametre Değerlerinin Türkiye Verileri Kullanılarak Tahmin Edilmesi

Projenin bu bölümünde, Şubat 2002 – Kasım 2007 aralığındaki Hazine Bonosu verileri kullanılarak, ülkemizdeki faiz oranlarının zaman içerisindeki hareketini belirleyen Cox-Ingersoll-Ross (CIR, 1985) modeli parametre değerleri tahmin edilmiştir. Bu parametre değerleri “temel ekonomik senaryo” başlığı altında mortgage kontratlarının fiyatlandırılmasında kullanılmıştır. Daha sonra, farklı ekonomik senaryolar başlığı altında, bu parametrelerin alabileceği alternatif değerler göz önüne alınarak mortgage kontratları tekrar tekrar fiyatlandırılmıştır.

CIR modeli (1985) kısa dönem faiz haddinin gerçek olasılık kanunu P altında aşağıdaki şekilde ilerlediğini varsayar.

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma_r r_t^{1/2} dW_t^P \quad (2.33)$$

Burada r kısa dönem faiz haddini, κ uzun dönem ortalamaya dönüş hızını, θ uzun dönem ortalamayı (koşulsuz matematiksel beklenti), σ volatilitiyi ve W da Wiener süreci temsil eder. Tamamen sentetik olan risk nötral olasılık kanunu Q altında stokastik süreç aşağıdaki şekli alır.

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t - \lambda\sigma_r)dt + \sigma_r r_t^{1/2} dW_t^Q \quad (2.34)$$

Burada λ piyasa riskinin fiyatı olarak adlandırılır. Bu denklemin faiz haddi için tek ve pozitif çözümü aşağıdaki şekildedir.

$$r(t) = \theta^* + (r(s) - \theta^*)e^{-\kappa(t-s)} + \sigma_r e^{-\kappa(t-s)} \int_s^t e^{\kappa(u-s)} \sqrt{r(u)} dW(u) \quad (2.35)$$

$$t \geq s \text{ ve } \theta^* = \theta - \lambda\sigma_r.$$

Faiz haddi r 'nin t anındaki şimdiki zaman s üzerindeki koşullu dağılımı ise ;

$$f(r(t), t; r(s), s) = ce^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{q/2} I_q(2(uv)^{1/2}), \quad (2.36)$$

$$c = \frac{2\kappa}{\sigma_r^2(1 - e^{-\kappa(t-s)})},$$

$$u = cr(s)e^{-\kappa(t-s)},$$

$$v = cr(t),$$

$$q = \frac{2\kappa\theta^*}{\sigma_r^2} - 1$$

$I_q(\cdot)$ de q derecesinden birinci sınıf modifiye edilmiş Bessel fonksiyonudur. s anındaki filtrasyona göre faiz haddi ki kare dağılımına sahiptir.

$$r(t) | F_s \sim \chi(2cr(t), 2q + 2, 2u) \quad (2.37)$$

Serbestlik derecesi $2q + 2$ ve merkezden uzaklığı ifade eden parametre $2u$ dur.

Bağımsızlık varsayımı altında, kısa dönem faiz haddi için likelihood (en çok olabilirlik) fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$L(\Theta | r(t)) = \prod_{t=1}^T f(r(t), t; r(s), s) \quad (2.38)$$

Log-likelihood fonksiyonu ise;

$$\text{Log}L(\Theta | r(t)) = (T - 1) \ln c + \sum_{t=1}^T \left\{ -u_t - v_{t+1} + 0.5 \ln \left(\frac{v_{t+1}}{u_t} \right) + \ln \left(I_q \left(2\sqrt{u_t v_{t+1}} \right) \right) \right\} \quad (2.39)$$

O halde parametrelerin $\Theta = \{\kappa, \sigma_r, \theta, \lambda\}$ tahmini, Log-likelihood fonksiyonunun maksimizasyonu yapılarak bulunur;

$$\hat{\Theta} = \arg \max_{\Theta} \text{Log}L(\Theta | r(t)) \quad (2.40)$$

Bu projede, optimizasyon için gerekli başlangıç değerlerin Finkel tarafından geliştirilen Direct optimization algorithm yöntemi ile tespit edilmiştir. Daha sonra bu değerler kullanılarak (3.7) nolu eşitliği maksimize eden parametre değerleri Nelder-Mead algoritması kullanılarak tahmin edilmiştir.

Veri setimiz 28 Şubat 2002 ve 21 Kasım 2007 tarihleri arasındaki dönemi kapsamaktadır. Veri günlük ve 1518 adet gözlemi kapsamaktadır. Veriler hazine bonolarının ikinci el piyasa fiyatlarından elde edilen faiz verim eğrilerinin 3 aylık faiz dilimine gelen kesite ait gözlemlerdir. Parametre tahminleri için veri 5 günlük frekansa getirilmiş kısa dönem faiz haddi modelinin yıllık hesaba göre zaman incrementi 5/260 alınmıştır.

Direct Algoritma Sonuçları:

$\kappa = 0.5617$ $\theta = 0.2354$ $\sigma = 0.1228$ $\lambda = -0.7407$; Log-Likelihood değeri: 1030.2

Nelder-Mead Algoritma Sonuçları:

$\kappa = 0.5560$ $\theta = 0.2370$ $\sigma = 0.1225$ $\lambda = -0.7591$; Log-Likelihood değeri: 1030.2

2.4. Opsiyon Fiyatlama Modeli Nümerik Sonuçlarının Temel Ekonomik Senaryo-Temel Kontrat Yapısı ve Farklı Ekonomik Senaryo-Farklı Kontrat Yapıları İçin Yorumlanması

Proje önerisinde belirtildiği üzere, bu projenin ilk amacı sabit faiz oranlı mortgage kontratlarının Türkiye'deki ekonomik ortamda fiyatlandırılmasıdır. Kredi alan kişi ve kredi veren kurum açısından mortgage kontrat değerini belirleyen iki önemli değişken; faiz oranları ve ipotek altına alınan konutun piyasa değeridir. Faiz oranlarının zaman içerisinde nasıl davrandığını gösteren CIR stokastik prosesinin parametre değerleri 2002-2007 yılları arasındaki Hazine Bonosu verileri kullanılarak hesaplanırken, konut değerlerinin zaman içindeki davranışını gösteren geometrik Brownian hareketi parametre değerleri ise 2003-2007 TÜİK Konut Endeksi verileri kullanılarak elde edilmiştir.

Tablo 1, fiyatlandırılan sabit faiz oranlı mortgage kontratları için temel ekonomik senaryo değerlerini ve temel kontrat özelliklerini göstermektedir.

Tablo 1: Temel Ekonomik Senaryo Parametre Değerleri ve Temel Mortgage Kontrat Özellikleri

Parametreler	Mortgage Kontratı	
	1. Kontrat: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Yok	2. Kontrat: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Dahil
1. Ekonomik Parametreler		
Spot faiz oranı, $r(0)$	10%	10%
Uzun dönemli faiz oranı ortalaması, θ	24%	24%
Uzun dönem faiz oranı ortalamasına dönüş hızı, κ	56%	56%
Konutun kira bedelinin piyasa değerine oranı (servis oranı), δ	4%	4%
Konut fiyatları ve faiz oranları arasındaki korelasyon katsayısı, ρ	0	0
2. Kontrat Özellikleri		
Kontrat vadesi, η	120 ay	120 ay
Konutun piyasa değeri (kontrat başlangıcındaki fiyatı), H	100 000 YTL	100 000 YTL
Kredi veren kurumun aldığı hizmet ücreti, ξ	2%	2%
Krediyi erken ödeme cezası, π	-	2%

Tablo 1'de görüldüğü üzere bu projede iki farklı sabit faiz oranlı kontrat fiyatlandırılmaktadır. 1. kontratta, kredi veren kurumun kişilerden, kredi miktarının %2'si oranında hizmet-dosya ücreti aldığı fakat krediyi erken ödeme cezası almadığı varsayılmıştır. 2. kontratta ise, kredi veren kurumun kişilerden hem %2 oranında hizmet-dosya ücreti aldığı hem de kredinin erken ödenmesi durumunda kredi bakiyesi üzerinden %2 ceza alacağı varsayılmıştır. Her iki kontratta da kredi vadesinin 10 yıl olduğu ve krediyi konu olan konutun piyasa değerinin 100 000 YTL olduğu varsayılmıştır.

1. Gelişme Raporunda detaylı olarak belirtildiği gibi, Tablo 1'deki temel kontrat özellikleri 8 farklı bankadan elde edilen bilgiler doğrultusunda belirlenmiştir. Projenin diğer aşamalarında farklı kontrat özellikleri dikkate alınarak da fiyatlandırma yapılmıştır.

2.4.1. Temel Ekonomik Senaryo- Temel Kontrat Yapısı İçin Fiyatlama Modelinin Nümerik Sonuçları

1. Gelişme raporunda detaylı olarak açıklandığı gibi, konut kredisi veren kuruluş ya da banka açısından mortgage kredisinin değerini (V_L) aşağıdaki gibi modellemek mümkündür.

$$V_L(H, r, t) = A(r, t) - C(H, r, t) - D(H, r, t) \quad (2.41)$$

Bu denklemde; $A(r, t)$ = t zamanındaki borç bakiyesi değeridir. Banka için mortgage kredisinin değerini belirleyen faktör sadece borçlunun geri kalan ödemeleri yani borç bakiyesi değildir. Borçlunun temerrüte düşmesi (D) ya da krediyi erken ödeme (C) opsiyonlarının değeri banka açısından zarar kalemi olarak kredi fiyatlamasına dahil edilmektedir. Borçlunun krediyi geri ödememe riskini azaltmak amacıyla Avrupa ve Amerika'da birçok banka kredi alan kişilerden "Mortgage kredisi sigortası" talep etmektedir. Mortgage sigortası talep eden bankalar için mortgage kredisinin değeri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned} V_L(H, r, t) &= A(r, t) - C(H, r, t) - D(H, r, t) + I(H, r, t) \\ &= A(r, t) - J(H, r, t) + I(H, r, t) \end{aligned} \quad (2.42)$$

$I(H, r, t)$ = Mortgage sigortası değeridir.

Projenin bu bölümünde, temel senaryo parametre değerleri kullanılarak, sabit faiz oranlı mortgage kontratının kredi veren kurum açısından değeri - $[V(H, r, t)]$ - 3 boyutlu grafiklerle gösterilecek ve yorumlanacaktır. Ayrıca, mortgage kontratını oluşturan temel bileşenlerin

- i) $A(r, t)$: t zamanındaki borç bakiyesi,
- ii) $D(H, r, t)$: kredinin geri ödenmeme opsiyonu,
- iii) $C(H, r, t)$: kredinin erken ödenme opsiyonu,
- iv) $I(H, r, t)$: mortgage sigortası piyasa değerlerine ait nümerik sonuçlar da 3-boyutlu grafikler yardımıyla yorumlanacaktır. 3-boyutlu grafiklerin çizilmesi ve yorumlanmasındaki amaç; kısmi diferansiyel denklemin nümerik çözümünün grid sistemde akıcı (smooth) olup olmadığını görmek ve nümerik sonuçların finansal anlamda tutarlı olup olmadığını sorgulamaktır.

Şekil 1-A ve 1-B iki farklı mortgage kontratı için (erken ödeme cezasını dahil eden ve erken ödeme cezası uygulamayan kontratlar) kredi geri ödemelerinin bugünkü piyasa değerini göstermektedir. Fiyatlama modelinde kredi geri ödemelerinin piyasa değeri - $A(r, t)$ - faiz oranlarının bir fonksiyonu olarak tanımlanmıştır. Diğer bir deyişle, kredi geri ödemeleri miktarı konut fiyatlarına bağlı olmadığından, konut fiyatlarındaki değişimler (H) geri ödeme değerini etkilememektedir.

Şekil 1A-B'de görüldüğü üzere, faiz oranları arttıkça (0.01'den 0.90'a) mortgage geri ödemelerinin bugünkü değeri azalmaktadır. Bunun nedeni, faiz oranlarındaki artış bir yandan kredinin kupon değerini (kredi faiz oranları) ve dolayısıyla geri ödenecek kredi

miktarını arttırırken, diğer yandan ileri tarihteki kredi ödemelerinin bugüne indirgenmesinde kullanılan iskonto oranını da arttıracağından, mortgage kredisi geri ödemelerinin bugünkü değeri artan faiz ile birlikte azalmaktadır.

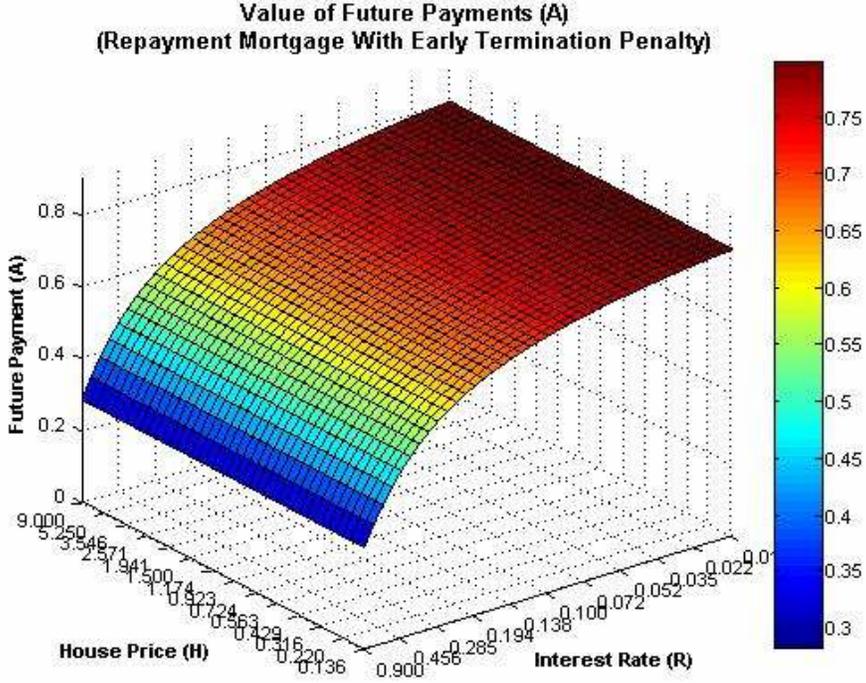
Şekil 2-A ve 2-B iki farklı mortgage kontratı için (erken ödeme cezasını dahil eden ve erken ödeme cezası uygulamayan kontratlar) kredinin temerrüt (geri ödenmeme) opsiyonu piyasa değerini göstermektedir. Fiyatlama modelinde temerrüt opsiyonunun değeri - $[D(H,r,t)]$ - konut fiyatlarının ve faiz oranlarının bir fonksiyonu olarak tanımlanmıştır.

Her iki şekilde de görüldüğü üzere, konut fiyatları belirli bir seviyenin altına indiği zaman kişilerin temerrüt etme olasılığı hızla artmakta ve temerrüt opsiyonun değeri hep pozitif değer almaktadır. Konut fiyatlarının yüksek olduğu değerlerde ise kişilerin temerrüt riski yok olmakta ve temerrüt opsiyonunun piyasa değeri sıfır olmaktadır. Şekil 2-A ve 2-B'de görüldüğü üzere, temerrüt opsiyonunun en yüksek değerlere ulaştığı zaman; konut fiyatlarının çok düşük olduğu ve aynı zamanda faiz oranlarının da azaldığı ortamlardır. Şekil 1-A ve B'de tartışıldığı gibi, faiz oranlarındaki azalması mortgage kredisi geri ödemelerinin bugünkü değeri (A) ve dolayısıyla mortgage kontrat değerinde (V) azalmalara yol açmaktadır. Mortgage kontrat değerinin (V) konut piyasa değeri (H) karşısında değer kaybetmesi kişileri temerrüte zorlayan bir durum oluşturmaktadır. Bu nedenle, temerrüt opsiyonu pozitif olduğu her değer için faiz oranlarındaki artış ile ters orantılı bir ilişki sergilemektedir.

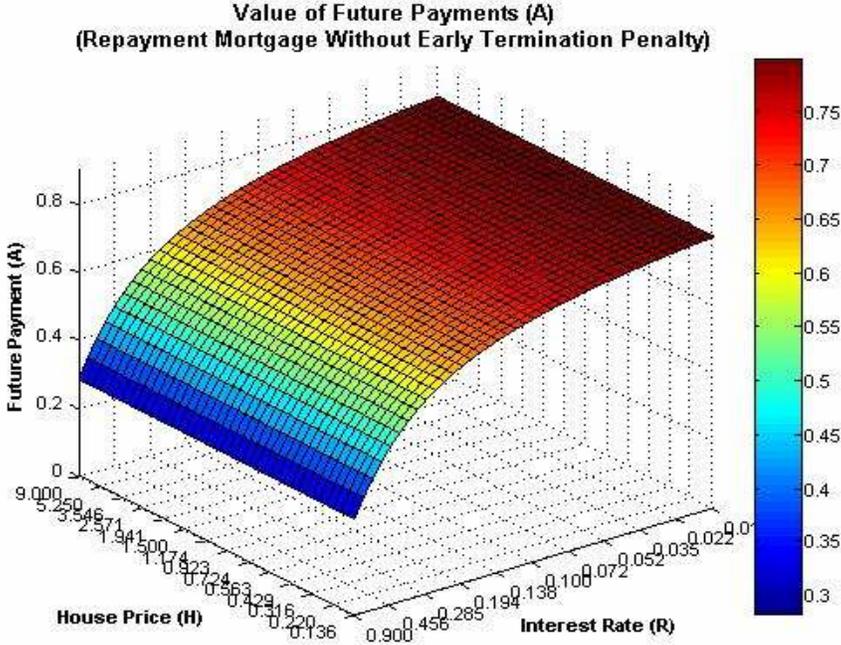
Temerrüt opsiyon değeri ile ilgili bu sonuç, Amerika'da 2006'da başlayıp 2008'de devam eden ve günümüzdeki global krize yol açan "sub-prime mortgage" krizinin temel nedeni ile çelişki içinde görünse de aslında yaşanan durumu destekleyici özelliktedir. Amerika'da temerrüt oranının en yüksek seviyelere çıktığı ortam; konut fiyatlarının çok düşük olduğu ve aynı zamanda faiz oranlarının da yükseldiği ortamdır. Amerika'da 2005-2006 yılı öncesinde kredi verme standartlarındaki düşüş, kredi almanın kolaylaştırılması (düşük down payment, düşük servis ücreti), ve konut fiyatlarında uzun zamandır gözlenen artış trendi, kişilerin konut kredisi almalarını özendirici faktörler olmuştur. Kredi almak isteyen kişiler mortgage kredi ödemelerinde sorun yaşasalar bile, kredilerini kolaylıkla ve çok daha iyi koşullarda re-finance edebileceklerini düşünmüşlerdir. Fakat beklenenin tersine, 2006 ve 2007 yıllarında faiz oranlarının sürekli bir artış göstermesi ile birlikte, Amerika'nın bir çok bölgesinde konut fiyatlarında gözle görülür düşüşler yaşanmıştır. Artan faiz oranları ve azalan konut fiyatlarıyla, kişilerin mortgage kredilerini re-finansman etmeleri oldukça zorlaşmıştır.

Beklentinin aksine konut fiyatlarının azalmasıyla ve **değişken faiz oranlı mortgage kredilerin** oldukça yüksek faiz oranı belirlemesiyle; çok sayıda temerrüt (kredinin geri ödenmemesi) ve ipotekli konutlara icra yoluyla el koyulmasına (foreclosure) olayı yaşanmıştır. Yukarıda da belirtildiği üzere, artan faizler özellikle değişken faiz oranlı mortgage kredilerinin temerrüte düşmesine neden olmuştur. Bu projede fiyatlanan kontratlar sabit faiz oranlı mortgage kredileridir ve artan faiz oranları temerrüt riskini değişken faiz oranlı kontratlardaki gibi tetiklememektedir.

Şekil 1-A: Kredi Geri Ödemelerinin Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Dahil)



Şekil 1-B: Kredi Geri Ödemelerinin Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Yok)

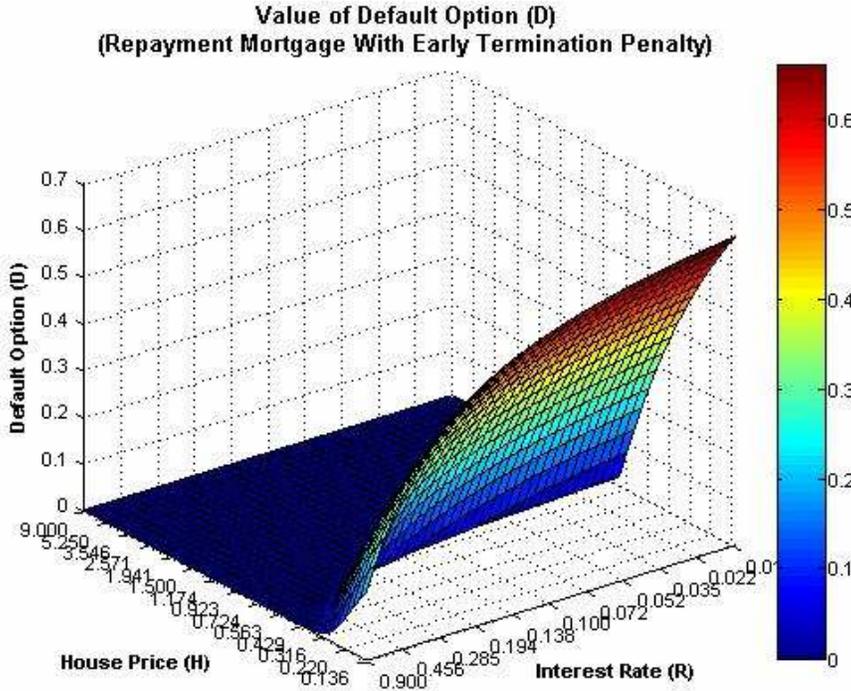


Şekil 3-A ve 3-B iki farklı mortgage kontratı için (erken ödeme cezasını dahil eden ve erken ödeme cezası uygulamayan kontratlar) mortgage sigortası piyasa değerini göstermektedir. Fiyatlama modelinde mortgage sigortası değeri - $[I(H,r,t)]$ - konut fiyatlarının ve faiz oranlarının bir fonksiyonu olarak tanımlanmıştır.

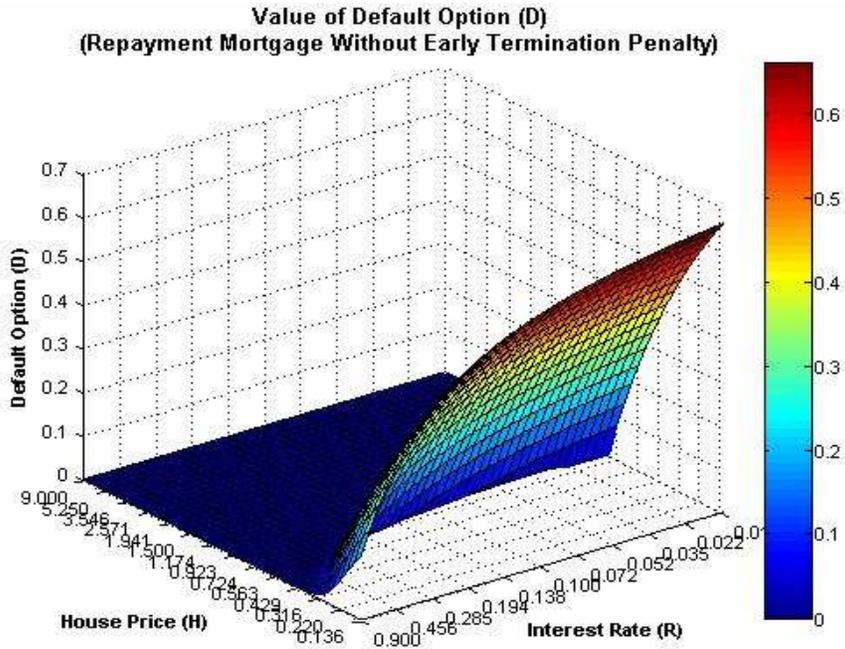
Her iki şekilde de görüldüğü gibi, konut piyasa değerinin belirli bir seviyenin üzerinde olduğu durumlarda kredi alan kişilerin temerrüt riski ortadan kalkmakta ve dolayısıyla mortgage sigortası da temerrüt opsiyonu gibi sıfır değerini almaktadır. Diğer yandan, konut fiyatları azaldıkça temerrüt opsiyonu piyasa değeri artmakta ve buna bağlı olarak da mortgage sigortasının piyasa değeri de artış göstermektedir.

Bununla birlikte, konut fiyatlarının oldukça düşük olduğu ortamlarda faiz oranlarındaki değişim (0.90 - 0.01 aralığı) mortgage sigortası piyasa değerini etkilememektedir. Bunun nedeni ise, faiz oranları artsa da azalsa da kredi alan kişi krediyi erken ödeme opsiyonunu değil temerrüt opsiyonunu kullanmayı tercih edecektir. Çünkü konut fiyatlarının çok düşük olduğu ortamda kredinin re-finasmanı her hangi bir çözüm oluşturmayacaktır.

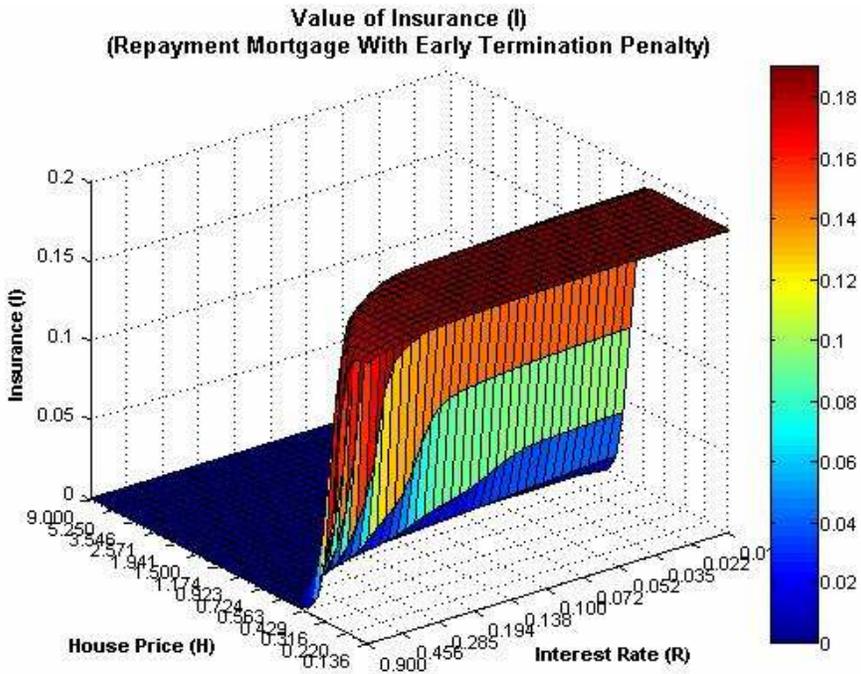
Şekil 2-A: Temerrüt Opsiyonu Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Dahil)



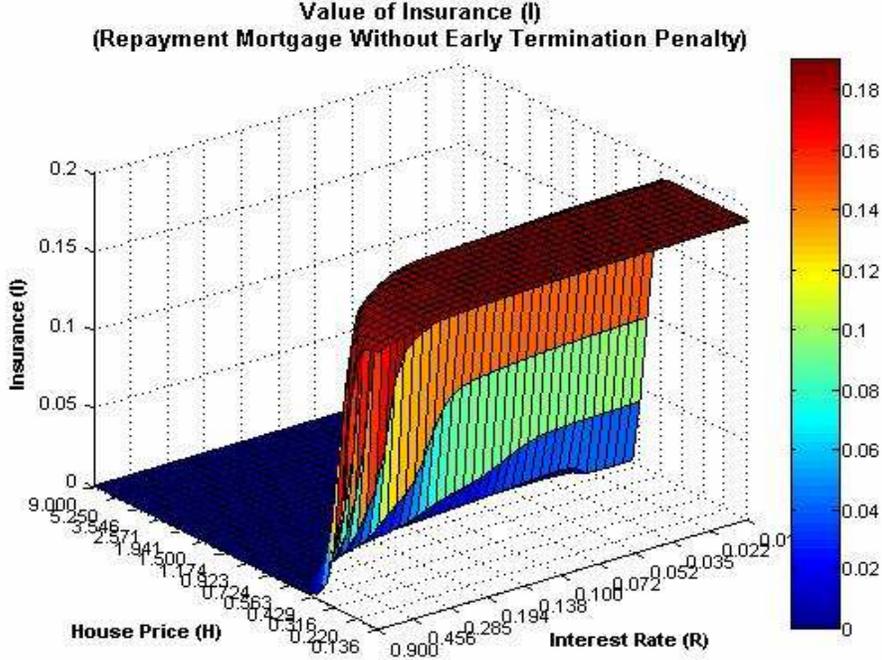
Şekil 2-B: Temerrüt Opsiyonu Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Yok)



Şekil 3-A: Mortgage Sigortası Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Dahil)



Şekil 3-B: Mortgage Sigortası Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Yok)



Şekil 4-A ve 4-B iki farklı mortgage kontratı için (erken ödeme cezasını dahil eden ve erken ödeme cezası uygulamayan kontratlar) kredinin erken ödenme (prepayment) opsiyonu piyasa değerini göstermektedir. Fiyatlama modelinde erken ödeme opsiyonunun değeri $-[C(H,r,t)]$ - konut fiyatlarının ve faiz oranlarının bir fonksiyonu olarak tanımlanmıştır.

Her iki şekilde de görüldüğü üzere, konut piyasa değerleri (H) düşük değerler aldığımda, kredinin erken ödeme opsiyonu faiz oranlarındaki değişimden bağımsız olarak sıfır değeri almaktadır. Diğer bir deyişle, konut fiyatlarında düşüş gözlemlendikçe, erken ödeme opsiyonu faiz oranlarındaki değişimlere bağımlı olmaktan çıkmaktadır. Bunun nedeni de, konut fiyatları belirli bir seviyenin altına düştüğünde kredi alan kişinin temerrüt opsiyonunu kullandığı ve erken ödeme opsiyonunun ortadan kalktığıdır.

Konut piyasa değerleri kişiyi temerrüte düşürmeyecek bir seviyede olduğunda ise, erken ödenme opsiyonunun piyasa değeri faiz oranlarındaki değişimlere bağlıdır. Şekil 4-A ve 4-B'de görüldüğü gibi, piyasa faiz oranları azaldıkça (0.90'dan 0.01'e doğru azaldıkça) kişinin mevcut mortgage kredi faizi, piyasa ortamında yüksek seviyede kalacak ve kişi aldığı kredinin re-finsmanını talep edecektir. Diğer bir deyişle krediyi erken kapatma yolunu seçecektir. Sonuç olarak, piyasa faiz oranları azaldıkça alınan kredinin erken ödeme opsiyonunun piyasa değeri de artmaktadır.

Son olarak, sabit faiz oranlı mortgage kontratının kredi veren kurum açısından değerini $-[V(H,r,t)]$ - gösteren 3-boyutlu grafikler Şekil 5-A ve 5-B'de verilmektedir. Yukarıda belirtildiği gibi, kredi veren kurum (banka) için mortgage kontratının piyasa değeri hem

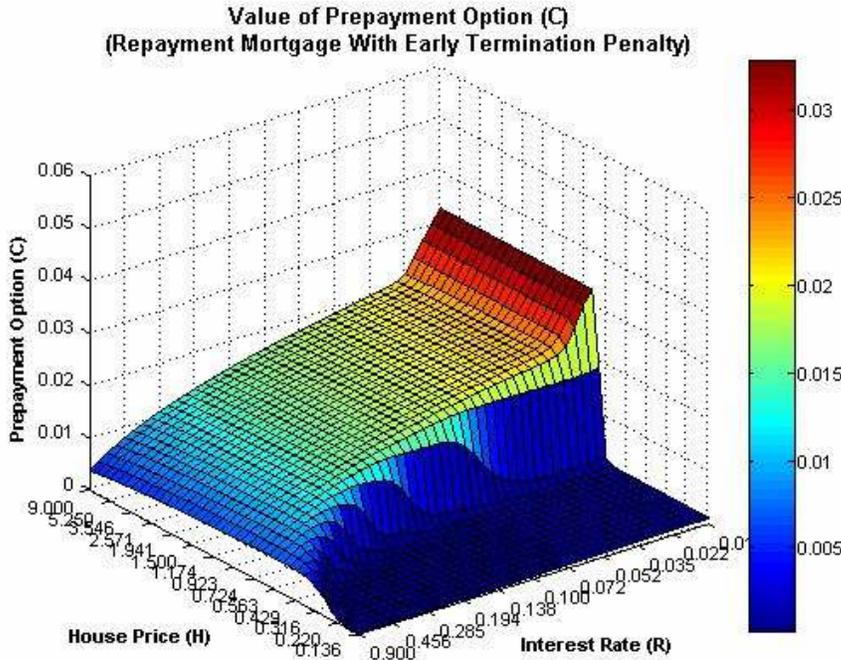
kredi borç bakiyesinin bugünkü değerine (A) hem de kredinin geri ödenmemesi (D) ve erken ödenmesi (C) opsiyonu değerlerine bağlıdır.

Şekil 5-A ve 5-B'de görüldüğü üzere, konut fiyatlarının oldukça düşük olduğu ortamlarda kredinin geri ödenmeme riski çok yükselmektedir. Böylece kredinin geri ödenmeme opsiyon değeri artmakta ve kişilerin temerrüt riskinin artması ile mortgage kontratının banka için piyasa değeri de azalmaktadır. Temerrüt riskinin çok yüksek olduğu bu durumda, faiz oranlarındaki değişim mortgage kontrat değerini etkilememektedir. Bununla birlikte, konut piyasa değeri arttıkça, temerrüt opsiyon değeri (temerrüt riski) azalacak ve mortgage kontratının piyasa değerinde artış görülecektir.

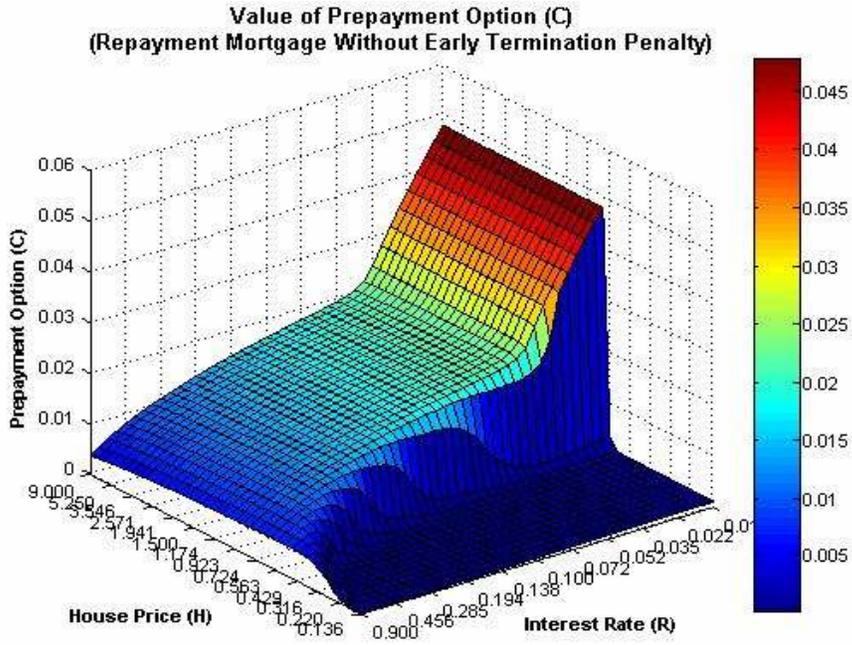
Konut piyasa değerleri kişiyi temerrüte düşürmeyecek bir seviyede olduğunda ise, mortgage kontratının piyasa değeri faiz oranlarındaki değişimlere bağlıdır. Şekil 5-A ve 5-B'de görüldüğü gibi, piyasa faiz oranları arttıkça (0.01'den 0.90'a doğru arttıkça) mortgage kontrat değeri azalmaktadır. Faiz oranlarındaki artış miktarı 2 farklı mortgage kontratı bileşeni değerini etkilemektedir. Bunlar: 1) kredi geri ödemelerinin piyasa değeri (A) 2) kredinin erken ödenme opsiyon değeridir (C).

Şekil 1A-B'de tartışıldığı üzere, faiz oranları arttıkça mortgage geri ödemelerinin bugünkü değeri (A) azalmaktadır. Diğer yandan, faiz oranlarındaki artış kredinin erken ödenme opsiyon değerini (C) de azaltmaktadır. Bir finansal türev aracı olarak kabul edilen erken ödeme opsiyonu değerindeki artış mortgage geri ödemelerindeki artışa baskın olamadığı için, mortgage kontrat değeri [$V = A - D - C$] azalmaktadır.

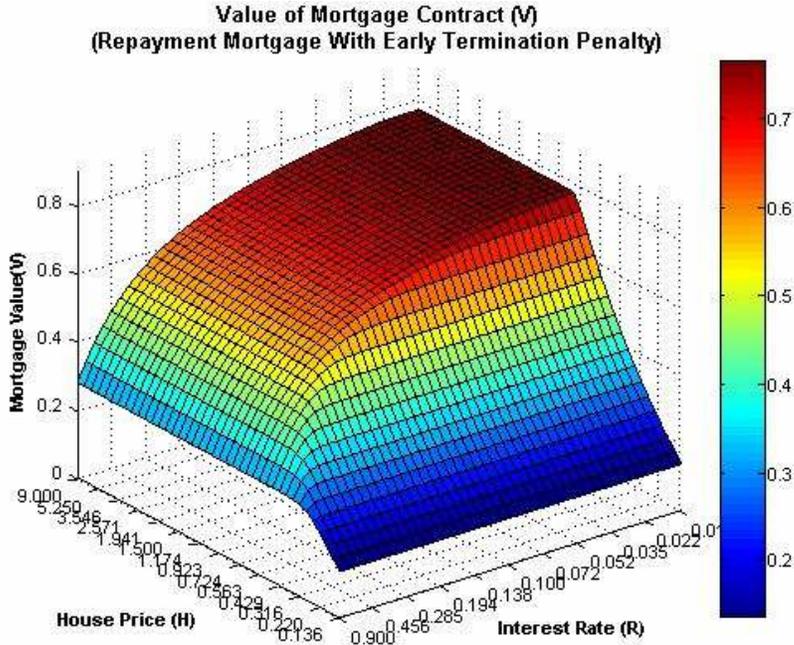
Şekil 4-A: Krediyi Erken Ödeme Opsiyonu Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Dahil)



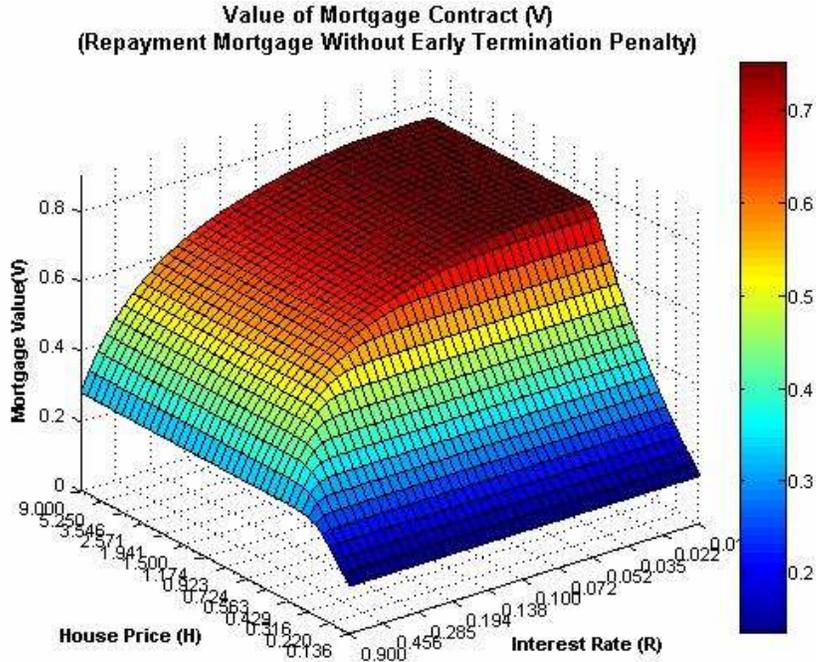
Şekil 4-B: Krediyi Erken Ödeme Opsiyonu Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Yok)



Şekil 5-A: Mortgage Kontratının Kredi Veren Kuruluş için Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Dahil)



Şekil 5-B: Mortgage Kontratının Kredi Veren Kuruluş için Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Yok)



2.4.2. Temel Ekonomik Senaryo - Farklı Kontrat Yapıları İçin Fiyatlama Modelinin Nümerik Sonuçları

Mortgage kontratının kabul edilebilir bir kontrat olması için, hem kredi alan kişi hem de kredi veren kuruluş açısından adil/eşitlikçi bir anlaşmayı içermesi gerekmektedir. Bu koşul, finans literatüründe “arbitrajsız ortam” (no arbitrage) olarak tanımlanmaktadır. Arbitrajsız koşula göre; takas işleminin gerçekleştirilebilmesi için takas edilen varlığın değeri her iki taraf için de eşit olmalıdır.

Mortgage kredisinin alındığı tarihte ($t=0$ anında), mortgage kredisi piyasa değerinin her iki taraf için de (banka ve kredi alan kişi) eşit değer alması için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekmektedir:

1. Hizmet-Dosya Ücreti ve Mortgage Sigortasının Olmadığı Kontratlarında Arbitrajsız Ortam Koşulu:

$$V_B(H(0), r(0), 0) = L \quad (2.43)$$

Yukarıdaki denklem, $t=0$ anındaki mortgage kontrat değerinin (V_B) alınan kredi miktarına (L) eşit olması gerektiğini göstermektedir. Bu kontrat çeşidinde, $t=0$ anında bankanın pozisyonu $V_B(H(0), r(0), 0) - L$ değerine eşit olacaktır.

2. Hizmet-Dosya Ücretinin Alındığı, Mortgage Sigortasının Olmadığı Kontratlarında Arbitrajsız Ortam Koşulu:

$$V_B(H(0), r(0), 0) = (1 - \zeta)L \quad (2.44)$$

Yukarıdaki denklem, $t=0$ anındaki mortgage kontrat değerinin (V_B), hizmet-dosya ücreti (ζ) düşüldükten sonra geriye kalan kredi miktarına $[(1 - \zeta)L]$ eşit olması gerektiğini göstermektedir. Bu kontrat çeşidinde, $t=0$ anında bankanın pozisyonu $V_B(H(0), r(0), 0) - (1 - \zeta)L$ değerine eşit olacaktır.

3. Hizmet-Dosya Ücretinin Alınmadığı Fakat Mortgage Sigortasının Olduğu Kontratlarında Arbitrajsız Ortam Koşulu:

$$V_B(H(0), r(0), 0) + I(H(0), r(0), 0) = L$$

$$V_L(H(0), r(0), 0) = L \quad (2.45)$$

Yukarıdaki denkleme göre, mortgage sigortası (I) talep eden bankalar için $t=0$ anındaki mortgage kontratı değerinin $[V_L = V_B + I]$, $t=0$ anındaki toplam kredi miktarına (L) eşit olması gerektiğini göstermektedir. Bu kontrat çeşidinde, $t=0$ anında bankanın pozisyonu $V_B(H(0), r(0), 0) + I(H(0), r(0), 0) - L$ ye eşit olacaktır.

4. Hizmet-Dosya Ücretinin Alındığı ve Mortgage Sigortasının Olduğu Kontratlarında Arbitrajsız Ortam Koşulu:

$$V_B(H(0), r(0), 0) + I(H(0), r(0), 0) = (1 - \zeta)L \quad (2.46)$$

$$V_L(H(0), r(0), 0) = (1 - \zeta)L$$

Yukarıdaki denkleme göre, mortgage sigortası (I) talep eden ve hizmet-dosya ücreti alan bankalar için $t=0$ anındaki mortgage kontratı değerinin $[V_L = V_B + I]$, $t=0$ anında hizmet-dosya ücreti (ζ) düşüldükten sonra geriye kalan kredi miktarına $[(1 - \zeta)L]$ eşit olması gerektiğini göstermektedir. Bu kontrat çeşidinde, $t=0$ anında bankanın pozisyonu $V_B(H(0), r(0), 0) + I(H(0), r(0), 0) - (1 - \zeta)L$ değerine eşit olacaktır.

