

# Üreticiler için Ürün İkame Politikalarının Belirlenmesi ve İkame Esnekliğinin Getiri Analizi

**Proje No: 112M431**

**Sonuç Raporu**

**01.11.2012-01.11.2013**

Doç.Dr.Seçil Savaşaneril Tüfekci

12 Haziran 2014

ANKARA

## Önsöz

Üreticiler için ürün İkame Politikalarının Belirlenmesi ve İkame Esnekliğinin Getiri Analizi başlıklı bu proje 01.11.2012-01.11.2013 tarihleri arasında yürütülmüştür. Projede yürütücü olarak ODTÜ Endüstri Mühendisliği Bölümü öğretim üyesi Doç.Dr.Seçil Savaşaneril Tüfekci ve bursiyer olarak ODTÜ Endüstri Mühendisliği Bölümü doktora öğrencisi Nursen Töre çalışmıştır. Proje kapsamında yapılan çalışmalar Nursen Töre'nin doktora tezinin bir bölümünü oluşturmaktadır. Proje TÜBİTAK tarafından 112M431 no'lu Hızlı Destek programı çerçevesinde desteklenmiştir.

# İçindekiler

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Türkçe ve İngilizce Öz</b>   | <b>5</b>  |
| 1.1      | Öz . . . . .  | 5         |
| 1.2      | Abstract . . . . .  | 6         |
| <b>2</b> | <b>Giriş</b>  | <b>7</b>  |
| <b>3</b> | <b>İş Paketi-1 Kapsamında Yapılan Çalışmalar</b>                          | <b>9</b>  |
| 3.1      | İş Paketi-1 için projenin 1. döneminde yapılan çalışmalar . . . . .       | 10        |
| 3.2      | Sayısal çalışma . . . . .   | 15        |
| 3.2.1    | Sezgisellerin Küme 1 parameter değerleri altında performansları . . . . . | 16        |
| 3.2.2    | Sezgisellerin Küme-2 parameter değerleri altında performansları . . . . . | 21        |
| 3.3      | İş Paketi-1 için projenin 2. döneminde yapılan çalışmalar . . . . .       | 26        |
| 3.4      | İş Paketi-1 için sonuçlar . . . . .                                       | 28        |
| <b>4</b> | <b>İş Paketi-2 Kapsamında yapılan çalışmalar</b>                          | <b>29</b> |
| 4.1      | İş Paketi-2 için projenin 1. döneminde yapılan çalışmalar . . . . .       | 30        |
| 4.2      | İş Paketi-2 için projenin 2. döneminde yapılan çalışmalar . . . . .       | 34        |
| 4.2.1    | Senaryolar . . . . .  | 34        |
| 4.3      | Senaryo 3 . . . . .   | 41        |
| 4.3.1    | Kar Fonksiyonları . . . . .   | 46        |
| 4.3.2    | Problemin ele alınması . . . . .  | 48        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 4.3.3    | Taksim $P_{0000}$ (Bkz. EK-1 Sekil2, nn1) . . . . .                  | 51        |
| 4.3.4    | Taksim: $P_{0100}$ ve $P_{1000}$ (Bkz.Sekil-2, np2 ve pn2) . . . . . | 51        |
| 4.3.5    | Senaryo 4 . . . . .  | 56        |
| 4.4      | İş paketi-2 için Sayısal Analiz . . . . .                            | 57        |
| 4.5      | İş Paketi-2 için sonuçlar . . . . .                                  | 58        |
| <b>5</b> | <b>Projeden elde edilen sonuçlar</b>                                 | <b>59</b> |
| <b>6</b> | <b>Kaynakça</b>  | <b>60</b> |

# Tablolar

|    |  |    |
|----|--|----|
| 1  | Sezgisellerin hafif trafik yoğunluğu altında karşılaştırması (Yüzde olarak) . . . . .  | 17 |
| 2  | Prio-DH ve LQ-STLA'nın tek-yönlü ikame ve ikamesiz durumlar altında hafif trafik için karşılaştırması (yüzde olarak) . . . . . | 18 |
| 3  | Sezgisel yöntemlerin orta-düşük trafik yoğunluğu altında karşılaştırması(Yüzde olarak) . . . . .                               | 18 |
| 4  | Prio-DH ve LQ-STLA'nın farklı ikame politikaları altında orta-düşük trafik için karşılaştırması(yüzde olarak) . . . . .        | 19 |
| 5  | Sezgisel yöntemlerin orta-yüksek trafik yoğunluğu altında karşılaştırması(Yüzde olarak) . . . . .                              | 20 |
| 6  | Prio-DH ve LQ-STLA'nın farklı ikame politikaları altında orta-yüksek trafik için karşılaştırması(yüzde olarak) . . . . .       | 20 |
| 7  | Küme 2-Grup 1 için sezgisel yöntemlerin karşılaştırması (yüzde olarak) . . . . .   | 21 |
| 8  | Grup 2 için sezgisel yöntemlerin karşılaştırması(yüzde olarak) . . . . .   | 22 |
| 9  | Grup 3 için sezgisel yöntemlerin karşılaştırması(yüzde olarak ) . . . . .  | 23 |
| 10 | Grup 4 için sezgisel yöntemlerin karşılaştırması(yüzde olarak) . . . . .   | 24 |
| 11 | Grup 5 için $\lambda_i = 0.2$ olduğu durum için sezgisellerin karşılaştırması(yüzde olarak) .                                  | 25 |
| 12 | Grup 5 için farklı $\lambda_i$ degerleri için sezgisellerin karşılaştırması(yüzde olarak) . . . .                              | 25 |
| 13 | KKT Noktalari . . . . .  | 40 |
| 14 | $A \leq \frac{b}{2}$ durumu altında $R(K)$ . . . . .   | 42 |
| 15 | $\frac{b}{2} \leq A \leq b$ durumu altında $R(K)$ . . . . .  | 43 |
| 16 | $b \leq A$ durumu altında $R(K)$ . . . . .   | 44 |

# 1 Türkçe ve İngilizce Öz

## 1.1 Öz

Bu çalışmada üreticilerin birden fazla ürün için stoklama, üretim çizelgeleme, ya da fiyatlandırma kararlarını, ürünlerin ikame esnekliğine sahip olduğu durumlarda nasıl verdikleri analitik yaklaşımlarla incelenmiştir. Analiz için iki problem tanımlanmıştır. İş paketi-1’de ve çoklu-ürün durumu için üretim çizelgeleme, stok ve ikame politikaları belirlenmiştir. Analizlerde sürekli zamanlı Markov zincirleri kullanılmıştır. Talep ve üretim zamanının rassal olduğu, müşterilerin ürün ikamesini bir maliyet karşılığında kabul ettiği, sürekli-zamanlı işlem ve kısıtlı üretim kapasitesi varsayımı altında problem ele alınmıştır. Bu problemde iki farklı durum için optimal politikanın yapısını oluşturmak mümkünken çoklu ürün durumu için problem yapısını karakterize etmek ve optimal bir politikayı bulmak çok zordur. Bu nedenle iyi performans gösterecek sezgisel politikalar geliştirilmiştir. hangi şartlar altında hangi sezgiselin iyi sonuç vereceği ortaya konmuştur. İş Paketi-2’de ise üretim kapasitesinin kısıtlı olmadığı, ancak ürünlerin sezonsal olduğu ve üretimin zaman aldığı varsayılmıştır. Talep rassaldır. Bu nedenle talep gerçekleşmeden önce üretim ve stoklama kararlarının verilmesi gerektiği varsayılmıştır. Bunun yanı sıra, müşterilerin ürün ikame davranışları açıkça modele eklenmiş, fiyat kararları ile ikame davranışının manipüle edilebildiği varsayılmıştır.

İş paketi-2’de cevaplanmak istenen araştırma soruları:

- (1) Ürünlerin talebi, fiyatlandırma öncesi bilirse üreticinin karlılığını ne kadar artar?
- (2) Talebin bilinmediği (rassal olduğu) durumda, üretici talep gerçekleştikten sonra tekrar fiyat değiştirerek artık stoğu eritebilir, ya da karşılanamamış talebi karşılayabilirse, karlılığı ne kadar artar?
- (3) Kapasite kararlarını verirken ikinci bir fiyatlandırma opsiyonu olduğunu göz ardı ederse karlılığı ne kadar düşer?

olarak belirlenmiştir. Bu sorulara cevap aramak için senaryolar oluşturulmuş ve optimal kararlar analitik yaklaşımlarla elde edilmiştir. Bu kararlar altında optimal getiriler kıyaslanmış ve üreticilerin stoklama ve fiyatlandırma politikalarına dair çıkarımlar yapılmıştır.

## 1.2 Abstract

In this study we analyze the manufacturers stocking, production scheduling or pricing decisions in the presence of substitutable products. We adopt an analytical approach to solve the problems. We define two settings. In the first one, We study a manufacturers production scheduling policy for multiple substitutable items. For each item, inventory is kept separately. If upon demand arrival, stock is not available then demand is backordered. Depending on the inventory level, it is possible to meet the demand via a substitute item. However, it takes a time and cost to substitute the item with another one. Thus, the substitution decisions need to be given before the demand is realized. Besides substitution the manufacturer decides on the production scheduling, i.e., which product to produce next. The production and substitution decisions are given dynamically over time depending on the net inventory level of the products. It is possible to show that for the two-product setting optimal production policy is characterized by a hedging point and a switching curve, and the substitution policies are characterized by threshold substitution levels. For the multiple item setting, we propose several heuristics for this problem. Through numerical analysis, the conditions under which each heuristic performs well are identified.

In the second problem, we assume production capacity is unlimited, but the products are seasonal and there is a lead time for manufacturing. Thus the manufacturer must give the stocking decisions before the demand is realized. Besides we explicitly model the customers substitution behavior, and assume the this behavior can be manipulated with pricing decisions. we ask the following questions under this setting:

- (1) If the manufacturer knows the demand, before the pricing decisions are given, what is the benefit of this information,
- (2) When demand is stochastic, if the manufacturer has the option to markdown the price to match understocked items with overstock items, what is the benefit of such a secondary pricing option?
- (3) If the manufacturer ignores the fact that he could match overstock with understock, and gives stocking decisions accordingly, what is the loss he would incur?

To answer these questions, four scenarios are constructed. Under each scenario optimal pricing and

stocking decisions are determined. Observations are made with respect to stocking and pricing decisions of the manufacturers.

## 2 Giriş

Bu projede üreticilerin çoklu-ürün yönetim kararlarına destek olacak politikaların belirlenmesi ve müşterilerin ikame davranışlarının üreticilerin politikalarına etkisinin incelenmesi üzerine çalışılmıştır. Proje kapsamında iki iş paketi tanımlanmıştır. İş paketi-1’de ve çoklu-ürün durumu için üretim çizelgeleme, stok ve ikame politikaları belirlenmiştir. Analizlerde sürekli zamanlı Markov zincirleri kullanılmıştır. Talep ve üretim zamanının rassal olduğu, müşterilerin ürün ikamesini bir maliyet karşılığında kabul ettiği, sürekli-zamanlı gzlem ve kısıtlı üretim kapasitesi varsayımı altında problem ele alınmıştır. İş Paketi-2’de ise üretim kapasitesinin kısıtlı olmadığı, ancak ürünlerin sezonsal olduğu ve üretimin zaman aldığı varsayılmıştır. Talep rassaldır. Bu nedenle talep gerçekleşmeden önce üretim ve stoklama kararlarının verilmesi gerektiği varsayılmıştır. Bunun yanı sıra, müşterilerin ürün ikame davranışları açıkça modele eklenmiş, fiyat kararları ile ikame davranışının manipüle edilebildiği varsayılmıştır.

İş paketi-1’de çoklu-ürün durumu için üretim çizelgeleme, stok ve ikame politikalarını 3 veya daha fazla ürün durumunda optimal olarak belirlemek, hesaplama zaman gereksiniminin fazlalığı nedeniyle mümkün olmamaktadır. Bu nedenle bu problem için sezgiseller geliştirilmiştir. Projenin 1. döneminde bu sezgisellerin iki farklı parametre kümesi için bir karşılaştırması yapılmıştır. Projenin 2. döneminde bu sezgiseller Pena-Perez ve Zipkin (1995)’deki parametre kümesi için de karşılaştırılmış, yeni çıkarımlar elde edilmiştir. Projede İş Paketi-1’de iki dönem boyunca yapılan çalışmalar bölüm 3. İş Paketi-1 Kapsamında Yapılan Çalışmalar kısmında sunulmaktadır.

İş Paketi-2’de üreticiler için müşteri davranışını gözönünde bulunduran ikame politikalarının belirlenmesi hedeflenmiştir. Bu paket için projenin 1.döneminde tek dönemli,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  üründen oluşan bir problem kurgusu oluşturulmuştur. Bir ürünün satış miktarı hem kendi pazar fiyatına hem de diğer ürünlerin fiyatlarına bağlı olarak belirlenir. Ürün talepleri rassallık içermektedir. Bu kurgu altında üreticinin her ürün için dönem başında üretim miktarları ve ürün fiyatları, karar değişkenleri olarak belirlenmiştir. Her ürün için optimal üretim miktarları



ve fiyatlar elde edilmiştir.

İş paketi-2’de cevaplanmak istenen araştırma soruları:

- (1) Ürünlerin talebi, fiyatlandırma öncesi bilirse üreticinin karlılığını ne kadar artar?
- (2) Talebin bilinmediği (rassal olduğu) durumda, üretici talep gerçekleştikten sonra tekrar fiyat değiştirerek artık stoğu eritebilir, ya da karşılanamamış talebi karşılayabilirse, karlılığı ne kadar artar?
- (3) Kapasite kararlarını verirken ikinci bir fiyatlandırma opsiyonu olduğunu göz ardı ederse karlılığı ne kadar düşer?

olarak belirlenmiştir.