Yukarıda tanımlanan 4 farklı kontrattaki arbitrajsız koşul eşitliğini sağlayan, diğer bir deyişle denge durumunu sağlayan optimal mortgage faiz oranlarının hesaplanması mümkündür.

Tablo 2, Tablo 3 ve Tablo 4 üç farklı kredi miktarı-konut fiyatı rasyosunu göz önüne alarak, yukarıda tanımlanan her bir kontrat yapısı için kredi veren bankanın pozisyonunu ve arbitrajsız koşulu sağlayan optimal mortgage faiz oranlarını göstermektedir.

Tablo 2, mortgage kredi miktarının konut fiyatına oranının (Loan-to-Value, LTV Ratio) %75 olduğu varsayımı altındaki fiyatlama sonuçlarını vermektedir. Türkiye'deki birçok bankada verilen kredi miktarı konut piyasa değerinin maksimum %75'ini oluşturmaktadır. Tablo 2 Panel A, kredi erken ödeme cezasının olmadığı kontratlar, Tablo 2 Panel B ise, %2 oranında erken ödeme cezası olan kontratlar için fiyatlama sonuçlarını vermektedir.

Her iki tabloda da temerrüt opsiyonu değerlerine baktığımızda, opsiyon değerlerinin 0 ile 3 arasında değiştiğini görmekteyiz. Bu durumda, %75'lik kredi miktarı temerrüt açısından oldukça risksiz görülmekte, dolayısıyla mortgage sigortası değerleri de oldukça küçük değerler almaktadır.

Mortgage kredisi verirken, %2 oranında hizmet-dosya ücreti alıp, mortgage sigortasına sahip olmayan bankaların pozisyonu $[V_B-(1-\xi)L]$ ile, hem %2 hizmet-dosya ücreti alıp hem de mortgage sigortasına sahip olan bankanın pozisyonunu $[V_B-(1-\xi)L+I]$ karşılaştırdığımızda, arbitrajsız koşulu sağlayan optimal faiz oranının her iki kontrat için de yıllık %19.52 - %20 aralığında yer aldığını göstermekteyiz (Tablo 2-B). Bunun nedeni, mortgage sigorta değerinin %75'lik kredi oranı için oldukça küçük değerler almasıdır. Bu sonuçlara göre, temel ekonomik koşullar altında, %75'lik kredi veren bankalar için mortgage sigortası alınması bankanın pozisyonuna herhangi bir pozitif değer katmamaktadır.

Elde edilen nümerik sonuçlara göre, konut piyasa değerinin %75'ini 10 yıl vadeli mortgage kredisi olarak veren bankalar için, optimal mortgage faiz oranları, aylık %1.63 - %1.67 aralığında değişmektedir. Mortgage portföyü büyük 8 farklı bankadan elde ettiğimiz verilere baktığımızda, Eylül 2007 tarihi itibarıyla, bankaların 10 yıl vadeli mortgage kredileri için uyguladığı aylık mortgage faiz oranlarının %1.26 - %1.53 aralığında olduğunu görmekteyiz. Bu durumda, ülkemizdeki 2002-2007 dönemi ekonomik koşulları dikkate alındığında, bankaların olması gerekenden daha düşük faiz oranı uyguladığı sonucuna varabiliriz. Birincil mortgage piyasasının pürüzsüz işleyebilmesi için aylık mortgage faiz oranlarının %0.9 - %1.0 aralığında olması gerektiği gerçeğini göz önüne alırsak, ülkemizdeki ekonomik ortamın, birincil mortgage piyasasının pürüzsüz, verimli ve amacına uygun olarak işleyebilmesi için yeterli olan koşulları henüz sağlamadığı sonucuna varmak mümkündür.

Tablo 3, mortgage kredi miktarının konut fiyatına oranının (LTV Ratio) %95 olduğu varsayımı altındaki fiyatlandırma sonuçlarını vermektedir. Türkiye'deki birçok bankada kredi miktarı konut piyasa değerinin maksimum %75'ini oluşturmasına rağmen, Finans Bank örneğinde gördüğümüz gibi, kredi miktarı konut değerinin %95 hatta %100'ünü oluşturmaktadır (1. Gelişme Raporu sonuçları). Tablo 3 Panel A, kredi erken ödeme cezasının olmadığı kontratlar, Tablo 3 Panel B ise, %2 oranında erken ödeme cezası olan kontratlar için fiyatlandırma sonuçlarını vermektedir.

Her iki tabloda da temerrüt opsiyonu değerlerinin 0 ile 1432 arasında değiştiğini görmekteyiz. Bu durumda, %95'lik kredi miktarı temerrüt açısından riskli görülmekte, dolayısıyla mortgage sigortası değerleri de oldukça büyük değerler alabilmektedir.

Mortgage kredisi verirken, %2 oranında hizmet-dosya ücreti alıp, mortgage sigortasına sahip olmayan bankaların pozisyonu $[V_B-(1-\xi)L]$ ile, hem %2 hizmet-dosya ücreti alıp hem de mortgage sigortasına sahip olan bankanın pozisyonunu $[V_B-(1-\xi)L+I]$ karşılaştırdığımızda, arbitrajsız koşulu sağlayan optimal faiz oranının mortgage sigortasına sahip olan banka için yıllık %19.00- %19.44, sigorta almayan banka içinse %19.44 ile %20.00 aralığında değiştiğini görmekteyiz (Tablo 3-B). Bu sonuçlara göre, temel ekonomik koşullar altında, %95'lik kredi veren bankalardan mortgage sigortasına sahip olanlar çok daha düşük bir kredi faiz oranı uygulayarak aynı kontrat değerine sahip olabilmektedir. Bununla birlikte, Tablo 3-B'de görüldüğü üzere, yıllık %19.44 kredi faizi uygulayan bir bankanın, mortgage sigortası aldığı takdirde pozisyon değeri pozitif bir değer alırken $[V_B-(1-\xi)L+I = 10]$, mortgage sigortası almadığı durumdaki pozisyonu $[V_B-(1-\xi)L = -590]$ negatif değer almaktadır.

Sonuç olarak, mortgage sigortası alınması özellikle yüksek kredi oranları için (%95 gibi) bankanın pozisyonuna pozitif bir değer katmaktadır.

Son olarak, Tablo 4, mortgage kredi miktarının konut fiyatına oranının (LTV Ratio) %100 olduğu varsayımı altındaki fiyatlama sonuçlarını vermektedir. Mortgage kredisi verirken, %2 oranında hizmet-dosya ücreti alıp, mortgage sigortasına sahip olmayan bankaların pozisyonu $[V_B - (1 - \xi)L]$ ile, hem %2 hizmet-dosya ücreti alıp hem de mortgage sigortasına sahip olan bankanın pozisyonunu $[V_B - (1 - \xi)L + I]$ karşılaştırdığımızda, arbitrajsız koşulu sağlayan optimal faiz oranının mortgage sigortasına sahip olan banka için yıllık %19.28, sigorta almayan banka içinse %20 ile %21.00 aralığında değiştiğini görmekteyiz (Tablo 4-A).

Tablo 4-B, %2 oranında erken ödeme cezasının alındığı kontrat değerlerini göstermektedir. Bu tablodaki sonuçlara göre, mortgage kredisi verirken, %2 oranında hizmet-dosya ücreti alıp, mortgage sigortasına sahip olmayan bankaların durumunda $[V_B - (1 - \xi)L]$ optimal bir mortgage faiz oranı belirlenmemektedir. Bunun nedeni de, konut piyasa değerinin %100'ünü kredi olarak veren bir bankanın mortgage sigortası almadan optimal bir faiz oranı uygulamasının mümkün olmadığıdır.

EK-1'deki Şekil 1,2,3 ve 4; yukarıda tanımlanan dört farklı kontrat yapısı için kredi veren bankanın pozisyonunu ve arbitrajsız koşulu sağlayan optimal mortgage faiz oranlarını göstermektedir. Bu grafikler, mortgage kredi miktarının konut fiyatına oranının (LTV Ratio) %95 olduğu varsayımı altındaki sonuçlardır.

Tablo 2-A: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Erken Ödeme Cezası =0%)

Kredi Miktarının Konut Fiyatına Oranı (LTV Ratio) = %75

Kontrat Faiz Oranı (c)	Kredi geri ödemeleri (A)	Mortgage Kontrat değeri (V)	Temerrüt opsiyonu değeri (D)	Erken ödeme opsiyonu değeri (C)	Mortgage sigortası değeri (I)	Kredi veren bankanın aldığı pozisyonun değeri			
						$V_B - L$	$V_B - (1-\xi)L$	$V_B - L + I$	$V_B - (1-\xi)L + I$
16.00%	66464	64805	0	1659	0	-10195	-8695	-10195	-8695
17.00%	68958	67234	0	1724	1	-7766	-6266	-7766	-6266
18.00%	71492	69698	1	1794	1	-5302	-3802	-5301	-3801
19.00%	74066	72165	1	1900	2	-2835	-1335	-2833	-1333
19.57%	75557	73498	2	2057	2	-1502	-2	-1500	0
20.00%	76678	74338	2	2338	2	-662	838	-660	840
21.00%	79327	74995	0	4332	0	-5	1495	-5	1495
22.00%	82011	75000	0	7012	0	0	1500	0	1500
23.00%	84730	74994	0	9736	0	-6	1494	-6	1494

The following parameters were used in the construction of this table: the arrangement fee (ξ) is 2%; the spot interest rate ($r(0)$) is 10%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the interest rate volatility (σ) is 12%; the house price volatility (ν) is 9%; the house service flow (δ) is 4%; LTV ratio is 75% and the correlation coefficient (ρ) is 0.

Tablo 2-B: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Erken Ödeme Cezası = %2)

Kredi Miktarının Konut Fiyatına Oranı (LTV Ratio) = %75

Kontrat Faiz Oranı (c)	Kredi geri ödemeleri (A)	Mortgage Kontrat değeri (V)	Temerrüt opsiyonu değeri (D)	Erken ödeme opsiyonu değeri (C)	Mortgage sigortası değeri (I)	Kredi veren bankanın aldığı pozisyonun değeri			
						$V_B - L$	$V_B - (1-\xi)L$	$V_B - L + I$	$V_B - (1-\xi)L + I$
16.00%	66464	64806	0	1658	0	-10194	-8694	-10194	-8694
17.00%	68958	67237	0	1721	1	-7763	-6263	-7762	-6262
18.00%	71492	69707	1	1785	1	-5293	-3793	-5292	-3792
19.00%	74066	72208	1	1857	2	-2792	-1292	-2790	-1290
19.52%	75412	73497	2	1913	3	-1503	-3	-1501	-1
20.00%	76678	74656	3	2019	3	-344	1156	-341	1159
21.00%	79327	76417	3	2907	2	1417	2917	1419	2919
22.00%	82011	76499	0	5512	0	1499	2999	1499	2999
23.00%	84730	76489	0	8241	0	1489	2989	1489	2989

The following parameters were used in the construction of this table: the arrangement fee (ξ) is 2%; the early termination penalty (π) is 2%; the spot interest rate ($r(0)$) is 10%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the interest rate volatility (σ) is 12%; the house price volatility (ν) is 9%; the house service flow (δ) is 4%; LTV ratio is 75% and the correlation coefficient (ρ) is 0.

Tablo 3-A: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Erken Ödeme Cezası = %0)

Kredi Miktarının Konut Fiyatına Oranı (LTV Ratio) = %95

Kontrat Faiz Oranı (c)	Kredi geri ödemeleri (A)	Mortgage Kontrat değeri (V)	Temerrüt opsiyonu değeri (D)	Erken ödeme opsiyonu değeri (C)	Mortgage sigortası değeri (I)	Kredi veren bankanın aldığı pozisyonun değeri			
						$V_B - L$	$V_B - (1-\xi)L$	$V_B - L + I$	$V_B - (1-\xi)L + I$
16.00%	84188	82067	30	2092	91	-12933	-11033	-12842	-10942
17.00%	87347	85117	71	2158	174	-9883	-7983	-9708	-7808
18.00%	90557	88175	170	2212	322	-6825	-4925	-6503	-4603
19.00%	93817	91179	372	2265	488	-3821	-1921	-3333	-1433
19.47%	95382	92508	571	2303	592	-2492	-592	-1900	0
20.00%	97126	93780	820	2526	673	-1220	680	-547	1353
21.00%	100481	94995	763	4723	442	-5	1895	437	2337
22.00%	103881	94988	0	8893	0	-12	1888	-12	1888
23.00%	107324	94988	0	12336	0	-12	1888	-12	1888

The following parameters were used in the construction of this table: the arrangement fee (ξ) is 2%; the spot interest rate ($r(0)$) is 10%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the interest rate volatility (σ) is 12%; the house price volatility (ν) is 9%; the house service flow (δ) is 4%; LTV ratio is 95% and the correlation coefficient (ρ) is 0.

Tablo 3-B: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Erken Ödeme Cezası = %2)

Kredi Miktarının Konut Fiyatına Oranı (LTV Ratio) = %95

Kontrat Faiz Oranı (c)	Kredi geri ödemeleri (A)	Mortgage Kontrat değeri (V)	Temerrüt opsiyonu değeri (D)	Erken ödeme opsiyonu değeri (C)	Mortgage sigortası değeri (I)	Kredi veren bankanın aldığı pozisyonun değeri			
						$V_B - L$	$V_B - (1-\xi)L$	$V_B - L + I$	$V_B - (1-\xi)L + I$
16.00%	84188	82068	30	2090	91	-12932	-11032	-12840	-10940
17.00%	87347	85121	71	2154	174	-9879	-7979	-9704	-7804
18.00%	90557	88186	170	2201	322	-6814	-4914	-6492	-4592
19.00%	93817	91223	376	2218	491	-3777	-1877	-3287	-1387
19.44%	95267	92510	576	2181	600	-2490	-590	-1890	10
20.00%	97126	94042	904	2180	724	-958	942	-234	1666
21.00%	100481	96217	1432	2832	789	1217	3117	2006	3906
22.00%	103881	96898	944	6039	396	1898	3798	2294	4194
23.00%	107324	96886	0	10438	0	1886	3786	1886	3786

The following parameters were used in the construction of this table: the arrangement fee (ξ) is 2%; the early termination penalty (π) is 2%; the spot interest rate ($r(0)$) is 10%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the interest rate volatility (σ) is 12%; the house price volatility (ν) is 9%; the house service flow (δ) is 4%; LTV ratio is 95% and the correlation coefficient (ρ) is 0.

Tablo 4-A: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Erken Ödeme Cezası = %0)

Kredi Miktarının Konut Fiyatına Oranı (LTV Ratio) = % 100

Kontrat Faiz Oranı (c)	Kredi geri ödemeleri (A)	Mortgage Kontrat değeri (V)	Temerrüt opsiyonu değeri (D)	Erken ödeme opsiyonu değeri (C)	Mortgage sigortası değeri (I)	Kredi veren bankanın aldığı pozisyonun değeri			
						V_B-L	$V_B-(1-\xi)L$	V_B-L+I	$V_B-(1-\xi)L+I$
16.00%	88619	86343	103	2173	317	-13657	-11657	-13340	-11340
17.00%	91944	89495	235	2214	568	-10505	-8505	-9937	-7937
18.00%	95323	92582	585	2156	1078	-7418	-5418	-6341	-4341
19.00%	98755	95436	1281	2037	1701	-4564	-2564	-2863	-863
19.28%	99723	96186	1545	1992	1814	-3814	-1814	-2000	0
20.00%	102238	97884	2801	1553	1921	-2116	-116	-195	1805
21.00%	105770	98942	6221	607	1944	-1058	942	886	2886
22.00%	109348	99091	9456	802	1999	-909	1091	1089	3089
23.00%	112973	99104	12657	1212	2064	-896	1104	1168	3168

The following parameters were used in the construction of this table: the arrangement fee (ξ) is 2%; the early termination penalty (π) is 2%; the spot interest rate ($r(0)$) is 10%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the interest rate volatility (σ) is 12%; the house price volatility (ν) is 9%; the house service flow (δ) is 4%; LTV ratio is 100% and the correlation coefficient (ρ) is 0.

Tablo 4-B: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Erken Ödeme Cezası = %2)

Kredi Miktarının Konut Fiyatına Oranı (LTV Ratio) = % 100

Kontrat Faiz Oranı (c)	Kredi geri ödemeleri (A)	Mortgage Kontrat değeri (V)	Temerrüt opsiyonu değeri (D)	Erken ödeme opsiyonu değeri (C)	Mortgage sigortası değeri (I)	Kredi veren bankanın aldığı pozisyonun değeri			
						$V_B - L$	$V_B - (1-\xi)L$	$V_B - L + I$	$V_B - (1-\xi)L + I$
16.00%	88619	86342	103	2175	317	-13658	-11658	-13341	-11341
17.00%	91944	89491	235	2218	568	-10509	-8509	-9941	-7941
18.00%	95323	92571	585	2166	1077	-7429	-5429	-6351	-4351
19.00%	98755	95401	1278	2076	1699	-4599	-2599	-2900	-900
19.30%	99793	96185	1546	2062	1815	-3815	-1815	-2000	0
20.00%	88619	86342	103	2175	317	-13658	-11658	-13341	1706
21.00%	91944	89491	235	2218	568	-10509	-8509	-9941	2702
22.00%	95323	92571	585	2166	1077	-7429	-5429	-6351	2864
23.00%	98755	95401	1278	2076	1699	-4599	-2599	-2900	2947

The following parameters were used in the construction of this table: the arrangement fee (ξ) is 2%; the spot interest rate ($r(0)$) is 10%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the interest rate volatility (σ) is 12%; the house price volatility (ν) is 9%; the house service flow (δ) is 4%; LTV ratio is 100% and the correlation coefficient (ρ) is 0.

Temel ekonomik senaryo kapsamında yapılan son çalışma, kontrat yapısının önemli bileşenleri arasındaki takas (trade-off) ilişkilerine bakmaktadır. Mortgage kontrat yapısını belirleyen en önemli bileşenler arasında;

- krediyi erken ödeme cezası,
- mortgage kredisi hizmet-dosya ücreti,
- optimal mortgage faizi, sayılmaktadır.

Bankalar mortgage kredisi verirken, bu bileşen değerlerini dikkatle belirlemek durumundadırlar. Oldukça kompleks finansal mühendislik metotları gerektiren bu takas (trade-off) hesabında uygulanan işlem basit olarak tanımlamak gerekirse, optimizasyon işlemidir.

Ülkemizde mortgage kredisi veren bankalara baktığımızda, sabit faiz oranlı mortgage kredileri için krediyi erken ödeme cezasının borç bakiyesinin %2'si oranında olduğunu görmekteyiz. Bununla birlikte, mortgage kredisi açılması ve takip edilmesi amacıyla alınan hizmet-dosya ücretinin, alınan kredi miktarının %1 ile %5'i oranında değiştiğini görmekteyiz.

Tablo 5 ve Şekil 6 kredi miktarının konut değerinin %95'ini oluşturduğu mortgage kredilerinde, farklı erken ödeme cezası (%0-%5 aralığı) ve hizmet-dosya ücreti (%0-%3 aralığı) kombinasyonları için uygulanması gereken optimal mortgage faiz oranlarını vermektedir. Tabloda görüldüğü üzere, bankalar uyguladıkları erken ödeme cezası ve hizmet-dosya ücretini arttırdıkça daha düşük mortgage faiz oranları uygulayabilmektedirler.

Finans Bank örneğine baktığımızda, bankanın 10 yıl vadeli, %95 kredi oranlı, %2 erken ödeme cezalı, hizmet-dosya ücretsiz "Kredi Kolay Mortgage" ürünü için aylık %1.27 faiz oranı uyguladığını görmekteyiz (Eylül 2007 verisi). Tablo 5'deki sonuçlara göre, son 6 yıldaki (2002-2007) ekonomik koşullar göz önüne alındığında, aynı koşullardaki mortgage kredisine uygulanacak faiz oranının yıllık %20.09, aylık basit faiz oranının ise %1.67 civarında olduğunu görmekteyiz. Raporun önceki bölümlerinde de belirtildiği üzere, ülkemizdeki mevcut sistemde uygulanmakta olan mortgage faiz oranları, ekonomik koşullar göz önüne alındığında, oldukça düşük görünmektedir.

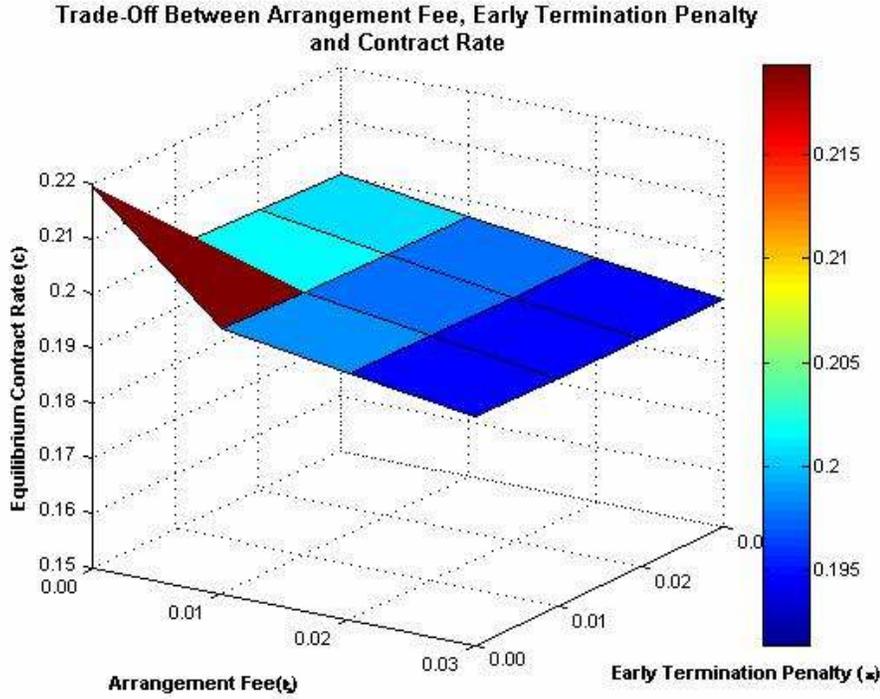
Ekonomik ortamın daha risksiz, daha stabile olması durumunda uygulanması gereken optimal mortgage faiz oranları raporun bir sonraki bölümünde tartışılacaktır.

Tablo 5: Erken Ödeme Cezası – Hizmet-Dosya Ücreti – Optimal Mortgage Faiz Oranları Arasındaki Takas (Trade-off)

Krediyi Erken Ödeme Cezası	Hizmet-Dosya Ücreti (ξ)			
	0.00	0.01	0.02	0.03
(π)	0.00	0.01	0.02	0.03
0.00	21.93%	19.83%	19.47%	19.15%
0.01	20.14%	19.77%	19.45%	19.14%
0.02	20.09%	19.75%	19.44%	19.13%
0.05	20.05%	19.73%	19.43%	19.13%

The following parameters were used in the construction of this table: the spot interest rate ($r(0)$) is 10%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the interest rate volatility (σ) is 12%; the house price volatility (ν) is 9%; the house service flow (δ) is 4%; LTV ratio is 95% and the correlation coefficient (ρ) is 0.

Şekil 6: Erken Ödeme Cezası – Hizmet-Dosya Ücreti – Optimal Mortgage Faiz Oranları Arasındaki Takas (Trade-off)



2.4.3. Farklı Ekonomik Senaryolar İçin Fiyatlama Modelinin Nümerik Sonuçları

Tablo 6 ve Tablo 7'deki nümerik sonuçlar, konut fiyatları volatilitesi ve faiz oranı volatilitesindeki değişimlerin mortgage kontrat değerini nasıl etkilediği sorusuna yanıt vermektedir. Konut fiyatları ve faiz oranları volatilitelerindeki değişimin, mortgage kontratı bileşenlerinin (Kredi geri ödemeleri, temerrüt opsiyonu, erken ödeme opsiyonu, mortgage sigortası) piyasa değerleri üzerindeki etkilerini de bu tablolardan görmek mümkündür.

Temel ekonomik senaryo kapsamında, faiz oranı volatilitesi %12 olarak hesaplanmıştır. Tablo 6-A ve 6-B'de %6 ile %18 aralığındaki faiz oranı volatilitesi incelenmektedir. Her iki tablo da kredi miktarının konut fiyatının %95'ini oluşturduğu 10 yıl vadeli mortgage kredileri için hazırlanmıştır. Tablo 6-A'daki sonuçlar, krediyi erken ödeme cezasının %2 oranında olduğu, Tablo 6-B'deki sonuçlar ise erken ödeme cezasının olmadığı kontratlar için hesaplanmıştır.

Elde edilen nümerik sonuçlara göre, faiz oranı volatilitesi arttıkça mortgage kontratının değeri azalmaktadır. Bunun nedeni, faiz oranı volatilitesi ile birlikte kredi alan kişilerin krediyi erken ödeme risklerinin, dolayısıyla erken ödeme opsiyon değerinin de artmasıdır. Kredi alan kişilerin erken ödeme riski arttıkça, temerrüte düşme olasılıkları azalacak ve dolayısıyla mortgage sigortası piyasa değeri de azalacaktır.

Belirlenen temel ekonomik senaryo kapsamında, konut fiyatları volatilitesi %9 olarak hesaplanmıştır. Tablo 7-A ve 7-B'de, %3 ile %15 aralığındaki konut fiyatları volatilitesi incelenmektedir. Her iki tablo da kredi miktarının konut fiyatının %95'ini oluşturduğu 10 yıl vadeli mortgage kredileri için hazırlanmıştır. Tablo 7-A'daki sonuçlar, krediyi erken

ödeme cezasının %2 oranında olduğu, Tablo 7-B'deki sonuçlar ise erken ödeme cezasının olmadığı kontratlar için hesaplanmıştır.

Tablo 6-A: Faiz Oranı Volatilitesindeki Değişimin Mortgage Kontrat Değeri Üzerine Etkileri (Krediyi Erken Ödeme Cezası = %2)

Faiz Oranı Volatilities (σ)	Kredi geri ödemeleri (A)	Mortgage Kontrat değeri (V)	Temerrüt opsiyonu değeri (D)	Erken ödeme opsiyonu değeri (C)	Mortgage sigortası değeri (I)
6.0%	90147	90504	143	0	436
9.0%	90318	89517	160	641	385
12.0%	90557	88186	170	2201	322
15.0%	90870	86522	167	4180	254
18.0%	91232	84591	153	6488	192

The following parameters were used in the construction of this table: the contract rate (c) is 18%; the early termination penalty (π) is 2%; the spot interest rate ($r(0)$) is 10%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the house price volatility (v) is 9%; the house service flow (δ) is 4%; LTV ratio is 95% and the correlation coefficient (ρ) is 0.

Tablo 6-B: Faiz Oranı Volatilitesindeki Değişimin Mortgage Kontrat Değeri Üzerine Etkileri (Krediyi Erken Ödeme Cezası = %0)

Faiz Oranı Volatilities (σ)	Kredi geri ödemeleri (A)	Mortgage Kontrat değeri (V)	Temerrüt opsiyonu değeri (D)	Erken ödeme opsiyonu değeri (C)	Mortgage sigortası değeri (I)
6.0%	90147	90503	143	0	436
9.0%	90318	89513	159	645	384
12.0%	90557	88175	170	2212	322
15.0%	90870	86506	167	4197	253
18.0%	91232	84572	151	6509	190

The following parameters were used in the construction of this table: the contract rate (c) is 18%; the spot interest rate ($r(0)$) is 10%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the house price volatility (v) is 9%; the house service flow (δ) is 4%; LTV ratio is 95% and the correlation coefficient (ρ) is 0.

Elde edilen sonuçlara göre, konut fiyatlarındaki dalgalanma (volatilité) arttıkça kişilerin temerrüte düşme riski artacak ve dolayısıyla temerrüt opsiyonu değerinde artış görülecektir. Temerrüt opsiyonu değerindeki artış ile birlikte mortgage sigortası değeri de artacaktır. Diğer bir deyişle, konut fiyatlarındaki volatilitenin yüksek olduğu ortamlarda temerrüt riskinden korunmak amacıyla bankaların mortgage sigortası almaları beklenmektedir. Bununla birlikte, konut fiyatlarındaki dalgalanmalardan dolayı temerrüt riski artarken, krediyi erken ödeme riskinin azaltıldığını görmekteyiz. Kişiler temerrüt opsiyonunu kullanmayı tercih ettikçe, erken ödeme opsiyonunun piyasa değeri sifıra yaklaşacaktır.

Tablo 7-A: Konut Fiyatları Volatilitesindeki Değişimin Mortgage Kontrat Değeri Üzerine Etkileri (Krediyi Erken Ödeme Cezası = %2)

Konut Fiyatları Volatilitesi (v)	Kredi geri ödemeleri (A)	Mortgage Kontrat değeri (V)	Temerrüt opsiyonu değeri (D)	Erken ödeme opsiyonu değeri (C)	Mortgage sigortası değeri (I)
3.0%	90557	86804	2	3750	4
6.0%	90557	87343	35	3179	64
9.0%	90557	88186	170	2201	322
12.0%	90557	89225	471	861	920
15.0%	90557	90321	941	0	1871

The following parameters were used in the construction of this table: the contract rate (c) is 18%; the early termination penalty (π) is 2%; the spot interest rate ($r(0)$) is 10%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the interest rate volatility (σ) is 12%; the house service flow (δ) is 4%; LTV ratio is 95% and the correlation coefficient (ρ) is 0.

Tablo 7-B: Konut Fiyatları Volatilitesindeki Değişimin Mortgage Kontrat Değeri Üzerine Etkileri (Krediyi Erken Ödeme Cezası = %0)

Konut Fiyatları Volatilitesi (v)	Kredi geri ödemeleri (A)	Mortgage Kontrat değeri (V)	Temerrüt opsiyonu değeri (D)	Erken ödeme opsiyonu değeri (C)	Mortgage sigortası değeri (I)
3.0%	90557	86798	2	3756	4
6.0%	90557	87335	35	3186	64
9.0%	90557	88175	170	2212	322
12.0%	90557	89206	470	881	920
15.0%	90557	90279	940	0	1868

The following parameters were used in the construction of this table: the contract rate (c) is 18%; the spot interest rate ($r(0)$) is 10%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the interest rate volatility (σ) is 12%; the house service flow (δ) is 4%; LTV ratio is 95% and the correlation coefficient (ρ) is 0.

3. III. GELİŞME RAPORU ÖZETİ (15 Ekim 2008 – 15 Nisan 2009)

3.1. Giriş

Projenin ilk 12 aylık (15 Ekim 2007- 15 Ekim 2008) döneminde, Türkiye'deki sabit faiz oranlı mortgage kontratları klasik opsiyon fiyatlama yaklaşımı ile fiyatlandırılmıştır. Mortgage piyasasının temelini oluşturan, ancak ülkemiz finans piyasalarında henüz işlem görmeyen, mortgage sigortası kontratı (mortgage default insurance) potansiyel finansal türev aracı olarak ele alınarak fiyatlandırılmış ve bu sigorta kontratlarının bankalar açısından önemi analiz edilmiştir.

Projenin ilk 12 aylık dönem sonundaki sonuçları sorunsuz bir şekilde elde edilmiş, sonuçlar ve yorumları 2. Gelişme Raporu'nda sunulmuştur.

Proje önerisinin "Çalışma Takvimi" bölümünde belirtildiği gibi, üçüncü 6 aylık dönemde (15 Ekim 2008- 15 Nisan 2009 dönemi) yapılan çalışmaları aşağıdaki gibi özetlemek mümkündür:

- Projenin ilk 12 aylık dönem çalışmaları sonucunda Türkiye'deki mevcut sabit faiz oranlı mortgage kontratları klasik opsiyon fiyatlama modeli ile fiyatlandırılmış ve elde edilen sonuçlardan 2 farklı makale yazılmıştır. Makalelerden biri *ulusal* diğeri ise oldukça *prestijli uluslararası* bir dergiye yayınlanmak üzere gönderilmiştir. Makalelerin başlıkları aşağıdaki gibidir:
 - 1) "Originating Long-Term Fixed-Rate Mortgages In Developing Economies: New Evidence from Turkey"
 - 2) "Birth of the Mortgage Industry Under High Inflation: An Examination of the Sectoral Integration, Pricing, and Product Development for Mortgage Insurance in Turkey".

2. makalenin özeti 11-14 Temmuz 2009'da Los Angeles-Amerika'da düzenlenecek olan AsRES ve AREUEA uluslararası konferansına gönderilmiş ve makale sunumu için kabul edilmiştir.

- Projenin bu aşamasında, ülkemizdeki enflasyon riski nedeniyle, faiz oranları mevcut literatürde kullanılmakta olan klasik difüzyon süreçleri yerine sıçramalı difüzyon prosesi (jump diffusion process) ile modellenmiştir. Konut fiyatlarının geometrik Brownian hareketi ile modellenmesi sonucu kısmi integro diferansiyel denklem elde edilmiştir.
 - Tek Faktörlü ve İki Faktörlü Kısmi Integro Diferansiyel Denklemin Elde Edilmesi konusundaki çalışmalar raporun 2. Bölümünde özetlenmiştir.
- Raporun 3. Bölümünde ise mevcut literatür dahilinde, sıçramalı difüzyon modelleri üzerine yapılan çalışmalar incelenmektedir.
 - Bu bölümde ilk olarak, sıçramalı difüzyon süreçlerini farklı finansal araçlar (döviz ve hisse senedi üzerine yazılan türev ürünleri, sabit gelirli finansal varlıklar, vb) için kullanılan finansal modellemeler ayrıntılı olarak tartışılmaktadır.
 - Ayrıca, tek ve iki faktörlü kısmi integro diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan farklı nümerik metodlar incelenmektedir.
- Raporun 4. Bölümünde ise, sabit faiz oranlı mortgage kontrat değerini veren kısmi integro diferansiyel denklemin nümerik çözümü için kullanılacak Explicit-Implicit Metodu anlatılmaktadır.

- **NOT: 3. gelişme raporunda:**
 - *Tek ve iki faktörlü kısmi integro diferansiyel denklemlerin çıkarımı,*
 - *Sıçramalı difüzyon modelleri üzerine yapılan literatür taraması, ve*
 - *Mortgage kontrat değerini veren kısmi integro diferansiyel denklemin nümerik çözümü için kullanılan Explicit-Implicit (Açık-Kapalı) Metodu*

ayrıntılı olarak anlatılmıştır. Sonuç raporunda bu kısımlar tekrarlanmayacaktır.

4. PROJE SONUÇ RAPORU (15 Nisan 2009 – 15 EKİM 2009)

4.1. Giriş

Projenin ilk 12 Ayındaki Sonuç ve Çıktıları:

Projenin ilk 12 aylık (15 Ekim 2007- 15 Ekim 2008) döneminde, Türkiye'deki sabit faiz oranlı mortgage kontratları klasik opsiyon fiyatlama yaklaşımı ile fiyatlandırılmıştır. Mortgage piyasasının temelini oluşturan, ancak ülkemiz finans piyasalarında henüz işlem görmeyen, mortgage temerrüt sigortası kontratı (mortgage default insurance contract) potansiyel finansal türev aracı olarak ele alınarak fiyatlandırılmış ve bu sigorta kontratlarının bankalar açısından önemi analiz edilmiştir.

Projenin ilk 12 aylık dönem sonundaki sonuçları sorunsuz bir şekilde elde edilmiş, sonuçlar ve yorumları 1. Ve 2. Gelişme Raporlarında sunulmuştur. Projeden elde edilen çıktılar aşağıdaki gibi özetlemek mümkündür:

- Projenin ilk 12 aylık dönem çalışmaları sonucunda Türkiye'deki mevcut sabit faiz oranlı mortgage kontratları klasik opsiyon fiyatlama modeli ile fiyatlandırılmış ve elde edilen sonuçlardan 2 farklı makale yazılmıştır. Bu makalelerin başlıkları:

1. "Originating Long-Term Fixed-Rate Mortgages In Developing Economies: New Evidence from Turkey"

2. "Birth of the Mortgage Industry Under High Inflation: An Examination of the Sectoral Integration, Pricing, and Product Development for Mortgage Insurance in Turkey".

Birinci makale 2009 Aralık ayında "Metu Studies in Development" adlı ulusal dergide yayınlanmak üzere kabul edilmiştir. Bu makale ve yayın için kabul yazısı raporun ekinde verilmektedir.

İkinci makale için elde edilen sonuçlar, 11-14 Temmuz 2009'da Los Angeles-Amerika'da düzenlenen AsRES ve AREUEA uluslararası konferansında bildiri olarak sunulmuştur. Bu makale oldukça *prestijli uluslararası* bir dergiye yayınlanmak üzere gönderilmiştir. Makale hakem sürecindedir ve ikinci revizyon aşamasındadır.

- Projemizde araştırma görevlisi olarak çalışan yüksek lisans (Master) öğrencimiz Özgenay Çetinkaya

"Pricing Default and Prepayment Risks of Fixed-Rate Mortgages in Turkey: An Application of Explicit Finite Difference Method"

başlıklı tezini başarıyla tamamlamıştır. Bu tezi ile ODTÜ Uygulamalı Matematik Enstitüsü, Finansal Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans (Master) derecesi almaya hak kazanmıştır.

Projenin ikinci 12 Ayındaki Sonuç ve Çıktıları:

Proje önerisinin "Çalışma Takvimi" bölümünde belirtildiği gibi, projenin 2. Yılında, mortgage kontratlarının, özellikle enflasyonist ortamlardaki fiyatlandırılmasında "klasik opsiyon fiyatlama modellerinin" modifikasyonu önerilmiştir. Bu amaçla, projenin 3. (15 Ekim 2008- 15 Nisan 2009 dönemi) ve 4. (15 Nisan 2009 – 15

Ekim 2010) dönemlerinde yapılan çalışmaları aşağıdaki gibi özetlemek mümkündür:

- Projenin 3. Altı aylık döneminde (3. Gelişme raporunda), ülkemizdeki enflasyon riski nedeniyle, faiz oranları mevcut literatürde kullanılmakta olan klasik difüzyon süreçleri yerine sıçramalı difüzyon prosesi (jump diffusion process) ile modellenmiştir. Konut fiyatlarının geometrik Brownian hareketi ile modellenmesi sonucu kısmi integro diferansiyel denklem elde edilmiştir.
 - Tek Faktörlü ve İki Faktörlü Kısmi Integro Diferansiyel Denklemin Elde Edilmesi konusundaki çalışmalar 3. Gelişme Raporunda özetlenmiştir.
 - Mevcut literatür dahilinde, sıçramalı difüzyon modelleri üzerine yazılan makaleler inlenmiş ve literatür özeti yazılmıştır. Raporun bu bölümünde ilk olarak, sıçramalı difüzyon süreçlerini farklı finansal araçlar (döviz ve hisse senedi üzerine yazılan türev ürünleri, sabit gelirlili finansal varlıklar, vb) için kullanılan finansal modellemeler ayrıntılı olarak tartışılmıştır. Sonrasında, tek ve iki faktörlü kısmi integro diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan farklı nümerik metotlar incelenmiştir.
 - Raporun son bölümünde ise, sabit faiz oranlı mortgage kontrat değerini veren kısmi integro diferansiyel denklemin nümerik çözümü için kullanılacak Explicit-Implicit (Açık - Kapalı) Metodu anlatılmaktadır.
- Projenin 4. Altı aylık döneminde yapılan çalışmaları aşağıdaki şekilde özetlemek mümkündür:
 - Türkiye ve benzeri enflasyonist ekonomilerde, sabit faiz oranlı mortgage kredilerinin piyasa değerini veren kısmi integro diferansiyel denklemin Matlab ortamında nümerik çözümü yapılmıştır. Proje önerisinde de belirtildiği üzere, elde edilen kısmi integro diferansiyel denkleme ilişkin yapılan sayısal analizler, sabit faiz oranlı mortgage kontratlarının enflasyonist ekonomilerde fiyatlandırılması için ilk kez kullanılmıştır.
 - Sabit faiz oranlı mortgage kontrat değerini belirleyen kısmi integro-diferansiyel denklem Matlab ortamında Açık-Açık Yöntemi (Explicit-Explicit Method) kullanılarak çözülmüştür. Sonuç raporunun 2. bölümünde kısmi integro-diferansiyel denklemin Açık-Açık Yöntemi (Explicit-Explicit Method) ile nümerik çözümü özetlenmektedir.
 - Elde edilen nümerik sonuçlar:
 - 1. Temel Ekonomik Senaryo- Temel Kontrat Yapısı İçin ve
 - 2. Farklı Ekonomik Senaryo-Farklı Kontrat Yapıları İçin elde edilmiş ve yorumlanmıştır.
 - Projenin ilk yılında kullanılan 1. Model (kısmi diferansiyel denklem) sonuçları ile ikinci yıl kullanılan 2. Model (kısmi integro-diferansiyel denklem) sonuçları temel ekonomik senaryo-temel kontrat yapısı ve farklı ekonomik senaryo-farklı kontrat yapıları için karşılaştırılmıştır.

4.2. Kontrat Değerini Belirleyen Kısmi İntegro-diferansiyel Denklemin Açık-Açık Yöntemi (Explicit-Explicit Method) ile Nümerik Çözümü

Projenin B-Planında belirtildiği üzere:

“Kısmi integro-diferansiyel denklemin nümerik çözümü “opsiyon fiyatlama” literatüründe oldukça yeni ve güncel bir konudur. Bu aşamanın gerçekleştirilmesinde bir sorun, beklenmemesine rağmen, **olursa proje elde edilen integro-diferansiyel denklemin çözümü için bazı alternatif sayısal yöntemleri çalışacaktır**”

Kısmi integro diferansiyel denklemin nümerik çözümü için 2 farklı metot üzerinde çalışılmıştır. Bu metotlar: 1) Açık-açık sonlu farklar (explicit-explicit finite difference) metodu ve 2) Açık-kapalı sonlu farklar (Explicit-Implicit finite difference) Metodudur. 3. gelişme raporunun son bölümünde, mortgage kontrat değerini veren kısmi integro diferansiyel denklemin nümerik çözümü için kullanılacak metodun Explicit-Implicit (Açık - Kapalı) metodu belirtilmiş ve bu metot incelenmiştir. İki temel nedenden dolayı, kısmi integro diferansiyel denklemin nümerik çözümü için Açık-Açık (Explicit-Explicit) metodu kullanılmasına karar verilmiştir:

1. İlk model olan kısmi diferansiyel denklem açık sonlu farklar (explicit finite difference) metodu kullanılarak çözüldüğü için, ikinci modelde kısmi-integro diferansiyel denklemin de açık-açık sonlu farklar (explicit-explicit finite difference) metodu ile çözümü nümerik sonuçların karşılaştırılması açısından daha anlamlı bulunmuştur.

2. İki faktörlü (faiz oranı ve konut fiyatı) kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde Açık- Kapalı (Explicit-Implicit) metodu uygulanmasında büyük matrislerle uğraşmak ve matris faktörizasyonu nümerik sonuçlarda hatalara yol açabilmektedir. Diğer bir deyişle, gerçek değer ile yaklaşık değer arasında büyük farklara (round-off hatası) yol açabilmektedir.

Sonuç olarak, kısmi integro diferansiyel denklem (PIDE) bünyesinde hem kısmi diferansiyel denklem (PDE) ve hem de integral elemanı barındırmaktadır. Dolayısıyla, açık-açık yöntem yaklaşımını her iki kısma da ayrı ayrı uygulamak mümkündür:

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = LU^n + JU^n \quad \Rightarrow \quad U^{n+1} = [I + \Delta t(L + .J)]U^n \quad (4.1)$$

Buradaki L ve J matrisleri sırasıyla kısmi diferansiyel ve integral kısımleri için ayrıştırmaları (discretization) göstermekte, I ise birim matrisi ifade etmektedir.

3. gelişme raporunda, çalışmamızda sistem çözümü için açık-kapalı yöntem

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = LU^{n+1} + JU^n \quad (4.2)$$

uygulayacağımızı belirtmiştik.

Yukarıda yaptığımız açıklamalar doğrultusunda çalışmamızda sadece açık-açık (explicit- explicit) metodunu uyguladık.

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = LU^n + JU^n \quad (4.3)$$

4.2.1. Integral Teriminin Ayırıklaştırılması

Bu bölümde kısmi integro diferansiyel denklemin içerisinde yer alan integral teriminin nümerik çözüm esnasında nasıl ayrıklaştırıldığı gösterilecektir. Daha öncede belirtildiği üzere faiz oranları ve konut fiyatlarının riske duyarlı ölçü altında izleyeceği sıçramalı difüzyon modelleri aşağıdaki şekilde oluşturulmuş ve çalışmamız içerisinde kullanılmıştır:

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma_r \sqrt{r(t)} dW_r(t) + (e^a - 1)r(t)dN(t) \quad (4.4)$$

- r = Faiz oranı
 κ = Spot faiz oranının uzun dönem faiz oranı ortalamasına dönüş hızı
 θ = Uzun dönemli ortalama faiz oranı
 σ_r = Faiz oranları için volatilité
 dW_r = Faiz oranlarının takip ettiği Wiener süreci
 $dN(t)$ = λ yoğunluk katsayısına sahip Poisson süreci
 $(e^a - 1)$ = r değerinde re^a değerine sıçrama yaratan dürtü işlevi (impulse function)

$$\frac{dH(t)}{H(t)} = (r(t) - \delta - \lambda\xi)dt + \sigma_H dW_H(t) + (e^b - 1)dN(t) \quad (4.5)$$

- H = Konut fiyatı
 r = Spot faiz oranı
 δ = Konutun kira bedelinin piyasa değerine oranı (servis oranı),
 σ_H = Konut fiyatları için volatilité
 dW_H = Konut fiyatlarının takip ettiği Wiener süreci
 $dN(t)$ = λ yoğunluk katsayısına sahip Poisson süreci
 $(e^b - 1)$ = H değerinden He^b değerine sıçrama yaratan dürtü işlevi (impulse function)
 ξ = $E(e^b - 1)$, Konut fiyatları için beklenen sıçrama miktarı.

Ayrıca, iki Wiener süreci arasındaki ilişki $dW_r dW_H = \rho dt$ (ρ , iki Wiener süreci arasındaki ilişki kat sayısı) olarak ifade edilirken, G , sıçrama büyüklüklerinin izlediği ortak dağılımı göstermektedir. Bu ortak dağılım, sıçrama büyüklüklerinin aşağıda ifade edilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna (probability density function) sahip olduğu ve birbirinden bağımsız olduğu (independent) varsayımı altında elde edilmiştir.

$$g(\eta) = \frac{e^{-\left(\frac{(\log(\eta) - \mu)^2}{2\gamma^2}\right)}}{\sqrt{2\pi\gamma\eta}} \quad (4.6)$$

Sonuç olarak aşağıda belirtilen iki faktörlü kısmi diferansiyel denkleme ulaşılmıştır:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \kappa(\theta - r) \frac{\partial V}{\partial r} + (r - \delta - \lambda\xi) \frac{\partial V}{\partial H} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 r \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \\ & + \frac{1}{2} \sigma_H^2 H^2 \frac{\partial^2 V}{\partial H^2} + \sigma_r \sigma_H \sqrt{r} H \rho \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial H} - (r + \lambda)V + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V(t, e^a r, e^b H) G(de^a de^b) = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Kısmi integro diferansiyel denkleminin integral terimi göz ardı edildiğinde projemizin birinci kısmında kullanılan kısmi diferansiyel denklemlerle hemen hemen aynı olduğu açıkça görülmektedir. Dolayısıyla, kısmi integro diferansiyel denklem çözümü için kullanılan metod birinci kısımda kullanılan metodla benzerlik göstermektedir. Ancak, kısmi integro diferansiyel denklemin integral terimi içerdiği için model içerisinde bazı değişiklikler yapılmıştır. Öncelikle integral terimi ayrıştırılmış ve model içerisinde yeni şekliyle kullanılmıştır. Integral teriminin nasıl ayrıştırıldığını aşağıda görmek mümkündür. Ancak, aşağıdaki formüllerin tek faktörlü model için yazılmış olduğu unutulmamalıdır:

$$I_i \approx \sum_{j=N/2+1}^{j=N/2} V_{i+j} f_j \Delta y \quad (4.8)$$

$$I_i = I(i\Delta x), V_z = V(z\Delta x), f_j = \int_{x_j - \frac{\Delta x}{2}}^{x_j + \frac{\Delta x}{2}} f(x) dx, x_j = j\Delta x. \quad (4.9)$$

Sonuç olarak yukarıda belirtilen ayrıştırma yöntemi iki faktörlü model için uygulanmış ve model içerisindeki kısmi diferansiyel denklemler eklenmiştir. İki faktör için kullanılan ayrıştırma yöntemini aşağıda görmek mümkündür:

$$I_{ji} \approx \sum_{n=N/2+1}^{n=N/2} \sum_{m=N/2+1}^{m=N/2} V_{(j+n,i+m)} g_{nm} \Delta x \Delta y \quad (4.10)$$

$$I_{ji} = I(j\Delta y, i\Delta x), V_{pz} = V(p\Delta y, z\Delta x), g_{nm} = \int_{y_n - \frac{\Delta y}{2}}^{y_n + \frac{\Delta y}{2}} \int_{x_m - \frac{\Delta x}{2}}^{x_m + \frac{\Delta x}{2}} g(y) g(x) dx dy \quad (4.11)$$

$$y_n = n\Delta y \quad \text{ve} \quad x_m = m\Delta x.$$

4.3. Opsiyon Fiyatlama Modeli Sonuçlarının Kısmi İntegro Diferansiyel Denklem Nümerik Çözümü ile Elde Edilmesi

Proje önerisinde belirtildiği üzere, bu projenin temel amacı sabit faiz oranlı mortgage kontratlarının Türkiye'deki ekonomik ortamda fiyatlandırılmasıdır. Ülkemiz ekonomisi göz önüne alınarak, faiz oranları sıçramalı difüzyon prosesi (jump diffusion process) ile modellenmiş ve elde edilen kısmi integro diferansiyel denklemin nümerik çözümleri yorumları ile birlikte 4.3.1. ve 4.3.2. bölümlerde sunulmaktadır.

4.3.1. Temel Ekonomik Senaryo- Temel Kontrat Yapısı İçin Opsiyon Fiyatlama Modelinin Nümerik Sonuçları

Tablo 8, fiyatlandırılan sabit faiz oranlı mortgage kontratları için temel ekonomik senaryo değerlerini ve temel kontrat özelliklerini göstermektedir.

Tablo 8: Temel Ekonomik Senaryo Parametre Değerleri ve Temel Mortgage Kontrat Özellikleri

Parametreler	Mortgage Kontratı
	Sabit Faiz Oranlı Mortgage Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Dahil
1. Ekonomik Parametreler	
Spot faiz oranı, $r(0)$	10%
Uzun dönemli faiz oranı ortalaması, θ	24%
Uzun dönem faiz oranı ortalamasına dönüş hızı, κ	56%
Konutun kira bedelinin piyasa değerine oranı (servis oranı), δ	4%
Konut fiyatları ve faiz oranları arasındaki beklenmedik değişimler arasındaki korelasyon katsayısı, ρ	0
2. Kontrat Özellikleri	
Kontrat vadesi, η	120 ay
Konutun piyasa değeri (kontrat başlangıcındaki fiyatı), H	100 000 YTL
Kredi veren kurumun aldığı hizmet ücreti, ξ	2%
Krediyi erken ödeme cezası, π	2%

Tablo 8'de, projede fiyatlanan sabit faiz oranlı mortgage kontratının özellikleri belirtilmektedir. Bu kontratta, kredi veren kurumun kişilerden hem %2 oranında hizmet-dosya ücreti aldığı hem de kredinin erken ödenmesi durumunda kredi bakiyesi üzerinden %2 ceza alacağı varsayılmıştır. Kredi vadesinin 10 yıl olduğu ve krediye konu olan konutun piyasa değerinin 100 000TL olduğu varsayılmıştır. 1. Gelişme Raporunda detaylı olarak belirtildiği gibi, Tablo 1'deki temel kontrat özellikleri 8 farklı bankadan elde edilen bilgiler doğrultusunda belirlenmiştir. Projenin diğer aşamalarında farklı kontrat özellikleri dikkate alınarak da fiyatlandırma yapılmıştır.

Kullanılan ekonomik parametre değerleri (spot faiz oranı, uzun dönemli faiz oranı ortalaması, spot faiz oranının uzun dönemli ortalama faiz oranına dönüş hızı, konutun kira bedelinin piyasa değerine oranı ve konut fiyatları ve faiz oranlarındaki beklenmedik değişimler arasındaki korelasyon katsayısı), temel ekonomik senaryo göstergeleri olarak bir önceki modelde kullanılan değerler ile aynıdır. Böylece, faiz oranlarının klasik difüzyon hareketi ile modellendiği ilk model ile faiz oranlarının sıçramalı difüzyon hareketi ile modellendiği ikinci modelin sonuçlarını karşılaştırmak mümkün olacaktır.

1. Gelişme raporunda detaylı olarak açıklandığı gibi, konut kredisi veren kuruluş ya da banka açısından mortgage kredisinin değerini (V_L) aşağıdaki gibi modellemek mümkündür.

$$V_L(H, r, t) = A(r, t) - C(H, r, t) - D(H, r, t) \quad (4.12)$$

Bu denklemde; $A(r, t) = t$ zamanındaki borç bakiyesi değeridir. Banka için mortgage kredisinin değerini belirleyen faktör sadece borçlunun geri kalan ödemeleri yani borç bakiyesi değildir. Borçlunun temerrüte düşmesi (D) ya da krediyi erken ödeme (C) opsiyonlarının değeri banka açısından zarar kalemi olarak kredi fiyatlamasına dahil edilmektedir. Borçlunun krediyi geri ödememe riskini azaltmak amacıyla Avrupa ve Amerika'da birçok banka kredi alan kişilerden "Mortgage kredisi sigortası" talep etmektedir. Mortgage sigortası talep eden bankalar için mortgage kredisinin değeri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned} V_L(H, r, t) &= A(r, t) - C(H, r, t) - D(H, r, t) + I(H, r, t) \\ &= A(r, t) - J(H, r, t) + I(H, r, t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

$I(H, r, t) =$ Mortgage sigortası değeridir.

Projenin bu bölümünde, temel senaryo parametre değerleri kullanılarak, sabit faiz oranlı mortgage kontratının kredi veren kurum açısından değeri - $[V(H, r, t)]$ - 3 boyutlu grafiklerle gösterilecek ve yorumlanacaktır. Ayrıca, mortgage kontratını oluşturan temel bileşenlerin

- i) $A(r, t)$: t zamanındaki borç bakiyesi,
- ii) $D(H, r, t)$: kredinin geri ödenme opsiyonu,
- iii) $C(H, r, t)$: kredinin erken ödenme opsiyonu,
- iv) $I(H, r, t)$: mortgage sigortası piyasa değerlerine ait nümerik sonuçlar da 3-boyutlu grafikler yardımıyla yorumlanacaktır. *3-boyutlu grafiklerin çizilmesi ve yorumlanmasındaki amaç; kısmi integro diferansiyel denklemin nümerik çözümünün grid sistemde akıcı (smooth) olup olmadığını görmek ve nümerik sonuçların finansal anlamda tutarlı olup olmadığını sorgulamaktır.*

Şekil 7, kredi geri ödemelerinin bugünkü piyasa değerini göstermektedir. Fiyatlama modelinde kredi geri ödemelerinin piyasa değeri - $A(r, t)$ - faiz oranlarının bir fonksiyonu olarak tanımlanmıştır. Diğer bir deyişle, kredi geri ödemeleri miktarı konut fiyatlarına bağlı olmadığından, konut fiyatlarındaki değişimler (H) geri ödeme değerini etkilememektedir. Şekil 1'de görüldüğü üzere, faiz oranları arttıkça (0.01'den 0.90'a) mortgage geri ödemelerinin bugünkü değeri azalmaktadır. Bunun nedeni, faiz oranlarındaki artış bir yandan kredinin kupon değerini (kredi faiz oranları) ve dolayısıyla geri ödenecek kredi miktarını arttırırken, diğer yandan ileri tarihteki kredi ödemelerinin bugüne indirgenmesinde kullanılan iskonto oranını da arttıracığından,

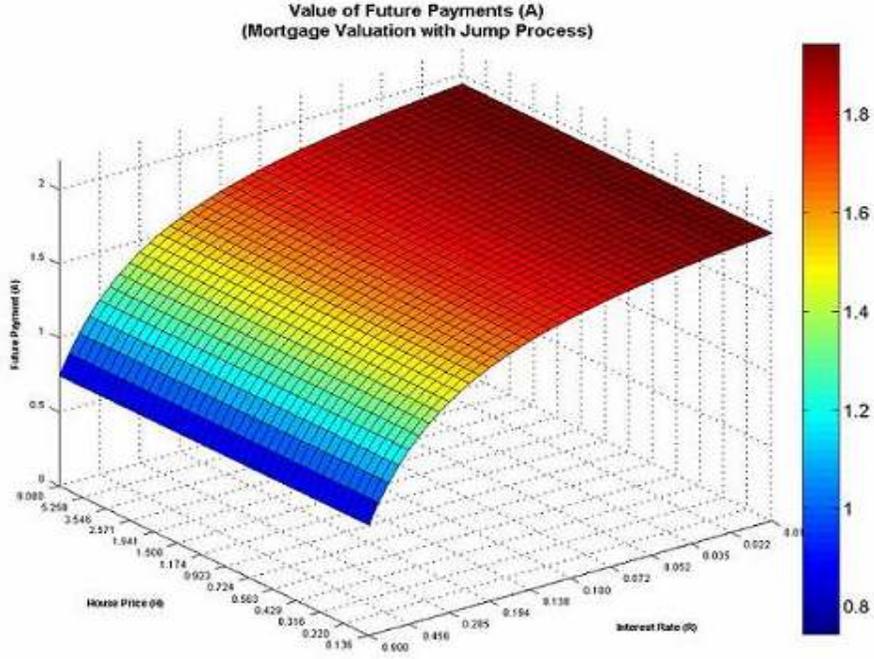
mortgage kredisi geri ödemelerinin bugünkü değeri artan faiz ile birlikte azalmaktadır. Bu sonuçlar ilk modelin nümerik çözümüyle elde ettiğimiz sonuçlar ile benzerdir.

Şekil 8, belirlenen mortgage kontratı için kredinin temerrüt (geri ödenmeme) opsiyonu piyasa değerini göstermektedir. Fiyatlama modelinde temerrüt opsiyonunun değeri - $[D(H,r,t)]$ - konut fiyatlarının ve faiz oranlarının bir fonksiyonu olarak tanımlanmıştır. Şekilde de görüldüğü üzere, konut fiyatları belirli bir seviyenin altına indiği zaman kişilerin temerrüt etme olasılığı hızla artmakta ve temerrüt opsiyonun değeri hep pozitif değer almaktadır. Konut fiyatlarının yüksek olduğu değerlerde ise kişilerin temerrüt riski yok olmakta ve temerrüt opsiyonunun piyasa değeri sıfır olmaktadır. Şekil 2'de görüldüğü üzere, temerrüt opsiyonunun en yüksek değerlere ulaştığı zaman; konut fiyatlarının çok düşük olduğu ve aynı zamanda faiz oranlarının da azaldığı ortamlardır. Şekil 7'de tartışıldığı gibi, faiz oranlarındaki azalma mortgage kredisi geri ödemelerinin bugünkü değeri (A) ve dolayısıyla mortgage kontrat değerinde (V) azalmalara yol açmaktadır. Mortgage kontrat değerinin (V) konut piyasa değeri (H) karşısında değer kaybetmesi kişileri temerrüte zorlayan bir durum oluşturmaktadır. Bu nedenle, temerrüt opsiyonu pozitif olduğu her değer için faiz oranlarındaki artış ile ters orantılı bir ilişki sergilemektedir.

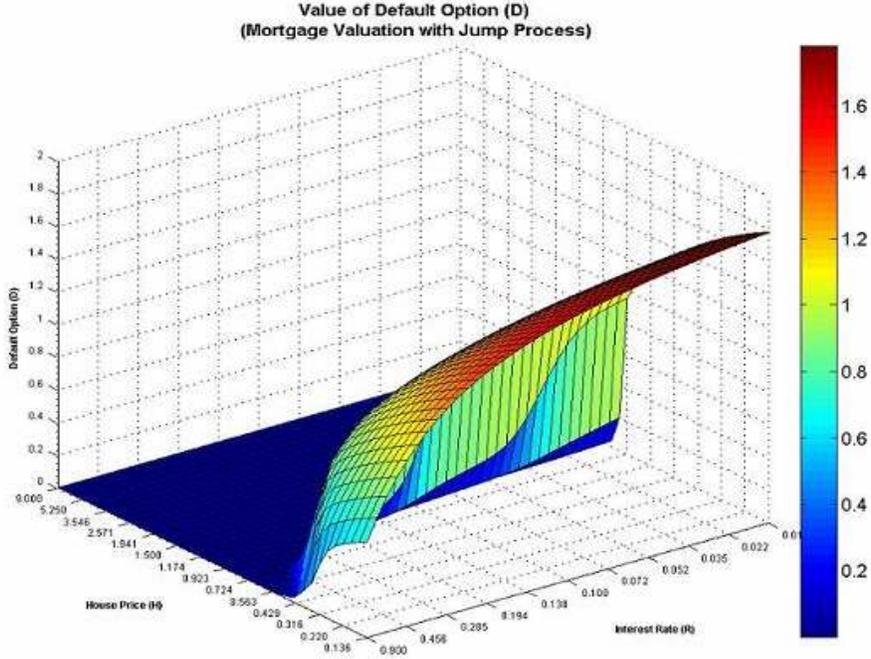
Şekil 9 mortgage sigortası piyasa değerini göstermektedir. Fiyatlama modelinde mortgage sigortası değeri - $[I(H,r,t)]$ - konut fiyatlarının ve faiz oranlarının bir fonksiyonu olarak tanımlanmıştır. Şekilde de görüldüğü gibi, konut piyasa değerinin belirli bir seviyenin üzerinde olduğu durumlarda kredi alan kişilerin temerrüt riski ortadan kalkmakta ve dolayısıyla mortgage sigortası da temerrüt opsiyonu gibi sıfır değerini almaktadır. Diğer yandan, konut fiyatları azaldıkça temerrüt opsiyonu piyasa değeri artmakta ve buna bağlı olarak da mortgage sigortasının piyasa değeri de artış göstermektedir. Bununla birlikte, konut fiyatlarının oldukça düşük olduğu ortamlarda faiz oranlarındaki değişim (0.90 - 0.01 aralığı) mortgage sigortası piyasa değerini etkilememektedir. Bunun nedeni ise, faiz oranları artsa da azalsa da kredi alan kişi krediyi erken ödeme opsiyonunu değil temerrüt opsiyonunu kullanmayı tercih edecektir. Çünkü konut fiyatlarının çok düşük olduğu ortamda kredinin re-finansmanı herhangi bir çözüm oluşturmayacaktır.

Sonuç olarak, kredinin temerrüt opsiyonu ve temerrüt sigortası piyasa değerlerini gösteren Şekil 7- 8- 9'daki 3 boyutlu grafik sonuçları, bir önceki modelle benzerlik göstermektedir. Diğer bir deyişle, 2. Modelin nümerik sonuçları da finansal anlamda tutarlı bulunmuştur.

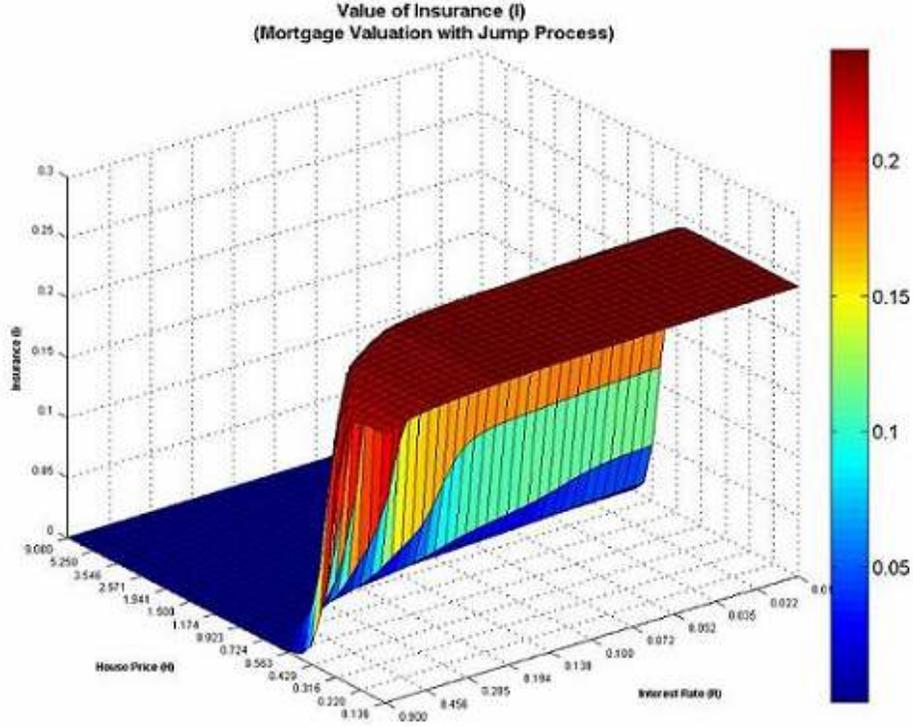
Şekil 7: Kredi Geri Ödemelerinin Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Dahil)



Şekil 8: Temerrüt Opsiyonu Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Dahil)



Şekil 9: Mortgage Sigortası Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Dahil)

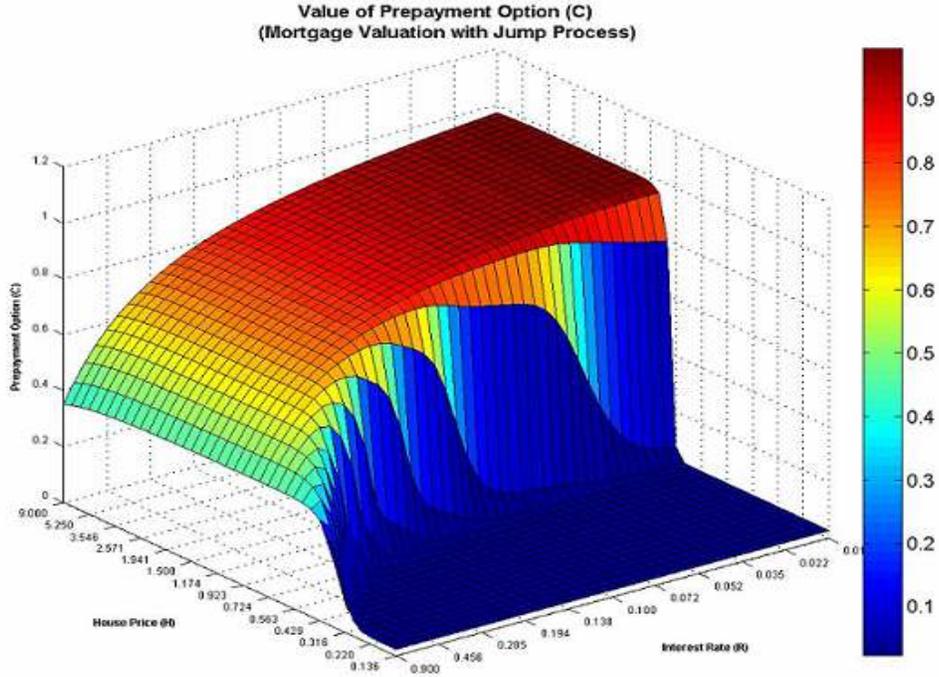


Şekil 10 kredinin erken ödeme (prepayment) opsiyonu piyasa değerini göstermektedir. Fiyatlama modelinde erken ödeme opsiyonunun değeri $-[C(H,r,t)]$ - konut fiyatlarının ve faiz oranlarının bir fonksiyonu olarak tanımlanmıştır.

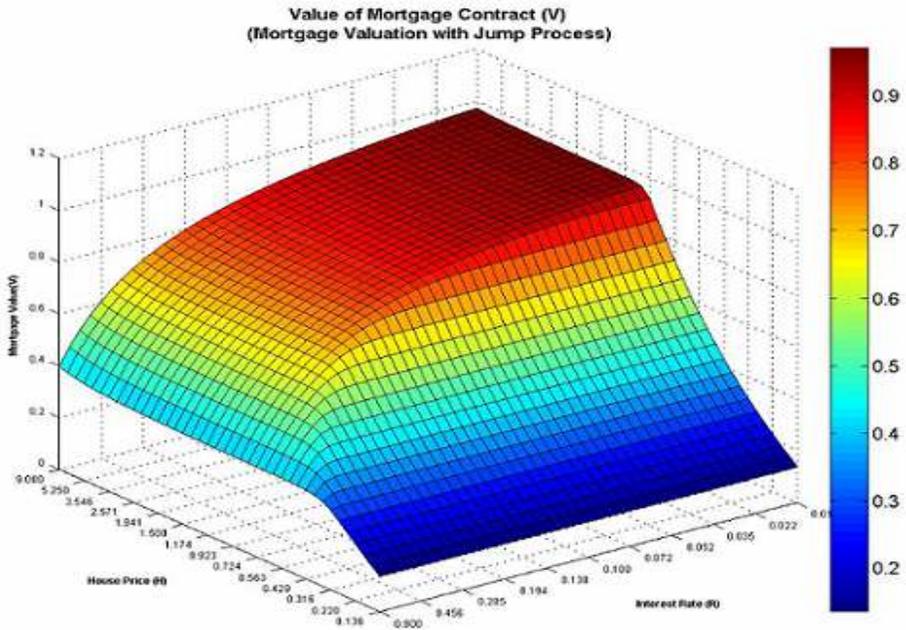
Şekilde de görüldüğü üzere, konut piyasa değerleri (H) düşük değerler aldığıında, kredinin erken ödeme opsiyonu faiz oranlarındaki değişimden bağımsız olarak sıfır değeri almaktadır. Diğer bir deyişle, konut fiyatlarında düşüş gözlemlendikçe, erken ödeme opsiyonu faiz oranlarındaki değişimlere bağımlı olmaktan çıkmaktadır. Bunun nedeni de, konut fiyatları belirli bir seviyenin altına düştüğünde kredi alan kişinin temerrüt opsiyonunu kullandığı ve erken ödeme opsiyonunun ortadan kalktığıdır.

Konut piyasa değerleri kişiyi temerrüte düşürmeyecek bir seviyede olduğunda ise, erken ödeme opsiyonunun piyasa değeri faiz oranlarındaki değişimlere bağlıdır. Şekil 4'de görüldüğü gibi, piyasa faiz oranları azaldıkça (0.90'dan 0.01'e doğru azaldıkça) kişinin mevcut mortgage kredi faizi, piyasa ortamında yüksek seviyede kalacak ve kişi aldığı kredinin re-f finansmanını talep edecektir. Diğer bir deyişle krediyi erken kapatma yolunu seçecektir. Sonuç olarak, piyasa faiz oranları azaldıkça alınan kredinin erken ödeme opsiyonunun piyasa değeri de artmaktadır.

Şekil 10: Krediyi Erken Ödeme Opsiyonu Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Dahil)



Şekil 11: Mortgage Kontratının Kredi Veren Kuruluş için Piyasa Değeri: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı (Hizmet-dosya Ücreti Dahil, Erken Ödeme Cezası Dahil)



Son olarak, sabit faiz oranlı mortgage kontratının kredi veren kurum açısından değerini - $V(H,r,t)$ - gösteren 3-boyutlu grafik Şekil 11'de verilmektedir. Yukarıda belirtildiği gibi, kredi veren kurum (banka) için mortgage kontratının piyasa değeri hem kredi borç bakiyesinin bugünkü değerine (A) hem de kredinin geri ödenmemesi (D) ve erken ödenmesi (C) opsiyonu değerlerine bağlıdır.

Şekil 11'de görüldüğü üzere, konut fiyatlarının oldukça düşük olduğu ortamlarda kredinin geri ödenmeme riski çok yükselmektedir. Böylece kredinin geri ödenmeme opsiyon değeri artmakta ve kişilerin temerrüt riskinin artması ile mortgage kontratının banka için piyasa değeri de azalmaktadır. Temerrüt riskinin çok yüksek olduğu bu durumda, faiz oranlarındaki değişim mortgage kontrat değerini etkilememektedir. Bununla birlikte, konut piyasa değeri arttıkça, temerrüt opsiyon değeri (temerrüt riski) azalacak ve mortgage kontratının piyasa değerinde artış görülecektir.

Konut piyasa değerleri kişiyi temerrüte düşürmeyecek bir seviyede olduğunda ise, mortgage kontratının piyasa değeri faiz oranlarındaki değişimlere bağlıdır. Şekil 5'de görüldüğü gibi, piyasa faiz oranları arttıkça (0.01'den 0.90'a doğru arttıkça) mortgage kontrat değeri azalmaktadır. Faiz oranlarındaki artış miktarı 2 farklı mortgage kontratı bileşeni değerini etkilemektedir. Bunlar: 1) kredi geri ödemelerinin piyasa değeri (A) 2) kredinin erken ödenme opsiyon değeridir (C).

Şekil 7'de tartışıldığı üzere, faiz oranları arttıkça mortgage geri ödemelerinin bugünkü değeri (A) azalmaktadır. Diğer yandan, faiz oranlarındaki artış kredinin erken ödenme opsiyon değerini (C) de azaltmaktadır. Bir finansal türev aracı olarak kabul edilen erken ödeme opsiyonu değerindeki artış mortgage geri ödemelerindeki artışa baskın olmadığı için, mortgage kontrat değeri $[V = A - D - C]$ azalmaktadır.

Sonuç olarak, faiz oranlarını sıçramalı difüzyon modeli ile tanımladığımız ve mortgage kontratı piyasa değerini kısmi integro diferansiyel denklemin nümerik çözümü ile belirlediğimiz 2. Model sonuçları, 1. Model sonuçları ile örtüşmektedir. Bu örtüşmeden avarılması gereken sonuç: Matlab ortamında yazdığımız program başarı ile çalışmaktadır ve kısmi integro diferansiyel denklemin nümerik sonuçları da ilk model sonuçları gibi finansal anlamda açıklanabilir, tutarlı bulunmuştur.

4.3.2. Temel Ekonomik Senaryo–Farklı Kontrat Yapıları için Opsiyon Modelleme Sonuçları Analizi

Mortgage kontratının kabul edilebilir bir kontrat olması için, hem kredi alan kişi hem de kredi veren kuruluş açısından adil/eşitlikçi bir anlaşmayı içermesi gerekmektedir. Bu koşul, finans literatüründe “arbitrajsız ortam” (no arbitrage) olarak tanımlanmaktadır. Arbitrajsız koşula göre; takas işleminin gerçekleştirilebilmesi için takas edilen varlığın değeri her iki taraf için de eşit olmalıdır.

Mortgage kredisinin alındığı tarihte ($t=0$ anında), mortgage kredisi piyasa değerinin her iki taraf için de (banka ve kredi alan kişi) eşit değer alması için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekmektedir:

Hizmet-Dosya Ücreti ve Mortgage Sigortasının Olmadığı Kontratlar da Arbitrajsız Ortam Koşulu:

$$V_B(H(0), r(0), 0) = L \quad (4.14)$$

Yukarıdaki denklem, $t = 0$ anındaki mortgage kontrat değerinin (V_B) alınan kredi miktarına (L) eşit olması gerektiğini göstermektedir. Bu kontrat çeşidinde, $t=0$ anında bankanın pozisyonu $V_B(H(0), r(0), 0) - L$ değerine eşit olacaktır.

Hizmet-Dosya Ücretinin Alındığı, Mortgage Sigortasının Olmadığı Kontratlar da Arbitrajsız Ortam Koşulu:

$$V_B(H(0), r(0), 0) = (1 - \zeta)L \quad (4.15)$$

Yukarıdaki denklem, $t = 0$ anındaki mortgage kontrat değerinin (V_B), hizmet-dosya ücreti (ζ) düşüldükten sonra geriye kalan kredi miktarına $[(1 - \zeta)L]$ eşit olması gerektiğini göstermektedir. Bu kontrat çeşidinde, $t=0$ anında bankanın pozisyonu $V_B(H(0), r(0), 0) - (1 - \zeta)L$ değerine eşit olacaktır.

Hizmet-Dosya Ücretinin Alınmadığı Fakat Mortgage Sigortasının Olduğu Kontratlar da Arbitrajsız Ortam Koşulu:

$$V_B(H(0), r(0), 0) + I(H(0), r(0), 0) = L$$

(4.16)

$$V_L(H(0), r(0), 0) = L$$

Yukarıdaki denkleme göre, mortgage sigortası (I) talep eden bankalar için $t = 0$ anındaki mortgage kontratı değerinin $[V_L = V_B + I]$, $t=0$ anındaki toplam kredi miktarına (L) eşit olması gerektiğini göstermektedir. Bu kontrat çeşidinde, $t=0$ anında bankanın pozisyonu $V_B(H(0), r(0), 0) + I(H(0), r(0), 0) - L$ ye eşit olacaktır.

Hizmet-Dosya Ücretinin Alındığı ve Mortgage Sigortasının Olduğu Kontratlar da Arbitrajsız Ortam Koşulu:

$$V_B(H(0), r(0), 0) + I(H(0), r(0), 0) = (1 - \zeta)L$$

(4.17)

$$V_L(H(0), r(0), 0) = (1 - \zeta)L$$

Yukarıdaki denkleme göre, mortgage sigortası (I) talep eden ve hizmet-dosya ücreti alan bankalar için $t = 0$ anındaki mortgage kontratı değerinin $[V_L = V_B + I]$, $t=0$ anında

hizmet-dosya ücreti (ζ) düşüldükten sonra geriye kalan kredi miktarına $[(1-\zeta)L]$ eşit olması gerektiğini göstermektedir. Bu kontrat çeşidinde, $t=0$ anında bankanın pozisyonu $V_B(H(0), r(0), 0) + I(H(0), r(0), 0) - (1-\zeta)L$ değerine eşit olacaktır.

Yukarıda tanımlanan 4 farklı kontrattaki arbitrajsız koşul eşitliğini sağlayan, diğer bir deyişle denge durumunu sağlayan optimal mortgage faiz oranlarının hesaplanması mümkündür.

Tablo 9, %95'lik kredi miktarı-konut fiyatı oranını (Loan-to-Value, LTV Ratio) göz önüne alarak, yukarıda tanımlanan her bir kontrat yapısı için kredi veren bankanın pozisyonunu ve arbitrajsız koşulu sağlayan optimal mortgage faiz oranlarını göstermektedir. Geçtiğimiz yıllarda, Türkiye'deki birçok bankanın verdiği kredi miktarı konut piyasa değerinin maksimum %75'ini oluşturmaktaydı. İkincil mortgage piyasalarının kısa süre içinde getirilmesi beklendiği son durumda ise, birçok banka (Yapı Kredi Bankası ve Finans Bank gibi) %90-%95'lik oranlarda konut kredisi vermeye başlamıştır. İkincil piyasa ortamında, birçok bankanın bu uygulamaya geçeceği beklenmektedir. Tablo 9 ayrıca, %2 oranında erken ödeme cezası olan ve %2 oranında hizmet/dosya bedeli alınan kontratlar için fiyatlandırma sonuçlarını vermektedir.

Tablo 9'de temerrüt opsiyonu değerlerinin 278 ile 17,470 arasında değiştiğini görmekteyiz. Bu durumda, %95'lik kredi miktarı temerrüt açısından riskli görülmekte, dolayısıyla mortgage sigortası değerleri de oldukça büyük değerler (66 – 804 aralığı) alabilmektedir.

Mortgage kredisi verirken, %2 oranında hizmet-dosya ücreti alıp, mortgage sigortasına sahip olmayan bankaların pozisyonu $[V_B - (1-\xi)L]$ ile, hem %2 hizmet-dosya ücreti alıp hem de mortgage sigortasına sahip olan bankanın pozisyonunu $[V_B - (1-\xi)L + I]$ karşılaştırdığımızda, arbitrajsız koşulu sağlayan optimal faiz oranının mortgage sigortasına sahip olan banka için yıllık %20.07, sigorta almayan banka içinse %20.07 ile %21 aralığında değiştiğini görmekteyiz. Bu sonuçlara göre, temel ekonomik koşullar altında, %95'lik kredi veren bankalardan mortgage sigortasına sahip olanlar göreceli olarak daha düşük bir kredi faiz oranı uygulayarak aynı kontrat değerine sahip olabilmektedir.

Bununla birlikte, Tablo 9'de görüldüğü üzere, yıllık %20.07 kredi faizi uygulayan bir bankanın, mortgage sigortası aldığı takdirde pozisyon değeri sıfır değerini alırken $[V_B - (1-\xi)L + I = 0]$, mortgage sigortası almadığı durumdaki pozisyonu $[V_B - (1-\xi)L = -622]$ negatif değer almaktadır. Son olarak, %20.07 kredi faizi uygulayan bir bankanın komisyon ücreti ve mortgage sigortası almadığı durumda, kredi kontratının banka için piyasa değeri; $[V_B - L] = -2522$ olmaktadır.

Sonuç olarak, mortgage sigortası alınması özellikle yüksek kredi oranları için (%95 gibi) bankanın pozisyonuna pozitif bir değer katmaktadır.

Temel ekonomik senaryo kapsamında yapılan son çalışma, kontrat yapısının önemli bileşenleri arasındaki takas (trade-off) ilişkilerine bakmaktadır. Mortgage kontrat yapısını belirleyen en önemli bileşenler arasında;

- krediyi erken ödeme cezası,
- mortgage kredisi hizmet-dosya ücreti,
- optimal mortgage faizi (krediye uygulanacak faiz oranı), sayılmaktadır.

Bankalar mortgage kredisi verirken, bu bileşen değerlerini dikkatle belirlemek durumundadırlar. Oldukça kompleks finansal mühendislik metotları gerektiren bu

takas (trade-off) hesabında uygulanan işlem basit olarak tanımlamak gerekirse, optimizasyon işlemidir.

Ülkemizde mortgage kredisi veren bankalara baktığımızda, sabit faiz oranlı mortgage kredileri için krediyi erken ödeme cezasının borç bakiyesinin maksimum %2'si oranında olduğunu görmekteyiz. Bununla birlikte, mortgage kredisi açılması ve takip edilmesi amacıyla alınan hizmet-dosya ücretinin, alınan kredi miktarının %1 ile %5'i oranında değiştiğini görmekteyiz.

Tablo 10, kredi miktarının konut değerinin %95'ini oluşturduğu mortgage kredilerinde, farklı erken ödeme cezası (%0-%5 aralığı) ve hizmet-dosya ücreti (%0-%3 aralığı) kombinasyonları için bankaların uygulaması gereken optimal mortgage faiz oranlarını vermektedir. Tabloda görüldüğü üzere, bankalar uyguladıkları erken ödeme cezası ve hizmet-dosya ücretini arttırdıkça daha düşük mortgage faiz oranları uygulayabilmektedirler.

Finans Bank örneğine baktığımızda, bankanın 10 yıl vadeli, %95 kredi oranlı, %2 erken ödeme cezalı, hizmet-dosya ücretsiz "Kredi Kolay Mortgage" ürünü için aylık %1.27 faiz oranı uyguladığını görmekteyiz (Eylül 2007 verisi). Tablo 3'deki sonuçlara göre, son 6 yıldaki (2002-2007) ekonomik koşullar göz önüne alındığında, aynı koşullardaki mortgage kredisine uygulanacak faiz oranının yıllık %20.72, aylık basit faiz oranının ise %1.73 civarında olduğunu görmekteyiz. Önceki gelişme raporlarımızda belirtildiği üzere, ülkemizdeki mevcut sistemde uygulanmakta olan mortgage faiz oranları, ekonomik koşullar göz önüne alındığında oldukça düşük görünmektedir.

4.3.3. Farklı Ekonomik Senaryo–Farklı Kontrat Yapıları için Opsiyon Modelleme Sonuçları Analizi

Tablo 11'deki nümerik sonuçlar;

- spot faiz oranları,
- konut fiyatları volatilitesi ve
- faiz oranı volatilitesindeki değişimlerin mortgage kontrat değerini ve dolayısıyla bankaların uygulaması gereken kredi faiz oranlarını nasıl etkilediği sorusuna yanıt vermektedir.

Spot faiz oranları, konut fiyatları ve faiz oranları volatilitelerindeki değişimin, mortgage kontratı bileşenlerinin (Kredi geri ödemeleri, temerrüt opsiyonu, erken ödeme opsiyonu, mortgage sigortası) piyasa değerleri üzerindeki etkilerini de bu tablolardan görmek mümkündür.

Temel ekonomik senaryo kapsamında, faiz oranı volatilitesi %12 olarak hesaplanmıştır. Tablo 11'de %12 ile %15 aralığındaki faiz oranı volatilitesi incelenmektedir. Bu tablo, kredi miktarının konut fiyatının %95'ini oluşturduğu, krediyi erken ödeme cezasının %2 oranında olduğu, 10 yıl vadeli mortgage kredileri için hazırlanmıştır. Elde edilen nümerik sonuçlara göre, faiz oranı volatilitesi arttıkça kredi alan kişinin temerrüt riski de krediyi erken kapama riski de artmaktadır. Fakat, faiz oranı volatilitesinin kredinin erken ödenme riski üzerindeki etkisi çok daha fazladır. Diğer bir deyişle, erken ödeme opsiyon değerleri faiz oranı volatilitesi ile birlikte büyük artış göstermektedir. Kredi alan kişilerin erken ödeme riski baskın olarak arttıkça, temettüye düşme olasılıkları azalacak ve dolayısıyla mortgage sigortası piyasa değeride azalacaktır. Temerrüt sigortası değerlerindeki düşüş de elde edilen sonuçlarda görülmektedir.

Tablodaki sonuçlarda görüldüğü üzere, faiz oranlarındaki volatilitenin arttıkça bankaların uygulayacağı kredi faiz oranlarının da zamanla artması beklenmektedir.

2007-2009 yılları arasında Türkiye'deki duruma baktığımızda, kredi faiz oranlarındaki volatilitenin çok fazla olduğunu görmekteyiz. 2007 yılı Kasım ayında konut kredilerine aylık ortalama %1.30- %1.50 faiz uygulayan bankalar, 2008 Aralık ayında aylık ortalama %1.80-%2.40 aralığında faiz uygulamışlardır. 2009 yılı itibari ile aylık kredi faiz oranları %1'in altında görülmektedir. Faiz oranlarının bu kadar oynak olduğu bir kredi piyasasında bankaların en büyük riski kredilerin erken kapanmasıdır. Şu anda Türkiye'deki birçok bankanın kredi erken kapamaları ile uğraştığı bilinmektedir. Erken kapamaların artışı, banka için kredi kontratının piyasa değerini düşürecektir.

Belirlenen temel ekonomik senaryo kapsamında, konut fiyatları volatilitesi %9 olarak hesaplanmıştır. Tablo 4'de, %9 ile %12 aralığındaki konut fiyatları volatilitesi incelenmektedir. Yukarıda belirtildiği üzere, bu tablo kredi miktarının konut fiyatının %95'ini oluşturduğu, krediyi erken ödeme cezasının %2 oranında olduğu, 10 yıl vadeli mortgage kredileri için hazırlanmıştır.

Elde edilen sonuçlara göre, konut fiyatlarındaki dalgalanma (volatilité) artıka kişilerin temerrüte düşme riski artacak ve dolayısıyla temerrüt opsiyonu değerinde artış görülecektir. Temerrüt opsiyonu değerindeki artış ile birlikte mortgage sigortası değeri de gözle görülür miktarda artacaktır. Diğer bir deyişle, konut fiyatlarındaki volatilitenin yüksek olduğu ortamlarda temerrüt riskinden korunmak amacıyla bankaların mortgage sigortası almaları beklenmektedir. Bununla birlikte, konut fiyatlarındaki dalgalanmalardan dolayı temerrüt riski artarken, krediyi erken ödeme riskinin azaltıldığını görmekteyiz. Kişiler temerrüt opsiyonunu kullanmayı tercih ettikçe, erken ödeme opsiyonunun piyasa değeri küçülecektir. Tablo 11'de görüldüğü üzere, konut fiyatlarındaki volatilitenin artması kontratın piyasa değerini düşürmektedir.