Bu soruları yanıtlayabilmek için İş paketi-2’de 4 senaryo oluşturulmuştur. Optimal kararlar mümkün olduğunca analitik yaklaşımla belirlenmiştir. Analitik yaklaşımdaki zorluk nedeniyle ürün sayısı, Senaryo 1 dışında, 2 ile sınırlandırılmıştır. Sayısal analiz ile karşılaştırmalar yapılmıştır. Raporda İş Paketi-2 için iki dönem boyunca yapılan çalışmalar Bölüm 4. İş Paketi-2 Kapsamında Yapılan Çalışmalar bölümünde sunulmaktadır.

Bu sonuç raporu, 1. ve 2.dönemde yapılan çalışmalarını içermektedir. 1.dönemde yapılan çalışmalar gelişme raporunda sunulmuştur. Bu raporda gelişme raporu değiştirilmeden sunulmaktadır. Raporda kullanılan şekiller EK-1 bölümlerinde yer almaktadır.

Projede yapılan çalışmalardan yayına hazırlanmakta olan iki makale oluşturulmuştur. İlk makale İş Paketi-1 için yapılan çalışmaları içermektedir. Bu çalışma 26/06/2013- 28/06/2013 tarihleri arasında İstanbul’da düzenlenen International IIE Conference’da (Yöneylem Araştırması ve Endüstri Mühendisliği 33. Ulusal Kongresi ile ortak düzenlenen) sunulmuştur. Sunum özü EK-2a’da sunulmuştur. Çalışma ayrıca 28/07/2013- 30/07/2013 tarihleri arasında Fontainebleau, Fransa’da düzenlenen INFORMS MSOM Conference’da sunulmuştur. Bu konferansa kabul edilen 3 sayfalık makale özeti EK-2b’de sunulmuştur. İkinci makale İş Paketi-2 için yapılan çalışmaları içermektedir. Çalışmalar tamamlandığında yurtdışı ve yurtiçi konferanslarda sunulması planlanmaktadır. Her iki makalenin de SCI-Expanded kapsamındaki bir dergide yayınlanması planlanmaktadır.

### 3 İş Paketi-1 Kapsamında Yapılan Çalışmalar

Bu iş paketinde  $N$  rinden oluş bir üretim sistemi varsayılmıştır. Her bir ürün için bağımsız, Poisson dağılıma uygun talep gelmektedir,  $i$  ürünü için gelen talep hızı  $\lambda_i$  ile gösterilebilir. Üretici bütün üretimi tek bir kaynaktan (makina, ya da hat) yapmaktadır ve ürünler tek bir kaynaktan üretilmektedir. Üretim zamanları her ürün için yaklaşık olarak aynı varsayılmaktadır. Ürünler arası üretim geçişlerinde, kurulum zamanı ve maliyeti ihmal edilebilir. Her bir parça için üretim zamanı üssel dağılıma sahip bir rassal değişkendir. Üretim hızı  $\mu$  ile gösterilebilir. Her ürün için ayrı stok tutulmakta ve talepler (varsa) stoktan karşılanmaktadır. Karşılanamayan talep için ardısmarlama yapılabilir. Ardısmarlamanın maliyeti birim başına birim zamanda  $i$  ürünü için  $b_i$  ile gösterilebilir. Her bir ürünü birim zamanda stokta tutma maliyeti  $h_i$  ile gösterilebilir.

Üretici üretim çizelgeleme ve her ürün için stok seviyesine karar verir. Bunun yanı sıra, müşteri herhangi bir ürünü stokta bulamadığı zaman, talep stoktaki diğer bir ürün ile karşılanabilir. İkame durumunda hem bir maliyetin ortaya çıktığı (örneğin müşteri memnuniyetsizliğinden, ya da ikame işleminden kaynaklı), hem de ikame için bir zaman harcandığı varsayılmıştır.  $i$  ürününün  $j$  ürününü ikame etmesi, birim başına  $c_{ij}$ 'e mal olmakta ve ortalama  $\frac{1}{\mu_{ij}}$  zamanı harcanmaktadır. İkame için harcanan zamanın da üssel dağılımlı bir rassal değişken olduğu varsayılmaktadır.

Bu varsayımlar altında bütün ürünlerin toplam maliyetini enazlayacak optimal çizelgeleme, stok seviyesi ve ikame kararlarının belirlenmesi Markov karar süreci ile yapılabilir. Önceki çalışmalarımıza göre iki-ürün durumu için üretim çizelgeleme ve stok seviyesi, değişim eğrisi (switching curve) ve baz-stok noktası (hedging point) olmak üzere ikili bir yapı ile karakterize edilebilmektedir. İkame kararlarının da gözönünde bulundurulması durumunda her ürün için değişim eğrisine benzer bir ikame eğrisinin varlığı gösterilebilir.

### 3.1 İş Paketi-1 için projenin 1. döneminde yapılan çalışmalar

Çoklu-ürün durumu için ortalama getiri kriteri altında Markov karar süreci fonksiyonel denklemi (functional equation) aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$v(x) + \frac{g}{\Lambda} = \frac{1}{\Lambda} \left( c(x) + \sum \lambda_i v(x - e_i) + \mu \min\{v(x), v(x + e_i)\} \right) \quad (1)$$

$$+ \sum_i (\bar{\mu}_i v(x) + I(x_i > 0) \min\{0, \min_{\{j:j \neq i\}} \{\mu_{ij}(\Delta_{ij}v(x) + c_{ij})\}\}) \quad (2)$$

Yukarıdaki ifadede  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  ürünlerin net envanter seviyesini gösteren vektör,  $\Lambda = \sum_i \lambda_i + \bar{\mu} + \sum_i \bar{\mu}_i$ , olay hızı  $\bar{\mu}_i = \max_j \mu_{ij}$ ,  $c(x) = \sum_i (h_i x_i^+ + b_i x_i^-)$  birim zamandaki toplam maliyet, ve  $\Delta_{ij}v(x) = v(x - e_i + e_j) - v(x)$  olarak tanımlanabilir. Fark vektörü  $\Delta_{ij}$  tanımında  $e_j$ ,  $j$ . girdisi 1 olan birim vektöre karşılık gelmektedir. İfadede,  $I(x_i > 0)$   $i$ . ürünün net envanter seviyesinin (+) olup olmadığını göstermektedir. İfadede  $g$  birim olay zamanında elde edilen ortalama beklenen maliyet,  $v(x)$ ,  $x$  durumunun göreceli değeri (bias function)'dir. Bu denklem sonucunda elde edilen optimal politikanın yapısının iki-ürün için optimal politika yapısına benzerlik gösterdiği sayısal analizlerden görülmektedir. Ancak, karakterizasyonunun yapılması mümkün olmamıştır. Ayrıca durum uzayının büyümesi nedeniyle 4-ürün varsayımı altında bile optimal politikanın ve eniyi toplam maliyetin belirlenmesi mümkün olmamaktadır. Projede çoklu-ürün durumu için sezgiseller önerilmektedir. Literatürdeki çalışmalar incelendiğinde stok maliyeti ve ardışıklama maliyetinin oranının ve bu maliyetlerin ürünler arasında nasıl değiştiğine dair yapısal özelliklerin, ve talep oranının stok seviyesi ve çizelgeleme kararları üzerinde etkili olduğu görülmüştür. Buna göre üç yaklaşım oluşturulmuştur:

1. İlk yaklaşımda, ürünleri bir öncelik sırasına göre dizip, “öncelikli üretim” politikasını başlangıç noktası olarak alan bir sezgisel geliştirilmiştir. Bu sezgisel başlangıç politikasının üzerine bir adımlık bir politika iterasyonu yapılmaktadır. “Öncelikli üretim” politikası statik bir yapıya sahiptir. Yani ikame kararları verilmez ve çizelgeleme kararları sistem stoğunu gözönünde bulundurmaz. Öte yandan politika iterasyonu sonucunda elde edilen politika dinamik bir yapıya sahiptir ve toplam maliyet iyileşir. Sezgiselin geliştirilmesi ile ilgili kısmi önçalışmamızda tamamlamıştık (Bkz. N.Töre, S. Savaşaneril, Middle East Techni-

cal University, Technical Report 12-02, 2012). Proje kapsamında bu sezgiselin geliştirilen diğer sezgisellerle performans karşılaştırması yapılmaktadır. Sezgiseli **Prio-DH** (Priority-Queue based Dynamic Heuristic) olarak adlandıracağız. Prio-DH adımları aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- (a) Optimal stok seviyelerinin belirlenmesi: Öncelikli üretim politikası altında kararlı durumda her ürün için net envanter seviyesinin marjinal ve ortak olasılık dağılımlarının nasıl elde edileceği üzerine bir çok çalışma, literatürde mevcuttur. Moshe ve Cidon (1990) bu çalışmalardan bir tanesidir. Bu olasılık dağılımlarını baz alarak, beklenen maliyet kapalı-formda ifade edilebilir. Örneğin en yüksek öncelikli ürün için beklenen maliyet ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
TC_1 &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} [h_1(S_1 - i)^+ + b_1(S_1 - i)^-] p_{i,j} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} [h_1(S_1 - i)^+ + b_1(S_1 - i)^-] \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} [h_1(S_1 - i)^+ + b_1(S_1 - i)^-] \rho_1^i (1 - \rho_1)
\end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadede  $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu}$ 'dir.  $k$ . öncelikli ürün için beklenen maliyet ifadesi ise,

$$TC_k = \sum_{j=0}^{\infty} [h_k(S_k - j)^+ + b_k(S_k - j)^-] \frac{1}{\rho_k} p_{0,(j+1)}^k$$

olarak gösterilebilir. İfadede  $\rho_k = \frac{\lambda_k}{\mu}$ ,  $p_{0,(j+1)}^k$  iki ürünlü bir sistemde, en yüksek öncelikli ürünün geliş hızının  $\lambda_1 = \sum_{m=1}^k k - 1$  ve 2. öncelikli ürünün geliş hızının  $\lambda_2 = \lambda_k$  olduğu varsayımı altında, ortak olasılık değerini ifade etmektedir. Bu değer en yüksek öncelikli ürünün baz-stok seviyesinde, ve 2. öncelikli ürün baz stoğun  $j + 1$  altında olma durumundaki değerdir. 2. öncelikli ürünün baz stoğun  $j$  altında olma marjinal olasılık değeri ise  $\frac{1}{\rho_k} p_{0,(j+1)}^k$  ile ifade edilir. Maliyet ifadelerine bakıldığında, ifadelerin stok seviyesine göre dışbükey yapıda olduğu ve optimal baz-stok seviyelerinin gazeteci çocuk problemine benzer şekilde bulunabileceği gösterilebilir. Toplam eniyi maliyet, optimal baz-stok seviyeleri altında  $TC(S_1^*, \dots, S_n^*) = \sum_k TC_k$  ile ifade edilir.

- (b) Politika iyileştirme adımı: Stok seviyeleri belirlendikten sonra, (1)'deki fonksiyonel denklemde gösterilen  $\mu \min\{v(x), v(x + e_i)\}$  ifadesinin aldığı değere göre çizelgeleme

kararları iyileştirilmiş, ve  $\sum_i (\bar{\mu}_i v(x) + I(x_i > 0) \min\{0, \min_{\{j:j \neq i\}} \{\mu_{ij} (\Delta_{ij} v(x) + c_{ij})\}\})$  ifadesinin aldığı değere göre de ikame kararları verilmiştir. Öncelikli üretim politikası altında  $\Delta_i v(x) = v(x + e_i) - v(x)$  ve  $\Delta_{ij} = v(x - e_i + e_j) - v(x)$  analitik olarak belirlenmiştir.

- (c) Ürün sıralamasının belirlenmesi: Öncelikli üretim altında ürünlere bir öncelik sırası atanmalıdır. Ürünler değerlerine göre bir sıraya dizilebiliyorsa, envanter tutma maliyeti ve ardısmarlama maliyetlerinin de aynı sıralamaya sahip olacağı varsayılabilir. Bu durumda  $h_1 > h_2 \dots > h_n$  ve  $b_1 > b_2 \dots > b_n$  olur ve en yüksek stok tutma ve ardısmarlama maliyetine sahip ürün en öncelikli ürün olarak atanır. Ancak stok tutma ve ardısmarlama maliyetleri aynı sıralamaya sahip değilse ürünlerin sıralanması için  $TC(S_1^*, \dots, S_n^*)$  fonksiyonunu enazlayan sıralamanın bulunması gereklidir. Bu sıralamayı bulmanın sayısal maliyeti  $O(n!)$  ile ifade edilebilir. Ancak öncelikli üretim için en iyi sıralama bulunsa bile politika iyileştirme adımı sonrasında ortaya çıkan maliyet bir başka sıralama tarafından domine edilebilir.

Prio-DH politikası yukarıda açıklanan 3 adım ile elde edilir.

2. İkinci yaklaşım, “en uzun kuyruğa üret” politikasını baz almaktadır. Bütün ürünlerin benzer olduğu varsayımı altında, yani  $h_1 = h_2 = \dots = h_n$  ve  $b_1 = b_2 = \dots = b_n$ , ve aynı talep hızı varsayımı altında en-uzun-kuyruğa üret politikasının optimal olduğu literatürde gösterilmiştir (Zheng ve Zipkin 1990). Pena-Perez ve Zipkin (1997) ürünlerin farklı stok tutma ve ardısmarlama maliyetleri olduğu, talep hızı ve üretim zamanlarının da farklı olduğu durumlarda baz-stok ve değişim eğrisini belirlemek için sezgiseller geliştirmişlerdir. Bu sezgisellerden iyi performans gösterenlerinin temel karakteri en-uzun-kuyruğa-üret politikasını temel alarak yaklaşık bir değer fonksiyonu elde etmek, ve bu fonksiyonu kullanarak baz-stok ve çizelgeleme kararlarını vermektir. En-uzun-kuyruğa-üret politikası servis-zamanı-kadar-ileri-bak yaklaşımı ile güçlendirilmiştir.