Piyasa değeri düşen mortgage kontratları için bankanın uygulayacağı kredi faiz oranları da düşecektir. Diğer bir deyişle, piyasa değeri (fiyatı) düşen finansal aracın getirisi olan faiz oranının da düşmesi beklenmektedir. Konut fiyatlarındaki volatilitenin artması ile (%9 - %12), mortgage kontrat değerindeki (V) ve denge faiz oranlarındaki (c) düşüş Tablo 11'deki sonuçlarda net bir şekilde görülmektedir.

Son olarak, spot faiz oranlarının %12- %21 aralığında artmasının özellikle kredi (denge) faiz oranlarında artışa neden olduğunu görmekteyiz. Bunun başlıca nedeni, spot faiz oranlarındaki artış ile fonlama maliyeti (mevduat faiz oranları) artan bankanın kişilere daha yüksek kredi faizi uygulamak isteğidir.

**Tablo 9: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratı
(Erken Ödeme Cezası = %2; Kredi Miktarının Konut Fiyatına Oranı (LTV Ratio) = %95**

Contract Rate (c)	Future Payments (A)	Mortgage (V)	Default (D)	Prepayment (C)	Insurance (I)	Value of the Mortgage to the Lender				
						V_{B-L}	$V_{B-(1-\xi)L}$	V_{B-L+I}	$V_{B-(1-\xi)L+I}$	
16,00%	162740	80303	278	82158	66	-14697	-12797	-14631	-12731	
17,00%	168845	83299	638	84907	126	-11701	-9801	-11575	-9675	
18,00%	175050	86321	1620	87109	241	-8679	-6779	-8438	-6538	
19,00%	181353	89340	3384	88629	401	-5660	-3760	-5259	-3359	
20,00%	187748	92286	8838	86625	609	-2714	-814	-2106	-206	
20,07%	188189	92478	9379	86332	623	-2522	-622	-1899	0	
21,00%	194234	94893	16645	82696	804	-107	1793	697	2597	
22,00%	200807	96650	17470	86686	743	1650	3550	2393	4293	
23,00%	207462	96896	640	109927	26	1896	3796	1922	3822	

The following parameters were used in the construction of this table: the arrangement fee (ξ) is 2%; the early termination penalty (π) is 2%; the spot interest rate ($r(0)$) is 10%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the interest rate volatility (σ) is 12%; the house price volatility (ν) is 9%; the house service flow (δ) is 4%; LTV ratio is 95% and the correlation coefficient (ρ) is 0, intensity of jumps is 0.01 and expectation of jumps is 0.0127.

Tablo 10: Erken Ödeme Cezası – Hizmet Dosya Ücreti – Optimal Mortgage Faiz Oranları Arasındaki Takas (Trade-off)

Krediyi Erken Ödeme Cezası	Hizmet- Dosya Ücreti (ξ)			
	0,00	0,01	0,02	0,03
(π)				
0,00	20,92%	20,46%	20,11%	19,78%
0,01	20,77%	20,41%	20,08%	19,77%
0,02	20,72%	20,39%	20,07%	19,76%
0,05	20,69%	20,37%	20,06%	19,76%

The following parameters were used in the construction of this table: the spot interest rate ($r(0)$) is 10%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the interest rate volatility (σ) is 12%; the house price volatility (ν) is 9%; the house service flow (δ) is 4%; LTV ratio is 95%; the correlation coefficient (ρ) is 0; intensity of jumps is 0.01 and expectation of jumps is 0.0127.

Tablo 11: Spot Faiz Oranları, Konut Fiyatları Volatilitesi ve Faiz Oranları Volatilitesindeki Değişimlerin Mortgage Kontrat Değeri ve Optimal Faiz Oranları Üzerine Etkileri

(Erken Ödeme Cezası = %2; Kredi Miktarının Konut Fiyatına Oranı (LTV Ratio) = %95)

Spot Rate	Eq. Contract Rate		Future Payments		Mortgage		Default		Prepayment		Insurance	
	(c)		(A)		(V)		(D)		(C)		(I)	
	v = 9%	v = 12%	v = 9%	v = 12%	v = 9%	v = 12%	v = 9%	v = 12%	v = 9%	v = 12%	v = 9%	v = 12%
12%	$\sigma = 12\%$	20,69%	20,20%	185362	92477	91951	10068	12739	85924	80672	618	1152
	$\sigma = 15\%$	21,31%	20,83%	193214	92477	91960	10943	14473	89794	83687	618	1143
15%	$\sigma = 12\%$	21,92%	21,44%	189309	92496	92026	11097	14160	85716	80113	605	1075
	$\sigma = 15\%$	22,61%	22,13%	194409	92501	92032	12036	15859	89872	83514	605	1066
18%	$\sigma = 12\%$	23,05%	22,58%	190362	92501	92082	11612	14894	86248	80519	594	1010
	$\sigma = 15\%$	23,80%	23,34%	195842	92507	92087	12385	16516	90950	84398	593	1005
21%	$\sigma = 12\%$	24,59%	24,17%	192295	92503	92157	12460	15447	87331	82165	592	942
	$\sigma = 15\%$	25,46%	25,05%	198360	92513	92158	12897	16911	92950	86784	582	941

The following parameters were used in the construction of this table: the arrangement fee (ξ) is 2%; the early termination penalty (π) is 2%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the house service flow (δ) is 4%; LTV ratio is 95% and the correlation coefficient (ρ) is 0. intensity of jumps is 0.01 and expectation of jumps is 0.0127.

4.4. İki farklı Modelden Elde Edilen Nümerik Sonuçların Karşılaştırılması ve Yorumlanması

Raporun bu bölümünde, proje kullanılan iki farklı modelin nümerik sonuçları karşılaştırmalı olarak yorumlanacaktır.

İlk model, klasik opsiyon fiyatlama modelidir. Klasik opsiyon fiyatlama modeline göre, faiz oranları Cox, Ingersoll ve Ross (CIR) stokastik prosesi ile konut fiyatları da geometrik Brownian hareketi ile tanımlanmıştır. Bu iki stokastik hareketin tanımladığı kısmi diferansiyel denklemin nümerik çözümü mortgage kontratı ve kontrattaki gizli opsiyonların (temerrüt ve erken ödeme) piyasaya değerini vermektedir.

İlk modelin uygulanması ile hedeflenen temel amaç, klasik opsiyon fiyatlama modelini kullanarak Türkiye'deki bankalar tarafından verilen sabit faiz oranlı mortgage kredilerinin geri ödenmeme (temerrüt) ve erken kapama risklerinin hesaplanması ve kredilerin piyasa değerinin belirlenmesidir. Model sonuçlarından elde edilen denge faiz oranlarının, Türkiye'deki bankaların uyguladıkları mevcut faiz oranlar ile karşılaştırılması da projenin hedeflenen amaçlarından biridir.

İkinci modelde, Türkiye gibi gelişmekte olan ülkelerdeki enflasyon riski nedeniyle faiz oranları mevcut literatürde kullanılmakta olan klasik difüzyon süreçleri yerine, sıçramalı difüzyon hareketi (jump diffusion process) ile modellenmiştir. Konut fiyatları I. Modeldeki gibi geometrik Brownian hareketi ile tanımlanmıştır. Bu iki stokastik proseden elde edilen kısmi integro-diferansiyel denkleme ilişkin sayısal analizler, sabit faiz oranlı mortgage kontratlarının enflasyonist ekonomilerde fiyatlandırılması için ilk kez kullanılmıştır.

Projenin bu aşamasında, aynı özelliklere sahip bir mortgage kontratının Türkiye ortamında, iki farklı model kullanılarak fiyatlandırılması tartışılmaktadır. Diğer bir deyişle, iki modelin nümerik sonuçları kıyaslamalı olarak yorumlanmaktadır. Projede fiyatlandırmaya konu olan mortgage kontratının özelliklerini aşağıdaki gibi özetlemek mümkündür:

- Sabit faiz oranlı – sabit geri ödemeli mortgage kredisi
- 120 ay vadeli
- %95 mortgage kredisi – konut piyasa değeri rasyosu
- %2 erken ödeme cezası
- %2 komisyon ücreti /hizmet bedeli

Bu özellikler, mevcutta Türkiye'deki kamu ve özel sermayeli mevduat bankalarının en yaygın kullandığı konut kredisi özelliklerdir.

Tablo 12'deki sonuçları kullanarak, sözkonusu mortgage kredisinin (banka açısından) temerrüt opsiyonu, erken ödenme opsiyonu ve temerrüt sigortası piyasa değerlerini her iki modelin sonuçlarını kullanarak karşılaştırmak mümkündür. Tablodan net bir şekilde görüldüğü üzere, faiz oranlarını sıçramalı difüzyon hareketi ile modellediğimiz II. Modelin sonuçlarında hem temerrüt hem de erken ödeme opsiyonunun piyasa değeri I. Modele göre oldukça yüksektir. I. Modelde temerrüt opsiyon değerleri 30-1432 aralığında iken, II. Modele göre bu değer 278-17,470 aralığındadır.

Faiz oranlarındaki sıçramanın asıl etkisi erken ödeme opsiyonundadır. Piyasa faiz oranlarındaki aşağı ya da yukarı yöndeki bir sıçrama yani oynaklık, kredi alan kişilerin kredilerini erken kapama taleplerini artıracaktır. Tablo sonuçlarından görüldüğü üzere, II. Modele göre, erken ödeme opsiyonu piyasa değerleri I. Modele göre çok yüksektir. Sonuç olarak, faiz oranlarındaki sıçramalar yani belirsizliklerden etkilenen erken

ödeme opsiyon değeridir. Temerrüt opsiyonu değeri daha çok konut fiyatlarındaki değişimlerden etkilenmektedir. Faiz oranlarındaki sıçramaların, temerrüt opsiyonu üzerindeki etkisi göreceli olarak az olduğundan, temerrüt sigortası piyasa değeri de fazla bir değişiklik göstermemektedir.

Önceki analizlerde belirtildiği üzere, mortgage kredisinin banka açısından değerini belirleyen 2 temel factor vardır. Bunlar: 1) müşteriden peşin olarak tahsil edilen komisyon ücreti /hizmet bedeli ve 2) temerrüt riskine karşılık %80 ve üzerindeki oransaki krediler için alınan temerrüt sigortası ürünüdür. Bu durumda banka için 4 farklı durumdan bahsetmek mümkündür:

1. Hizmet-Dosya Ücreti ve Mortgage Sigortasının Olmadığı Kontratlar $[V_B - L]$
2. Hizmet-Dosya Ücretinin Alındığı, Mortgage Sigortasının Olmadığı Kontratlar $[V_B - (1-\xi)L]$
3. Hizmet-Dosya Ücretinin Alınmadığı Fakat Mortgage Sigortasının Olduğu Kontratlar $[V_B - L + I]$
4. Hizmet-Dosya Ücretinin Alındığı ve Mortgage Sigortasının Olduğu Kontratlar $[V_B - (1-\xi)L + I]$

Yukarıda tanımlanan 4 farklı kontrattaki arbitrajsız koşulu sağlayan, diğer bir deyişle denge durumunu sağlayan optimal mortgage faiz oranları ve mortgage kontratının banka için piyasa değeri her iki model için de hesaplanmıştır.

Şekil 12-13-14 ve 15'de görüldüğü üzere, faiz oranlarının sıçramalı difüzyon hareketi ile modellendiği durumda (II. Model) kredi kontratının piyasa değeri banka için azalmaktadır. Riskli faiz ortamında konut kredisi kontratlarının banka için piyasa değeri azaldığından, bankalar daha yüksek faiz oranı uygulamasına geçmektedirler. Şekillerde görüldüğü üzere, yukarıda tanımlanan her bir kontrat için II. Modelde belirlenen denge faiz oranları, I. Model sonuçlarına göre yüksektir. Tablo 13, denge faiz oranlarında farklılığı daha net göstermektedir. Örneğin, bankanın konut kredisinde hem %2 hizmet-dosya ücreti aldığı hem de temerrüt sigortası talep ettiği 4. kontratta $[V_B - (1-\xi)L + I]$, I. Modele göre denge faiz oranı yıllık %19.44 iken, faiz oranlarının sıçramalı olarak tanımlandığı II. Modele göre, %20.07'dir. Sonuç olarak, faiz oranlarındaki sıçramalar göz önüne alınırsa bankaların aylık %1.62 yerine %1.67 faiz oranı uygulaması beklenmektedir.

Diğer bir örnek olarak, bankanın %2 oranında komisyon ücreti aldığı fakat temerrüt sigortası talep etmediği durumda ise, $[V_B - (1-\xi)L]$, I. Modele göre denge faiz oranı yıllık %19.44- %20 aralığında iken, faiz oranlarının sıçramalı olarak tanımlandığı II. Modele göre bu aralık %20.07 - %21'dir. Sonuç olarak, faiz oranlarındaki sıçramalar göz önüne alınırsa bankaların aylık %1.62-%1.67 aralığı yerine %1.67-%1.75 aralığında faiz oranı uygulaması beklenmektedir.

Son olarak, Tablo 14, iki model sonuçlarına göre erken ödeme cezası, hizmet/dosya ücreti ve denge mortgage faiz oranları arasındaki takası (Trade-off) göstermektedir. Örneğin, %3 oranında komisyon ücretini peşin alan ve %2 oranında erken ödeme cezası uygulayan bir banka için, I. Modele göre uygulanması gereken yıllık faiz oranı %19.13 (yani yaklaşık aylık %1.59) iken, II. Modele göre bu faiz yıllık %19.76 (yani yaklaşık aylık %1.81)'dir. Tabloda net bir şekilde görülen diğer bir sonuç ise, faiz oranlarının sıçramalı olarak tanımlandığı durumda (II. Model), komisyon ücretini %0'dan %3'e kadar yükseltmek bankanın uyguladığı faiz oranını sadece %1.14 oranında aşağıya çekebilmesidir (%20.92'den %19.78'e). I. Modele göre, yani faiz

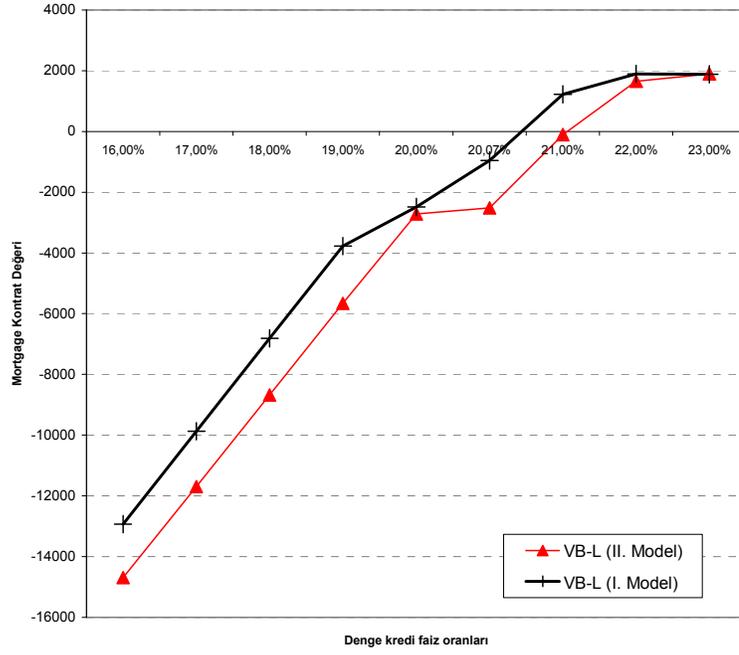
oranlarındaki sıçramaların göz önüne alınmadığı durumda ise, komisyon ücretini %0'dan %3'e kadar yükselten banka uyguladığı faiz oranını %21.93'den %19.15'e geri çekebilmektedir (%2.78'lik değişim).

Özetle, faiz oranlarının enflasyonist ortamlardaki belirsizlikler göz önüne alınarak, sıçramalı stokastik hareketlerle modellenmesi, banka açısından mortgage kredi kontratının piyasa değerini azaltmaktadır. Banka bu durumda daha yüksek kredi faizi uygulamasına gitmektedir. Her iki modelin nümerik sonuçları beklenen sonuçları vermekle beraber, iki model arasındaki uygulanması gereken denge faiz oranlarındaki farklılaşma beklenilenden az bulunmuştur.

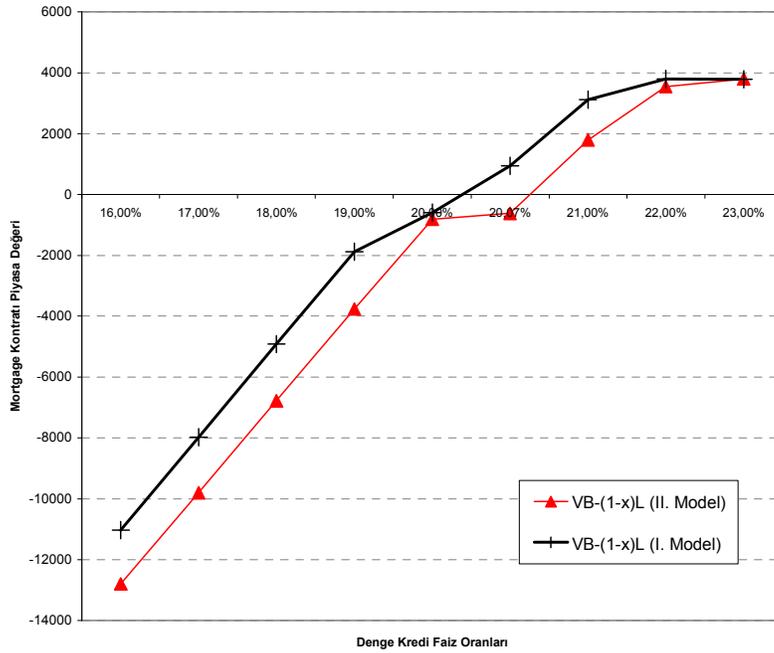
Tablo 12: İki Model Sonuçlarına göre Temerrüt Opsiyonu - Erken Ödeme Opsiyonu ve Temerrüt Sigortası Piyasa Değerleri

I. Model (Kısmi diferansiyel denklem)				II. Model (Kısmi-integro diferansiyel denklem)			
Denge Faiz Oranı (c)	Temerrüt Opsiyonu (D)	Erken Ödeme Opsiyonu (C)	Sigorta (I)	Temerrüt Opsiyonu (D)	Erken Ödeme Opsiyonu (C)	Sigorta (I)	
16,00%	30	2090	91	278	82158	66	
17,00%	71	2154	174	638	84907	126	
18,00%	170	2201	322	1620	87109	241	
19,00%	376	2218	491	3384	88629	401	
20,00%	576	2181	600	8838	86625	609	
20,07%	904	2180	724	9379	86332	623	
21,00%	1432	2832	789	16645	82696	804	
22,00%	944	6039	396	17470	86686	743	
23,00%	0	10438	0	640	109927	26	

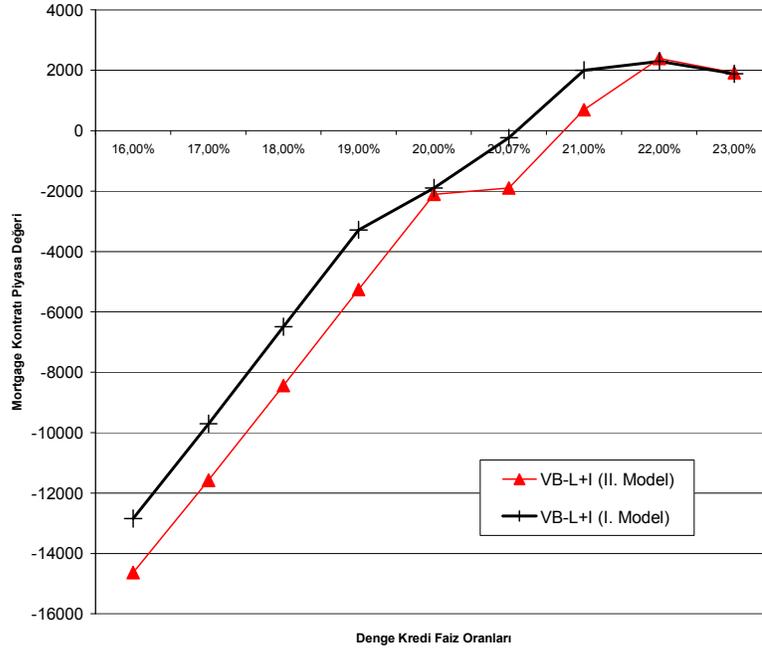
**Şekil 12: İki Model Sonuçlarına göre Mortgage Kontratının Piyasa Değeri:
(Dosya Ücreti ve Mortgage Temerrüt Sigortası yok)**



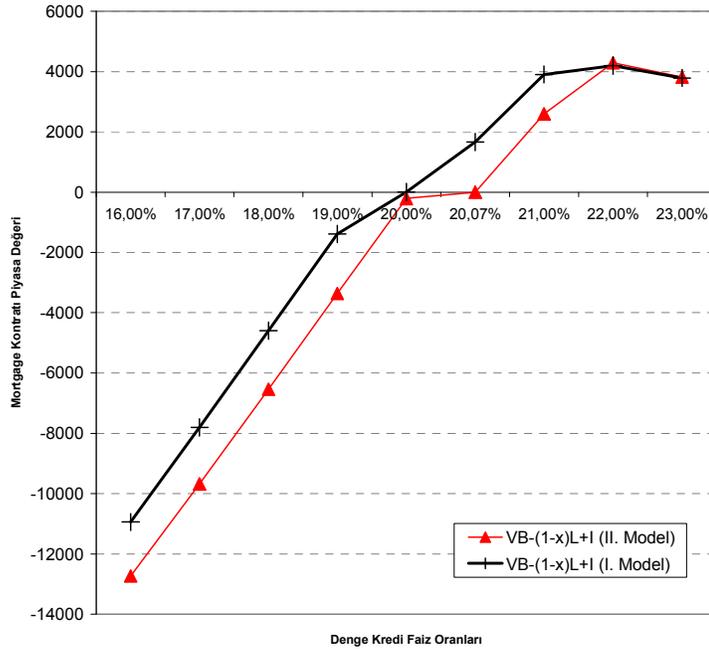
**Şekil 13: İki Model Sonuçlarına göre Mortgage Kontratının Piyasa Değeri:
(%2 Dosya Ücreti – Mortgage Temerrüt Sigortası yok)**



**Şekil 14: İki Model Sonuçlarına göre Mortgage Kontratının Piyasa Değeri:
(Dosya Ücreti Yok – Mortgage Temerrüt Sigortası var)**



**Şekil 15: İki Model Sonuçlarına göre Mortgage Kontratının Piyasa Değeri:
(%2 Dosya Ücreti – Mortgage Temerrüt Sigortası var)**



Tablo 13: Denge Faiz Oranlarındaki Değişim

I. Model (Difüzyon Prosesi)

Contract Rate (c)	Future Payments (A)	Mortgage (V)	Default (D)	Prepayment (C)	Insurance (I)	Value of the Mortgage to the Lender			
						V_B-L	$V_B-(1-\xi)L$	V_B-L+I	$V_B-(1-\xi)L+I$
16,00%	84188	82068	30	2090	91	-12932	-11032	-12840	-10940
17,00%	87347	85121	71	2154	174	-9879	-7979	-9704	-7804
18,00%	90557	88186	170	2201	322	-6814	-4914	-6492	-4592
19,00%	93817	91223	376	2218	491	-3777	-1877	-3287	-1387
19,44%	95267	92510	576	2181	600	-2490	-590	-1890	10
20,00%	97126	94042	904	2180	724	-958	942	-234	1666
21,00%	100481	96217	1432	2832	789	1217	3117	2006	3906
22,00%	103881	96898	944	6039	396	1898	3798	2294	4194
23,00%	107324	96886	0	10438	0	1886	3786	1886	3786

II. Model (Sıçramalı Difüzyon Prosesi)

Contract Rate (c)	Future Payments (A)	Mortgage (V)	Default (D)	Prepayment (C)	Insurance (I)	Value of the Mortgage to the Lender			
						V_B-L	$V_B-(1-\xi)L$	V_B-L+I	$V_B-(1-\xi)L+I$
16,00%	162740	80303	278	82158	66	-14697	-12797	-14631	-12731
17,00%	168845	83299	638	84907	126	-11701	-9801	-11575	-9675
18,00%	175050	86321	1620	87109	241	-8679	-6779	-8438	-6538
19,00%	181353	89340	3384	88629	401	-5660	-3760	-5259	-3359
20,00%	187748	92286	8838	86625	609	-2714	-814	-2106	-206
20,07%	188189	92478	9379	86332	623	-2522	-622	-1899	0
21,00%	194234	94893	16645	82696	804	-107	1793	697	2597
22,00%	200807	96650	17470	86686	743	1650	3550	2393	4293
23,00%	207462	96896	640	109927	26	1896	3796	1922	3822

The following parameters were used in the construction of this table: the arrangement fee (x) is 2%; the early termination penalty (p) is 2%; the spot interest rate $r(0)$ is 10%; the long term average of the interest rate (q) is 24%; the speed of reversion (k) is 56%; the interest rate volatility (s) is 12%; the house price volatility (n) is 9%; the house service flow (d) is 4%; LTV ratio is 95% and the correlation coefficient (r) is 0. The intensity of jumps is 0.01 and expectation of jumps is 0.0127.

Tablo 14: İki Model Sonuçlarına göre Erken Ödeme Cezası – Hizmet-Dosya Ücreti – Optimal Mortgage Faiz Oranları Arasındaki Takas (Trade-off)

I. MODEL (Kısmi diferansiyel denklem)				
Krediyi Erken Ödeme Cezası	Hizmet-Dosya Ücreti (ξ)			
	(π)	0.00	0.01	0.02
0.00	21.93%	19.83%	19.47%	19.15%
0.01	20.14%	19.77%	19.45%	19.14%
0.02	20.09%	19.75%	19.44%	19.13%
0.05	20.05%	19.73%	19.43%	19.13%

The following parameters were used in the construction of this table: the spot interest rate ($r(0)$) is 10%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the interest rate volatility (σ) is 12%; the house price volatility (v) is 9%; the house service flow (δ) is 4%; LTV ratio is 95% and the correlation coefficient (ρ) is 0.

II. MODEL (Kısmi integro diferansiyel denklem)				
Krediyi Erken Ödeme Cezası	Hizmet-Dosya Ücreti (ξ)			
	(π)	0,00	0,01	0,02
0,00	20,92%	20,46%	20,11%	19,78%
0,01	20,77%	20,41%	20,08%	19,77%
0,02	20,72%	20,39%	20,07%	19,76%
0,05	20,69%	20,37%	20,06%	19,76%

The following parameters were used in the construction of this table: the spot interest rate ($r(0)$) is 10%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the interest rate volatility (σ) is 12%; the house price volatility (v) is 9%; the house service flow (δ) is 4%; LTV ratio is 95%; the correlation coefficient (ρ) is 0; intensity of jumps is 0.01 and expectation of jumps is 0.0127

5. Referanslar

1. Ahn, C.M., H.E. Thompson, Jump-diffusion processes and the term structure of interest rates, *Journal of Finance*, 43 (1) (1988) 155-74.
2. Almendral A., Oosterlee C., Numerical valuation of options with jumps in the underlying, *Applied Numerical Mathematics* 53 (2005) 1–18.
3. Amin K.I, Jump diffusion option valuation in discrete time, *Journal of Finance* 48 (5) (1993) 1833–1863.
4. Andersen L., Andreasen J., Jump-diffusion processes: Volatility smile fitting and numerical methods for option pricing, *Review of Derivatives Research* 4 (3) (2000) 231–262.
5. Azevedo-Pereira, J. A., Newton, D. P. and D. A., Paxson, 2000, “Numerical Solution of a Two State Contingent Claims Mortgage Valuation Model”, *Portuguese Review of Financial Markets*, 3(1): 36-65.
6. Azevedo-Pereira, J. A., Newton, D. P. and D. A. Paxson, 2002, “UK Fixed Rate Repayment Mortgage and Mortgage Indemnity Valuation”, *Real Estate Economics*, 30(2): 185-211.
7. Azevedo-Pereira, J. A., Newton, D. P. and D. A., Paxson, 2003, “Fixed-Rate Endowment Mortgage and Mortgage Indemnity Valuation”, *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 26 (2/3): 197-221.
8. Bartholomew, L, Berk, J. and R. Roll, 1988, “Mortgage Securities Research Adjustable Rate Mortgages: Prepayment Behavior”, *Housing Finance Review*, 7: 31-46.
9. Bates D.S., Pricing options under jump-diffusion processes, [Rodney L. White Center for Financial Research Working Papers](#), 37-88.
10. Bates, D. S. Jumps and stochastic volatility: the exchange rate processes implicit in Deutschmark options, *Review of Financial Studies* 9 (1996) 69–107.
11. Black, F. and M. Scholes, 1973, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*, 81: 637-654.
12. Briani, M, R. Natalini and G. Russo, 2004, “A Implicit-Explicit Numerical Schemes for Jump-Diffusion Processes”, IAC Report No:38.
13. Briani M., Natalini R., Russo G., Implicit–explicit numerical schemes for jump-diffusion processes, *CALCOLO* 44 (2007) 33 – 57
14. Carr, P., and Madan, D. Option valuation using the fast Fourier transform, *Journal of Computational Finance* 2 (1998) 61–73.
15. Chiarella C., Ziogas A., American call options under jump-diffusion processes - A Fourier transform approach, *Applied Mathematical Finance*, 16 (1) (2009) 37–79.

16. Chiquier, L., 1998, "Dual Index Mortgages (DIMs): Conditions of Sustainable Development in Poland", East European Regional Urban Sector Assistance Project, The Urban Institute.
17. Ciochetti, B. A., Deng, Y., Gao, B. and R. Yao, 2003, "The Termination of Commercial Mortgage Contracts through Prepayment and Default: A Proportional Hazard Approach with Competing Risks", *Real Estate Economics*, 30(4): 595-633.
18. Cliff S.S., Forsyth P.A, Numerical solution of two asset jump diffusion models for option valuation, *Applied Numerical Mathematics* 58 (2008) 743–782
19. Cont R., Tankov P., Financial Modelling with Jump Processes, CRC Financial Mathematics Series, Chapman and Hall, 2004.
20. Cont R., Voltchkova E., A finite difference scheme for option pricing in jump diffusion and exponential Lévy models, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 43 (4) (2005) 1596–1626.
21. Cox, D. R., 1972, "Regression Models and Life-Tables", *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, 34: 187-220.
22. Cox, J.C., J.E. Ingersoll and S.A. Ross, 1985, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53: 385-407.
23. Cunningham, D. and P. H. Hendershott, 1984, "Pricing FHA Mortgage Default Insurance", *Housing Finance Review*, 3(4): 373-392.
24. Cunningham, D. and C. J. Capone, 1990, "The Relative Termination Experience of Adjustable to Fixed Rate Mortgages", *Journal of Finance*, 45(5): 1687-1703.
25. Das, Sanjiv Ranjan, The surprise element: jumps in interest rates, *Journal of Econometrics*, 106 (2002) 27-65.
26. Deng, Y., Quigley, J. M., and R. Van Order, 1996, "Mortgage Default and Low Downpayment Loans: The Costs of Public Subsidy", *Regional Science and Urban Economics*, 26: 263-285.
27. Deng, Y., 1997, "Mortgage Termination: An Empirical Hazard Model with a Stochastic Term Structure", *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 14: 309-331.
28. Deng, Y., J.M. Quigley, and R. Van Order, 2000, "Mortgage Terminations, Heterogeneity and the Exercise of Mortgage Options", *Econometrica*, 68(2): 275-307.
29. D'Halluin Y., Forsyth P.A., Labahn G., A penalty method for American options with jump diffusion processes, *Numerische Mathematik* 97 (2) (2004) 321–352.
30. D'Halluin Y., Forsyth P.A., Vetzal K.R, Robust numerical methods for contingent claims under jump diffusion processes, *IMA Journal of Numerical Analysis* 25 (1) (2005) 87–112.

31. Durham J.B, Jump-diffusion processes and affine term structure models: Additional closed-form approximate solutions, distributional assumptions for jumps, and parameter estimates, Federal Reserve Board, Finance and Economics Discussion Series Divisions of Research & Statistics and Monetary Affairs, 2005-53.
32. Epperson, J.F., J. B., Kau, D.C., Keenan and W.J. Muller III, 1985, "Pricing Default Risk in Mortgages", *AREUEA Journal*, 13: 261-272.
33. Erol, I. and K. Patel, 2007, "Pricing the Default Option of Inflation-Indexed Mortgages Using Explicit Finite Difference Method", *International Real Estate Review*, 10(1): 26-70.
34. Erol, I. and K. Patel, 2005, "Default Risk of Wage-Indexed Payment Mortgage (WIPM) Contract in Turkey", *Journal of Housing Economics*, 14 (3): 271-293.
35. Erol, I., 2004 (December), "Pricing The Wage-Indexed Payment Mortgage Contract and Default Risk in the Turkish Mortgage Market", Doctoral Dissertation, University of Cambridge, Department of Land Economy.
36. Findlay, M. C. and D. R. Capozza, 1977, "The Variable-Rate Mortgage and Risk in the Mortgage Market: An Option Theory Perspective", *Journal of Money, Credit, and Banking*, 9: 356-364.
37. Foster, C. and R. Van Order, 1984, "An Option Based Model of Mortgage Default", *Housing Finance Review*, 3(4): 351-372.
38. Foster, C. and R. Van Order, 1985, "FHA Termination: A Prelude to Rational Mortgage Pricing", *AREUEA Journal*, 13(3): 273-291.
39. Hundsdorfer, W. And J.G. Verwer, 2003, *Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations*, Springer, Berlin.
40. Jackson, J. J. and D. L. Kaserman, 1980, "Default Risk on Home Mortgage Loans: A Test of Competing Hypothesis", *Journal of Risk and Insurance*, 47(4): 678-690.
41. Johannes, Michael, The statistical and economic role of jumps in continuous-time interest rate models, *Journal of Finance*, 59 (2004) 227-260.
42. Jorion P., On jump processes in the foreign exchange and stock markets, *The Review of Financial Studies*, 1 (4) (1988) 427-445
43. Kau, J. B., Keenan, D. C., and T. Kim, 1994, "Default Probabilities for Mortgages", *Journal of Urban Economics*, 35: 278-296.
44. Kau, J. B., Keenan, D. C., Muller, W. J. and J. F. Epperson, 1992, "A Generalized Valuation Model for Fixed-Rate Residential Mortgages", *Journal of Money, Credit, and Banking*, 24(3), 279-299.
45. Kau, J. B., Keenan, D. C., Muller III, W. J. and J. F. Epperson, 1993, "Option Theory and Floating-Rate Securities with a Comparison of Adjustable- and Fixed-Rate Securities", *Journal of Business*, 66(4): 595-618.

46. Kau, J. B., Keenan, D. C., Muller III, W. J. and J. F. Epperson, 1995, "The Valuation at Origination of Fixed-Rate Mortgages with Default and Prepayment", *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 11(1): 5-36.
47. Kou, S. G. A jump diffusion model for option pricing, *Management Science*. 48 (2002) 1086-1101.
48. Lea, M. J. and S. A. Bernstein, 1996, "Housing Finance in an Inflationary Economy: The Experience of Mexico", *Journal of Housing Economics*, 5(1): 87-104.
49. Lewis A.L., A simple option formula for general jump-diffusion and other exponential Lévy processes, Tech. Rep., Envision Financial Systems and OptionCity.net, August 2001.
50. Lipscomb, J. B., and H. Hunt, 1999, "Mexican Mortgages: Structure and Default Incentives, Historical Simulation, 1982 to 1998", *Journal of Housing Research*, 10(2): 235-65.
51. Lipscomb, J. B., Harvey, J. T., and H. Hunt, 2003, "Exchange-Rate Risk Mitigation with Price-Level-Adjusting Mortgages: The Case of the Mexican UDI", *Journal of Real Estate Research*, 25(1): 23- 41.
52. Martzoukos S.H., Contingent claims on foreign assets following jump-diffusion processes, *Review of Derivatives Research* 6 (1) (2003) 27–45.
53. Matache A.-M., Nitsche P.-A., Schwab C., Wavelet Galerkin pricing of American options on Lévy driven assets, Tech. Rep. 2003-06, Seminar for Applied Mathematics, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, 2003.
54. Matache A.-M., Schwab C., Wihler T.P., Fast numerical solution of parabolic integrodifferential equations with applications in finance, *SIAM Journal on Scientific Computing* 27 (2) (2005) 369–393.
55. Matache A.-M., Petersdorff T. von, Schwab C., Fast deterministic pricing of options on Lévy driven assets, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 38 (1) (2004) 37–72.
56. Merton R.C., Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, *Journal of Financial Economics* 3 (1–2) (1976) 125–144.
57. Merton, R, 1973, "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4: 141-183.
58. Piazzesi, Monika, Bond Yields and the Federal Reserve, *Journal of Political Economy*, 113 (2) (2005) 311-344.
59. Pickering, N., 2000, "The SOFOLES: Niche Lending or New Leaders in the Mexican Mortgage Market?", Working Paper, Joint Center for Housing Studies, Harvard University.
60. Quigley, J. and R. Van Order, 1990, "Efficiency in the Mortgage Market: The Borrower's Perspective", Working Paper, University of California, Berkeley.

61. Quigley, J. and R. Van Order, 1995 "Explicit Tests of Contingent Claims Models of Mortgage Default", *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 11: 99-117.
62. Sa-Aadu, J., 1988, "Legal Restrictions, Credit Allocation and Default Risk Under Fixed and Adjustable Rate Mortgages", *Housing Finance Review*, 7(3): 225-247.
63. Schwartz, E. S. and W. N. Torous, 1989, "Prepayment and the Valuation of Mortgage Backed Securities", *The Journal of Finance*, 44(2): 375-392.
64. Schwartz, E. S. and W. N. Torous, 1993, "Mortgage Prepayment and Default Decisions: A Poisson Regression Approach", *Journal of the American Real Estate and Urban Economics Association*, 21: 431-450.
65. Sepp A., Analytical pricing of double-barrier options under a double-exponential jump diffusion process: Applications of Laplace Transform, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 7 (2) (2004) 151–175
66. Siembieda, W. J. and E. L. Moreno, 1997, "Expanding Housing Choices for the Sector Popular: Strategies for Mexico", *Housing Policy Debate*, 8 (3): 651-677.
67. Stanton, R. and N. Wallace, 1995, "ARM Wrestling: Valuing Adjustable Rate Mortgages Indexed to the Eleventh District Cost of Funds", *Real Estate Economics*, 23: 311-345.
68. Stanton, R. and N. Wallace, 1999, "Anatomy of an ARM: The Interest Rate Risk of Adjustable Rate Mortgages", *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 19(1): 49-67.
69. Titman, S. and W. Torous, 1989, "Valuing Commercial Mortgages: An Empirical Investigation of the Contingent-Claims Approach to Pricing Risky Debt", *The Journal of Finance*, 44(2): 345-373.
70. Toivanen J., Numerical valuation of European and American options under Kou's Jump diffusion model, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30 (4) (2008) 1949-1970.
71. Waller, N. G., 1988, "Residential Mortgage Default: A Clarifying Analysis", *Housing Finance Review*, 7: 321-333.
72. Zhang K., Wang S., Pricing options under jump diffusion processes with fitted finite volume Method, *Applied Mathematics and Computation* 201 (2008) 398-413.
73. Zhang K., Wang S., A computational scheme for options under jump diffusion processes, *International Journal of Numerical Analysis and Modelling*, 6 (1) (2009) 110-123

EK -1:

**PROJENİN İLK YIL SONUÇLARINDAN
ÜRETİLEN**

“METU STUDIES IN DEVELOPMENT”

DERGİSİNDE YAYIMLANAN MAKALE

Originating Long-Term Fixed-Rate Mortgages In Developing Economies: New Evidence from Turkey

Isil Erol
Assistant Professor of Economics
Middle East Technical University
Department of Economics
06531 Ankara, Turkey
Email: isile@metu.edu.tr

Özgenay Çetinkaya
Middle East Technical University
Institute of Applied Mathematics
Department of Financial Mathematics
06531 Ankara, Turkey
Email: ozgenaycetinkaya@hotmail.com

Abstract

This paper intends to analyze the recent developments to introduce and integrate mortgage markets into capital markets of Turkey. The Capital Market Board has recently prepared a legal framework not only for a proper mortgage system, but also for the eventual securitization of these mortgages. Turkish banks started to contract, for the first time ever, long-term fixed rate mortgages. The paper uses traditional option-pricing model to evaluate the current 10-year fixed rate mortgage (FRM) contracts with embedded default and prepayment options in Turkey. Our study is the very first attempt to use an option pricing model to price the FRM contracts in an emerging economy with its different and unique dynamics. Our findings show that, in 2007 almost every bank, except for Is Bank, offered mortgage interest rates that were significantly below the equilibrium coupon rates, involving arbitrage profit for the borrowers. We also conclude that even if the prevailing mortgage interest rates are below the equilibrium rates, these rates are extremely high for establishing a well-functioning primary mortgage market in any economy. Finally, the effects of the global financial crisis are started to be felt in Turkish mortgage market as the banks have increased their mortgage coupon rates and shortened the contract maturities drastically over a very short time period, from September 2007 to November 2008.

Key words: FRMs, emerging economies, option pricing model, default option, prepayment option, Turkish mortgage market, explicit finite difference method.

JEL Classification: G01 ; G13 ; G21 ; C63

* Corresponding Author: Isil Erol, Middle East Technical University, Department of Economics, 06531 Ankara, Turkey; Tel: +90-312-210-3048; Fax: +90-312-210-7964; Email: isile@metu.edu.tr
We would like to thank Kasirga Yildirak and Omur Ugur for their research assistance. We also thank Professor Dogan Tirtiroglu for his detailed discussions and comments in the early stages of this paper. This paper is part of an ongoing research project designed to evaluate the prevalent Turkish mortgage contracts. The authors greatly acknowledge financial support from The Scientific and Technological Research Council of Turkey.

1. Introduction

The nature of the housing market, the allocation of interest rate risk, and the economic and institutional structure all contribute to the diverse mortgage contract designs that are found worldwide. Because of the volatile macroeconomic environment and the lack of legal and regulatory framework that supports collateralized lending, the provision of housing finance in developing countries is often problematic.

Mortgage market development is likely to be a key factor in overall financial market development. In particular, an efficient mortgage market acts as a positive externality for the other capital markets, creating pressure for higher efficiency in these markets. On the other hand, a poorly functioning mortgage market is likely to pollute other financial markets with its inefficiency (Jaffe and Renaud, 1997). Efficient mortgage markets in developed economies require that the lending risk (credit, liquidity, and interest rate risk) be allocated to the long-term investors who are best able to handle them. In emerging economies, housing finance has remained in a primitive state compared to the rapid development of banking and other financial markets. Although foreign banks operate in emerging markets, they are mostly in the government bond business. The financial sector is far deeper than trading government bond and actual financial sector development requires lending to businesses, lending to housing, and lending to construction. Developing mortgage financing is a fundamental part of the financial sector development, because it stimulates growth through the construction sector and provides access to credit for more people.

In spite of the crucial role of mortgage financing in developing the financial sector of the emerging economies, there are not many published studies focused on examining the mortgage markets in developing economies and the performance of their mortgage products. Existing academic studies mainly give importance to the Latin American countries, especially the mortgage markets in Mexico and Chile.¹ A few studies analyze the mortgage markets in transition economies² and others examine development of housing finance in East Asia. Although East Asia is a young market, Hong Kong, Singapore, and even China, have deep primary residential mortgage markets in comparison to other emerging markets, which can be grouped as the Latin American countries, transition economies, and Middle Eastern and North African (MENA) countries.