İkinci yaklaşımda benzer bir yöntem ile bir sezgisel geliştirilmiştir. Sezgisel **LQ-STLA** (Longest-queue with Service Time Look Ahead) olarak adlandırılmıştır. Sezgisel politika iki aşamada elde edilmektedir: baz-stokların belirlenmesi ve çizelgeleme ve ikame politikasının belirlenmesi. Bu iki aşama optimal politikada birbirleri ile etkileşim halinde olmasına rağmen sezgiselde ayrı ayrı ele alınmıştır. Buna göre baz-stokların belirlenmesi için

aşağıdaki adımlar izlenmiştir (Veatch ve Wein 1996, p.640)

- (a) En-uzun-kuyruğa-üret politikası altında, her bir ürün için net envanter seviyesi ( $x_k$ ), ya da üretim bekleyen sipariş sayısı ( $D_k$ ) rassal değişkeni için beklenen değer ve varyans (performans ölçüleri) yaklaşık olarak belirlenir. Bu ölçüler farklı ürün durumu için uyarlanır. Uyarlanmış durum altında  $k$  ürünü için varyans,

$$\sigma_k^2 = \frac{\rho/(1-\rho)^2 + N^2(N-1)\rho[1+\rho+(1-2\alpha_k)\rho^2+(1-2\alpha_k)^2\rho^3]}{K^2}$$

ve beklenen değer

$$E[Y_k] = \rho_k/(1-\rho)$$

olarak ifade edilir. Bu ölçüler birbiriyle aynı iki ürün varsayımı altında gerçek değerleri verirken birden fazla ve farklı ürün varsayımı altında yaklaşık değerler verirler. İfadelerde,  $\rho = \sum_k \rho_k = \sum_k \lambda_k/\mu$  ve  $\alpha_k = \rho_k/\rho$  olarak tanımlanır.

- (b) Bu ölçüler baz alınarak, her bir ürün için üretim bekleyen sipariş sayısının bağımsız ve geometrik dağılımlı bir değişken olduğu varsayımı altında dağılım parametreleri belirlenir. Dağılım için şu fonksiyon varsayılmıştır:  $f(y) = pq^{(y-a)-1}$ ,  $y = a + 1, a + 2, \dots$ . İfadede  $q = 1 - \frac{\sqrt{4\sigma_k^2+1}-1}{2\sigma_k^2}$ , ve  $a = E[Y_k] - \frac{1}{1-q}$  olarak alınmıştır.

- (c) Her bir ürün için bağımsız olarak baz-stok seviyesi belirlenir.  $k$  ürünü için baz-stok

$$S_k = \lceil \ln[h_k/(h_k + b_k)]/\ln q \rceil + a$$

ile ifade edilir.

Çizelgeleme ve ikame kararlarının belirlenmesi içinse  $\Delta_i v(x) = v(x + e_i) - v(x)$  ve  $\Delta_{ij} = v(x - e_i + e_j) - v(x)$  değerleri yaklaşık olarak belirlenmiştir.  $\Delta_i v(x)$   $k$ 'ya üretim yapılmasının beklenen maliyette yarattığı farka karşılık gelmektedir. Bu fark, bir servis zamanı sonra maliyetteki beklenen değişim hızı, yani beklenen  $c(x)$  ile yaklaşık olarak bulunabilir. Bir servis zamanı sonrasında bakılması bir-adım-ileri-bak yaklaşımının bir gereğidir. Bir servis zamanı sonra durumun  $x + e_k$  olması mümkün olmayabilir. Bu süre içerisinde gelen tüm talepler gözönünde bulundurulurken olası durumlar belirlenir, buna göre beklenen bir  $c(x)$  hesaplanır.  $k$  ürünü için  $v_k(x)$  aşağıdaki gibi tahmin edilmiştir:

$$v_k(x) \approx E[c_k(x_k - D_k(T))]$$

İfadede  $D_k(T)$  bir servis zamanı içerisinde kaç tane talep gelebileceğini belirler. İfadede  $c_k(x) = h_k(S_k - x)^+ + b_k(S_k - x)^-$ ,  $v_k(x)$  olarak tanımlanmıştır,  $D_k(t)$  ise  $[0, t]$  zamanında  $k$  ürününe gelen talebi belirtmektedir. Beklenen  $c_k(x - D)$ ,  $v_k(x)$  değerini yaklaşık olarak yansıtmaktadır. Bu değerler kullanılarak çizelgeleme ve ikame kararları verilir. LQ-STLA altında toplam maliyeti hesaplamak için kararlı durumdaki akış-denge denklemlerini çözerek olasılık dağılımlarını hesaplamak yeterlidir. LQ-STLA politikasını temel alan bir kaç sezgisel daha önerilmektedir. Bunlar:

- (a) LQ-SSTLA:  $v_k(x)$  degeri yaklaşık olarak elde edilirken

$$v_k(x) \approx E[c_k(x_k - D_k(ST))]$$

kullanılmaktadır. ST servis ve ikame zamanlarını en küçüğünü gösteren rassal değişkendir.

- (b) SI-COST: Çizelgeleme politikası, ardısmarlama durumdaki ürünlerden en yüksek birim ardısmarlama maliyetli ürünün üretilmesi, bütün ürünler stokta ise en düşük birim stok tutma maliyetli ürünün üretilmesi olarak tanımlıdır. İkame en yüksek stok maliyetli üründen en yüksek ardısmarlama maliyetli ürüne yapılır. Baz-stoklar LQ-STLA temel alınarak belirlenir.
- (c) SI-LEVEL: Çizelgeleme ve baz-stok politikaları SI-COST'taki ile aynıdır, ikame en yüksek stok seviyeli üründen en yüksek ardısmarlama maliyetli ürüne yapılır.

3. Önerdiğimiz diğer bir sezgisel ürünlerin ailelere ayrıldığı ve bir aile içindeki ürünlerin yaklaşık aynı  $h$  ve  $b$  maliyetlerine sahip olduğu, aileler arasında ise bir sıralama yapılabildiği durum için geliştirilmiştir. Örneğin 3 aile ve 5 ürün olsun. Bu ürünlerden 1 ve 2 bir aileye 3 ve 4 diğer aileye ait olsun. Bu durumda  $h$  ve  $b$  sıralaması  $h_1 = h_2 > h_3 = h_4 > h_5$  ve  $b_1 = b_2 > b_3 = b_4 > b_5$  olacağı varsayılmıştır. Aileler arasında öncelikli üretim politikası uygunken, aile içinde en-uzun-kuyruğa politikası anlamlıdır. Sezgisel Prio-DH ve en-uzun-kuyruğa-üret politikalarının bir melezi olarak tasarlanmıştır. **Prio-LQ** olarak adlandırılmıştır. Sezgisel Prio-DH politikasını başlangıç politikası olarak alır. Prio-DH'te aynı aileye ait ürünler aynı baz-stok seviyesine sahip olmaz, çizelgeleme ve ikame kararları da asimetriktir. Prio-DH'in önerdiği çizelgeleme ve ikame kararları, aynı aile içindeki ürünler için en-uzun-kuyruğa üret politikasına uygun olarak uyarlanır. Baz stok seviyeleri de eşit hale getirilir.