This paper, firstly, intends to analyze the recent developments in Turkish mortgage market in line with the macro-economic progress in the country over the past few years. Turkey is a G-20 member Eurasian country and commands the youngest population in Europe.³ Turkish economy has been growing by around 6 per cent a year for the last five years, which is faster than many developed economies and most emerging markets. The economic measures, taken after the financial crisis of 2001, have been very effective in subduing immensely the inflation, building investor confidence and attracting substantial and record amounts of foreign investments, and dampening the

¹Siembieda and Moreno (1997), Lipscomb and Hunt (1999), Pickering (2000a-b), and Lipscomb et al. (2003) all examine the structure of the Mexican mortgage market and the performance of different loan contracts such as dual index mortgages and inflation-indexed mortgages. Alwayay and Schwartz (1996) analyse the housing finance policies in Chile. Ortega (2000) studies the development of Chilean mortgage market and focuses on the risk management in inflation-indexed mortgages, namely Unidad de Fomento (UF) indexed mortgage loans.

² Jaffee and Renaud (1997) discuss the main factors that hinder the development of mortgage markets in economies that are in transition from central planning to a market system. Chiquier (1998) evaluates the performance of dual index mortgages in Poland in comparison to the standard mortgage contracts.

³ 66.5% of the population in Turkey is within the 15–64 age group, the 0–14 age group corresponds 26.4% of the population, while 65 years and higher of age correspond to 7.1% of the total population, 2007 Census -population statistics, Turkish Statistical Institute.

unemployment⁴. The recent improvements in the Turkish economy, especially the drop in the inflation rate has led the Capital Market Board to work on a draft of regulatory changes that would facilitate the legal environment for the establishment of the mortgage system. The efforts for the development of the mortgage system have attracted the construction sector and the related financial sectors. The result was the increase in the construction of the new housing units, the development in the mortgage products, and the significant decline in mortgage interest rates. We believe that a better understanding of this particular economy with its developing mortgage market may shed light on other countries at the similar stage of economic development.

Secondly, this paper uses traditional option-pricing model to evaluate the current 10-year fixed rate mortgage (FRM) contracts with embedded default and prepayment options in Turkey. Indeed, option pricing models have been extensively used for pricing the fixed-rate and adjustable-rate mortgages with prepay and default options.⁵ It is important to point out that theoretical and empirical research on mortgage design and pricing has been conducted on the fixed and adjustable rate mortgages used in the United States and United Kingdom⁶. A key and one of the first questions for any aspect of research on emerging markets is whether the models and theories put forth and tested several times in developed financial markets also describe the realities observed in emerging markets (see, for a recent example, Demirguc-Kunt et al leverage papers in WBER and JFE). To our knowledge, this paper is the very first attempt to use an option pricing model to price the FRM contracts in an emerging economy with its different and unique dynamics.

In particular, we use the structural approach (option pricing model) in order to answer the following interrelated questions:

1. Is Turkish economy ready for originating long-term FRMs? More specifically, do the currently observed FRM coupon rates represent a fair transaction between the banks and the borrowers in Turkey?

Mortgage coupon rates and contract provisions vary widely over time. The economic environment changes continuously and contract specifications are also subject to frequent adjustments. In line with the literature, the equilibrium framework proposed in this paper claims that a contract can only be acceptable if it represents a fair deal. Specifically, we examine if the current mortgage coupon rates are below or above the equilibrium coupon rates which avoid arbitrage.

2. What will be the value of bank's (lender's) position if they have mortgage default insurance policy, especially for the high loan-to-value (LTV) housing loans?

In developed economies, the law requires lenders to obtain mortgage insurance (or mortgage default insurance) on loans where homebuyers make down payments of less than 20 per cent of the purchase price of the home (for above 80% LTV loans). Currently, Turkish banks do not require mortgage default insurance for high LTV mortgages. This paper aims to price mortgage insurance product as a potential financial derivative in the Turkish capital markets.

⁴ Turkey has steadily opened up its markets through economic reforms by reducing government controls on foreign trade and investments and the liberalization of many sectors to private and foreign participation has continued.

⁵ McConnell and Muller (1988) provide an overview of mortgage pricing techniques. Hendershott and Van Order (1987) survey the development of the option-pricing approach to mortgage valuation and Kau and Keenan (1995) provide a later review of the academic literature.

⁶ Recently, some researchers have focused on evaluating the mortgage contracts in Korea and Singapore by using the standard contingent claims approach. Chu *et al.* (2003) model the default risk of Singapore mortgages using the classical option pricing theory, and Ambrose and Kim (2003) use a contingent claims model for modeling Korean Chonse lease contract.

Our findings show that almost every bank, with the exception for Is Bank, offers mortgage interest rates that are significantly below the equilibrium coupon rates, involving arbitrage profit for the borrowers. Thus, we conclude that these contracts do not represent a fair deal between the lenders and borrowers in Turkey. We also argue that even if the prevailing mortgage coupon rates are below the equilibrium rates, 20%-25% mortgage interest rates per annum are extremely high for establishing a well-functioning primary mortgage market in any economy. In addition, our findings show that it is highly beneficial for the lenders to have mortgage default insurance, especially for the high LTV ratio mortgages.

The rest of this paper is organized as follows. Section 2 reviews option pricing literature for evaluating the default and prepayment options of mortgage contracts. Section 3 provides information on the recent developments in Turkish mortgage market. Section 4 presents the classical option pricing model for the valuation of FRM contract with embedded default and prepayment options. Section 5 presents the discussion of the numerical results. Finally, section 6 offers concluding remarks.

2. Review of the Literature

The extant literature shows that two main approaches have emerged on modeling mortgage termination either by prepayment or default: reduced-form and structural (options-pricing) models.

Termination may occur for non-financial (personal) reasons, such as divorce, a new job, or death in the family, causing a borrower to change the residence. Reduced-form approach treats non-financial termination behavior by modeling the termination decision as a function of a set of exogenous variables representing the factors that influence the likelihood of mortgage termination. Well-known reduced-form mortgage termination models include Schwartz and Torous (1989), Deng et al. (2000) and Deng (1997). The main advantages of this approach are flexibility and the ability to closely mimic the historical data record of mortgage terminations. However, reduced-form approach has low out-of-sample forecasting power. In addition, these models are often not well suited for valuation, to the extent that mortgage prices for the prepayment and default option values are included in the set of exogenous variables used to predict terminations (Downing et al., 2005).

There are also financial reasons to terminate a mortgage contract that apply equally to all individuals. These are the terminations that lower the market cost of the mortgage contract for the borrower. The structural approach or the traditional option-pricing approach treats mortgage termination as the optimal response of a rational borrower to changes in interest rates and house prices, in order to minimize the market value of the loan. This modeling approach was first applied to mortgages by Dunn and McConnell (1981a, b) who modeled the optimal termination behavior of borrowers who could costlessly prepay, but not default.

According to the structural approach, well-informed borrowers in a perfectly competitive market will exercise either of the two options when they can increase their wealth. Absent either transaction costs or reputation costs that reduce credit ratings, these individuals can increase their wealth by defaulting on a mortgage when the market value of mortgage exceeds the value of the property. Similarly, by prepaying the mortgage when the market interest rate is below the contract rate, they can increase wealth by refinancing. However, a borrower who chooses to prepay the mortgage gives up the opportunity to exercise either prepayment or default option in the future. Likewise, a borrower who decides to default on the mortgage also forfeits the opportunity to exercise the prepayment or default option in the future.

Titman and Torous (1989) and Kau *et al.* (1992, 1995) examine structural approach and emphasize the importance of the joint-ness of prepayment and default

options. In a mortgage contract, borrowers have the right to prepay a mortgage, but to rule out the possibility of default, or to consider default while ruling out the possibility of prepayment. Since prepayment and default substitute for one another, contracts with only one of these options lead the borrower to behave differently from when both are present. This substitution effect means that one cannot accurately value either the individual provisions or their interaction without both options being present. A series of papers by Kau *et al.* (1993) and Azevedo-Pereira *et al.* (2002, 2003) evaluate the US ARMs and the UK FRMs, respectively, with the embedded default and prepayment options. Without using loan-base data to decide the pattern of termination, these studies provide theoretical valuation models, which impose termination decision endogenously, and use numerical methods in order to price the jointly exercise of the embedded options.

Well-specified structural models should perform well out of sample because termination behavior arises from borrowers' optimizing behavior. Downing *et al.* (2005) claim that the basic problem with these models is that, they predict that a mortgage can never trade above par. This is because borrowers will exercise their prepayment option the instant that the mortgage value exceeds par –what is often referred to as “ruthless option exercise. On the other hand, Kau *et al.*, (1992) state that while people prepay mortgages for personal reasons, they seldom default for this reason. Default is unlikely to occur unless the house value is less than the market value of the loan. Hence, financially induced termination seems particularly important in the case of default.

Over the past two decades, option pricing models (structural approach) have (has) been mainly used for pricing the fixed- and adjustable rate mortgages in developed economies, especially in the US and UK. This paper uses the traditional option-based pricing model to price FRM contracts in an emerging economy. The main objective of this study is to price both the default risk and the prepayment risk of the FRMs, from the lenders' perspective, using the well-known option pricing model.

3. Recent Developments in Turkish Mortgage Market

Real estate is one of the most important sectors of the Turkish economy. In recent years, this sector has made up of about 10 percent of the country's Gross National Product (GNP), which has grown to 539.9 Billion TRY (US\$ 381 Billion) in 2006. One of the reasons for this significant increase is that Turkey is a dynamic and recently strongly performing emerging market economy. In spite of the historically high demand for real estate assets, a well-organized and deep enough mortgage market did not exist in Turkey until quite recently. The absence of an efficient mortgage market was mainly due to a long-running process of persistently high inflation⁷, the inability of the banks to fund mortgages from their deposit base, and the lack of standardization within the title and appraisal systems.

In fact, the inflation rate in Turkey has stabilized within a band of 15%-20% within the last few years. The economy has been growing by around 6 per cent a year for the last five years, which is faster than many developed economies and most emerging markets. These recent improvements in the macro-economy enabled the Turkish finance sector to offer long-term funding at relatively cheap prices for the first time in history. According to the Banks Association of Turkey, mortgages represented only 7.64 per cent of the overall consumer loan portfolio in 2003, whereas over the first nine months of 2008 mortgages have a share of 29.5 per cent.⁸

⁷ See Erol and Patel (2005) for failed attempts to introduce mortgages during the high inflation era.

⁸ In 2003, the mortgage loans granted were 800.6 million TL while total consumer credits granted were 10,478 million TL. Over the first nine months of 2008, total consumer credits and mortgage loans granted were 46,727 million TL and 13,779 million TL, respectively (www.tbb.org.tr).

Under the stable economic conditions of the recent years, the current government has recently prepared a legal framework not only for a proper mortgage system, designed especially for financing residential real estate for the middle-income households, but also for the eventual securitization of these mortgages. The Turkish Parliament ratified recently (March, 2007) this legal framework into law. Hence, the current government and the Capital Market Board initiated a legal framework to contract, for the first time ever, long-term fixed rate mortgages.

Turkey experienced strong growth in mortgage debt over the last few years. From 2002 to 2006, there has been continuous growth in the level of outstanding balances of mortgages at a compounded average growth rate of 191.5%. (www.datamonitor.com). Table 1 presents the mortgage debt as a percentage of GDP both for European Union (EU) new member and candidate countries at the end of 2006. As of December 2006, the value of mortgage debt in Turkey was approximately 12.24 € billion, which made it the second largest mortgage market among the new members and candidate members of the EU⁹. Mortgage debt-to-GDP ratio for Turkey (3.8%) was greater than those for Romania, Serbia, and Ukraine, and Turkey has experienced 65.7% growth in mortgage debt in December 2006 compared to the previous year.¹⁰

Almost all of the mortgages are originated from deposit banks in September 2007.¹¹ While private deposit banks originate 61% of the mortgages, public deposit banks initiate only 15% of the mortgages. And the remaining 24% of the mortgages are originated by the foreign banks. Examining the percentage shares of the banks in mortgage lending activity, we observe that with a 15.2% share of the total mortgage debt Akbank stands out as the mortgage industry leader. Garanti Bank, which has the second largest share of the overall mortgage lending activity with a 14.7% share, is followed closely by Is Bank with 14% share of mortgage lending. Finans Bank, Vakiflar Bankasi, and Yapi Kredi Bankasi have 11.9%, 9.4%, and 7.9%, respectively. It is worth to note that with the exception of Vakif Bank, a public deposit bank, all banks are private deposit banks in Turkey.

Deposit banks, as the main mortgage lenders, extend loans to borrowers who wish to purchase a single-family detached/semi-detached/apartment style houses. While the lenders generally rely on the appraisal company's determination of the eligibility of the property subject to transaction, some lenders have their own staff to do the appraisal work. Currently, Turkish banks offer a variety of mortgage products including Turkish Lira (TRY)-denominated fixed-rate, adjustable rate, and graduated payment mortgages and US Dollar-, and, Euro-denominated mortgages. The most popular mortgage products are fixed rate mortgages (FRMs) with 60 to 120-month contract maturity, and the prevailing mortgage coupon rates range from 1.2 to and 1.53 percent in September, 2007.

As the FRMs are popular mortgage products over the past few years, this paper concentrates on pricing the typical constant-payment mortgages, or fixed-rate mortgages based on structural option pricing models. In order to determine the basic FRM contract to price in our study, we collect information on the FRM contract details of eight deposit banks with the largest mortgage portfolios. Namely; Oyak Bank, Vakif Bank, Akbank, Is Bank, HSBC Bank, Finans Bank, Yapi Kredi Bank, and Garanti Bank. More specifically, we collect data for the contract maturity, coupon rate, Loan-to-Value (LTV) ratio,

⁹ According to the Banks Association of Turkey, the market value of the mortgages was approximately 20.67 billion TRY as of September 2007

¹⁰ Mortgage debt outstanding was a mere 0.224% of the GDP in 2003 (www.tba.gov.tr)

¹¹ At the end of September 2007 the total value of mortgages was 23,031,949 Thousand TL. Deposit banks originated 23,002,309 Thousand TL, which makes 99.87% of the overall mortgage loans granted. The remaining 0.13% of the mortgages was originated by Investment and development banks (www.tbb.ogov.tr).

arrangement fee, prepayment penalty, and the available insurance policies of these deposit banks. It is important to note that market value of these banks' mortgage portfolio consists of 91.2% of the overall mortgage portfolio in Turkey as of September, 2007.

Table 2 illustrates that, with the exception of Finansbank and Yapi Kredi Bank, the maximum Loan-to-Value (LTV) ratio is 75% for the FRMs. Finansbank and Yapi Kredi Bank originate FRMs with a maximum LTV of 95% to 100%. The amount of upfront arrangement fee significantly varies among the banks. While Finansbank does not charge any arrangement fee, other banks may charge 1% to 5% of the loan amount as the arrangement and service fee. All the banks except for Yapi Kredi Bank charge a prepayment penalty of 2% of the outstanding loan balance at the time of prepayment.

In terms of insurance policies, hazard and earthquake insurance is required by all lenders. This has been a requirement since 1999 and is provided by Turkish Catastrophe Insurance Pool (TCIP). TCIP takes the first loss position and private insurers take the second loss position. The annual premiums due to TCIP are collected by private insurance companies from the home owners and then forwarded to TCIP. Earthquake insurance rates are not fixed. They are determined according to the type of dwelling and the earthquake zone it is in. Most of the lenders also require a life insurance policy that would remain in effect over the term of the mortgage. Such a policy would help to cover the full repayment of the loan in the event of borrower's death. Borrowers are required to renew their policy annually (at least during the term of the loan). Mortgage default insurance products are not prevalent in Turkey.¹² The existing sectoral studies suggest that there is no urgent need for mortgage insurance as this will increase the cost of funds for borrowers.

4. Option Pricing Model (Structural Approach) for the Valuation of Fixed Rate Mortgage (FRM) Contracts

It is widely accepted that a successful way of pricing mortgages is to view them as ordinary debt instruments with specific options attached to them. Default in the mortgage contract can be viewed as a put option since by defaulting the borrower disposes of the housing asset. In other words, the borrower sells his housing property back to the lender in exchange for eliminating the mortgage obligation. The default option to terminate the mortgage contract fits into a European option framework because no rational borrower would ever choose to default until a payment is due. Prepayment can be considered as an American-style call option, in which the borrower has the right to gain the house at any time by paying off the mortgage loan. The borrower exchanges the unpaid balance on debt instrument for a release from further obligation. Thus, the analogy between a mortgage on a property and an option on a stock is quite close.

Pricing these options and also determining when a borrower exercises either option require specifying the underlying state variables and parameters that determine the value of the contract, and then deducing the decision rule that maximizes borrower wealth. The structural approach assumes that uncertainty about the returns from a mortgage can be summarized by two state variables: the value of the mortgaged housing property, H , whose dynamics follow a lognormal diffusion process (Equation 1) and the instantaneous risk-free interest rate, r , which evolves according to a mean-reverting square root diffusion process, Cox, Ingersoll and Ross, 1985b.

¹² Recently, a number of banks (Finansbank, İş Bank and Vakıfbank) have started to ask for mortgage payment protection insurance from the borrowers in the case of being unemployed or injured. The insurance policy generally pays up to six monthly payments to the bank. However, this product is different from mortgage default insurance that is widely used in the US and UK mortgage markets.

$$\frac{dH}{H} = (\mu - s)dt + \sigma_H dz_H \quad (1)$$

The return to owning the housing property consists both of price appreciation and of a service flow. Since the householder receives benefit from living in the house, the term s is included to denote the constant rate of service flow, or value of implicit rent, from the house. The instantaneous average rate of house price appreciation is denoted by μ , and σ_H represents the volatility of disturbances in actual house price appreciation around the trend rate $(\mu - s)$, and z_H is the standardized Wiener process that drives the uncertainty in house prices.

The stochastic process for the instantaneous default-free nominal interest rate, which follows the Cox-Ingersoll-Ross (1985b) model, known as CIR model, can be written as

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma_r \sqrt{r} dz_r \quad (2)$$

where θ represents the long-term mean value for the interest rate r , and κ is the speed of adjustment in the mean reverting process. The standard deviation of the interest rate disturbance is denoted by σ_r , and z_r is the standardized Wiener process.

The unexpected changes in the value of the housing property are assumed to be correlated with unanticipated changes in the instantaneous risk free interest rate, $dz_H(t) dz_r(t) = \rho dt$ where ρ denotes the instantaneous correlation coefficient. With stochastic processes specified by Equations (1) and (2), the fundamental partial differential equation (PDE) for the valuation of mortgages as a function of time and of the stochastic variables of housing price and the interest rate takes the form¹³

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} H^2 \sigma_H^2 \frac{\partial^2 V}{\partial H^2} + \rho H \sqrt{r} \sigma_H \sigma_r \frac{\partial^2 V}{\partial H \partial r} + \frac{1}{2} r \sigma_r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \kappa(\theta - r) \frac{\delta V}{\delta r} \\ & + (r - s) H \frac{\delta V}{\delta H} + \frac{\delta V}{\delta t} - rV = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

where V represents the mortgage value. Equation (3) implies that with a continuous time, a standard arbitrage argument is sufficient to derive an equilibrium condition for the value of mortgage (a second order partial differential equation) such that the value of the mortgage equals the risk-adjusted expected present value of its net cash flows.

The tendency to price derivative assets, such as mortgage on a property, and to relax the strongest assumptions in order to make the models approach to the reality leads to the development of valuation frameworks of enlarged complexity for which no closed-form solutions are available. Thus, in many complex but realistic problems the analyst must resort to other methods to approximate the value of the asset. Three basic methods are; the Monte Carlo method (forward-pricing method) advocated by Boyle (1977), and finite difference approximation to the differential equation (backward-pricing method) suggested by Schwartz (1977) and employed extensively by Brennan and Schwartz (1976, 1977, and 1978), and lattice (or tree) approach suggested by Cox et al. (1979) and extended by Rendleman and Barter (1979), Boyle (1986, 1988), and Hull and White (1988). As a result, there is considerable amount of research employing numerical methods to approximate solutions of the valuation of contingent contracts, when analytic solutions do not exist.

¹³ The derivation of fundamental partial differential equation follows from standard arguments in finance. See Cox, Ingersoll, and Ross 1985a, 1985b; Epperson *et al.* 1985, and Kau *et al.* 1992, 1993, 1995.

Despite the recent advances in forward pricing methods for pricing American options, backward pricing method is well established, and so has been used more extensively. Although it is computationally more complex by including dynamic programming, many researchers adopt backward pricing approach as the appropriate procedure to valuing mortgages with embedded default and prepayment options. Kierkegaard (1967) said that to understand life we must look backward but that we are doomed to live life forward. Much the same is true of mortgages. While time undoubtedly marches forward, to value a mortgage with termination, we must begin at the end and work back. When borrowers at a point of time consider whether to terminate a mortgage, they look toward future values, but because we are working backward, we will have the needed values available when we reach that point (Kau and Keenan, 1995).

Given the specific details of the contract, the values of the financial assets embedded in a mortgage (default option, prepayment option, insurance product) are known at the expiry. Using appropriately small time steps, equation (3) can be used to work backwards from the final mortgage payment, calculating the asset values sequentially to the previous mortgage payment, then using that new set of terminal conditions to work back to a still earlier payment until eventually the origination of the contract is reached (Azevedo-Pereira et al. (2002, 2003).

4.1. Components of the Mortgage Contract

The value of a mortgage to the borrower is composed not only of the present value of promised future monthly payments to the lender but also of options to prepay or to default. These options are valuable to the borrower and reduce the absolute value of the outstanding mortgage. At some point in time, t , the borrower's joint option value, J , is equal to the summation of the value of call option to prepay, C , and the value of default option, D .

$$J(H, r, t) = C(H, r, t) + D(H, r, t) \quad (4)$$

The value of the mortgage contract to borrower is given by equation (5):

$$\begin{aligned} V_B(H, r, t) &= A(r, t) - C(H, r, t) - D(H, r, t) \\ &= A(r, t) - J(H, r, t) \end{aligned} \quad (5)$$

where $A(r, t)$ is the present value of remaining mortgage payments. If the lender (bank) has mortgage default insurance, and circumstances arise in which a rational borrower chooses to default, then mortgage default insurance product only benefits the lender. The value of the contract for the lender, therefore, is the sum of its value to the borrower and the value of the mortgage insurance.

$$V_L(H, r, t) = V_B(H, r, t) + I(H, r, t) \quad (6)$$

where; $I(H, r, t)$ = the value of the mortgage default insurance at time t .

In a typical constant payment, fixed rate mortgage contract, the value of each monthly payment, MP , is determined in order to allow the principal to be paid in full by the end of the contract. That is;

$$MP = \frac{\left(\frac{c}{12}\right) \left[1 + \left(\frac{c}{12}\right)\right]^n OB(0)}{\left[1 + \left(\frac{c}{12}\right)\right]^n - 1} \quad (7)$$

where $OB(0)$ represents the amount of debt at the origination of the loan, and c is the annual mortgage coupon (interest) rate. The outstanding loan balance after each payment date, $OB(t)$, is given by the following equation:

$$OB(t) = \frac{\left[1 + \left(\frac{c}{12}\right)\right]^n - \left[1 + \left(\frac{c}{12}\right)\right]^t}{\left[1 + \left(\frac{c}{12}\right)\right]^n - 1} OB(0) \quad (8)$$

At payment dates, a distinction will be made between the value of an asset immediately before and immediately after each payment. In line with the literature we use the following notation:

$F^-(H,r,t)$ = Value of the asset F immediately before a payment is made;

$F^+(H,r,t)$ = Value of the asset F immediately after a payment is made.

In backward pricing methods, the valuation of the mortgage begins at the maturity of the mortgage. At the maturity, the terminal condition requires that the value of remaining payments must be equal to the final monthly payment due, MP .

$$A^-(r,t) = MP \quad \text{for } t = \eta(n) \quad (9)$$

where n = life of the mortgage in months. Moving backwards in time, as each monthly payment date is reached, the borrower's debt, A , changes immediately by the amount MP . This leads to solution of equation (3) by a finite difference method, starting with the terminal condition at maturity, working backwards in time until the next monthly payment date is reached. Then, a new boundary condition, equation (10), is applied and the backwards process is continued until valuation has been completed, at the origination time of the mortgage contract.

$$A^-(r,t) = A^+(r,t) + MP \quad \text{for } t = \eta(1), \dots, \eta(n-1) \quad (10)$$

During this valuation process, we also apply boundary conditions for the options held by the borrower. The value of default option depends directly on the house price. If the house price is different from the value of the remaining payments, the financially rational borrower either does nothing, or sells, or defaults and gives up the house to the lender if that proves to be the most advantageous solution from a financial point of view. The value of the prepayment option depends on the prevailing term structure of interest rates but not directly on the house price. However, there is an indirect relationship, since the exercise of the option to default automatically causes the prepayment option to expire worthless. Thus, the two options interact and cannot be separately valued and added. At expiry of the mortgage, the borrower holds the house and has an obligation to make the last mortgage payment but she also has a put option on the house $D(H,w,t)$ allowing her to default and give up the house if she wishes. Therefore, the position of the borrower at maturity is, $H + D(H,w,t) - MP$ with the following mortgage value:

$$V_B^-(H,r,t) = \min(MP, H) \quad \text{for } t = \eta(n) \quad (11)$$

Similarly, at any other payment date, t , the value of the mortgage to the borrower is given in equation (12).

$$V_B^-(H,r,t) = \min\left[\left(V_B^+(H,r,t) + MP\right), H\right] \quad \text{for } t = \eta(1), \dots, \eta(n-1) \quad (12)$$

If the borrower prepays the mortgage, the amount to be paid is calculated from the outstanding balance and the accrued interest since the most recent scheduled payment. In Turkey, similar to the UK mortgage market, there is an additional penalty payment required in the terms of the fixed-rate mortgage contracts. Since the Turkish banks, in general, charge 2% of the loan balance as the prepayment penalty, in this paper penalty is modeled as a percentage of the outstanding balance plus accrued interest at the time of early termination (See Azevedo-Peraira, 2002 and 2003).

$$TD_t = \left\{ (1 + \pi) \left[1 + c(t - \eta(i)) \right] OB(i) \right\} \quad \text{for } \eta(i) \leq t \leq \eta(i+1) \quad (13)$$

where $TD(t)$ is the total outstanding debt, π represents the early termination penalty charged by the lender and c is the fixed coupon rate.

The default decision is assumed not to be simply triggered if the present value of the remaining payments exceeds the current market value of the house, but rather if the value of the mortgage to the borrower including options, exceeds the house value. Thus, a rational borrower defaults if the following condition is arises:

$$A(r, t) - [D(H, r, t) + C(H, r, t)] > H \quad (14)$$

At the maturity of the mortgage, when the borrower decides on whether or not to make the final mortgage payment, the default option will be worthless if the house is worth more than the final payment and otherwise equal to the difference between the two. That is;

$$D^-(H, r, t) = \max \left[0, (MP - H) \right] \quad \text{for } t = \eta(n) \quad (15)$$

On monthly payment dates other than the maturity, the default option value is adjusted for the difference between value of the remaining payments and the house price when there is default, and remains unchanged by the payment under conditions of no default.

$$\begin{aligned} D^-(H, r, t) = \\ D^+(H, r, t) \quad \text{if } V_B^-(H, r, t) = V_B^+(H, r, t) + MP \quad (\text{no default}) \\ A^-(r, t) - H \quad \text{if } V_B^-(H, r, t) \leq H \quad (\text{default}) \quad \text{for } t = \eta(1), \dots, \eta(n-1) \end{aligned} \quad (16)$$

The terminal condition for the prepayment option at maturity is unimportant. This is because exercising the prepayment option cannot have any value for the borrower. In addition, at any other payment date, prepayment can only have value in the absence of default and so the terminal conditions for the prepayment option are as follows:

$$\begin{aligned} C^-(H, r, t) = \\ C^+(H, r, t) \quad \text{if } V_B^-(H, r, t) = V_B^+(H, r, t) + MP \quad (\text{no default}) \\ 0 \quad \text{if } V_B^-(H, r, t) = H \quad (\text{default}) \quad \text{for } t = \eta(1), \dots, \eta(n-1) \end{aligned} \quad (17)$$

Alternatively, prepayment option value can be calculated as; $C = A - V_B - D$. Lastly, we model the mortgage default insurance as another component of the FRM contract. We basically follow the US mortgage insurance system in order to evaluate the insurance product as another financial derivative asset. At the contract maturity, the value of the mortgage insurance is given in equation (18).

$$I^-(H, r, t) = \max \left[0, \min (MP - H, \phi MP) \right] \quad (18)$$

If the borrower chooses to default on the mortgage and does not repay the last monthly payment, mortgage insurance company pays to the lender either the difference between the house price and the last monthly payment (MP-H) or a specific proportion (ϕ) of the outstanding loan balance. In general, insurance companies pay the minimum amount of these two values. Thus, in the US system, the insurance coverage seems to be a simple pre-determined percentage of the value of the outstanding debt (see Kau et al., 1993). The US insurance companies have, in general, a minimum insurance coverage of 25% of the outstanding balance.

At other payment dates during the contract term, the value of mortgage insurance is given in equation (19).

$$I^-(H, r, t) = \begin{cases} I^+(H, r, t) & \text{if } V_B^-(H, r, t) = V_B^+(H, r, t) + MP \text{ (no default)} \\ \max \left[0, \min (TD^-(t) - H, \phi TD^-(t)) \right] & \text{if } V_B^-(H, r, t) = H \text{ (default)} \end{cases} \quad \text{for } t = \eta(1), \dots, \eta(n-1) \quad (19)$$

where

TD(t) = the total outstanding debt at time t

ϕ = minimum insurance coverage ratio – generally 25% in the US (see Kau et al. 1993, Journal of Business, pp: 595-618).

Although the Turkish banks do not have a mortgage default insurance product, they usually ask borrowers to get a life insurance before granting any mortgage. Banks provide life insurance to the borrowers either by increasing the loan amount by the insurance expense and originate a higher LTV mortgage or by taking part of the loan as an insurance expense at the loan origination. The latter increases the up-front arrangement fee and provides a higher yield to the bank.¹⁴ In the next section, we analyze the effect of life insurance policy on the lender's position within 1% to 5% arrangement fee applications. We find that the banks have higher yields or offer lower mortgage interest rates by charging higher arrangement fees at the loan origination.

4.2. No Arbitrage Condition

Mortgage coupon rates and contract terms vary widely, especially in volatile economic environments, over time. In particular, the economic conditions change continuously and contract specifications are also subject to frequent readjustments. Following the extant literature, equilibrium framework proposed in this paper claims that a contract can only be acceptable if it represents a fair deal. It is necessary to ensure that the borrower is not able to make an instantaneous profit by prepaying the loan and, similarly that the contract is not structured in such a way that allows the lender to make any immediate profit. This is called "no arbitrage" condition.

The values of the two state variables in the model, $r(0)$ and $H(0)$, are known at the origination of the mortgage; therefore, the determination of an equilibrium coupon rate is an iterative exercise in which, starting with the initial values for the state variables and the

¹⁴ The yield on a mortgage will not always equal its interest rate. Suppose the lender charges the borrower 1% of the 100,000 TL loan amount up front, just to grant the loan. With 1% origination fee (as arrangement fee or life insurance expense), the lender will actually disburse to the borrower only 99,000 TL, even though the contractual principal and the initial outstanding loan balance is 100,000 TL. Thus, the effect of the origination fee is to increase the mortgage yield to maturity over the stated contract interest rate in the loan (See Geltner and Miller, 2001; p: 420).

functional form specification for the contract, a search is done to find a coupon rate capable of allowing the mortgage contract to meet the condition of no arbitrage (Azevedo, et al. 2002, 2003). At the origination of the mortgage, the equilibrium condition which avoids arbitrage is shown in equation (20), where ξ represents arrangement fee, Π gives early termination fee, and L is the amount of the loan. Following Azevedo-Pereira et al. (2002, 2003), in order to find the equilibrium coupon rate, a secant iteration technique was used,

$$V_B(H(0), r(0), t(0), c, \pi) + I(H(0), r(0), t(0), c, \pi) = (1 - \xi)L \quad (20-a)$$

or

$$V_B(c, \pi) + I(c, \pi) - (1 - \xi) = 0 \quad (20-b)$$

5. Results of the Numerical Analysis

For the numerical analysis of FRM valuation model, we specify the basic set of economic parameters and the contract provisions as presented in Table 3. A 10-year FRM contract originated for a 100,000 TRY house is evaluated in our analysis. We present numerical results for two contract specifications. First, a mortgage with an arrangement fee but no early termination penalty, secondly, one with an arrangement fee and an early termination penalty. We use daily 3-Month Turkish Treasury-Bill yields obtained from the secondary market to estimate the parameters of the CIR process. Data set covers the period between February, 2002 and November, 2007 (See Appendix for the estimation of CIR process for the Turkish economy). We calculate the historical volatility of house price using the monthly House Price Index published by the Turkish Statistics Institute between January 2002 and December 2007. Finally, the spot rate is 15% for the base case economic environment.

Figures 1 to 5 demonstrate the mortgage component values at the origination of contracts with early termination penalty. That is, the value of remaining mortgage payments, A , value of the option to default on the mortgage, D , value of the option to prepay the loan, C , and the total effect of A , D , and C , which gives the entire contract value V at the origination of the loan. The main reason for presenting these 3-dimensional figures is to demonstrate both the smoothness of the numerical solution over the grid and economic consistency of the results.

The value of remaining mortgage payments, A , depends only on the interest rate (discount rate), r , therefore values parallel to the H-axis are constant (see Figure 1). As would be expected, the value of remaining mortgage payments shows an inverse relationship with the interest rate or the discount rate.

Figure 2 shows the value of the default option, D . The relationship between the level of house price, H and the value of the mortgage contract, V , is the greatest influence on the value of default option. The value of D is positive in almost all of the subset of the state space where $H < H(0)$. As the increase in interest rate, r leads to decreases in the value of future payments, A and the mortgage value V , the value of default option, whenever positive, tends to be inversely related to interest rate. The combined effect of low house prices with low level of interest rate result in extremely high default value for the FRM contracts as seen from Figure 2.

It is worthwhile to note that the US “sub-prime mortgage crisis” began with high default rates on sub-prime and adjustable-rate mortgages (ARMs) in 2005-2006. Mortgage defaults and foreclosure activity increased dramatically as the interest rates began to rise and ARM interest rates reset higher, and as house prices dropped continuously, after a long-term rising trend, in many parts of the US. Since most of the defaulted mortgages were ARMs, low house prices in combination with high interest rates

resulted in significant amount of defaults. As we evaluate the default option for the FRM contracts in this paper, low house prices combined with low market interest rates result in extremely high default values for the borrowers.

Figure 3 presents the value of the mortgage default insurance, which is directly related to the evolution of the default option. At low house price levels, borrowers tend to default on their mortgages and the insurance policy is highly expected to be exercised. The value of the prepayment option, C, which primarily depends on the level of interest rate, is illustrated in Figure 4. Prepayment option has high values for low levels of interest rate, r , coinciding with high levels of house prices. This is because at low house prices borrowers tend to default on their loans and, of course, a defaulted mortgage cannot be prepaid.

Lastly, the value of mortgage contract, V , is a complex function of the remaining mortgage payments, A , the default option, D , and the prepayment option, C , is exhibited in Figure 5. At low levels of house prices, it is so valuable for the borrower to default on his mortgage, and high values for the default option reduce the value of the mortgage contract. At higher levels of house prices, prepayment option seems to be the significant option. Changes in interest rates affect both A and C inversely but these two components produce opposite effects on the value of the contract, V . For instance, increases in A increases the value of the contract, V , whereas increases in C reduce the value of the contract. Since the value of the prepayment option cannot be bigger than A , the relationship between interest rates and the value of the mortgage contract tends to be dominated by the effect of the interest rate on A . An exception occurs when the combination of low interest rates and high house prices creates an environment in which it becomes preferable for the borrower to prepay the loan. This condition matches with the top section of the graph presented in Figure 5.

5.1. Equilibrium Mortgage Coupon Rates for Different Contract Specifications: No Arbitrage Condition

In this section, we analyze the equilibrium mortgage coupon rates for a typical fixed-rate mortgage (details given in Table 3) with early termination penalty of 2% by using the no arbitrage condition. We calculate the equilibrium coupon rates for 75%, 95%, and 100% LTV-ratio mortgage contracts separately. For each LTV-ratio, first, we analyze a FRM contract in which the arrangement fee and mortgage default insurance do not exist. Under these circumstances, no arbitrage profit condition can be written by the following equation.

$$V_B(c) - L = 0 \quad (21-a)$$

In order for this contract to be feasible, it is necessary that the value of the mortgage to the borrower, V_B , is equal to the loan amount at the mortgage origination, L . Any coupon rate, c , that corresponds to this no arbitrage condition is the equilibrium coupon rate that is capable of generating fair deal for both borrower and lender. Next, we analyze the value of lender's position with the inclusion of arrangement fees. No arbitrage condition can be modified as follows:

$$V_B(c) - (1 - \xi)L = 0 \quad (21-b)$$

Finally, equation (21-c) illustrates the equilibrium coupon rates for the full mortgage contract with arrangement fee and mortgage default insurance.

$$V_B(c) - (1 - \xi)L + I = 0 \quad (21-c)$$

Figure 6 illustrates the equilibrium mortgage coupon rates for a 75% LTV mortgages under three different contract specifications described in Equations 21-a, 21-b, and 21-c. For a representative lender who does not charge any arrangement fee and does not have a mortgage default policy, $[V_B(c) - L]$, the equilibrium coupon rate is approximately 20% per annum. When we compare the value of lender's position who originates FRM contract with 2% arrangement fee, $[V_B-(1-\xi)L]$ with another lender who originates FRM contract with 2% arrangement fee and mortgage default insurance, $[V_B-(1-\xi)L+I]$, we see that equilibrium coupon rates for both of the lenders are approximately 19.52% per annum. This result implies that 75% LTV mortgages do not have high default risk and, correspondingly, adding a mortgage insurance policy to the contract does not add any value to the lender's position. Thus, our results show that it is not beneficial for the lenders to have mortgage default insurance for the 75% LTV loans.

Figure 7 exhibits the equilibrium mortgage coupon rates for the 95% LTV mortgages. Although most of the banks in Turkey originate 75% LTV mortgages, Finansbank and Yapi Kredi Bank originate 95% and even 100% LTV mortgages (see Table 2). The equilibrium coupon rate for a typical FRM without an arrangement fee and mortgage default insurance, $[V_B(c)-L]$, is 20%. Next, we compare the equilibrium coupon rate for a FRM contract with 2% arrangement fee but without mortgage insurance, $[V_B-(1-\xi)L]$ and the full mortgage contract with 2% arrangement fee and mortgage default insurance, $[V_B-(1-\xi)L+I]$. We find that while equilibrium coupon rate for the lender with a mortgage insurance policy ranges between 19% and 19.44%, it ranges from 19.44% to 20% for the lender without default insurance policy. This result indicates that the lenders with mortgage default insurance are able to offer lower coupon rates for high LTV mortgages. More specifically, it is beneficial for the lenders to have mortgage default insurance, especially for the high loan-to-value mortgages.

Finally, Figure 8 shows the value of lender's position and the corresponding equilibrium mortgage coupon rates for a 100% LTV FRM contract. The important result is that there is no equilibrium coupon rate for the lender without arrangement fee and default insurance policy, $[V_B-L]$. It is noteworthy that if the loan-to-value ratio is 100%, attainment of equilibrium combinations would be impossible. On the other hand, if the lender has both 2% arrangement fee and mortgage insurance policy, $[V_B-(1-\xi)L+I]$, the equilibrium coupon rate is 19.28% per annum.

All these contractual features, such as the prepayment penalty, arrangement fee, and mortgage default insurance, generate a benefit to the lender and, consequently, the equilibrium coupon rates are reached at slightly lower levels of the coupon rate. Table 4 summarizes the trade-off between arrangement fee, prepayment penalty and the equilibrium coupon rate. It is obvious that as the lender charges higher prepayment penalty and arrangement fee, it can offer lower mortgage coupon rates.

It is important to note that, some Turkish banks ask borrowers to get a life insurance before granting any mortgage. Banks usually provide this insurance to the borrowers by taking part of the loan as an insurance expense. Hence, they do not allow the borrowers to use the full amount of the loan. By increasing the origination fee further for covering the life insurance expenses, the banks may either increase the yield earned from the loan or allow lower regular loan payments (lower interest rate) for the same yield. Hence, the arbitrage opportunity observed in the Turkish banks may be attributable to higher arrangement fees with life insurance products.¹⁵

5.2. The Effect of Changes in the Economic Environment

¹⁵ We thank the anonymous referee who suggested us to discuss the Turkish bank's higher yield (or lower mortgage interest rate) may be attributable to life insurance product.

As noted earlier, the economic environment is characterized in the present work through the set of parameters given in Table 3. In this section we present an analysis of the effects induced by changes in the base case parameters; particularly, the changes in house price volatility, interest rate volatility, and spot interest rate.

Table 5 presents the effect of house price volatility on the value of mortgage components for a 95% LTV mortgage with 2% early prepayment penalty. As the house price volatility increases from 3% to 15%, the value of default option rises significantly. Since the value of mortgage default insurance increases correspondingly, the value of mortgage contract for the lender, V , increases as well. The effect of interest rate volatility on the value of mortgage components for a 95% LTV mortgage with 2% early prepayment penalty is illustrated in Table 6. Interest rate volatility directly affects the value of the prepayment option. As the volatility increases, borrowers tend to exercise their prepayment option, consequently the value of the mortgage for the lender declines significantly.

Table 7A and Table 7B show the effects induced by different types of yield curves in terms of the value of the mortgage-related assets for 95% LTV and 75% LTV fixed-rate mortgages, respectively. By changing the initial level assumed by the spot interest rate, $r(0)$, while holding constant the steady state spot interest rates, θ , we capture different yield curve shapes. According to our numerical results, there is a direct relationship between the evolution of the level of the initial spot rate and the coupon rate for a fixed θ . In fact, higher levels of spot interest rates lead to higher equilibrium coupon rates.

A further important highlight is the effect of increases in interest rate volatility, σ_r , for different slopes of the yield curve. The increase in the interest rate volatility directly affects the evolution of default and, especially, of prepayment. Table 7A shows that as the interest rate volatility increases from 12% to 15%, the value of default and, especially value of prepayment option increases significantly for 95% LTV mortgages. On the other hand, as seen from Table 7B, interest rate volatility is only effective on prepayment but not the default option for 75% LTV mortgages. For the 95% LTV mortgages, increases both in default and prepayment option values contribute to the reduction in the value of the mortgage to the borrower, V_B . However, value of insurance (I) tends to move in a direction opposite to the movement in σ_r . Consequently, the overall result in terms of the evolution of mortgage value to the borrower, V_B (the relationship between increases in A , D , and C) and the evolution in I . Both tend to decrease with increases in σ_r . Under these circumstances in order to reach an equilibrium it is necessary to increase the coupon rate and consequently the value of A to compensate for those declines in I and increases in $C+D$.

Lastly, we examine the joint effect generated by increases in house price volatility and changes in the slope of the yield curve. Given that the effects induced by increases in house price volatility on the evolution of default and prepayment are of opposite nature and tend partially compensate each other, the influence of house price volatility in terms of the equilibrium coupon rates is moderate. The overall effect of house price volatility seems to be translated into a slight reduction of the equilibrium coupon rate, for all the yield curves studied in the present work (see Table 7A and 7B).

5.3. Equilibrium Mortgage Coupon Rates and the Prevailing Coupon Rates in Turkey: September 2007

This section mainly examines if Turkish economy ready for originating long-term FRMs? More specifically, we answer the question of whether or not the currently observed FRM coupon rates represent a fair transaction between the banks and the borrowers in Turkey?

In section 5.2, we have calculated the equilibrium coupon rates for a typical 10-year FRM contract with 75%, 95%, and 100% LTV ratios separately. As almost every

bank in Turkey charges 2% prepayment penalty for the FRM contracts, we evaluate the variation of equilibrium coupon rates by taking into account the arrangement fee and the mortgage default insurance policy. As a next step, we compare the monthly equilibrium coupon rates with the prevailing mortgage coupon rates in September 2007.

For a representative 10-year FRM with 2% arrangement fee but without mortgage default insurance, we find that the equilibrium coupon rates range between 1.497% and 1.531% for 75% LTV mortgages, and between 1.531% and 1.601% for 100% LTV mortgages. However, the prevailing mortgage coupon rates in September 2007 range between 1.29% for Finansbank and 1.53% for Is Bank. This result shows that, except for Is Bank, all other banks offer mortgage interest rates that are significantly below the equilibrium coupon rates, involving arbitrage profit for the borrowers. In other words, we claim that these contracts do not represent a fair deal between the lenders and borrowers in Turkey. In fact, due to significantly low mortgage coupon rates, large numbers of borrowers took out mortgages throughout this period. The value of mortgage loans was approximately 20.67 billion TRY as of September 2007, which was a remarkably high figure since 2000.

Although the prevailing mortgage coupon rates are below the equilibrium rates, 20% to 25% mortgage interest rates per annum are extremely high for establishing a well-functioning primary mortgage market in any economy. In comparison with other developing countries, such as India (9.25%-13.25% per annum), Mexico (12% per annum), Korea (6.29% per annum), Bulgaria (6% per annum), etc, Turkish banks offer significantly high mortgage interest rates, which tremendously increase the cost of mortgage financing for the borrowers.

Furthermore, we examine the FRM mortgage coupon rates and contract maturities of our sample banks over the last one-year time period, from September 2007 to November 2008. We observe that every bank in our sample significantly increased their coupon rates and most of the banks drastically reduced their contract maturities. In particular, observed monthly coupon rates in November 2008 range between 1.79% (Oyak Bank) and 2.40% (HSBC Bank). Is Bank reduced its contract maturity from 120 months to 60 months. Akbank, Yapi Kredi Bank and Vakif Bank, with 240-month contract maturities, currently originate FRM mortgages with a maturity of up to 60-120 months. Similarly, HSBC and Finansbank, with 360-month contract maturities, currently originate FRM mortgages with a maturity of up to 120-180 months.

Since the mortgage coupon rates and contract maturities have changed drastically over a very short time period, from September 2007 to November 2008, we argue that the effects of the global financial crisis are started to be felt in Turkish mortgage market. The primary mortgage market in Turkey is still in its infancy stage. Turkish banks, including the private, public and foreign deposit banks, have constructed their own mortgage portfolios, without the sub-prime loans.¹⁶ Borrowers, who take out mortgages, are not low income citizens. They are not likely to default on their mortgages. However, the global financial crisis is likely to exert indirect and powerful negative effects on Turkey as it has been doing indiscriminately so far on several developing and emerging economies.

6. Concluding Remarks

In this paper we use traditional option-pricing model to evaluate the current 10-year fixed rate mortgage (FRM) contracts with embedded default and prepayment options in Turkey. In fact, theoretical and empirical research on mortgage design and pricing has been widely conducted on the fixed and adjustable rate mortgages used in the United

¹⁶ Recently, the chairman of the Capital Markets Board commented that there was not any problem in Turkey's mortgage markets since there were no sub-prime mortgages in Turkey.

States and United Kingdom. One of the key questions for any aspect of research on emerging markets is whether the models and theories put forth and tested several times in developed financial markets also describe the realities observed in emerging markets. To our knowledge, this paper is the very first attempt to use a structural approach (option pricing model) to price the FRM contracts in an emerging economy with its different and unique dynamics.

Due to the recent improvements in Turkish economy, the current government in collaboration with the Capital Market Board initiated a legal framework to contract, for the first time ever, long-term fixed rate mortgages. As of December 2006, the value of mortgage debt in Turkey was approximately 12.24 € billion, which made it the second largest mortgage market among the new members and candidate members of the EU. Currently, the Turkish banks offer a variety of mortgage products, including Turkish Lira (TRY) - denominated fixed-rate, adjustable rate, and graduated payment mortgages and US Dollar-, and, Euro-denominated mortgages.

We employ explicit finite difference methodology as the appropriate procedure to valuing mortgages with embedded default and prepayment options. For each component of a typical mortgage contract, including the promised future monthly payments, default option, prepayment option, and mortgage default insurance, we present numerical results in 3-dimensional figures. We demonstrate that the numerical solution is smooth over the grid and there is economic consistency of the results.

In order to understand if option pricing models and theories put forth and tested several times in developed financial markets are also successful in describing the realities observed in Turkish mortgage market, we attempt to answer the following questions. 1. Do the currently observed FRM coupon rates represent a fair transaction between the banks and the borrowers in Turkey? 2. What will be the value of bank's (lender's) position if they have mortgage default insurance policy, especially for the high loan-to-value (LTV) housing loans?

Our results show that, except for Is Bank, all other banks offer mortgage interest rates that are significantly below the equilibrium coupon rates, involving arbitrage profit for the borrowers. In other words, we claim that these contracts do not represent a fair deal between the lenders and borrowers in Turkey. We also conclude that even if the prevailing mortgage coupon rates are below the equilibrium rates, 20%-25% mortgage interest rates per annum are extremely high for establishing a well-functioning primary mortgage market in any economy. In comparison with other developing countries, such as India (9.25%-13.25% per annum), Mexico (12% per annum), Korea (6.29% per annum), Bulgaria (6% per annum), etc, Turkish banks offer significantly high mortgage interest rates, which tremendously increase the cost of mortgage financing for the borrowers.

Most of the banks in Turkey originate maximum 75% LTV mortgages. We find that 75% LTV mortgages do not have high default risk and, correspondingly, adding a mortgage insurance policy to the contract does not add any value to the lender's position. Thus, it is not beneficial for the lenders to have mortgage default insurance for the 75% LTV loans. On the other hand, our findings show that it is beneficial for the lenders to have mortgage default insurance, especially for the high LTV ratio mortgages.

Finally, we argue that the effects of the global financial crisis are started to be felt in Turkish mortgage market as the banks have increased their mortgage coupon rates and shortened the contract maturities drastically over a very short time period, from September 2007 to November 2008. The primary mortgage market in Turkey is still in its infancy stage. Turkish banks, including the private, public and foreign deposit banks, have constructed their own mortgage portfolios, without the sub-prime loans. Borrowers, who take out mortgages, are not low income citizens. They are not likely to default on their mortgages. However, the global financial crisis is likely to exert indirect and powerful

negative effects on Turkey as it has been doing indiscriminately so far on several developing and emerging economies.

Table 1: Mortgage Debt-to-GDP (%), End of 2006

	Value of Mortgage Debt, € million	Growth in Mortgage Debt	Residential Debt to GDP Ratio	Per Capita Mortgage Debt, € thousand
Bulgaria (2007)	1,745	73.5%	7.0%	0.2
Czech Republic (2004)	8,055	33.9%	7.1%	0.8
Estonia (2004)	4,278	63.4%	32.7%	3.2
Cyprus (2004)	3,077	43.5%	21.2%	4.0
Latvia (2004)	4,680	86.5%	28.9%	2.0
Lithuania (2004)	2,997	32.1%	12.6%	0.9
Hungary (2004)	10,215	11.0%	11.4%	1.0
Poland (2004)	22,514	53.7%	8.3%	0.6
Romania (2007)	2,276	57.2%	2.3%	0.1
Slovenia (2004)	1,956	43.0%	6.6%	1.0
Slovakia (2004)	4,209	36.7%	9.6%	0.8
Croatia (candidate)	5,219	37.2%	15.3%	1.2
Serbia (candidate)	650	111.7%	2.9%	0.1
Turkey	12,237	65.7%	3.8%	0.2
Ukraine (candidate)	4,301	157.6%	2.6%	0.1

Source: Eurostat, National Central Banks, EMF

Table 2: Contract Details for FRMs Originated by the Largest Deposit Banks in Turkey (September, 2007)

Bank	Contract maturity (months)	Coupon rate (%)	LTV Ratio	Up-front arrangement fee	Prepayment penalty	Appraisal of the property	Insurance services
Finans Bank	60 – 360	1.24 – 1.29	Min: 75% Max: 95% to 100%	No fee	2%	Appraisal firm	Hazard -Earthquake insurance: Yes Life insurance: Yes Accident insurance: Yes Mortgage insurance: No
Oyak Bank	60 -144	1.35	Max: 75%	Included in coupon rate	2%	Appraisal firm	Hazard -Earthquake insurance: Yes Life insurance: Yes Accident insurance: Yes Mortgage insurance: No
HSBC Bank	60 – 360	1.30 -1.44	Min: 5.000 YTL Max: 75%	1%-2% of Loan Amount	2%	Appraisal firm	Hazard -Earthquake insurance: Yes Life insurance: No Accident insurance: Yes Mortgage insurance: No
Akbank	60 -240	1.21 -1.31	Max: 75%	2%-3% of Loan Amount	2%	Appraisal firm	Hazard -Earthquake insurance: Yes Life insurance: Yes Accident insurance: Yes Mortgage insurance: No
Yapi Kredi Bank	60 -240	1.16 -1.33	Max: 100%	1%-5% of Loan Amount	1.5%	Bank (portfolio managers)	Hazard -Earthquake insurance: Yes Life insurance: Yes Accident insurance: Yes Mortgage insurance: No
Garanti Bank	60 -240	1.34	Max: 75%	1000 YTL	2%	Appraisal firm	Hazard -Earthquake insurance: Yes Life insurance: No Accident insurance: No Mortgage insurance: No
Vakif Bank	60 -240	1.30	Max: 75%	2% of Loan Amount	2%	Bank's own Appraisal firm	Hazard -Earthquake insurance: Yes Life insurance: Yes Accident insurance: No Mortgage insurance: No
Is Bank	48 -120	1.46 -1.53	Max: 75%	1% -1.5% of Loan Amount	2%	Bank's own Appraisal firm	Hazard -Earthquake insurance: Yes Life insurance: Yes Accident insurance: Yes Mortgage insurance: No

Source: The web sites of the Deposit Banks

Table 3: Basic Set of Economic Parameters and Contract Provisions

Base Case Parameter Values	CONTRACT	
	Fixed-rate Mortgage With Arrangement Fee and Without Early Termination Penalty	Fixed-rate Mortgage With Arrangement Fee and Early Termination Penalty
Economic Environment		
Spot interest rate, $r(0)$	15%	15%
Long term average of interest rate, θ	24%	24%
Speed of reversion, κ	56%	56%
House service flow, δ	4%	4%
Correlation coefficient, ρ	0	0
Contract Provisions		
Maturity, η	120 months	120 months
Value of house at origination, H	100 000 TRY	100 000 TRY
Arrangement fee, ξ	2%	2%
Early termination penalty, π	-	2%

Figure 1: Value of Future Payments (A)

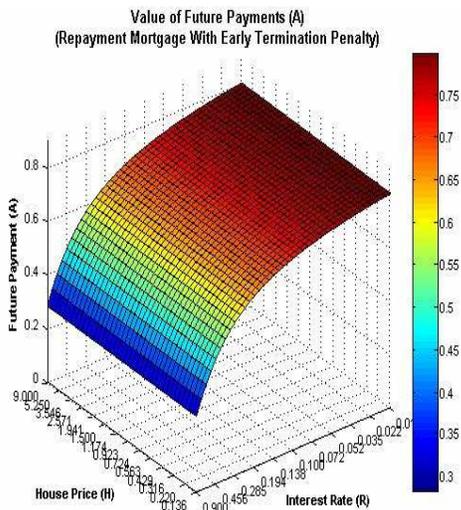


Figure 2: Value of Default Option (D)

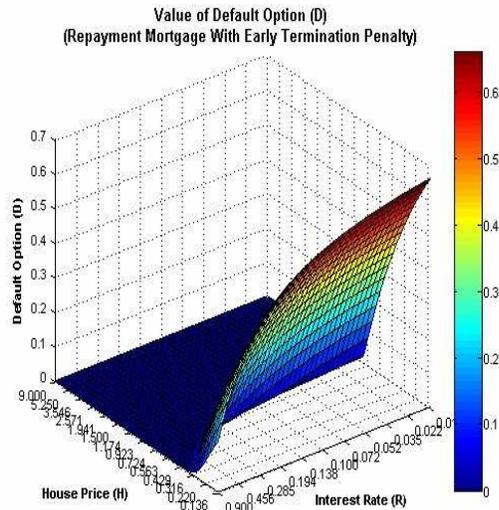


Figure 3: Value of Insurance (I)

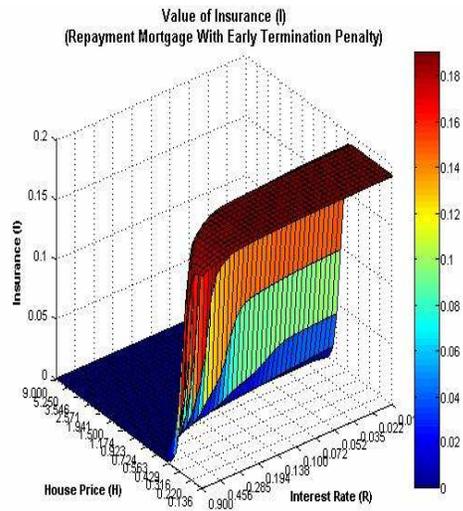


Figure 4: Value of Prepayment Option (C)

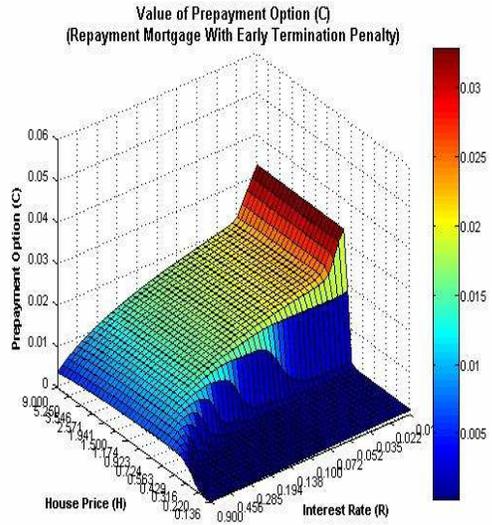


Figure 5: Value of Mortgage Contract (V)

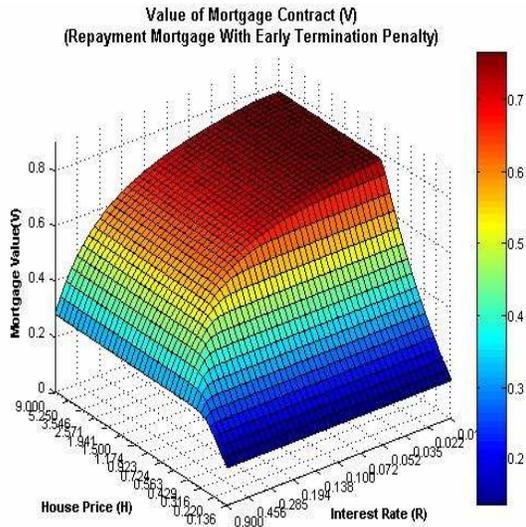


Figure 6: Mortgage Value for the Lender (75% LTV Mortgage Contract without Default Insurance and Arrangement Fee) - FRM Contract with Prepayment Penalty of 2%

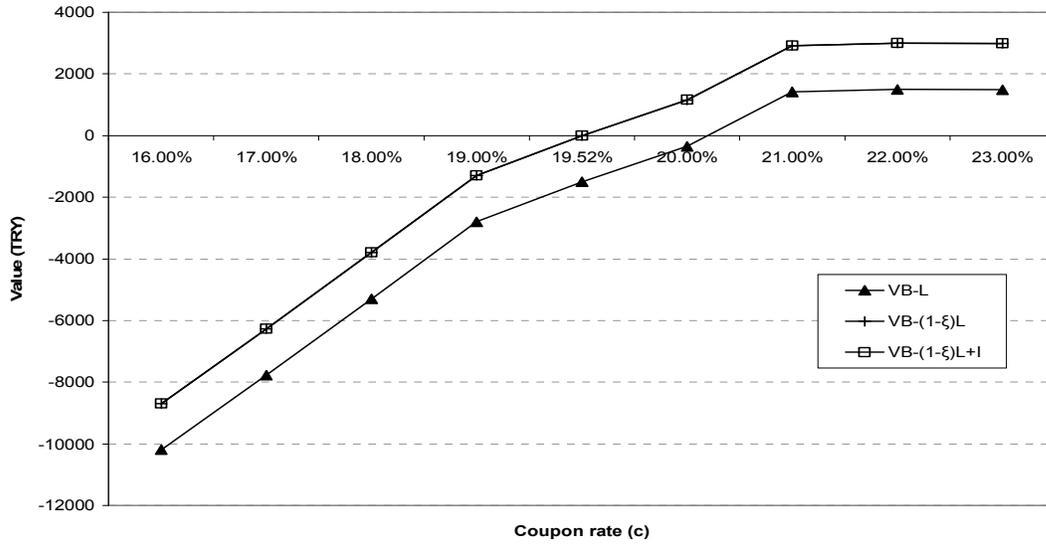
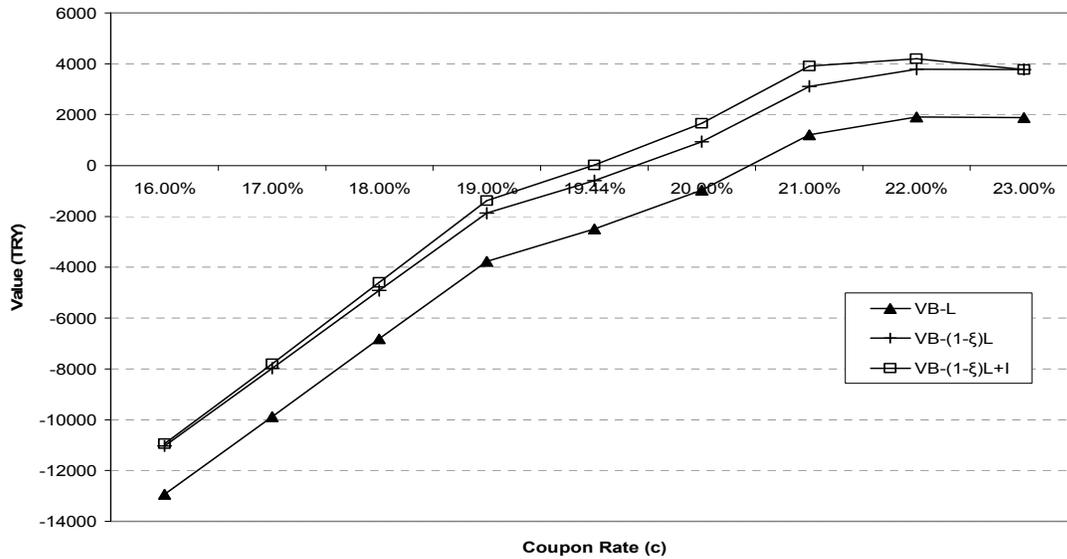
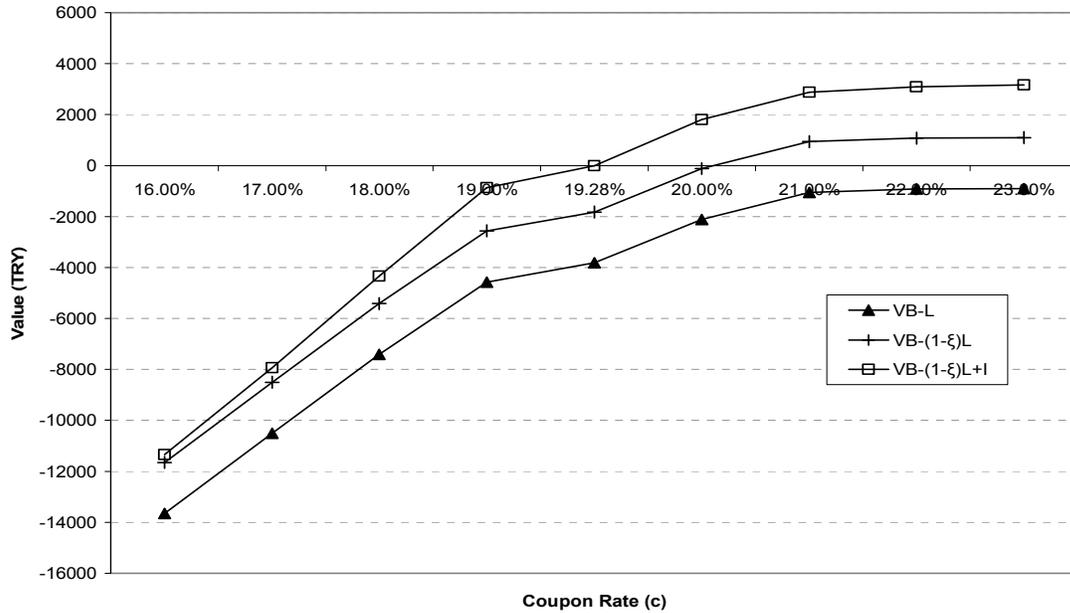


Figure 7: Mortgage Value for the Lender (95% LTV Mortgage Contract without Default Insurance, with Arrangement Fee) - FRM Contract with Prepayment Penalty of 2%



The following parameters were used in the construction of this table: the arrangement fee (ξ) is 2%; the early termination penalty (π) is 2%; the spot interest rate ($r(0)$) is 15%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the interest rate volatility (σ) is 12%; the house price volatility (v) is 9%; the house service flow (δ) is 4% and the correlation coefficient (ρ) is 0.

Figure 8: Mortgage Value for the Lender (100% LTV Mortgage Contract with Default Insurance and Arrangement Fee) - FRM Contract with Prepayment Penalty of 2%



The following parameters were used in the construction of this table: the arrangement fee (ξ) is 2%; the early termination penalty (π) is 2%; the spot interest rate ($r(0)$) is 15%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the interest rate volatility (σ) is 12%; the house price volatility (v) is 9%; the house service flow (δ) is 4% and the correlation coefficient (ρ) is 0.

Table 4: Trade-Off between Arrangement Fee, Early Termination Penalty and Equilibrium Contract Rates

Prepayment Penalty (π)	Arrangement Fee (ξ)				
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.05
0.00	21.93%	19.83%	19.47%	19.15%	18.91
0.01	20.14%	19.77%	19.45%	19.14%	18.91
0.02	20.09%	19.75%	19.44%	19.13%	18.89
0.05	20.05%	19.73%	19.43%	19.13%	18.89

The following parameters were used in the construction of this table: the spot interest rate ($r(0)$) is 15%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the interest rate volatility (σ) is 12%; the house price volatility (v) is 9%; the house service flow (δ) is 4%; LTV ratio is 95% and the correlation coefficient (ρ) is 0.

Table 5: House Price Volatility and the Value of Mortgage Components**95% LTV Fixed-Rate Mortgage With Early Termination Penalty**

House Price Volatility (σ_H)	Future Payments	Mortgage	Default	Prepayment	Insurance
	(A)	(V)	(D)	(C)	(I)
3.0%	90557	86804	2	3750	4
6.0%	90557	87343	35	3179	64
9.0%	90557	88186	170	2201	322
12.0%	90557	89225	471	861	920
15.0%	90557	90321	941	0	1871

The following parameters were used in the construction of this table: the contract rate (c) is 18%; the early termination penalty (π) is 2%; the spot interest rate ($r(0)$) is 15%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the interest rate volatility (σ) is 12%; the house service flow (δ) is 4%; and the correlation coefficient (ρ) is 0.

Table 6: Interest Rate Volatility and the Value of Mortgage Components**95% LTV Fixed-Rate Mortgage With Early Termination Penalty**

Interest Rate Volatility (σ_r)	Future Payments	Mortgage	Default	Prepayment	Insurance
	(A)	(V)	(D)	(C)	(I)
6.0%	90147	90504	143	0	436
9.0%	90318	89517	160	641	385
12.0%	90557	88186	170	2201	322
15.0%	90870	86522	167	4180	254
18.0%	91232	84591	153	6488	192

The following parameters were used in the construction of this table: the contract rate (c) is 18%; the early termination penalty (π) is 2%; the spot interest rate ($r(0)$) is 15%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the house price volatility (ν) is 9%; the house service flow (δ) is 4%; and the correlation coefficient (ρ) is 0.

Table 7-A: Combined Effects of Changes in Spot Rates and House Price and Interest Rate Volatilities

95% LTV Fixed-Rate Mortgage With Early Termination Penalty

Spot rate (r_0)	Eq. Contract Rate		Future Payments		Mortgage		Default		Prepayment		Insurance	
	(C)		(A)		(V)		(D)		(C)		(I)	
	$v = 9\%$	$v = 12\%$	$v = 9\%$	$v = 12\%$	$v = 9\%$	$v = 12\%$	$v = 9\%$	$v = 12\%$	$v = 9\%$	$v = 12\%$	$v = 9\%$	$v = 12\%$
12%	$\sigma = 12\%$	20.06%	19.56%	93675	92500	91980	617	862	2157	834	594	1119
	$\sigma = 15\%$	20.68%	20.19%	97651	92500	91992	916	1265	4235	2806	593	1112
15%	$\sigma = 12\%$	21.28%	20.79%	95456	92517	92053	700	955	2239	905	582	1047
	$\sigma = 15\%$	21.97%	21.49%	98016	92524	92059	1023	1415	4469	2999	575	1038
18%	$\sigma = 12\%$	22.39%	21.92%	95779	92522	92111	779	1058	2478	1147	573	986
	$\sigma = 15\%$	23.15%	22.69%	98529	92529	92113	1141	1561	4859	3401	573	982
21%	$\sigma = 12\%$	23.92%	23.50%	96488	92522	92181	916	1239	3050	1779	572	919
	$\sigma = 15\%$	24.80%	24.39%	99525	92528	92181	1295	1783	5702	4288	563	918

The following parameters were used in the construction of this table: the arrangement fee (ξ) is 2%; the early termination penalty (π) is 2%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the house service flow (δ) is 4%; and the correlation coefficient (ρ) is 0.

Table 7-B: Combined Effects of Changes in Spot Rates and House Price and Interest Rate Volatilities

75% LTV Fixed-Rate Mortgage With Early Termination Penalty													
Spot Rate	Eq. Contract Rate (C)		Future Payments (A)		Mortgage (V)		Default (D)		Prepayment (C)		Insurance (I)		
	$\nu = 9\%$	$\nu = 12\%$	$\nu = 9\%$	$\nu = 12\%$	$\nu = 9\%$	$\nu = 12\%$	$\nu = 9\%$	$\nu = 12\%$	$\nu = 9\%$	$\nu = 12\%$	$\nu = 9\%$	$\nu = 12\%$	
12%	$\sigma = 12\%$	20.13%	19.69%	75408	74282	73490	73479	2	15	1917	788	2	21
	$\sigma = 15\%$	20.75%	20.31%	77278	76149	73494	73479	3	21	3780	2648	2	20
15%	$\sigma = 12\%$	21.34%	20.90%	75526	74401	73490	73477	3	16	2033	909	2	17
	$\sigma = 15\%$	22.03%	21.59%	77548	76432	73498	73484	4	22	4047	2927	2	16
18%	$\sigma = 12\%$	22.46%	22.02%	75791	74689	73498	73485	3	16	2290	1188	2	15
	$\sigma = 15\%$	23.22%	22.79%	77951	76868	73495	73484	4	23	4452	3361	2	14
21%	$\sigma = 12\%$	24.00%	23.57%	76353	75324	73495	73485	3	19	2855	1820	2	12
	$\sigma = 15\%$	24.87%	24.47%	78755	77763	73491	73489	4	23	5261	4251	1	11

The following parameters were used in the construction of this table: the arrangement fee (ξ) is 2%; the early termination penalty (π) is 2%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the house service flow

Table 8: Equilibrium Mortgage Coupon Rates and the Prevailing Mortgage Coupon Rates of the Turkish Banks: September, 2007

PANEL-A: September, 2007			
Spot interest rate 15%, Long-term interest rate 24%, Interest rate volatility =12%			
	No fee & No Mortgage Insurance [V_B-L]	2% Arrangement Fee & No Insurance [$V_B-(1-\xi)L$]	2% Arrangement Fee & Mortgage Insurance [$V_B-(1-\xi)L+I$]
Equilibrium Coupon Rates: LTV = 75%	1.531% - 1.601%	1.497% – 1.531%	1.497% – 1.531%
Equilibrium Coupon Rates: LTV = 95%	1.531% – 1.601%	1.490% – 1.531%	1.460% -1.490%
Equilibrium Coupon Rates: LTV = 100%	No equilibrium coupon	1.531% - 1.601%	1.480 %
Prevailing Coupon Rates		Oyak Bank: 1.35% HSBC: 1.44% Akbank: 1.31% Garanti: 1.34% Vakifbank: 1.30% Is Bank: 1.53% Finansbank: 1.29% Yapi Kredi: 1.33%	

Appendix 1: Estimation of the CIR Process Parameters

CIR model (1985) assumes that the time evolution of the short term interest rate under real probabilities P has the following representation

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma_r r_t^{1/2} dW_t^P \quad (1)$$

Under risk neutral measure Q it follows

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t - \lambda\sigma_r)dt + \sigma_r r_t^{1/2} dW_t^Q \quad (2)$$

where λ is the market price of risk. The unique positive solution to the short rate stochastic differential equation (2) is

$$r(t) = \theta^* + (r(s) - \theta^*)e^{-\kappa(t-s)} + \sigma_r e^{-\kappa(t-s)} \int_s^t e^{\kappa(u-s)} \sqrt{r(u)} dW(u) \quad (3)$$

for any $t \geq s$ and $\theta^* = \theta - \lambda\sigma_r$. The probability density of interest rate at time t , conditional on its value at current time s , is given by

$$f(r(t), t; r(s), s) = ce^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{q/2} I_q(2(uv)^{1/2}), \quad (4)$$

where

$$c = \frac{2\kappa}{\sigma_r^2(1 - e^{-\kappa(t-s)})}, \quad u = cr(s)e^{-\kappa(t-s)}, \quad v = cr(t), \quad q = \frac{2\kappa\theta^*}{\sigma_r^2} - 1$$

and $I_q(\cdot)$ is the modified Bessel function of the first kind of order q .

Notice that short term interest rate is distributed as chi-squared conditioned on the filtration at time s ,

$$r(t) | F_s \sim \chi(2cr(t), 2q + 2, 2u) \quad (5)$$

with $2q + 2$ degrees of freedom and parameter of non-centrality $2u$ proportional to the current short rate.

Assuming independency, one can write the likelihood function for the short rate series with T observations

$$L(\Theta | r(t)) = \prod_{t=1}^T f(r(t), t; r(s), s) \quad (6)$$

Then log-likelihood function is

$$\text{Log}L(\Theta | r(t)) = (T-1) \ln c + \sum_{t=1}^T \left\{ -u_t - v_{t+1} + 0.5 \ln \left(\frac{v_{t+1}}{u_t} \right) + \ln \left(I_q \left(2\sqrt{u_t v_{t+1}} \right) \right) \right\} \quad (7)$$

Then the estimation of the parameter is done by maximizing equation (7) over the control variables $\Theta = \{\kappa, \sigma_r, \theta, \lambda\}$.

$$\hat{\Theta} = \arg \max_{\Theta} \text{Log}L(\Theta | r(t))$$

We choose initials implementing the Direct optimization algorithm (see Dan finkel) and then we make use of Nelder-Mead algorithm to solve the nonlinear optimization problem.

We use daily 3-Month treasury yields obtained from the secondary market to estimate the parameters of the CIR process. Data covers the period between 28 Feb 2002 and 21 Nov 2007. Data set has 1518 observations in total.

Appendix 2: Descriptions of the Model Variables

H = the value of the mortgaged housing property,

r = the instantaneous risk-free interest rate,

μ = average rate of house price appreciation,

σ_H = the volatility of disturbances in actual house price appreciation,

z_H = the standardized Wiener process that drives the uncertainty in house prices,

θ = the long-term mean value for the interest rate,

κ = the speed of adjustment in the mean reverting process,

σ_r = the standard deviation of the interest rate disturbance,

z_r = the standardized Wiener process,

ρ = the instantaneous correlation coefficient,

V = the mortgage value,

n = the life of the mortgage in months,

L = amount of the loan,

c = the fixed coupon rate,

π = early termination penalty,

f = fraction for insurance coverage,

ξ = arrangement fee,

$\eta(i)$ = i th payment date,

$OB(i)$ = outstanding balance after i th payment date,

MP = monthly payment for a fixed-rate mortgage,

$TD(t)$ = borrower's total debt at time t .

$V_B(r; H; t)$ = value of the mortgage to the borrower at time t for given r and H ,

$A(r; t)$ = value of the remaining mortgage payments at time t for given r ,

$D(r; H; t)$ = value of the default option at time t for given r and H ,

$C(r; H; t)$ = value of the prepayment option at time t for given r and H ,

$J(r; H; t)$ = value of the joint option at time t for given r and H .

References:

Alvayay, J. R., and A. L. Schwartz, 1996, "Housing and Mortgage Market Policies in Chile", *Journal of Real Estate Literature*, 5(1): 47-55.

Ambrose B.W. and S. Kim, 2003, "Modeling the Korean Chonse Lease Contract", *Real Estate Economics*, 31(1): 53-74.

Azevedo-Pereira, J. A., Newton, D. P. and D. A. Paxson, 2002, "UK Fixed Rate Repayment Mortgage and Mortgage Indemnity Valuation", *Real Estate Economics*, 30(2): 185-211.

Azevedo-Pereira, J. A., Newton, D. P. and D. A., Paxson, 2003, "Fixed-Rate Endowment Mortgage and Mortgage Indemnity Valuation", *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 26 (2/3): 197-221.

Boyle, P., 1977, "Options: A Monte Carlo Approach", *Journal of Financial Economics*, 44: 323-338.

Boyle, P., 1986, "Options Valuation Using a Tree Jump Process", *International Options Journal*, 3: 7-12.

Boyle, P., 1988, "A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23(1): 1-12.

Brennan, M., J. and E. S. Schwartz, 1976, "The Pricing of Equity-Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee", *Journal of Financial Economics*, 3: 195-214.

Brennan, M., J. and E. S. Schwartz, 1977, "The Valuation of American Put Options", *Journal of Finance*, 32: 449-462.

Brennan, M., J. and E. S. Schwartz, 1978, "Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis", *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13(3): 461-474.

Chiquier, L., 1998, "Dual Index Mortgages (DIMs): Conditions of Sustainable Development in Poland", East European Regional Urban Sector Assistance Project, The Urban Institute.

Chu, Y, Ambrose, B. W., Sa-Aadu, J. and T. F. Sing, 2003, "Mortgage Default and Changes to Withdrawal Limits of CPF in Singapore", Unpublished Paper presented at AREUEA Conference at Cracow, Poland.

Cox, J. C., Ingersoll, J. E. and S. A. Ross, 1979, "An Analysis of Variable Rate Loan Contracts", *The Journal of Finance*, 35(2): 389-403.

Cox, J. C., Ingersoll, J. E. and S. A. Ross, 1985a, "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica*, 53: 363-384.

Cox, J. C., Ingersoll, J. E. and S. A. Ross, 1985b, "A Theory of the Term-structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53: 385-407.

Demirguc-Kunt, A. and V. Maksimovic, 1999, "Institutions, Financial Markets and Firm Debt Maturity," *Journal of Financial Economics*, 54(3): 295-336.

Demirguc-Kunt, A. and V. Maksimovic, 1996, "Stock Market Development and Firm Financing Choices", *World Bank Economic Review*, 10: 341-369.

Deng, Y., Quigley, J. M., and R. Van Order, 2000, "Mortgage Terminations, Heterogeneity and the Exercise of Mortgage Options", *Econometrica*, 68(2): 275-307.

Deng, Y., 1997, "Mortgage Termination: An Empirical Hazard Model with a Stochastic Term Structure", *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 14: 309-331.

Downing, C., R. Stanton and N. Wallace, 2005, "An Empirical Test of a Two-Factor Mortgage Valuation Model: How Much Do House Prices Matter?", *Real Estate Economics*, 33(4): 681-710.

Dunn, K.B. and J.J. McConnell, 1981-a, "A Comparison of Alternative Models for Pricing GNMA Mortgage-Backed Securities", *Journal of Finance*, 36: 471-483.

Dunn, K.B. and J.J. McConnell, 1981-b, "Valuation of GNMA Mortgage Securities", *Journal of Finance*, 36: 599-616.

Epperson, J. F., Kau, J. B., Keenan, D. C. and W. J. Muller III, 1985, "Pricing Default Risk in Mortgages", *AREUEA Journal*, 13(13): 261-272.

Erol, I. and K. Patel, 2005, "Default Risk of Wage-Indexed Payment Mortgage (WIPM) Contract in Turkey", *Journal of Housing Economics*, 14(3): 271-293.

Geltner, D. and N.G. Miller, 2001, *Commercial Real Estate Analysis and Investments*, South-Western Publishing, Thomson Learning.

Hendershott, P. H. and R. Van Order, 1987, "Pricing Mortgages: An Interpretation of the Models and Results", *Journal of Financial Services Research*, 1: 77-111.

Hull, J. and A. White, 1988, "The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23: 237-51.

Jaffee, D M., and B., Renaud, 1997, "Strategies to Develop Mortgage Markets in Transition Economies", In *Financial Sector Reform and Privatisation in Transition Economies*, Ed. J. Doukas, V. Murinde and C. Wihlborg.

Kau, J. B. and D. C. Keenan, 1995, "An Overview of the Option-Theoretic Pricing of Mortgages", *Journal of Housing Research*, 6(2): 217-243.

Kau, J. B., Keenan, D. C., Muller, W. J. and J. F. Epperson, 1992, "A Generalized Valuation Model for Fixed-Rate Residential Mortgages", *Journal of Money, Credit, and Banking*, 24(3), 279-299.

Kau, J. B., Keenan, D. C., Muller III, W. J. and J. F. Epperson, 1995, "The Valuation at Origination of Fixed-Rate Mortgages with Default and Prepayment", *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 11(1): 5-36.

Kau, J. B., Keenan, D. C., Muller III, W. J. and J. F. Epperson, 1993, "Option Theory and Floating-Rate Securities with a Comparison of Adjustable- and Fixed-Rate Securities", *Journal of Business*, 66(4): 595-618.

Kierkegaard, S., 1967, *Stages on Life's Way*, trans. Walter Lowrie, New York.

Lipscomb, J. B., and H. Hunt, 1999, "Mexican Mortgages: Structure and Default Incentives, Historical Simulation, 1982 to 1998", *Journal of Housing Research*, 10(2):

235- 65.

Lipscomb, J. B., Harvey, J. T., and H. Hunt, 2003, "Exchange-Rate Risk Mitigation with Price-Level-Adjusting Mortgages: The Case of the Mexican UDI", *Journal of Real Estate Research*, 25(1): 23- 41.

McConnell, J. and W. Muller, 1998, "An Introduction to Mortgage Research on Wall Street", *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 1: 91-94.

Ortega, M. A., 2000, "Risk Management in Indexed Mortgage Loans in Chile", *International Journal of Real Estate Finance*, 1(2): 20-25.

Pickering N., 2000a, "The Mexico Mortgage Market Boom, Bust and Bail Out: Determinants of Borrower Default and Loan Restructure After the 1995 Currency Crisis", Working Paper, Joint Center for Housing Studies, Harvard University.

Pickering, N., 2000b, "The SOFOLES: Niche Lending or New Leaders in the Mexican Mortgage Market?", Working Paper, Joint Center for Housing Studies, Harvard University.

Rendleman, R. J. and B. J. Bartter, 1979, "Two-State Option Pricing", *Journal of Finance*, 34(5): 1093-1110.

Schwartz, E. S. and W. N. Torous, 1989, "Prepayment and the Valuation of Mortgage Backed Securities", *The Journal of Finance*, 44(2): 375-392.

Schwartz, E. S., 1977, "The Valuation of Warrants: Implementing a New Approach", *Journal of Financial Economics*, 4: 79-94.

Siembieda, W. J. and E. L. Moreno, 1997, "Expanding Housing Choices for the Sector Popular: Strategies for Mexico", *Housing Policy Debate*, 8 (3): 651-677.

Titman, S. and W. Torous, 1989, "Valuing Commercial Mortgages: An Empirical Investigation of the Contingent-Claims Approach to Pricing Risky Debt", *The Journal of Finance*, 44(2): 345-373.

EK -2

**TÜBİTAK
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU**

Proje No: 107K300
Proje Başlığı: Sabit Faiz Oranlı Mortgage Kontratlarının Enflasyonist Ekonomilerde Fiyatlandırılması: Türkiye Örneği
Proje Yürütücüsü ve Araştırmacılar: Yrd. Doç. Dr. Işıl EROL (Yürütücü) Yrd. Doç. Dr. Ömür Uğur (Araştırmacı) Yrd. Doç. Dr. Şahap Kasırga Yıldırak (Araştırmacı)
Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi: Orta Doğu Teknik Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi İktisat Bölümü 06531 Ankara
Destekleyen Kuruluş(ların) Adı ve Adresi:
Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri: 15 Ekim 2007 – 15 Ekim 2009
Öz (en çok 70 kelime) Bu projenin temel amacı, opsiyon fiyatlama model ve tekniklerini kullanarak Türkiye'deki bankalar tarafından verilen sabit faiz oranlı mortgage kredilerinin geri ödenmeme ve vadeden önce ödenme risklerinin hesaplanması ve kredilerin piyasa değerinin belirlenmesidir. Elde edilen nümerik sonuçlara göre, faiz oranı volatilitesi arttıkça kredi alan kişinin temerrüt riski de krediyi erken kapama riski de artmaktadır. Fakat, faiz oranı volatilitelerinin kredinin erken ödenme riski üzerindeki etkisi çok daha fazladır. Konut fiyatlarındaki dalgalanma (volatilité) arttıkça kişilerin temerrüte düşme riski artacak ve dolayısıyla temerrüt opsiyonu değerinde artış görülecektir. Temerrüt opsiyonu değerindeki artış ile birlikte mortgage sigortası değeri de artacaktır. Konut fiyatlarındaki volatilitenin yüksek olduğu ortamlarda temerrüt riskinden korunmak amacıyla bankaların mortgage sigortası almaları beklenmektedir. Faiz oranlarının enflasyonist ortamlardaki belirsizlikler göz önüne alınarak, sıçramalı stokastik hareketlerle modellenmesi, banka açısından mortgage kredi kontratının piyasa değerini azaltmaktadır. Banka bu durumda daha yüksek kredi faizi uygulamasına gitmektedir.
Anahtar Kelimeler: Opsiyon fiyatlama modeli, sabit faiz oranlı mortgage kontratı, temerrüt opsiyonu, erken ödeme opsiyonu, mortgage temerrüt sigortası, kısmi diferansiyel denklem, kısmi integro diferansiyel denklem, nümerik analiz, açık sonlu farklar metodu.
Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu mu? Evet <input type="checkbox"/> Gerekli Değil <input checked="" type="checkbox"/> Fikri Ürün Bildirim Formu'nun tesliminden sonra 3 ay içerisinde patent başvurusu yapılmalıdır.
Projeden Yapılan Yayınlar: 1. "Pricing Default and Prepayment Risks of Fixed-Rate Mortgages in Turkey: An Application of Explicit Finite Difference Method" başlıklı Master Tezi projenin araştırma görevlisi Özgenay Çetinkaya tarafından yazılmıştır. Özgenay Çetinkaya bu tez ile ODTÜ Uygulamalı Matematik Enstitüsü, Finansal Matematik Anabilim Dalı Master derecesi almıştır. Tez danışmanı olarak Yrd. Doç. Dr. Işıl Erol görev almıştır. 2. "Originating Long-Term Fixed-Rate Mortgages In Developing Economies: New Evidence from Turkey" başlıklı makale <i>Metu Studies in Development</i> dergisinde Aralık 2009'da yayımlanmıştır.

3. "Birth of the Mortgage Industry Under High Inflation: An Examination of the Sectoral Integration, Pricing, and Product Development for Mortgage Insurance in Turkey" başlıklı makale Temmuz 2009'da AsRES ve AREUEA Uluslararası Konferansı'nda bildiri olarak sunulmuştur. Uluslararası bir dergide hakem sürecinde bulunmaktadır.