4. Önerilen en son sezgisel, çizelgelemeyi rassal olarak yapan bir politikayı temel olarak alıp politika iyileştirme adımını uygulayan bir politikadır. Bu sezgisel de Veatch Wein (1996)'da önerilen politikalardan biridir. **Rassal çizelgeleme** olarak adlandırılan sezgisel,  $\frac{\lambda_k}{\sum_j \lambda_j}$  oranına uygun olarak rassal olarak bir ürünü seçerek üretim yapan bir politikadır. Bu politika aslında  $\mu$  üretim kapasitesini her ürüne  $\frac{\lambda_k}{\sum_j \lambda_j}$  oranında tahsis ederek  $N$  tane  $M/M/1$  kuyruğu oluşturmaya karşılık gelmektedir. Buna göre optimal baz-stok her bir  $M/M/1$  kuyruğu altındaki toplam maliyeti en azlayan stok seviyesi olarak belirlenir.  $\Delta_i v(x) = v(x + e_i) - v(x)$  ve  $\Delta_{ij} = v(x - e_i + e_j) - v(x)$  değerleri  $M/M/1$  kuyruğuna karşılık gelen fonksiyonel denklemden elde edilir. Bu farklar ikame ve çizelgeleme kararlarında kullanılır.

Son olarak toplam maliyet için bir alt-sınır ve üst-sınır belirlenmiştir. Bu sınırların belirlenmesi için politikalar aşağıdaki gibi tanımlanır:

1. Üst-sınır: Çizelgeleme ve baz-stok seviyeleri önce-gelen-önce-gider (FCFS) politikasına göre tanımlanır. İkame yapılmaz. Baz-stok seviyelerinin nasıl belirleneceği Buzacott ve Shantikumar (1993)'da açıklanmıştır.
2. Alt-sınır: Literatürde Ha (1997) ve deVericourt ve ark. (2002) tarafından çalışılan problem temel alınarak bir maliyet elde edilmiştir. Bu problemde bütün ürünler için tek bir stok tutulmaktadır. Herhangi bir ürüne gelen talep, stoktan karşılanır ya da ardısmarlanır. Ürünün ardısmarlama maliyetine göre stoktan karşılanıp karşılanmamasına (yani stok-tayın seviyesine) karar verilir. Buna göre stokta ürün olmasına rağmen bazı ürünler ardısmarlama tutulabilir. Bu problemin çözümü ikamenin maliyetsiz olduğu ve anında gerçekleştiği varsayımı altında, ve tüm ürünlerin aynı tutma maliyetine sahip olduğu varsayıldığında optimal çözümü vermektedir. deVericourt ve ark. (2002) bu problemde  $N$ -ürün için optimal maliyeti kapalı-formda veren bir yöntem geliştirmiştir. Buna göre deVericourt ve ark. (2002)'de belirlenen tayın seviyeleri, bu problemdeki ikame seviyelerine karşılık gelmektedir.

## 3.2 Sayısal çalışma

Sezgiselleri karşılaştırmak için 4 ürün'den oluşan bir sistemde farklı  $h$ ,  $b$  ve  $\lambda$  değerleri altında maliyet değerleri elde edilmiş, hangi değerler altında hangi sezgiselin iyi sonuç verdiği belir-



lenmiştir. İki küme parametre seti oluşturulmuştur: Küme 1 ve Küme 2. Küme 1’de rastgele seçilmiş 100 örnek belirlenmiştir. Sezgisellerin performansları bu örnekler için Düşük, Orta-Düşük ve Orta-Yüksek trafik altında incelenmiştir. Küme 2’de ise bazı özel parametre durumları incelenmiştir. Sayısal analizde  $\mu = 1$ ,  $\mu_{ij}$  bütün ürünler için aynı varsayılmıştır.  $\mu_{ij}$  ise  $\tau$  ile gösterilmektedir. Ön analizlerde elde edilen sonuçlara göre Prio-LQ ve Rassal Çizelgeleme sezgiselleri, diğer sezgisellere göre oldukça düşük performans göstermiştir. Bu nedenle bu sezgiseller için detaylı sayısal çalışmaya devam edilmemiştir.

### 3.2.1 Sezgisellerin Küme 1 parameter değerleri altında performansları

Bu parametere kümesinde 100 tane rastgele örnek oluşturulmuştur. Birim maliyetler Uniform dağılımdan elde edilmiştir. Buna göre stokta tutma maliyetleri  $U[0.2,1]$ , ardışmarlama maliyetleri  $U[0, 30]$ , ve ikame maliyeti  $U[0,2]$ ’dan elde edilmiştir. İkame hızı  $\tau = 5$  olarak, ve üretim hızı da her ürün için  $\mu = 1$  olarak alınmıştır. Talep gelme hızları aşağıda belirtilen şekilde yaratılmıştır: Üç trafik yoğunluğu seviyesi belirlenmiştir: düşük, orta-düşük ve orta- yüksek. Düşük trafik için, toplam talep gelme hızı  $(\sum_k \lambda_k) U [0,0.2]$ , orta-düşük trafik için, toplam talep gelme hızı  $U[0.2., 0.6]$  ve orta yüksek trafik için toplam talep hızı  $U[0.6,0.8]$  dağılımından elde edilmiştir. Toplam talep gelme hızından ürünlerin talep gelme hızları aşağıdaki gibi elde edilmiştir. Dört adet  $U_i \sim U[0, 1]$  rassal değişken yaratılmıştır.  $\lambda_i$ ’yi elde etmek için, toplam talep gelme hızı  $\frac{U_i}{\sum_j U_j}$  ile çarpılmıştır. Her bir trafik seviyesi için 100 örnek oluşturulmuştur. Her örnek için  $2.C(n = 4, 2)$  adet birim ikame maliyeti,  $n = 4$  tane stokta tutma maliyeti ve ardışmarlama maliyeti yaratılmıştır. Sezgisellerin performansı her trafik düzeyi için Tablo 1-5’te sunulmuştur.

**Küme 1-Düşük Trafik Yoğunluğu** Tablo 1’de ortalama, standart sapma ve persentil bilgileri, LQ-STLA maliyetine göre % karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Persentil bilgisi performansın nasıl dağıldığı hakkında fikir vermek için verilmiştir. Hafif trafik altında Prio-DH’in LQ-STLA’dan örneklerin %50’sinde daha iyi çalıştığı gözlemlenmiştir, ayrıca durumların %95’inde Prio-DH an az LQ-STLA kadar iyi çalışmıştır. Diğer sezgisel yöntemler, LQ-SSTLA, SICOST ve SILEVEL ortalama %6 oranında LQ-STLA’dan kötü çalışmaktadır. 100 durumun sadece 6’sında LQ-STLA’dan iyi çalışmaktadırlar. LQ-SSTLA’nın LQ-STLa’dan daha iyi çalıştığı durumlarda, SICOST ve SILEVEL’da daha iyi çalışmaktadır. Küme 1’de SICOST’un SILEVEL’dan

Table 1: Sezgisellerin hafif trafik yoğunluğu altında karşılaştırması (Yüzde olarak)

|           | PRIO  | PRIO-DH | LQ-SSTLA | SICOST | SILEVEL | UB    | LB     |
|-----------|-------|---------|----------|--------|---------|-------|--------|
| ortalama  | 4.14  | -0.97   | 6.44     | 6.04   | 5.98    | 6.61  | -46.46 |
| stsap     | 7.13  | 2.25    | 10.32    | 9.79   | 10.04   | 8.31  | 21.24  |
| min       | -8.33 | -14.46  | -3.40    | -3.40  | -12.23  | 0.00  | -72.25 |
| 0.10 perc | 0.00  | -3.32   | 0.00     | 0.00   | 0.00    | 0.36  | -65.99 |
| 0.25 perc | 0.00  | -0.94   | 0.00     | 0.00   | 0.00    | 0.85  | -62.01 |
| 0.50 perc | 0.27  | -0.01   | 0.75     | 0.71   | 0.30    | 3.15  | -52.95 |
| 0.75 perc | 5.52  | 0.00    | 10.55    | 10.10  | 10.27   | 9.36  | -39.58 |
| 0.90 perc | 13.98 | 0.00    | 18.30    | 17.03  | 16.42   | 18.50 | 0.00   |
| maks      | 39.30 | 1.16    | 56.24    | 56.24  | 56.24   | 45.39 | 0.01   |

görece olarak çok daha iyi çalışmadığı görülmüştür. Son olarak Üst-sınır (ÜS) ve alt-sınırı (AS) karşılaştırdığımızda, ÜS ile LQ-STLA ve Prio-DH arasındaki fark ortalama olarak %7'dir. Bu düşük bir değerdir, bunun nedeni sezgisel yöntemlerin düşük ikame oranları olabilir. ÜS altında hiçbir ikame kararı ve üretim planlama kararı alınmamaktadır. Tablo 1'e göre hafif trafik altında, örneklerin %25'inde sonuçlar LQ-STLA'ya çok yakındır. Buna göre örneklerin dörtte birinde ikame ve üretim kararlarından herhangi bir getiri almamaktayız. AS örneklerin en az %75'inde en az %40 gevşektir. Ama örneklerin %10'unda LQ-STLA'ya oldukça yakın sonuçlar vermektedir. Bu durumlar stok tayinlemasının baz-stok seviyesinin 0 olması nedeniyle yapılmayan durumlardır.

### İkamenin Değeri ve Etkisi

Çalışmada çift yönlü ikame ve tek-yönlü ikame varsayımı altında, Prio-DH ve LQ-STLA performansları incelenmiştir. İkamenin olmadığı durum da karşılaştırılmıştır. Sonuçlar Tablo 2'de sunulmuştur. Düşük trafik altında, ikame olmadığı varsayımı altında, LQ-STLA daha iyi performans göstermektedir. İkame arttıkça Prio-DH LQ-STLA'ya göre daha iyi performans göstermektedir. Bu Prio-DH'in LQ-STLA'ya kıyasla ikameleri daha efektif kullandığını söyler. Tablo 2'deki kolon 5 bize LQ-STLA altında ikamenin değeri hakkında bilgi vermektedir. Bu bize bazı örneklerde (örneklerin < 10'unda), ikamenin %10'dan daha fazla maliyet düşüşüne neden olduğunu göstermekte. Tek yönlü ikameye bakıldığında ise, maliyet düşüşü iki-yönlüde [0, %28] aralığındayken ve ortalama %3.38 iken, düşüş miktarı [0, 2.67%] aralığına ve ortalama %0.15'e gerilemektedir.

**Küme 1- Orta-Düşük Trafik Yoğunluğu** Tablo 3'te, 100 durum için gerçekleşen ortalama,

Table 2: Prio-DH ve LQ-STLA'nın tek-yönlü ikame ve ikamesiz durumlar altında hafif trafik için karşılaştırması (yüzde olarak)

|           | Prio-DH - LQ-STLA |                 | Çift yönlü ikamenin Prio-DH altında getirisi | Çift yönlü ikamenin LQ-STLA altında getirisi |
|-----------|-------------------|-----------------|--|--|
|           | İkame yok         | Tek yönlü ikame |  |  |
| ortalama  | 0.03              | 0.01            | 4.35   | 3.38   |
| stsap     | 0.29              | 0.12            | 5.89   | 5.63   |
| min       | -2.17             | -0.29           | 0.00   | 0.00   |
| 0.10 perc | 0.00              | -0.03           | 0.00   | 0.00   |
| 0.25 perc | 0.00              | 0.00            | 0.00   | 0.00   |
| 0.50 perc | 0.00              | 0.00            | 1.78   | 0.00   |
| 0.75 perc | 0.01              | 0.00            | 6.56   | 4.76   |
| 0.90 perc | 0.27              | 0.08            | 12.93  | 12.14  |
| maks      | 0.75              | 0.74            | 28.21  | 28.21  |

standart sapma ve persentil bilgisi verilmektedir. Örneklerin %40'ında Prio-DH, LQ-STLA'ya

Table 3: Sezgisel yöntemlerin orta-düşük trafik yoğunluğu altında karşılaştırması (Yüzde olarak)

|           | PRIO  | PRIODH | LQ-SSTLA | SICOST | SILEVEL | UB    | LB     |
|-----------|-------|--------|----------|--------|---------|-------|--------|
| ortalama  | 13.94 | 0.47   | 15.51    | 6.70   | 5.72    | 16.85 | -50.39 |
| stsap     | 6.31  | 5.01   | 15.17    | 7.06   | 6.91    | 6.14  | 10.19  |
| min       | 1.92  | -18.20 | -1.26    | -3.00  | -4.74   | 4.05  | -72.92 |
| 0.10 perc | 6.17  | -4.76  | 2.45     | 1.23   | 0.08    | 9.12  | -63.08 |
| 0.25 perc | 9.11  | -1.74  | 5.28     | 2.65   | 2.15    | 11.79 | -58.01 |
| 0.50 perc | 13.89 | 0.59   | 11.23    | 5.26   | 4.56    | 16.79 | -52.05 |
| 0.75 perc | 18.44 | 2.33   | 22.43    | 8.01   | 6.79    | 21.42 | -43.15 |
| 0.90 perc | 22.30 | 6.80   | 33.60    | 12.17  | 11.59   | 25.72 | -37.30 |
| maks      | 29.93 | 15.90  | 70.77    | 46.84  | 44.74   | 30.30 | -25.11 |

nazaran daha iyi çalışmıştır, ortalama olarak LQ-STLA %0.5 daha düşük maliyet vermiştir. Orta-düşük seviyedeki trafik için LQ-SSTLA'nın performansı da hafif trafikle karşılaştırıldığında kötüleşmektedir. Ama SICOST ve SILEVEL sezgisel yöntemlerinin performansı benzer kalmaktadır. Daha miyopik davranan LQ-SSTLA LQ-STLA'yla karşılaştırıldığında dört kat fazla ikame yapmaktadır. SICOST ve SILEVEL ise ortalama olarak iki kat fazla ikame gerçekleştirmektedir. Hem Prio-DH'in hem de LQ-STLA UB(%10) ve LB(%50) politikalarının uzağında çalışmaktadır.