Originating Long-Term Fixed-Rate Mortgages In Developing Economies: New Evidence from Turkey

Isil Erol
Assistant Professor of Economics
Middle East Technical University
Department of Economics
06531 Ankara, Turkey
Email: isile@metu.edu.tr

Özgenay Çetinkaya
Middle East Technical University
Institute of Applied Mathematics
Department of Financial Mathematics
06531 Ankara, Turkey
Email: ozgenaycetinkaya@hotmail.com

Abstract

This paper intends to analyze the recent developments to introduce and integrate mortgage markets into capital markets of Turkey. The Capital Market Board has recently prepared a legal framework not only for a proper mortgage system, but also for the eventual securitization of these mortgages. Turkish banks started to contract, for the first time ever, long-term fixed rate mortgages. The paper uses traditional option-pricing model to evaluate the current 10-year fixed rate mortgage (FRM) contracts with embedded default and prepayment options in Turkey. Our study is the very first attempt to use an option pricing model to price the FRM contracts in an emerging economy with its different and unique dynamics. Our findings show that, in 2007 almost every bank, except for Is Bank, offered mortgage interest rates that were significantly below the equilibrium coupon rates, involving arbitrage profit for the borrowers. We also conclude that even if the prevailing mortgage interest rates are below the equilibrium rates, these rates are extremely high for establishing a well-functioning primary mortgage market in any economy. Finally, the effects of the global financial crisis are started to be felt in Turkish mortgage market as the banks have increased their mortgage coupon rates and shortened the contract maturities drastically over a very short time period, from September 2007 to November 2008.

Key words: FRMs, emerging economies, option pricing model, default option, prepayment option, Turkish mortgage market, explicit finite difference method.

JEL Classification: G01 ; G13 ; G21 ; C63

* Corresponding Author: Isil Erol, Middle East Technical University, Department of Economics, 06531 Ankara, Turkey; Tel: +90-312-210-3048; Fax: +90-312-210-7964; Email: isile@metu.edu.tr
We would like to thank Kasirga Yildirak and Omur Ugur for their research assistance. We also thank Professor Dogan Tirtiroglu for his detailed discussions and comments in the early stages of this paper. This paper is part of an ongoing research project designed to evaluate the prevalent Turkish mortgage contracts. The authors greatly acknowledge financial support from The Scientific and Technological Research Council of Turkey.

1. Introduction

The nature of the housing market, the allocation of interest rate risk, and the economic and institutional structure all contribute to the diverse mortgage contract designs that are found worldwide. Because of the volatile macroeconomic environment and the lack of legal and regulatory framework that supports collateralized lending, the provision of housing finance in developing countries is often problematic.

Mortgage market development is likely to be a key factor in overall financial market development. In particular, an efficient mortgage market acts as a positive externality for the other capital markets, creating pressure for higher efficiency in these markets. On the other hand, a poorly functioning mortgage market is likely to pollute other financial markets with its inefficiency (Jaffe and Renaud, 1997). Efficient mortgage markets in developed economies require that the lending risk (credit, liquidity, and interest rate risk) be allocated to the long-term investors who are best able to handle them. In emerging economies, housing finance has remained in a primitive state compared to the rapid development of banking and other financial markets. Although foreign banks operate in emerging markets, they are mostly in the government bond business. The financial sector is far deeper than trading government bond and actual financial sector development requires lending to businesses, lending to housing, and lending to construction. Developing mortgage financing is a fundamental part of the financial sector development, because it stimulates growth through the construction sector and provides access to credit for more people.

In spite of the crucial role of mortgage financing in developing the financial sector of the emerging economies, there are not many published studies focused on examining the mortgage markets in developing economies and the performance of their mortgage products. Existing academic studies mainly give importance to the Latin American countries, especially the mortgage markets in Mexico and Chile.¹ A few studies analyze the mortgage markets in transition economies² and others examine development of

¹Siembieda and Moreno (1997), Lipscomb and Hunt (1999), Pickering (2000a-b), and Lipscomb et al. (2003) all examine the structure of the Mexican mortgage market and the performance of different loan contracts such as dual index mortgages and inflation-indexed mortgages. Alwayay and Schwartz (1996) analyse the housing finance policies in Chile. Ortega (2000) studies the development of Chilean mortgage market and focuses on the risk management in inflation-indexed mortgages, namely Unidad de Fomento (UF) indexed mortgage loans.

² Jaffee and Renaud (1997) discuss the main factors that hinder the development of mortgage markets in economies that are in transition from central planning to a market system. Chiquier

housing finance in East Asia. Although East Asia is a young market, Hong Kong, Singapore, and even China, have deep primary residential mortgage markets in comparison to other emerging markets, which can be grouped as the Latin American countries, transition economies, and Middle Eastern and North African (MENA) countries.

This paper, firstly, intends to analyze the recent developments in Turkish mortgage market in line with the macro-economic progress in the country over the past few years. Turkey is a G-20 member Eurasian country and commands the youngest population in Europe.³ Turkish economy has been growing by around 6 per cent a year for the last five years, which is faster than many developed economies and most emerging markets. The economic measures, taken after the financial crisis of 2001, have been very effective in subduing immensely the inflation, building investor confidence and attracting substantial and record amounts of foreign investments, and dampening the unemployment⁴. The recent improvements in the Turkish economy, especially the drop in the inflation rate has led the Capital Market Board to work on a draft of regulatory changes that would facilitate the legal environment for the establishment of the mortgage system. The efforts for the development of the mortgage system have attracted the construction sector and the related financial sectors. The result was the increase in the construction of the new housing units, the development in the mortgage products, and the significant decline in mortgage interest rates. We believe that a better understanding of this particular economy with its developing mortgage market may shed light on other countries at the similar stage of economic development.

Secondly, this paper uses traditional option-pricing model to evaluate the current 10-year fixed rate mortgage (FRM) contracts with embedded default and prepayment options in Turkey. Indeed, option pricing models have been extensively used for pricing the fixed-rate and adjustable-rate mortgages with prepay and default options.⁵ It is

(1998) evaluates the performance of dual index mortgages in Poland in comparison to the standard mortgage contracts.

³ 66.5% of the population in Turkey is within the 15–64 age group, the 0–14 age group corresponds 26.4% of the population, while 65 years and higher of age correspond to 7.1% of the total population, 2007 Census -population statistics, Turkish Statistical Institute.

⁴ Turkey has steadily opened up its markets through economic reforms by reducing government controls on foreign trade and investments and the liberalization of many sectors to private and foreign participation has continued.

⁵ McConnell and Muller (1988) provide an overview of mortgage pricing techniques. Hendershott and Van Order (1987) survey the development of the option-pricing approach to mortgage valuation and Kau and Keenan (1995) provide a later review of the academic literature.

important to point out that theoretical and empirical research on mortgage design and pricing has been conducted on the fixed and adjustable rate mortgages used in the United States and United Kingdom⁶. A key and one of the first questions for any aspect of research on emerging markets is whether the models and theories put forth and tested several times in developed financial markets also describe the realities observed in emerging markets (see, for a recent example, Demirguc-Kunt et al leverage papers in WBER and JFE). To our knowledge, this paper is the very first attempt to use an option pricing model to price the FRM contracts in an emerging economy with its different and unique dynamics.

In particular, we use the structural approach (option pricing model) in order to answer the following interrelated questions:

1. Is Turkish economy ready for originating long-term FRMs? More specifically, do the currently observed FRM coupon rates represent a fair transaction between the banks and the borrowers in Turkey?

Mortgage coupon rates and contract provisions vary widely over time. The economic environment changes continuously and contract specifications are also subject to frequent adjustments. In line with the literature, the equilibrium framework proposed in this paper claims that a contract can only be acceptable if it represents a fair deal. Specifically, we examine if the current mortgage coupon rates are below or above the equilibrium coupon rates which avoid arbitrage.

2. What will be the value of bank's (lender's) position if they have mortgage default insurance policy, especially for the high loan-to-value (LTV) housing loans?

In developed economies, the law requires lenders to obtain mortgage insurance (or mortgage default insurance) on loans where homebuyers make down payments of less than 20 per cent of the purchase price of the home (for above 80% LTV loans). Currently, Turkish banks do not require mortgage default insurance for high LTV mortgages. This paper aims to price mortgage insurance product as a potential financial derivative in the Turkish capital markets.

Our findings show that almost every bank, with the exception for Is Bank, offers mortgage interest rates that are significantly below the equilibrium coupon rates, involving arbitrage profit for the borrowers. Thus, we conclude that these contracts do

⁶ Recently, some researchers have focused on evaluating the mortgage contracts in Korea and Singapore by using the standard contingent claims approach. Chu *et al.* (2003) model the default risk of Singapore mortgages using the classical option pricing theory, and Ambrose and Kim (2003) use a contingent claims model for modeling Korean Chonse lease contract.

not represent a fair deal between the lenders and borrowers in Turkey. We also argue that even if the prevailing mortgage coupon rates are below the equilibrium rates, 20%-25% mortgage interest rates per annum are extremely high for establishing a well-functioning primary mortgage market in any economy. In addition, our findings show that it is highly beneficial for the lenders to have mortgage default insurance, especially for the high LTV ratio mortgages.

The rest of this paper is organized as follows. Section 2 reviews option pricing literature for evaluating the default and prepayment options of mortgage contracts. Section 3 provides information on the recent developments in Turkish mortgage market. Section 4 presents the classical option pricing model for the valuation of FRM contract with embedded default and prepayment options. Section 5 presents the discussion of the numerical results. Finally, section 6 offers concluding remarks.

2. Review of the Literature

The extant literature shows that two main approaches have emerged on modeling mortgage termination either by prepayment or default: reduced-form and structural (options-pricing) models.

Termination may occur for non-financial (personal) reasons, such as divorce, a new job, or death in the family, causing a borrower to change the residence. Reduced-form approach treats non-financial termination behavior by modeling the termination decision as a function of a set of exogenous variables representing the factors that influence the likelihood of mortgage termination. Well-known reduced-form mortgage termination models include Schwartz and Torous (1989), Deng et al. (2000) and Deng (1997). The main advantages of this approach are flexibility and the ability to closely mimic the historical data record of mortgage terminations. However, reduced-form approach has low out-of-sample forecasting power. In addition, these models are often not well suited for valuation, to the extent that mortgage prices for the prepayment and default option values are included in the set of exogenous variables used to predict terminations (Downing et al., 2005).

There are also financial reasons to terminate a mortgage contract that apply equally to all individuals. These are the terminations that lower the market cost of the mortgage contract for the borrower. The structural approach or the traditional option-pricing approach treats mortgage termination as the optimal response of a rational borrower to changes in interest rates and house prices, in order to minimize the market

value of the loan. This modeling approach was first applied to mortgages by Dunn and McConnell (1981a, b) who modeled the optimal termination behavior of borrowers who could costlessly prepay, but not default.

According to the structural approach, well-informed borrowers in a perfectly competitive market will exercise either of the two options when they can increase their wealth. Absent either transaction costs or reputation costs that reduce credit ratings, these individuals can increase their wealth by defaulting on a mortgage when the market value of mortgage exceeds the value of the property. Similarly, by prepaying the mortgage when the market interest rate is below the contract rate, they can increase wealth by refinancing. However, a borrower who chooses to prepay the mortgage gives up the opportunity to exercise either prepayment or default option in the future. Likewise, a borrower who decides to default on the mortgage also forfeits the opportunity to exercise the prepayment or default option in the future.

Titman and Torous (1989) and Kau *et al.* (1992, 1995) examine structural approach and emphasize the importance of the joint-ness of prepayment and default options. In a mortgage contract, borrowers have the right to prepay a mortgage, but to rule out the possibility of default, or to consider default while ruling out the possibility of prepayment. Since prepayment and default substitute for one another, contracts with only one of these options lead the borrower to behave differently from when both are present. This substitution effect means that one cannot accurately value either the individual provisions or their interaction without both options being present. A series of papers by Kau *et al.* (1993) and Azevedo-Pereira *et al.* (2002, 2003) evaluate the US ARMs and the UK FRMs, respectively, with the embedded default and prepayment options. Without using loan-base data to decide the pattern of termination, these studies provide theoretical valuation models, which impose termination decision endogenously, and use numerical methods in order to price the jointly exercise of the embedded options.

Well-specified structural models should perform well out of sample because termination behavior arises from borrowers' optimizing behavior. Downing *et al.* (2005) claim that the basic problem with these models is that, they predict that a mortgage can never trade above par. This is because borrowers will exercise their prepayment option the instant that the mortgage value exceeds par –what is often referred to as “ruthless option exercise. On the other hand, Kau *et al.*, (1992) state that while people prepay mortgages for personal reasons, they seldom default for this reason. Default is unlikely

to occur unless the house value is less than the market value of the loan. Hence, financially induced termination seems particularly important in the case of default.

Over the past two decades, option pricing models (structural approach) have (has) been mainly used for pricing the fixed- and adjustable rate mortgages in developed economies, especially in the US and UK. This paper uses the traditional option-based pricing model to price FRM contracts in an emerging economy. The main objective of this study is to price both the default risk and the prepayment risk of the FRMs, from the lenders' perspective, using the well-known option pricing model.

3. Recent Developments in Turkish Mortgage Market

Real estate is one of the most important sectors of the Turkish economy. In recent years, this sector has made up of about 10 percent of the country's Gross National Product (GNP), which has grown to 539.9 Billion TRY (US\$ 381 Billion) in 2006. One of the reasons for this significant increase is that Turkey is a dynamic and recently strongly performing emerging market economy. In spite of the historically high demand for real estate assets, a well-organized and deep enough mortgage market did not exist in Turkey until quite recently. The absence of an efficient mortgage market was mainly due to a long-running process of persistently high inflation⁷, the inability of the banks to fund mortgages from their deposit base, and the lack of standardization within the title and appraisal systems.

In fact, the inflation rate in Turkey has stabilized within a band of 15%-20% within the last few years. The economy has been growing by around 6 per cent a year for the last five years, which is faster than many developed economies and most emerging markets. These recent improvements in the macro-economy enabled the Turkish finance sector to offer long-term funding at relatively cheap prices for the first time in history. According to the Banks Association of Turkey, mortgages represented only 7.64 per cent of the overall consumer loan portfolio in 2003, whereas over the first nine months of 2008 mortgages have a share of 29.5 per cent.⁸

Under the stable economic conditions of the recent years, the current government has recently prepared a legal framework not only for a proper mortgage

⁷ See Erol and Patel (2005) for failed attempts to introduce mortgages during the high inflation era.

⁸ In 2003, the mortgage loans granted were 800.6 million TL while total consumer credits granted were 10,478 million TL. Over the first nine months of 2008, total consumer credits and mortgage loans granted were 46,727 million TL and 13,779 million TL, respectively (www.tbb.org.tr).

system, designed especially for financing residential real estate for the middle-income households, but also for the eventual securitization of these mortgages. The Turkish Parliament ratified recently (March, 2007) this legal framework into law. Hence, the current government and the Capital Market Board initiated a legal framework to contract, for the first time ever, long-term fixed rate mortgages.

Turkey experienced strong growth in mortgage debt over the last few years. From 2002 to 2006, there has been continuous growth in the level of outstanding balances of mortgages at a compounded average growth rate of 191.5%. (www.datamonitor.com). Table 1 presents the mortgage debt as a percentage of GDP both for European Union (EU) new member and candidate countries at the end of 2006. As of December 2006, the value of mortgage debt in Turkey was approximately 12.24 € billion, which made it the second largest mortgage market among the new members and candidate members of the EU⁹. Mortgage debt-to-GDP ratio for Turkey (3.8%) was greater than those for Romania, Serbia, and Ukraine, and Turkey has experienced 65.7% growth in mortgage debt in December 2006 compared to the previous year.¹⁰

Almost all of the mortgages are originated from deposit banks in September 2007.¹¹ While private deposit banks originate 61% of the mortgages, public deposit banks initiate only 15% of the mortgages. And the remaining 24% of the mortgages are originated by the foreign banks. Examining the percentage shares of the banks in mortgage lending activity, we observe that with a 15.2% share of the total mortgage debt Akbank stands out as the mortgage industry leader. Garanti Bank, which has the second largest share of the overall mortgage lending activity with a 14.7% share, is followed closely by Is Bank with 14% share of mortgage lending. Finans Bank, Vakiflar Bankasi, and Yapi Kredi Bankasi have 11.9%, 9.4%, and 7.9%, respectively. It is worth to note that with the exception of Vakif Bank, a public deposit bank, all banks are private deposit banks in Turkey.

Deposit banks, as the main mortgage lenders, extend loans to borrowers who wish to purchase a single-family detached/semi-detached/apartment style houses. While

⁹ According to the Banks Association of Turkey, the market value of the mortgages was approximately 20.67 billion TRY as of September 2007

¹⁰ Mortgage debt outstanding was a mere 0.224% of the GDP in 2003 (www.tba.gov.tr)

¹¹ At the end of September 2007 the total value of mortgages was 23,031,949 Thousand TL. Deposit banks originated 23,002,309 Thousand TL, which makes 99.87% of the overall mortgage loans granted. The remaining 0.13% of the mortgages was originated by Investment and development banks (www.tbb.ogov.tr).

the lenders generally rely on the appraisal company's determination of the eligibility of the property subject to transaction, some lenders have their own staff to do the appraisal work. Currently, Turkish banks offer a variety of mortgage products including Turkish Lira (TRY)- denominated fixed-rate, adjustable rate, and graduated payment mortgages and US Dollar-, and, Euro-denominated mortgages. The most popular mortgage products are fixed rate mortgages (FRMs) with 60 to 120-month contract maturity, and the prevailing mortgage coupon rates range from 1.2 to and 1.53 percent in September, 2007.

As the FRMs are popular mortgage products over the past few years, this paper concentrates on pricing the typical constant-payment mortgages, or fixed-rate mortgages based on structural option pricing models. In order to determine the basic FRM contract to price in our study, we collect information on the FRM contract details of eight deposit banks with the largest mortgage portfolios. Namely; Oyak Bank, Vakif Bank, Akbank, Is Bank, HSBC Bank, Finans Bank, Yapi Kredi Bank, and Garanti Bank. More specifically, we collect data for the contract maturity, coupon rate, Loan-to-Value (LTV) ratio, arrangement fee, prepayment penalty, and the available insurance policies of these deposit banks. It is important to note that market value of these banks' mortgage portfolio consists of 91.2% of the overall mortgage portfolio in Turkey as of September, 2007.

Table 2 illustrates that, with the exception of Finansbank and Yapi Kredi Bank, the maximum Loan-to-Value (LTV) ratio is 75% for the FRMs. Finansbank and Yapi Kredi Bank originate FRMs with a maximum LTV of 95% to 100%. The amount of upfront arrangement fee significantly varies among the banks. While Finansbank does not charge any arrangement fee, other banks may charge 1% to 5% of the loan amount as the arrangement and service fee. All the banks except for Yapi Kredi Bank charge a prepayment penalty of 2% of the outstanding loan balance at the time of prepayment.

In terms of insurance policies, hazard and earthquake insurance is required by all lenders. This has been a requirement since 1999 and is provided by Turkish Catastrophe Insurance Pool (TCIP). TCIP takes the first loss position and private insurers take the second loss position. The annual premiums due to TCIP are collected by private insurance companies from the home owners and then forwarded to TCIP. Earthquake insurance rates are not fixed. They are determined according to the type of dwelling and the earthquake zone it is in. Most of the lenders also require a life insurance policy that would remain in effect over the term of the mortgage. Such a policy

would help to cover the full repayment of the loan in the event of borrower's death. Borrowers are required to renew their policy annually (at least during the term of the loan). Mortgage default insurance products are not prevalent in Turkey.¹² The existing sectoral studies suggest that there is no urgent need for mortgage insurance as this will increase the cost of funds for borrowers.

4. Option Pricing Model (Structural Approach) for the Valuation of Fixed Rate Mortgage (FRM) Contracts

It is widely accepted that a successful way of pricing mortgages is to view them as ordinary debt instruments with specific options attached to them. Default in the mortgage contract can be viewed as a put option since by defaulting the borrower disposes of the housing asset. In other words, the borrower sells his housing property back to the lender in exchange for eliminating the mortgage obligation. The default option to terminate the mortgage contract fits into a European option framework because no rational borrower would ever choose to default until a payment is due. Prepayment can be considered as an American-style call option, in which the borrower has the right to gain the house at any time by paying off the mortgage loan. The borrower exchanges the unpaid balance on debt instrument for a release from further obligation. Thus, the analogy between a mortgage on a property and an option on a stock is quite close.

Pricing these options and also determining when a borrower exercises either option require specifying the underlying state variables and parameters that determine the value of the contract, and then deducing the decision rule that maximizes borrower wealth. The structural approach assumes that uncertainty about the returns from a mortgage can be summarized by two state variables: the value of the mortgaged housing property, H , whose dynamics follow a lognormal diffusion process (Equation 1) and the instantaneous risk-free interest rate, r , which evolves according to a mean-reverting square root diffusion process, Cox, Ingersoll and Ross, 1985b.

$$\frac{dH}{H} = (\mu - s)dt + \sigma_H dz_H \quad (1)$$

¹² Recently, a number of banks (Finansbank, İş Bank and Vakıfbank) have started to ask for mortgage payment protection insurance from the borrowers in the case of being unemployed or injured. The insurance policy generally pays up to six monthly payments to the bank. However, this product is different from mortgage default insurance that is widely used in the US and UK mortgage markets.

The return to owning the housing property consists both of price appreciation and of a service flow. Since the householder receives benefit from living in the house, the term s is included to denote the constant rate of service flow, or value of implicit rent, from the house. The instantaneous average rate of house price appreciation is denoted by μ , and σ_H represents the volatility of disturbances in actual house price appreciation around the trend rate $(\mu - s)$, and z_H is the standardized Wiener process that drives the uncertainty in house prices.

The stochastic process for the instantaneous default-free nominal interest rate, which follows the Cox-Ingersoll-Ross (1985b) model, known as CIR model, can be written as

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma_r \sqrt{r} dz_r \quad (2)$$

where θ represents the long-term mean value for the interest rate r , and κ is the speed of adjustment in the mean reverting process. The standard deviation of the interest rate disturbance is denoted by σ_r , and z_r is the standardized Wiener process.

The unexpected changes in the value of the housing property are assumed to be correlated with unanticipated changes in the instantaneous risk free interest rate, $dz_H(t) dz_r(t) = \rho dt$ where ρ denotes the instantaneous correlation coefficient. With stochastic processes specified by Equations (1) and (2), the fundamental partial differential equation (PDE) for the valuation of mortgages as a function of time and of the stochastic variables of housing price and the interest rate takes the form¹³

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} H^2 \sigma_H^2 \frac{\partial^2 V}{\partial H^2} + \rho H \sqrt{r} \sigma_H \sigma_r \frac{\partial^2 V}{\partial H \partial r} + \frac{1}{2} r \sigma_r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \kappa(\theta - r) \frac{\delta V}{\delta r} \\ & + (r - s) H \frac{\delta V}{\delta H} + \frac{\delta V}{\delta t} - rV = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

where V represents the mortgage value. Equation (3) implies that with a continuous time, a standard arbitrage argument is sufficient to derive an equilibrium condition for the value of mortgage (a second order partial differential equation) such that the value of the mortgage equals the risk-adjusted expected present value of its net cash flows.

The tendency to price derivative assets, such as mortgage on a property, and to relax the strongest assumptions in order to make the models approach to the reality

¹³ The derivation of fundamental partial differential equation follows from standard arguments in finance. See Cox, Ingersoll, and Ross 1985a, 1985b; Epperson *et al.* 1985, and Kau *et al.* 1992, 1993, 1995.

leads to the development of valuation frameworks of enlarged complexity for which no closed-form solutions are available. Thus, in many complex but realistic problems the analyst must resort to other methods to approximate the value of the asset. Three basic methods are; the Monte Carlo method (forward-pricing method) advocated by Boyle (1977), and finite difference approximation to the differential equation (backward-pricing method) suggested by Schwartz (1977) and employed extensively by Brennan and Schwartz (1976, 1977, and 1978), and lattice (or tree) approach suggested by Cox et al. (1979) and extended by Rendleman and Bartter (1979), Boyle (1986, 1988), and Hull and White (1988). As a result, there is considerable amount of research employing numerical methods to approximate solutions of the valuation of contingent contracts, when analytic solutions do not exist.

Despite the recent advances in forward pricing methods for pricing American options, backward pricing method is well established, and so has been used more extensively. Although it is computationally more complex by including dynamic programming, many researchers adopt backward pricing approach as the appropriate procedure to valuing mortgages with embedded default and prepayment options. Kierkegaard (1967) said that to understand life we must look backward but that we are doomed to live life forward. Much the same is true of mortgages. While time undoubtedly marches forward, to value a mortgage with termination, we must begin at the end and work back. When borrowers at a point of time consider whether to terminate a mortgage, they look toward future values, but because we are working backward, we will have the needed values available when we reach that point (Kau and Keenan, 1995).

Given the specific details of the contract, the values of the financial assets embedded in a mortgage (default option, prepayment option, insurance product) are known at the expiry. Using appropriately small time steps, equation (3) can be used to work backwards from the final mortgage payment, calculating the asset values sequentially to the previous mortgage payment, then using that new set of terminal conditions to work back to a still earlier payment until eventually the origination of the contract is reached (Azevedo-Pereira et al. (2002, 2003).

4.1. Components of the Mortgage Contract

The value of a mortgage to the borrower is composed not only of the present value of promised future monthly payments to the lender but also of options to prepay or to default. These options are valuable to the borrower and reduce the absolute value of

the outstanding mortgage. At some point in time, t , the borrower's joint option value, J , is equal to the summation of the value of call option to prepay, C , and the value of default option, D .

$$J(H, r, t) = C(H, r, t) + D(H, r, t) \quad (4)$$

The value of the mortgage contract to borrower is given by equation (5):

$$\begin{aligned} V_B(H, r, t) &= A(r, t) - C(H, r, t) - D(H, r, t) \\ &= A(r, t) - J(H, r, t) \end{aligned} \quad (5)$$

where $A(r, t)$ is the present value of remaining mortgage payments. If the lender (bank) has mortgage default insurance, and circumstances arise in which a rational borrower chooses to default, then mortgage default insurance product only benefits the lender. The value of the contract for the lender, therefore, is the sum of its value to the borrower and the value of the mortgage insurance.

$$V_L(H, r, t) = V_B(H, r, t) + I(H, r, t) \quad (6)$$

where; $I(H, r, t)$ = the value of the mortgage default insurance at time t .

In a typical constant payment, fixed rate mortgage contract, the value of each monthly payment, MP , is determined in order to allow the principal to be paid in full by the end of the contract. That is;

$$MP = \frac{\left(\frac{c}{12}\right) \left[1 + \left(\frac{c}{12}\right)\right]^n OB(0)}{\left[1 + \left(\frac{c}{12}\right)\right]^n - 1} \quad (7)$$

where $OB(0)$ represents the amount of debt at the origination of the loan, and c is the annual mortgage coupon (interest) rate. The outstanding loan balance after each payment date, $OB(t)$, is given by the following equation:

$$OB(t) = \frac{\left[1 + \left(\frac{c}{12}\right)\right]^n - \left[1 + \left(\frac{c}{12}\right)\right]^t}{\left[1 + \left(\frac{c}{12}\right)\right]^n - 1} OB(0) \quad (8)$$

At payment dates, a distinction will be made between the value of an asset immediately before and immediately after each payment. In line with the literature we use the following notation:

$F^-(H, r, t)$ = Value of the asset F immediately before a payment is made;

$F^+(H,r,t)$ = Value of the asset F immediately after a payment is made.

In backward pricing methods, the valuation of the mortgage begins at the maturity of the mortgage. At the maturity, the terminal condition requires that the value of remaining payments must be equal to the final monthly payment due, MP.

$$A^-(r,t) = MP \quad \text{for } t = \eta(n) \quad (9)$$

where n = life of the mortgage in months. Moving backwards in time, as each monthly payment date is reached, the borrower's debt, A, changes immediately by the amount MP. This leads to solution of equation (3) by a finite difference method, starting with the terminal condition at maturity, working backwards in time until the next monthly payment date is reached. Then, a new boundary condition, equation (10), is applied and the backwards process is continued until valuation has been completed, at the origination time of the mortgage contract.

$$A^-(r,t) = A^+(r,t) + MP \quad \text{for } t = \eta(1), \dots, \eta(n-1) \quad (10)$$

During this valuation process, we also apply boundary conditions for the options held by the borrower. The value of default option depends directly on the house price. If the house price is different from the value of the remaining payments, the financially rational borrower either does nothing, or sells, or defaults and gives up the house to the lender if that proves to be the most advantageous solution from a financial point of view. The value of the prepayment option depends on the prevailing term structure of interest rates but not directly on the house price. However, there is an indirect relationship, since the exercise of the option to default automatically causes the prepayment option to expire worthless. Thus, the two options interact and cannot be separately valued and added. At expiry of the mortgage, the borrower holds the house and has an obligation to make the last mortgage payment but she also has a put option on the house $D(H, w, t)$ allowing her to default and give up the house if she wishes. Therefore, the position of the borrower at maturity is, $H + D(H, w, t) - MP$ with the following mortgage value:

$$V_B^-(H, r, t) = \min(MP, H) \quad \text{for } t = \eta(n) \quad (11)$$

Similarly, at any other payment date, t, the value of the mortgage to the borrower is given in equation (12).

$$V_B^-(H, r, t) = \min \left[\left(V_B^+(H, r, t) + MP \right), H \right] \quad \text{for } t = \eta(1), \dots, \eta(n-1) \quad (12)$$

If the borrower prepays the mortgage, the amount to be paid is calculated from the outstanding balance and the accrued interest since the most recent scheduled payment. In Turkey, similar to the UK mortgage market, there is an additional penalty payment required in the terms of the fixed-rate mortgage contracts. Since the Turkish banks, in general, charge 2% of the loan balance as the prepayment penalty, in this paper penalty is modeled as a percentage of the outstanding balance plus accrued interest at the time of early termination (See Azevedo-Peraira, 2002 and 2003).

$$TD_t = \left\{ (1 + \pi) \left[1 + c(t - \eta(i)) \right] OB(i) \right\} \quad \text{for } \eta(i) \leq t \leq \eta(i+1) \quad (13)$$

where TD(t) is the total outstanding debt, Π represents the early termination penalty charged by the lender and c is the fixed coupon rate.

The default decision is assumed not to be simply triggered if the present value of the remaining payments exceeds the current market value of the house, but rather if the value of the mortgage to the borrower including options, exceeds the house value. Thus, a rational borrower defaults if the following condition is arises:

$$A(r, t) - [D(H, r, t) + C(H, r, t)] > H \quad (14)$$

At the maturity of the mortgage, when the borrower decides on whether or not to make the final mortgage payment, the default option will be worthless if the house is worth more than the final payment and otherwise equal to the difference between the two. That is;

$$D^-(H, r, t) = \max[0, (MP - H)] \quad \text{for } t = \eta(n) \quad (15)$$

On monthly payment dates other than the maturity, the default option value is adjusted for the difference between value of the remaining payments and the house price when there is default, and remains unchanged by the payment under conditions of no default.

$$D^-(H, r, t) = \begin{cases} D^+(H, r, t) & \text{if } V_B^-(H, r, t) = V_B^+(H, r, t) + MP \quad (\text{no default}) \\ A^-(r, t) - H & \text{if } V_B^-(H, r, t) \leq H \quad (\text{default}) \quad \text{for } t = \eta(1), \dots, \eta(n-1) \end{cases} \quad (16)$$

The terminal condition for the prepayment option at maturity is unimportant. This is because exercising the prepayment option cannot have any value for the borrower. In addition, at any other payment date, prepayment can only have value in the absence of default and so the terminal conditions for the prepayment option are as follows:

$$\begin{aligned}
C^-(H, r, t) = & \\
C^+(H, r, t) & \quad \text{if } V_B^-(H, r, t) = V_B^+(H, r, t) + MP \quad (\text{no default}) \\
0 & \quad \text{if } V_B^-(H, r, t) = H \quad (\text{default}) \quad \text{for } t = \eta(1), \dots, \eta(n-1) \quad (17)
\end{aligned}$$

Alternatively, prepayment option value can be calculated as; $C = A - V_B - D$. Lastly, we model the mortgage default insurance as another component of the FRM contract. We basically follow the US mortgage insurance system in order to evaluate the insurance product as another financial derivative asset. At the contract maturity, the value of the mortgage insurance is given in equation (18).

$$I^-(H, r, t) = \max \left[0, \min (MP - H, \phi MP) \right] \quad (18)$$

If the borrower chooses to default on the mortgage and does not repay the last monthly payment, mortgage insurance company pays to the lender either the difference between the house price and the last monthly payment ($MP-H$) or a specific proportion (ϕ) of the outstanding loan balance. In general, insurance companies pay the minimum amount of these two values. Thus, in the US system, the insurance coverage seems to be a simple pre-determined percentage of the value of the outstanding debt (see Kau et al., 1993). The US insurance companies have, in general, a minimum insurance coverage of 25% of the outstanding balance.

At other payment dates during the contract term, the value of mortgage insurance is given in equation (19).

$$I^-(H, r, t) = \begin{cases} I^+(H, r, t) & \text{if } V_B^-(H, r, t) = V_B^+(H, r, t) + MP \quad (\text{no default}) \\ \max \left[0, \min (TD^-(t) - H, \phi TD^-(t)) \right] & \text{if } V_B^-(H, r, t) = H \quad (\text{default}) \end{cases}$$

for $t = \eta(1), \dots, \eta(n-1)$ (19)

where

$TD(t)$ = the total outstanding debt at time t

ϕ = minimum insurance coverage ratio – generally 25% in the US (see Kau et al. 1993, Journal of Business, pp: 595-618).

Although the Turkish banks do not have a mortgage default insurance product, they usually ask borrowers to get a life insurance before granting any mortgage. Banks provide life insurance to the borrowers either by increasing the loan amount by the insurance expense and originate a higher LTV mortgage or by taking part of the loan as an insurance expense at the loan origination. The latter increases the up-front

arrangement fee and provides a higher yield to the bank.¹⁴ In the next section, we analyze the effect of life insurance policy on the lender's position within 1% to 5% arrangement fee applications. We find that the banks have higher yields or offer lower mortgage interest rates by charging higher arrangement fees at the loan origination.

4.2. No Arbitrage Condition

Mortgage coupon rates and contract terms vary widely, especially in volatile economic environments, over time. In particular, the economic conditions change continuously and contract specifications are also subject to frequent readjustments. Following the extant literature, equilibrium framework proposed in this paper claims that a contract can only be acceptable if it represents a fair deal. It is necessary to ensure that the borrower is not able to make an instantaneous profit by prepaying the loan and, similarly that the contract is not structured in such a way that allows the lender to make any immediate profit. This is called "no arbitrage" condition.

The values of the two state variables in the model, $r(0)$ and $H(0)$, are known at the origination of the mortgage; therefore, the determination of an equilibrium coupon rate is an iterative exercise in which, starting with the initial values for the state variables and the functional form specification for the contract, a search is done to find a coupon rate capable of allowing the mortgage contract to meet the condition of no arbitrage (Azevedo, et al. 2002, 2003). At the origination of the mortgage, the equilibrium condition which avoids arbitrage is shown in equation (20), where ξ represents arrangement fee, Π gives early termination fee, and L is the amount of the loan. Following Azevedo-Pereira et al. (2002, 2003), in order to find the equilibrium coupon rate, a secant iteration technique was used,

$$V_B(H(0), r(0), t(0), c, \pi) + I(H(0), r(0), t(0), c, \pi) = (1 - \xi)L \quad (20-a)$$

or

$$V_B(c, \pi) + I(c, \pi) - (1 - \xi)L = 0 \quad (20-b)$$

¹⁴ The yield on a mortgage will not always equal its interest rate. Suppose the lender charges the borrower 1% of the 100,000 TL loan amount up front, just to grant the loan. With 1% origination fee (as arrangement fee or life insurance expense), the lender will actually disburse to the borrower only 99,000 TL, even though the contractual principal and the initial outstanding loan balance is 100,000 TL. Thus, the effect of the origination fee is to increase the mortgage yield to maturity over the stated contract interest rate in the loan (See Geltner and Miller, 2001; p: 420).

5. Results of the Numerical Analysis

For the numerical analysis of FRM valuation model, we specify the basic set of economic parameters and the contract provisions as presented in Table 3. A 10-year FRM contract originated for a 100,000 TRY house is evaluated in our analysis. We present numerical results for two contract specifications. First, a mortgage with an arrangement fee but no early termination penalty, secondly, one with an arrangement fee and an early termination penalty. We use daily 3-Month Turkish Treasury-Bill yields obtained from the secondary market to estimate the parameters of the CIR process. Data set covers the period between February, 2002 and November, 2007 (See Appendix for the estimation of CIR process for the Turkish economy). We calculate the historical volatility of house price using the monthly House Price Index published by the Turkish Statistics Institute between January 2002 and December 2007. Finally, the spot rate is 15% for the base case economic environment.

Figures 1 to 5 demonstrate the mortgage component values at the origination of contracts with early termination penalty. That is, the value of remaining mortgage payments, A , value of the option to default on the mortgage, D , value of the option to prepay the loan, C , and the total effect of A , D , and C , which gives the entire contract value V at the origination of the loan. The main reason for presenting these 3-dimensional figures is to demonstrate both the smoothness of the numerical solution over the grid and economic consistency of the results.

The value of remaining mortgage payments, A , depends only on the interest rate (discount rate), r , therefore values parallel to the H-axis are constant (see Figure 1). As would be expected, the value of remaining mortgage payments shows an inverse relationship with the interest rate or the discount rate.

Figure 2 shows the value of the default option, D . The relationship between the level of house price, H and the value of the mortgage contract, V , is the greatest influence on the value of default option. The value of D is positive in almost all of the subset of the state space where $H < H(0)$. As the increase in interest rate, r leads to decreases in the value of future payments, A and the mortgage value V , the value of default option, whenever positive, tends to be inversely related to interest rate. The combined effect of low house prices with low level of interest rate result in extremely high default value for the FRM contracts as seen from Figure 2.

It is worthwhile to note that the US “sub-prime mortgage crisis” began with high default rates on sub-prime and adjustable-rate mortgages (ARMs) in 2005-2006.

Mortgage defaults and foreclosure activity increased dramatically as the interest rates began to rise and ARM interest rates reset higher, and as house prices dropped continuously, after a long-term rising trend, in many parts of the US. Since most of the defaulted mortgages were ARMs, low house prices in combination with high interest rates resulted in significant amount of defaults. As we evaluate the default option for the FRM contracts in this paper, low house prices combined with low market interest rates result in extremely high default values for the borrowers.

Figure 3 presents the value of the mortgage default insurance, which is directly related to the evolution of the default option. At low house price levels, borrowers tend to default on their mortgages and the insurance policy is highly expected to be exercised. The value of the prepayment option, C , which primarily depends on the level of interest rate, is illustrated in Figure 4. Prepayment option has high values for low levels of interest rate, r , coinciding with high levels of house prices. This is because at low house prices borrowers tend to default on their loans and, of course, a defaulted mortgage cannot be prepaid.

Lastly, the value of mortgage contract, V , is a complex function of the remaining mortgage payments, A , the default option, D , and the prepayment option, C , is exhibited in Figure 5. At low levels of house prices, it is so valuable for the borrower to default on his mortgage, and high values for the default option reduce the value of the mortgage contract. At higher levels of house prices, prepayment option seems to be the significant option. Changes in interest rates affect both A and C inversely but these two components produce opposite effects on the value of the contract, V . For instance, increases in A increases the value of the contract, V , whereas increases in C reduce the value of the contract. Since the value of the prepayment option cannot be bigger than A , the relationship between interest rates and the value of the mortgage contract tends to be dominated by the effect of the interest rate on A . An exception occurs when the combination of low interest rates and high house prices creates an environment in which it becomes preferable for the borrower to prepay the loan. This condition matches with the top section of the graph presented in Figure 5.

5.1. Equilibrium Mortgage Coupon Rates for Different Contract Specifications: No Arbitrage Condition

In this section, we analyze the equilibrium mortgage coupon rates for a typical fixed-rate mortgage (details given in Table 3) with early termination penalty of 2% by

using the no arbitrage condition. We calculate the equilibrium coupon rates for 75%, 95%, and 100% LTV-ratio mortgage contracts separately. For each LTV-ratio, first, we analyze a FRM contract in which the arrangement fee and mortgage default insurance do not exist. Under these circumstances, no arbitrage profit condition can be written by the following equation.

$$V_B(c) - L = 0 \quad (21-a)$$

In order for this contract to be feasible, it is necessary that the value of the mortgage to the borrower, V_B , is equal to the loan amount at the mortgage origination, L . Any coupon rate, c , that corresponds to this no arbitrage condition is the equilibrium coupon rate that is capable of generating fair deal for both borrower and lender. Next, we analyze the value of lender's position with the inclusion of arrangement fees. No arbitrage condition can be modified as follows:

$$V_B(c) - (1 - \xi)L = 0 \quad (21-b)$$

Finally, equation (21-c) illustrates the equilibrium coupon rates for the full mortgage contract with arrangement fee and mortgage default insurance.

$$V_B(c) - (1 - \xi)L + I = 0 \quad (21-c)$$

Figure 6 illustrates the equilibrium mortgage coupon rates for a 75% LTV mortgages under three different contract specifications described in Equations 21-a, 21-b, and 21-c. For a representative lender who does not charge any arrangement fee and does not have a mortgage default policy, $[V_B(c) - L]$, the equilibrium coupon rate is approximately 20% per annum. When we compare the value of lender's position who originates FRM contract with 2% arrangement fee, $[V_B - (1 - \xi)L]$ with another lender who originates FRM contract with 2% arrangement fee and mortgage default insurance, $[V_B - (1 - \xi)L + I]$, we see that equilibrium coupon rates for both of the lenders are approximately 19.52% per annum. This result implies that 75% LTV mortgages do not have high default risk and, correspondingly, adding a mortgage insurance policy to the contract does not add any value to the lender's position. Thus, our results show that it is not beneficial for the lenders to have mortgage default insurance for the 75% LTV loans.

Figure 7 exhibits the equilibrium mortgage coupon rates for the 95% LTV mortgages. Although most of the banks in Turkey originate 75% LTV mortgages, Finansbank and Yapi Kredi Bank originate 95% and even 100% LTV mortgages (see Table 2). The equilibrium coupon rate for a typical FRM without an arrangement fee and mortgage default insurance, $[V_B(c) - L]$, is 20%. Next, we compare the equilibrium coupon

rate for a FRM contract with 2% arrangement fee but without mortgage insurance, $[V_B - (1 - \xi)L]$ and the full mortgage contract with 2% arrangement fee and mortgage default insurance, $[V_B - (1 - \xi)L + I]$. We find that while equilibrium coupon rate for the lender with a mortgage insurance policy ranges between 19% and 19.44%, it ranges from 19.44% to 20% for the lender without default insurance policy. This result indicates that the lenders with mortgage default insurance are able to offer lower coupon rates for high LTV mortgages. More specifically, it is beneficial for the lenders to have mortgage default insurance, especially for the high loan-to-value mortgages.

Finally, Figure 8 shows the value of lender's position and the corresponding equilibrium mortgage coupon rates for a 100% LTV FRM contract. The important result is that there is no equilibrium coupon rate for the lender without arrangement fee and default insurance policy, $[V_B - L]$. It is noteworthy that if the loan-to-value ratio is 100%, attainment of equilibrium combinations would be impossible. On the other hand, if the lender has both 2% arrangement fee and mortgage insurance policy, $[V_B - (1 - \xi)L + I]$, the equilibrium coupon rate is 19.28% per annum.

All these contractual features, such as the prepayment penalty, arrangement fee, and mortgage default insurance, generate a benefit to the lender and, consequently, the equilibrium coupon rates are reached at slightly lower levels of the coupon rate. Table 4 summarizes the trade-off between arrangement fee, prepayment penalty and the equilibrium coupon rate. It is obvious that as the lender charges higher prepayment penalty and arrangement fee, it can offer lower mortgage coupon rates.

It is important to note that, some Turkish banks ask borrowers to get a life insurance before granting any mortgage. Banks usually provide this insurance to the borrowers by taking part of the loan as an insurance expense. Hence, they do not allow the borrowers to use the full amount of the loan. By increasing the origination fee further for covering the life insurance expenses, the banks may either increase the yield earned from the loan or allow lower regular loan payments (lower interest rate) for the same yield. Hence, the arbitrage opportunity observed in the Turkish banks may be attributable to higher arrangement fees with life insurance products.¹⁵

5.2. The Effect of Changes in the Economic Environment

¹⁵ We thank the anonymous referee who suggested us to discuss the Turkish bank's higher yield (or lower mortgage interest rate) may be attributable to life insurance product.

As noted earlier, the economic environment is characterized in the present work through the set of parameters given in Table 3. In this section we present an analysis of the effects induced by changes in the base case parameters; particularly, the changes in house price volatility, interest rate volatility, and spot interest rate.

Table 5 presents the effect of house price volatility on the value of mortgage components for a 95% LTV mortgage with 2% early prepayment penalty. As the house price volatility increases from 3% to 15%, the value of default option rises significantly. Since the value of mortgage default insurance increases correspondingly, the value of mortgage contract for the lender, V , increases as well. The effect of interest rate volatility on the value of mortgage components for a 95% LTV mortgage with 2% early prepayment penalty is illustrated in Table 6. Interest rate volatility directly affects the value of the prepayment option. As the volatility increases, borrowers tend to exercise their prepayment option, consequently the value of the mortgage for the lender declines significantly.

Table 7A and Table 7B show the effects induced by different types of yield curves in terms of the value of the mortgage-related assets for 95% LTV and 75% LTV fixed-rate mortgages, respectively. By changing the initial level assumed by the spot interest rate, $r(0)$, while holding constant the steady state spot interest rates, θ , we capture different yield curve shapes. According to our numerical results, there is a direct relationship between the evolution of the level of the initial spot rate and the coupon rate for a fixed θ . In fact, higher levels of spot interest rates lead to higher equilibrium coupon rates.

A further important highlight is the effect of increases in interest rate volatility, σ_r , for different slopes of the yield curve. The increase in the interest rate volatility directly affects the evolution of default and, especially, of prepayment. Table 7A shows that as the interest rate volatility increases from 12% to 15%, the value of default and, especially value of prepayment option increases significantly for 95% LTV mortgages. On the other hand, as seen from Table 7B, interest rate volatility is only effective on prepayment but not the default option for 75% LTV mortgages. For the 95% LTV mortgages, increases both in default and prepayment option values contribute to the reduction in the value of the mortgage to the borrower, V_B . However, value of insurance (I) tends to move in a direction opposite to the movement in σ_r . Consequently, the overall result in terms of the evolution of mortgage value to the borrower, V_B (the relationship between increases in A , D , and C) and the evolution in I . Both tend to decrease with increases in σ_r . Under these

circumstances in order to reach an equilibrium it is necessary to increase the coupon rate and consequently the value of A to compensate for those declines in I and increases in C+D.

Lastly, we examine the joint effect generated by increases in house price volatility and changes in the slope of the yield curve. Given that the effects induced by increases in house price volatility on the evolution of default and prepayment are of opposite nature and tend partially compensate each other, the influence of house price volatility in terms of the equilibrium coupon rates is moderate. The overall effect of house price volatility seems to be translated into a slight reduction of the equilibrium coupon rate, for all the yield curves studied in the present work (see Table 7A and 7B).

5.3. Equilibrium Mortgage Coupon Rates and the Prevailing Coupon Rates in Turkey: September 2007

This section mainly examines if Turkish economy ready for originating long-term FRMs? More specifically, we answer the question of whether or not the currently observed FRM coupon rates represent a fair transaction between the banks and the borrowers in Turkey?

In section 5.2, we have calculated the equilibrium coupon rates for a typical 10-year FRM contract with 75%, 95%, and 100% LTV ratios separately. As almost every bank in Turkey charges 2% prepayment penalty for the FRM contracts, we evaluate the variation of equilibrium coupon rates by taking into account the arrangement fee and the mortgage default insurance policy. As a next step, we compare the monthly equilibrium coupon rates with the prevailing mortgage coupon rates in September 2007.

For a representative 10-year FRM with 2% arrangement fee but without mortgage default insurance, we find that the equilibrium coupon rates range between 1.497% and 1.531% for 75% LTV mortgages, and between 1.531% and 1.601% for 100% LTV mortgages. However, the prevailing mortgage coupon rates in September 2007 range between 1.29% for Finansbank and 1.53% for Is Bank. This result shows that, except for Is Bank, all other banks offer mortgage interest rates that are significantly below the equilibrium coupon rates, involving arbitrage profit for the borrowers. In other words, we claim that these contracts do not represent a fair deal between the lenders and borrowers in Turkey. In fact, due to significantly low mortgage coupon rates, large numbers of borrowers took out mortgages throughout this period. The value of mortgage

loans was approximately 20.67 billion TRY as of September 2007, which was a remarkably high figure since 2000.

Although the prevailing mortgage coupon rates are below the equilibrium rates, 20% to 25% mortgage interest rates per annum are extremely high for establishing a well-functioning primary mortgage market in any economy. In comparison with other developing countries, such as India (9.25%-13.25% per annum), Mexico (12% per annum), Korea (6.29% per annum), Bulgaria (6% per annum), etc, Turkish banks offer significantly high mortgage interest rates, which tremendously increase the cost of mortgage financing for the borrowers.

Furthermore, we examine the FRM mortgage coupon rates and contract maturities of our sample banks over the last one-year time period, from September 2007 to November 2008. We observe that every bank in our sample significantly increased their coupon rates and most of the banks drastically reduced their contract maturities. In particular, observed monthly coupon rates in November 2008 range between 1.79% (Oyak Bank) and 2.40% (HSBC Bank). Is Bank reduced its contract maturity from 120 months to 60 months. Akbank, Yapi Kredi Bank and Vakif Bank, with 240-month contract maturities, currently originate FRM mortgages with a maturity of up to 60-120 months. Similarly, HSBC and Finansbank, with 360-month contract maturities, currently originate FRM mortgages with a maturity of up to 120-180 months.

Since the mortgage coupon rates and contract maturities have changed drastically over a very short time period, from September 2007 to November 2008, we argue that the effects of the global financial crisis are started to be felt in Turkish mortgage market. The primary mortgage market in Turkey is still in its infancy stage. Turkish banks, including the private, public and foreign deposit banks, have constructed their own mortgage portfolios, without the sub-prime loans.¹⁶ Borrowers, who take out mortgages, are not low income citizens. They are not likely to default on their mortgages. However, the global financial crisis is likely to exert indirect and powerful negative effects on Turkey as it has been doing indiscriminately so far on several developing and emerging economies.

¹⁶ Recently, the chairman of the Capital Markets Board commented that there was not any problem in Turkey's mortgage markets since there were no sub-prime mortgages in Turkey.

6. Concluding Remarks

In this paper we use traditional option-pricing model to evaluate the current 10-year fixed rate mortgage (FRM) contracts with embedded default and prepayment options in Turkey. In fact, theoretical and empirical research on mortgage design and pricing has been widely conducted on the fixed and adjustable rate mortgages used in the United States and United Kingdom. One of the key questions for any aspect of research on emerging markets is whether the models and theories put forth and tested several times in developed financial markets also describe the realities observed in emerging markets. To our knowledge, this paper is the very first attempt to use a structural approach (option pricing model) to price the FRM contracts in an emerging economy with its different and unique dynamics.

Due to the recent improvements in Turkish economy, the current government in collaboration with the Capital Market Board initiated a legal framework to contract, for the first time ever, long-term fixed rate mortgages. As of December 2006, the value of mortgage debt in Turkey was approximately 12.24 € billion, which made it the second largest mortgage market among the new members and candidate members of the EU. Currently, the Turkish banks offer a variety of mortgage products, including Turkish Lira (TRY) - denominated fixed-rate, adjustable rate, and graduated payment mortgages and US Dollar-, and, Euro-denominated mortgages.

We employ explicit finite difference methodology as the appropriate procedure to valuing mortgages with embedded default and prepayment options. For each component of a typical mortgage contract, including the promised future monthly payments, default option, prepayment option, and mortgage default insurance, we present numerical results in 3-dimensional figures. We demonstrate that the numerical solution is smooth over the grid and there is economic consistency of the results.

In order to understand if option pricing models and theories put forth and tested several times in developed financial markets are also successful in describing the realities observed in Turkish mortgage market, we attempt to answer the following questions. 1. Do the currently observed FRM coupon rates represent a fair transaction between the banks and the borrowers in Turkey? 2. What will be the value of bank's (lender's) position if they have mortgage default insurance policy, especially for the high loan-to-value (LTV) housing loans?

Our results show that, except for Is Bank, all other banks offer mortgage interest rates that are significantly below the equilibrium coupon rates, involving arbitrage profit

for the borrowers. In other words, we claim that these contracts do not represent a fair deal between the lenders and borrowers in Turkey. We also conclude that even if the prevailing mortgage coupon rates are below the equilibrium rates, 20%-25% mortgage interest rates per annum are extremely high for establishing a well-functioning primary mortgage market in any economy. In comparison with other developing countries, such as India (9.25%-13.25% per annum), Mexico (12% per annum), Korea (6.29% per annum), Bulgaria (6% per annum), etc, Turkish banks offer significantly high mortgage interest rates, which tremendously increase the cost of mortgage financing for the borrowers.

Most of the banks in Turkey originate maximum 75% LTV mortgages. We find that 75% LTV mortgages do not have high default risk and, correspondingly, adding a mortgage insurance policy to the contract does not add any value to the lender's position. Thus, it is not beneficial for the lenders to have mortgage default insurance for the 75% LTV loans. On the other hand, our findings show that it is beneficial for the lenders to have mortgage default insurance, especially for the high LTV ratio mortgages.

Finally, we argue that the effects of the global financial crisis are started to be felt in Turkish mortgage market as the banks have increased their mortgage coupon rates and shortened the contract maturities drastically over a very short time period, from September 2007 to November 2008. The primary mortgage market in Turkey is still in its infancy stage. Turkish banks, including the private, public and foreign deposit banks, have constructed their own mortgage portfolios, without the sub-prime loans. Borrowers, who take out mortgages, are not low income citizens. They are not likely to default on their mortgages. However, the global financial crisis is likely to exert indirect and powerful negative effects on Turkey as it has been doing indiscriminately so far on several developing and emerging economies.

Table 1: Mortgage Debt-to-GDP (%), End of 2006

	Value of Mortgage Debt, € million	Growth in Mortgage Debt	Residential Debt to GDP Ratio	Per Capita Mortgage Debt, € thousand
Bulgaria (2007)	1,745	73.5%	7.0%	0.2
Czech Republic (2004)	8,055	33.9%	7.1%	0.8
Estonia (2004)	4,278	63.4%	32.7%	3.2
Cyprus (2004)	3,077	43.5%	21.2%	4.0
Latvia (2004)	4,680	86.5%	28.9%	2.0
Lithuania (2004)	2,997	32.1%	12.6%	0.9
Hungary (2004)	10,215	11.0%	11.4%	1.0
Poland (2004)	22,514	53.7%	8.3%	0.6
Romania (2007)	2,276	57.2%	2.3%	0.1
Slovenia (2004)	1,956	43.0%	6.6%	1.0
Slovakia (2004)	4,209	36.7%	9.6%	0.8
Croatia (candidate)	5,219	37.2%	15.3%	1.2
Serbia (candidate)	650	111.7%	2.9%	0.1
Turkey	12,237	65.7%	3.8%	0.2
Ukraine (candidate)	4,301	157.6%	2.6%	0.1

Source: Eurostat, National Central Banks, EMF

Table 2: Contract Details for FRMs Originated by the Largest Deposit Banks in Turkey (September, 2007)

Bank	Contract maturity (months)	Coupon rate (%)	LTV Ratio	Up-front arrangement fee	Prepayment penalty	Appraisal of the property	Insurance services
Finans Bank	60 – 360	1.24 – 1.29	Min: 75% Max:95% to 100%	No fee	2%	Appraisal firm	Hazard -Earthquake insurance: Yes Life insurance: Yes Accident insurance: Yes Mortgage insurance: No
Oyak Bank	60 - 144	1.35	Max: 75%	Included in coupon rate	2%	Appraisal firm	Hazard -Earthquake insurance: Yes Life insurance: Yes Accident insurance: Yes Mortgage insurance: No
HSBC Bank	60 – 360	1.30 -1.44	Min: 5,000 YTL Max: 75%	1%-2% of Loan Amount	2%	Appraisal firm	Hazard -Earthquake insurance: Yes Life insurance: No Accident insurance: Yes Mortgage insurance: No
Akbank	60 -240	1.21 -1.31	Max: 75%	2%-3% of Loan Amount	2%	Appraisal firm	Hazard -Earthquake insurance: Yes Life insurance: Yes Accident insurance: Yes Mortgage insurance: No
Yapı Kredi Bank	60 -240	1.16 -1.33	Max: 100%	1%-5% of Loan Amount	1.5%	Bank (portfolio managers)	Hazard -Earthquake insurance: Yes Life insurance: Yes Accident insurance: Yes Mortgage insurance: No
Garanti Bank	60 -240	1.34	Max: 75%	1000 YTL	2%	Appraisal firm	Hazard -Earthquake insurance: Yes Life insurance: No Accident insurance: No Mortgage insurance: No
Vakıf Bank	60 -240	1.30	Max: 75%	2% of Loan Amount	2%	Bank's own Appraisal firm	Hazard -Earthquake insurance: Yes Life insurance: Yes Accident insurance: No Mortgage insurance: No
İs Bank	48 -120	1.46 -1.53	Max: 75%	1% -1.5% of Loan Amount	2%	Bank's own Appraisal firm	Hazard -Earthquake insurance: Yes Life insurance: Yes Accident insurance: Yes Mortgage insurance: No

Source: The web sites of the Deposit Banks

Table 3: Basic Set of Economic Parameters and Contract Provisions

Base Case Parameter Values	CONTRACT	
	Fixed-rate Mortgage With Arrangement Fee and Without Early Termination Penalty	Fixed-rate Mortgage With Arrangement Fee and Early Termination Penalty
Economic Environment		
Spot interest rate, $r(0)$	15%	15%
Long term average of interest rate, θ	24%	24%
Speed of reversion, κ	56%	56%
House service flow, δ	4%	4%
Correlation coefficient, ρ	0	0
Contract Provisions		
Maturity, η	120 months	120 months
Value of house at origination, H	100 000 TRY	100 000 TRY
Arrangement fee, ξ	2%	2%
Early termination penalty, π	-	2%

Figure 1: Value of Future Payments (A)

Figure 2: Value of Default Option (D)

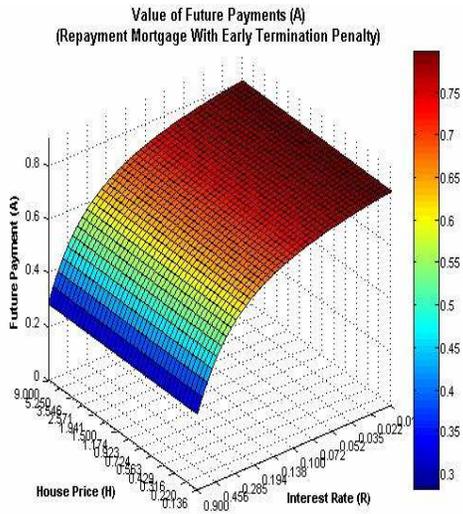


Figure 3: Value of Insurance (I)

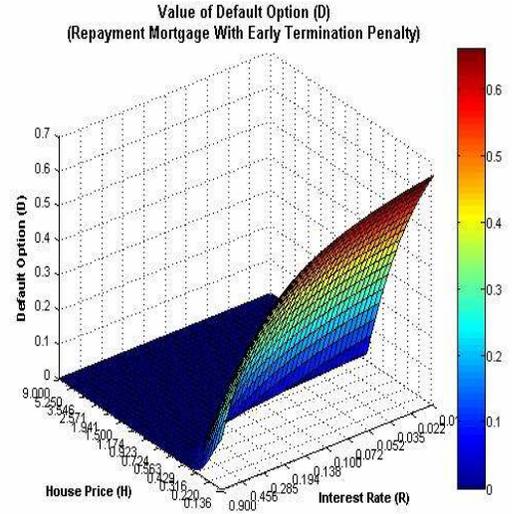


Figure 4: Value of Prepayment Option (C)

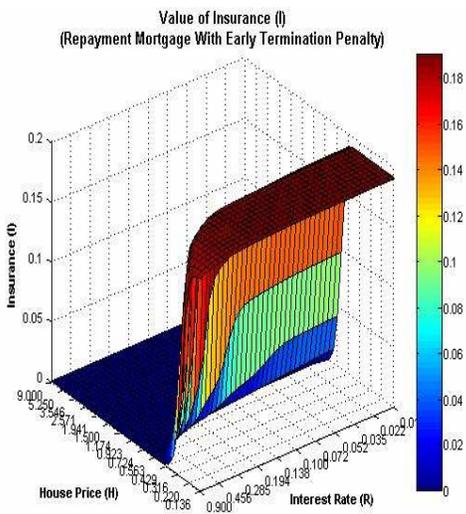
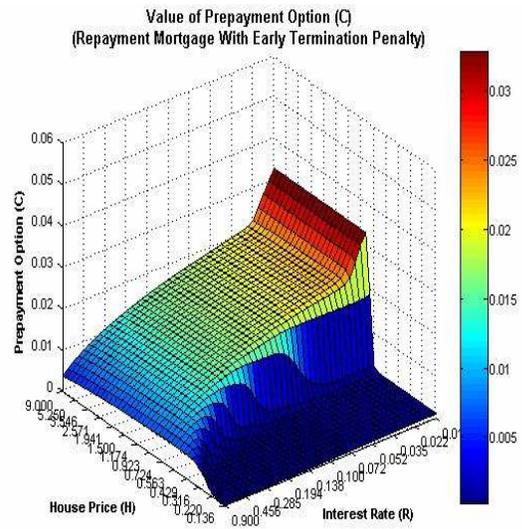


Figure 5: Value of Mortgage Contract (V)



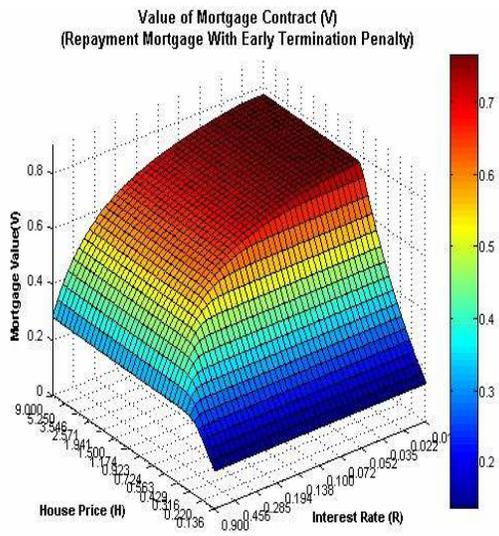


Figure 6: Mortgage Value for the Lender (75% LTV Mortgage Contract without Default Insurance and Arrangement Fee) - FRM Contract with Prepayment Penalty of 2%

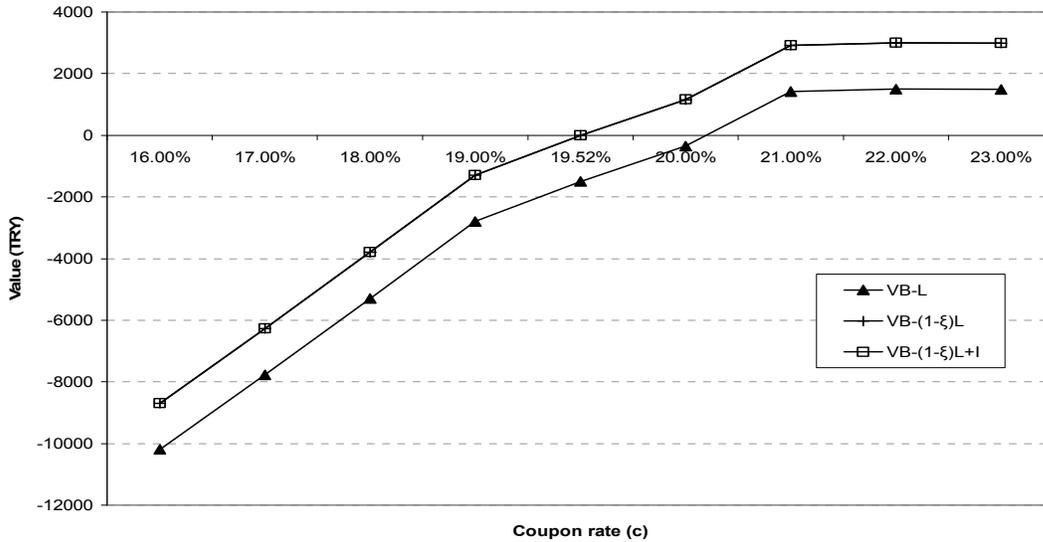
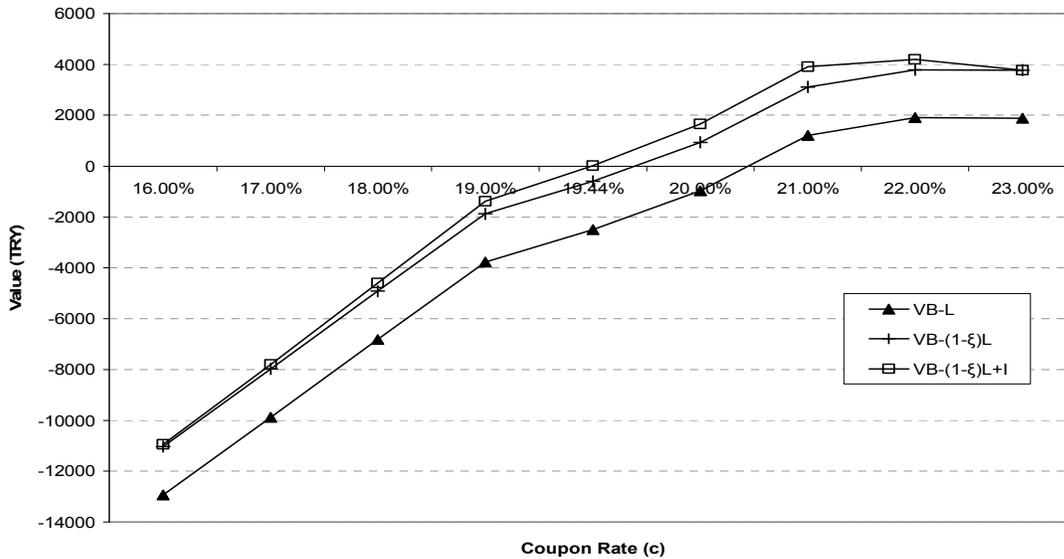
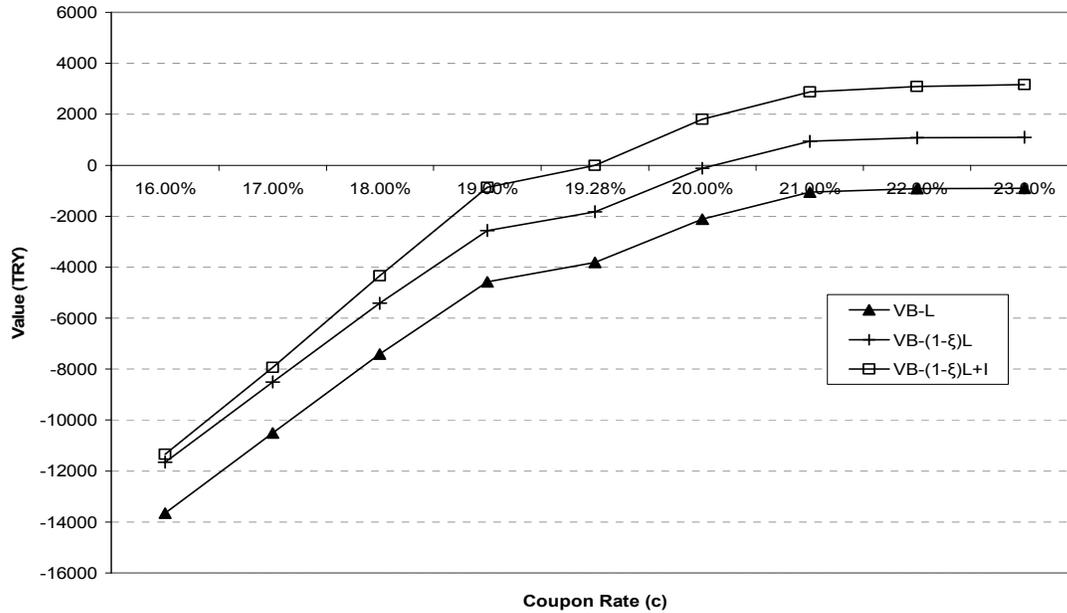


Figure 7: Mortgage Value for the Lender (95% LTV Mortgage Contract without Default Insurance, with Arrangement Fee) - FRM Contract with Prepayment Penalty of 2%



The following parameters were used in the construction of this table: the arrangement fee (ξ) is 2%; the early termination penalty (π) is 2%; the spot interest rate ($r(0)$) is 15%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the interest rate volatility (σ) is 12%; the house price volatility (v) is 9%; the house service flow (δ) is 4% and the correlation coefficient (ρ) is 0.

Figure 8: Mortgage Value for the Lender (100% LTV Mortgage Contract with Default Insurance and Arrangement Fee) - FRM Contract with Prepayment Penalty of 2%



The following parameters were used in the construction of this table: the arrangement fee (ξ) is 2%; the early termination penalty (π) is 2%; the spot interest rate ($r(0)$) is 15%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the interest rate volatility (σ) is 12%; the house price volatility (v) is 9%; the house service flow (δ) is 4% and the correlation coefficient (ρ) is 0.

Table 4: Trade-Off between Arrangement Fee, Early Termination Penalty and Equilibrium Contract Rates

Prepayment Penalty (π)	Arrangement Fee (ξ)				
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.05
0.00	21.93%	19.83%	19.47%	19.15%	18.91
0.01	20.14%	19.77%	19.45%	19.14%	18.91
0.02	20.09%	19.75%	19.44%	19.13%	18.89
0.05	20.05%	19.73%	19.43%	19.13%	18.89

The following parameters were used in the construction of this table: the spot interest rate ($r(0)$) is 15%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the interest rate volatility (σ) is 12%; the house price volatility (v) is 9%; the house service flow (δ) is 4%; LTV ratio is 95% and the correlation coefficient (ρ) is 0.

Table 5: House Price Volatility and the Value of Mortgage Components**95% LTV Fixed-Rate Mortgage With Early Termination Penalty**

House Price Volatility (σ_H)	Future Payments	Mortgage	Default	Prepayment	Insurance
	(A)	(V)	(D)	(C)	(I)
3.0%	90557	86804	2	3750	4
6.0%	90557	87343	35	3179	64
9.0%	90557	88186	170	2201	322
12.0%	90557	89225	471	861	920
15.0%	90557	90321	941	0	1871

The following parameters were used in the construction of this table: the contract rate (c) is 18%; the early termination penalty (π) is 2%; the spot interest rate ($r(0)$) is 15%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the interest rate volatility (σ) is 12%; the house service flow (δ) is 4%; and the correlation coefficient (ρ) is 0.

Table 6: Interest Rate Volatility and the Value of Mortgage Components**95% LTV Fixed-Rate Mortgage With Early Termination Penalty**

Interest Rate Volatility (σ_r)	Future Payments	Mortgage	Default	Prepayment	Insurance
	(A)	(V)	(D)	(C)	(I)
6.0%	90147	90504	143	0	436
9.0%	90318	89517	160	641	385
12.0%	90557	88186	170	2201	322
15.0%	90870	86522	167	4180	254
18.0%	91232	84591	153	6488	192

The following parameters were used in the construction of this table: the contract rate (c) is 18%; the early termination penalty (π) is 2%; the spot interest rate ($r(0)$) is 15%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the house price volatility (v) is 9%; the house service flow (δ) is 4%; and the correlation coefficient (ρ) is 0.

Table 7-A: Combined Effects of Changes in Spot Rates and House Price and Interest Rate Volatilities

95% LTV Fixed-Rate Mortgage With Early Termination Penalty

Spot rate (r_0)	Eq. Contract Rate (c)		Future Payments (A)		Mortgage (V)		Default (D)		Prepayment (C)		Insurance (I)	
	$v = 9\%$	$v = 12\%$	$v = 9\%$	$v = 12\%$	$v = 9\%$	$v = 12\%$	$v = 9\%$	$v = 12\%$	$v = 9\%$	$v = 12\%$	$v = 9\%$	$v = 12\%$
12%	$\sigma = 12\%$	20.06%	19.56%	93675	92500	91980	617	862	2157	834	594	1119
	$\sigma = 15\%$	20.68%	20.19%	96063	92500	91992	916	1265	4235	2806	593	1112
15%	$\sigma = 12\%$	21.28%	20.79%	95456	92517	92053	700	955	2239	905	582	1047
	$\sigma = 15\%$	21.97%	21.49%	98016	92524	92059	1023	1415	4469	2999	575	1038
18%	$\sigma = 12\%$	22.39%	21.92%	95779	92522	92111	779	1058	2478	1147	573	986
	$\sigma = 15\%$	23.15%	22.69%	98529	92529	92113	1141	1561	4859	3401	573	982
21%	$\sigma = 12\%$	23.92%	23.50%	96488	92522	92181	916	1239	3050	1779	572	919
	$\sigma = 15\%$	24.80%	24.39%	99525	92528	92181	1295	1783	5702	4288	563	918

The following parameters were used in the construction of this table: the arrangement fee (ξ) is 2%; the early termination penalty (π) is 2%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the house service flow (δ) is 4%; and the correlation coefficient (ρ) is 0.

Table 7-B: Combined Effects of Changes in Spot Rates and House Price and Interest Rate Volatilities

Spot Rate	75% LTV Fixed-Rate Mortgage With Early Termination Penalty												
	Eq. Contract Rate (c)		Future Payments (A)		Mortgage (V)		Default (D)		Prepayment (C)		Insurance (I)		
	$\sigma = 9\%$	$\nu = 12\%$	$\nu = 9\%$	$\nu = 12\%$	$\nu = 9\%$	$\nu = 12\%$	$\nu = 9\%$	$\nu = 12\%$	$\nu = 9\%$	$\nu = 12\%$	$\nu = 9\%$	$\nu = 12\%$	
12%	$\sigma = 12\%$	20.13%	19.69%	75408	74282	73490	73479	2	15	1917	788	2	21
	$\sigma = 15\%$	20.75%	20.31%	77278	76149	73494	73479	3	21	3780	2648	2	20
15%	$\sigma = 12\%$	21.34%	20.90%	75526	74401	73490	73477	3	16	2033	909	2	17
	$\sigma = 15\%$	22.03%	21.59%	77548	76432	73498	73484	4	22	4047	2927	2	16
18%	$\sigma = 12\%$	22.46%	22.02%	75791	74689	73498	73485	3	16	2290	1188	2	15
	$\sigma = 15\%$	23.22%	22.79%	77951	76868	73495	73484	4	23	4452	3361	2	14
21%	$\sigma = 12\%$	24.00%	23.57%	76353	75324	73495	73485	3	19	2855	1820	2	12
	$\sigma = 15\%$	24.87%	24.47%	78755	77763	73491	73489	4	23	5261	4251	1	11

The following parameters were used in the construction of this table: the arrangement fee (ξ) is 2%; the early termination penalty (π) is 2%; the long term average of the interest rate (θ) is 24%; the speed of reversion (κ) is 56%; the house service flow

Table 8: Equilibrium Mortgage Coupon Rates and the Prevailing Mortgage Coupon Rates of the Turkish Banks: September, 2007

PANEL-A: September, 2007			
Spot interest rate 15%, Long-term interest rate 24%, Interest rate volatility =12%			
	No fee & No Mortgage Insurance [V_B-L]	2% Arrangement Fee & No Insurance [$V_B-(1-\xi)L$]	2% Arrangement Fee & Mortgage Insurance [$V_B-(1-\xi)L+$]
Equilibrium Coupon Rates: LTV = 75%	1.531% - 1.601%	1.497% – 1.531%	1.497% – 1.531%
Equilibrium Coupon Rates: LTV = 95%	1.531% – 1.601%	1.490% – 1.531%	1.460% -1.490%
Equilibrium Coupon Rates: LTV = 100%	No equilibrium coupon	1.531% - 1.601%	1.480 %
Prevailing Coupon Rates		Oyak Bank: 1.35% HSBC: 1.44% Akbank: 1.31% Garanti: 1.34% Vakifbank: 1.30% Is Bank: 1.53% Finansbank: 1.29% Yapi Kredi: 1.33%	

Appendix 1: Estimation of the CIR Process Parameters

CIR model (1985) assumes that the time evolution of the short term interest rate under real probabilities P has the following representation

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma_r r_t^{1/2} dW_t^P \quad (1)$$

Under risk neutral measure Q it follows

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t - \lambda\sigma_r)dt + \sigma_r r_t^{1/2} dW_t^Q \quad (2)$$

where λ is the market price of risk. The unique positive solution to the short rate stochastic differential equation (2) is

$$r(t) = \theta^* + (r(s) - \theta^*)e^{-\kappa(t-s)} + \sigma_r e^{-\kappa(t-s)} \int_s^t e^{\kappa(u-s)} \sqrt{r(u)} dW(u) \quad (3)$$

for any $t \geq s$ and $\theta^* = \theta - \lambda\sigma_r$. The probability density of interest rate at time t , conditional on its value at current time s , is given by

$$f(r(t), t; r(s), s) = ce^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{q/2} I_q(2(uv)^{1/2}), \quad (4)$$

where

$$c = \frac{2\kappa}{\sigma_r^2(1 - e^{-\kappa(t-s)})}, \quad u = cr(s)e^{-\kappa(t-s)}, \quad v = cr(t), \quad q = \frac{2\kappa\theta^*}{\sigma_r^2} - 1$$

and $I_q(\cdot)$ is the modified Bessel function of the first kind of order q .

Notice that short term interest rate is distributed as chi-squared conditioned on the filtration at time s ,

$$r(t) | F_s \sim \chi(2cr(t), 2q + 2, 2u) \quad (5)$$

with $2q + 2$ degrees of freedom and parameter of non-centrality $2u$ proportional to the current short rate.

Assuming independency, one can write the likelihood function for the short rate series with T observations

$$L(\Theta | r(t)) = \prod_{t=1}^T f(r(t), t; r(s), s) \quad (6)$$

Then log-likelihood function is

$$\text{Log}L(\Theta | r(t)) = (T - 1) \ln c + \sum_{t=1}^T \left\{ -u_t - v_{t+1} + 0.5 \ln \left(\frac{v_{t+1}}{u_t} \right) + \ln \left(I_q \left(2\sqrt{u_t v_{t+1}} \right) \right) \right\} \quad (7)$$

Then the estimation of the parameter is done by maximizing equation (7) over the control variables $\Theta = \{\kappa, \sigma_r, \theta, \lambda\}$.

$$\hat{\Theta} = \arg \max_{\Theta} \text{Log}L(\Theta | r(t))$$

We choose initials implementing the Direct optimization algorithm (see Dan finkel) and then we make use of Nelder-Mead algorithm to solve the nonlinear optimization problem.

We use daily 3-Month treasury yields obtained from the secondary market to estimate the parameters of the CIR process. Data covers the period between 28 Feb 2002 and 21 Nov 2007. Data set has 1518 observations in total.

Appendix 2: Descriptions of the Model Variables

H = the value of the mortgaged housing property,

r = the instantaneous risk-free interest rate,

μ = average rate of house price appreciation,

σ_H = the volatility of disturbances in actual house price appreciation,

z_H = the standardized Wiener process that drives the uncertainty in house prices,

θ = the long-term mean value for the interest rate,

κ = the speed of adjustment in the mean reverting process,

σ_r = the standard deviation of the interest rate disturbance,

z_r = the standardized Wiener process,

ρ = the instantaneous correlation coefficient,

V = the mortgage value,

n = the life of the mortgage in months,

L = amount of the loan,

c = the fixed coupon rate,

π = early termination penalty,

f = fraction for insurance coverage,

ξ = arrangement fee,

$\eta(i)$ = i th payment date,

$OB(i)$ = outstanding balance after i th payment date,

MP = monthly payment for a fixed-rate mortgage,

$TD(t)$ = borrower's total dept at time t .

$V_B(r; H; t)$ = value of the mortgage to the borrower at time t for given r and H ,

$A(r; t)$ = value of the remaining mortgage payments at time t for given r ,

$D(r; H; t)$ = value of the default option at time t for given r and H ,

$C(r; H; t)$ = value of the prepayment option at time t for given r and H ,

$J(r; H; t)$ = value of the joint option at time t for given r and H .

References:

Alvayay, J. R., and A. L. Schwartz, 1996, "Housing and Mortgage Market Policies in Chile", *Journal of Real Estate Literature*, 5(1): 47-55.

Ambrose B.W. and S. Kim, 2003, "Modeling the Korean Chonse Lease Contract", *Real Estate Economics*, 31(1): 53-74.

Azevedo-Pereira, J. A., Newton, D. P. and D. A. Paxson, 2002, "UK Fixed Rate Repayment Mortgage and Mortgage Indemnity Valuation", *Real Estate Economics*, 30(2): 185-211.

Azevedo-Pereira, J. A., Newton, D. P. and D. A., Paxson, 2003, "Fixed-Rate Endowment Mortgage and Mortgage Indemnity Valuation", *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 26 (2/3): 197-221.

Boyle, P., 1977, "Options: A Monte Carlo Approach", *Journal of Financial Economics*, 44: 323-338.

Boyle, P., 1986, "Options Valuation Using a Tree Jump Process", *International Options Journal*, 3: 7-12.

Boyle, P., 1988, "A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23(1): 1-12.

Brennan, M., J. and E. S. Schwartz, 1976, "The Pricing of Equity-Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee", *Journal of Financial Economics*, 3: 195-214.

Brennan, M., J. and E. S. Schwartz, 1977, "The Valuation of American Put Options", *Journal of Finance*, 32: 449-462.

Brennan, M., J. and E. S. Schwartz, 1978, "Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis", *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13(3): 461-474.

Chiquier, L., 1998, "Dual Index Mortgages (DIMs): Conditions of Sustainable Development in Poland", East European Regional Urban Sector Assistance Project, The Urban Institute.

Chu, Y, Ambrose, B. W., Sa-Aadu, J. and T. F. Sing, 2003, "Mortgage Default and Changes to Withdrawal Limits of CPF in Singapore", Unpublished Paper presented at AREUEA Conference at Cracow, Poland.

Cox, J. C., Ingersoll, J. E. and S. A. Ross, 1979, "An Analysis of Variable Rate Loan Contracts", *The Journal of Finance*, 35(2): 389-403.

Cox, J. C., Ingersoll, J. E. and S. A. Ross, 1985a, "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica*, 53: 363-384.

Cox, J. C., Ingersoll, J. E. and S. A. Ross, 1985b, "A Theory of the Term-structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53: 385-407.

- Demirguc-Kunt, A. and V. Maksimovic, 1999, "Institutions, Financial Markets and Firm Debt Maturity," *Journal of Financial Economics*, 54(3): 295-336.
- Demirguc-Kunt, A. and V. Maksimovic, 1996, "Stock Market Development and Firm Financing Choices", *World Bank Economic Review*, 10: 341-369.
- Deng, Y., Quigley, J. M., and R. Van Order, 2000, "Mortgage Terminations, Heterogeneity and the Exercise of Mortgage Options", *Econometrica*, 68(2): 275-307.
- Deng, Y., 1997, "Mortgage Termination: An Empirical Hazard Model with a Stochastic Term Structure", *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 14: 309-331.
- Downing, C., R. Stanton and N. Wallace, 2005, "An Empirical Test of a Two-Factor Mortgage Valuation Model: How Much Do House Prices Matter?", *Real Estate Economics*, 33(4): 681-710.
- Dunn, K.B. and J.J. McConnell, 1981-a, "A Comparison of Alternative Models for Pricing GNMA Mortgage-Backed Securities", *Journal of Finance*, 36: 471-483.
- Dunn, K.B. and J.J. McConnell, 1981-b, "Valuation of GNMA Mortgage Securities", *Journal of Finance*, 36: 599-616.
- Epperson, J. F, Kau, J. B., Keenan, D. C. and W. J. Muller III, 1985, "Pricing Default Risk in Mortgages", *AREUEA Journal*, 13(13): 261-272.
- Erol, I. and K. Patel, 2005, "Default Risk of Wage-Indexed Payment Mortgage (WIPM) Contract in Turkey", *Journal of Housing Economics*, 14(3): 271-293.
- Geltner, D. and N.G. Miller, 2001, *Commercial Real Estate Analysis and Investments*, South-Western Publishing, Thomson Learning.
- Hendershott, P. H. and R. Van Order, 1987, "Pricing Mortgages: An Interpretation of the Models and Results", *Journal of Financial Services Research*, 1: 77-111.
- Hull, J. and A. White, 1988, "The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23: 237-51.
- Jaffee, D M., and B., Renaud, 1997, "Strategies to Develop Mortgage Markets in Transition Economies", In *Financial Sector Reform and Privatisation in Transition Economies*, Ed. J. Doukas, V. Murinde and C. Wihlborg.
- Kau, J. B. and D. C. Keenan, 1995, "An Overview of the Option-Theoretic Pricing of Mortgages", *Journal of Housing Research*, 6(2): 217-243.
- Kau, J. B., Keenan, D. C., Muller, W. J. and J. F. Epperson, 1992, "A Generalized Valuation Model for Fixed-Rate Residential Mortgages", *Journal of Money, Credit, and Banking*, 24(3), 279-299.
- Kau, J. B., Keenan, D. C., Muller III, W. J. and J. F. Epperson, 1995, "The Valuation at Origination of Fixed-Rate Mortgages with Default and Prepayment", *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 11(1): 5-36.

Kau, J. B., Keenan, D. C., Muller III, W. J. and J. F. Epperson, 1993, "Option Theory and Floating-Rate Securities with a Comparison of Adjustable- and Fixed-Rate Securities", *Journal of Business*, 66(4): 595-618.

Kierkegaard, S., 1967, *Stages on Life's Way*, trans. Walter Lowrie, New York.

Lipscomb, J. B., and H. Hunt, 1999, "Mexican Mortgages: Structure and Default Incentives, Historical Simulation, 1982 to 1998", *Journal of Housing Research*, 10(2): 235- 65.

Lipscomb, J. B., Harvey, J. T., and H. Hunt, 2003, "Exchange-Rate Risk Mitigation with Price-Level-Adjusting Mortgages: The Case of the Mexican UDI", *Journal of Real Estate Research*, 25(1): 23- 41.

McConnell, J. and W. Muller, 1998, "An Introduction to Mortgage Research on Wall Street", *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 1: 91-94.

Ortega, M. A., 2000, "Risk Management in Indexed Mortgage Loans in Chile", *International Journal of Real Estate Finance*, 1(2): 20-25.

Pickering N., 2000a, "The Mexico Mortgage Market Boom, Bust and Bail Out: Determinants of Borrower Default and Loan Restructure After the 1995 Currency Crisis", Working Paper, Joint Center for Housing Studies, Harvard University.

Pickering, N., 2000b, "The SOFOLES: Niche Lending or New Leaders in the Mexican Mortgage Market?", Working Paper, Joint Center for Housing Studies, Harvard University.

Rendleman, R. J. and B. J. Bartter, 1979, "Two-State Option Pricing", *Journal of Finance*, 34(5): 1093-1110.

Schwartz, E. S. and W. N. Torous, 1989, "Prepayment and the Valuation of Mortgage Backed Securities", *The Journal of Finance*, 44(2): 375-392.

Schwartz, E. S., 1977, "The Valuation of Warrants: Implementing a New Approach", *Journal of Financial Economics*, 4: 79-94.

Siembieda, W. J. and E. L. Moreno, 1997, "Expanding Housing Choices for the Sector Popular: Strategies for Mexico", *Housing Policy Debate*, 8 (3): 651-677.

Titman, S. and W. Torous, 1989, "Valuing Commercial Mortgages: An Empirical Investigation of the Contingent-Claims Approach to Pricing Risky Debt", *The Journal of Finance*, 44(2): 345-373.