### İkamenin Değeri ve Etkisi

Orta düşük trafik değerleri altında Prio-DH ve LQ-STLA politikaları karşılaştırıldığında, daha az

ikameye izin verildiğinde Prio-DH'in performansı azalmaktadır. LQ-STLA için ikamenin değeri ortalama olarak %7.9 iken Prio-DH in %5.48'dir. ikamenin getirisi LQ-STLA için %20'lere, Prio-DH için ise %14'lere çıkabilmektedir.

Table 4: Prio-DH ve LQ-STLA'nın farklı ikame politikaları altında orta-düşük trafik için karşılaştırması(yüzde olarak)

|           | Prio-DH - LQ-STLA |                 | İki yonlu ikamenin Prio-DH altında getirisi | İki yonlu ikamenin LQ-STLA altında getirisi |
|-----------|-------------------|-----------------|---|---|
|           | İkame yok         | İkame tek yönlü |   |   |
| ortalama  | 3.05              | 3.52            | 7.90  | 5.48  |
| stsap     | 3.39              | 4.15            | 3.43  | 2.99  |
| min       | -4.46             | -2.93           | 1.25  | 0.11  |
| 0.10 perc | 0.09              | -0.11           | 3.95  | 1.91  |
| 0.25 perc | 0.84              | 0.63            | 5.50  | 3.24  |
| 0.50 perc | 2.38              | 2.14            | 7.46  | 5.20  |
| 0.75 perc | 4.53              | 5.88            | 9.65  | 6.94  |
| 0.90 perc | 7.01              | 8.27            | 12.30                                       | 9.76  |
| maks      | 14.66             | 18.19           | 19.44                                       | 13.86                                       |

**Küme 1- Orta-Yüksek Trafik** Orta-yüksek trafikte, Prio-DH'in LQ-STLA'ya göre performansı daha da kötüleşmektedir, örneklerin sadece %18'inde LQ-STLA'dan daha iyi çalışmaktadır. Bu nedenle, trafik yoğunluğunun [0.6, 0.8] aralığında olduğu ve stokta tutma maliyetleri ve ardısmarlama maliyetlerinin aynı sırayı takip etmediği durumlarda LQ-STLA daha iyi bir sezgisel yöntem olarak önerilebilir. Orta-yüksek trafik seviyesinde, LQ-SSTLA, SICOST ve SILEVEL orta-düşük trafik seviyesine benzer performans göstermiştir. Göreceli olarak ortalamada %14, %7 ve %7 kadar LQ-STLA'dan fark göstermişlerdir. SICOST az miktarda ama önemli ölçüde SILEVEL'a oranla kötü çalışmıştır. Orta-yüksek trafik altında, LQ-STLA %26 oranında UB politikasından düşük maliyet vermiştir, Prio-DH' de ise bu oran %17 de kalmaktadır. Prio-DH altında ikame hızı LQ-STLA'ya nazaran 3 kat fazladır. Bu da orta yüksek trafik seviyesinde Prio-DH'in çizelgelemeyi yapmakta LQ-STLA'ya göre başarı gösteremediğini söyler. LQ-STLA daha düşük maliyet verdiği için, LB politikasıyla LQ-STLA sonucu arasındaki fark daha azdır, bu fark %37'dir. LQ-STLA altında ikamenin en yüksek değeri %11.87 iken Prio-DH altında %9.48'dir. Ortalama olarak LQ-STLA altında ikamenin değeri %5.02 iken Prio-DH altında %4.04'dür.

Table 5: Sezgisel yöntemlerin orta-yüksek trafik yoğunluğu altında karşılaştırması(Yüzde olarak)

|           | PRIÖ  | PRIÖ-DH | LQ-SSTLA | SICOST | SILEVEL | UB    | LB     |
|-----------|-------|---------|----------|--------|---------|-------|--------|
| ortalama  | 23.31 | 8.00    | 14.03    | 7.63   | 7.17    | 26.26 | -37.42 |
| stsap     | 7.39  | 6.16    | 13.03    | 3.48   | 3.31    | 5.21  | 11.57  |
| min       | 6.73  | -6.25   | -0.92    | -3.65  | -3.75   | 13.41 | -62.97 |
| 0.10 perc | 14.44 | -0.69   | 2.28     | 4.14   | 3.07    | 19.63 | -51.79 |
| 0.25 perc | 18.20 | 4.84    | 4.51     | 5.50   | 5.21    | 22.45 | -46.35 |
| 0.50 perc | 23.77 | 8.31    | 9.82     | 7.75   | 7.15    | 26.61 | -37.92 |
| 0.75 perc | 28.82 | 11.35   | 20.05    | 9.79   | 9.34    | 29.80 | -28.57 |
| 0.90 perc | 32.45 | 16.98   | 30.91    | 12.22  | 11.53   | 32.21 | -20.69 |
| maks      | 40.30 | 22.66   | 61.53    | 15.54  | 15.30   | 38.30 | -15.83 |

Table 6: Prio-DH ve LQ-STLA'nın farklı ikame politikaları altında orta-yüksek trafik için karşılaştırması(yüzde olarak)

|           | Prio-DH - LQ-STLA |                 | İkamenin(çift)<br>Prio-DH altında<br>getirisi | İkamenin(çift)<br>LQ-STLA<br>altında getirisi |
|-----------|-------------------|-----------------|---|---|
|           | İkame yok         | İkame tek yönlü |   |   |
| ortalama  | 9.09              | 10.26           | 5.02  | 4.04  |
| stdev     | 5.59              | 5.97            | 2.60  | 1.95  |
| min       | -2.24             | -1.57           | 0.26  | 0.02  |
| 0.10 perc | 0.78              | 1.32            | 2.30  | 1.78  |
| 0.25 perc | 5.44              | 6.15            | 2.87  | 2.53  |
| 0.50 perc | 9.20              | 10.55           | 4.72  | 3.91  |
| 0.75 perc | 12.69             | 13.47           | 6.44  | 5.24  |
| 0.90 perc | 16.70             | 18.09           | 8.53  | 6.70  |
| maks      | 21.66             | 23.27           | 11.87   | 9.48  |

### 3.2.2 Sezgisellerin Küme-2 parameter değerleri altında performansları

Bu kısımda sezgisel yöntemlerin performansı bazı özel parametre değerleri için karşılaştırılmıştır. Sonuçlar 6 grup için alınmıştır. LQ-STLA'nın orta düşük trafik altında Prio-DH'e göre daha iyi sonuçlar verdiğini gözlemlemiştik, buna karşın Prio-DH ise düşük trafik düzeylerinde iyi sonuç vermektedir. Talep gelme hızı yüksek olduğundaysa, parametrelerin dağılımlarına bağlı olarak LQ-STLA veya Prio-DH daha iyi çalışıyor olabilir. Eğer parametre seti doğal bir öncelikli sıralama seçiyorsa, Prio-DH daha iyi sonuçlar verecektir. Bu başlıkta başka bazı parametre setleri hangi sezgisel yöntemin hangi şartlarda daha iyi çalıştığını gözlemleyebilmek için analiz edilmiştir. Bu bölümde sezgisel yöntemlerin karşılaştırılması yapılmış, ikamenin getirilerine değinilmemiştir.

- Grup 1: Aynı  $h$ , değişken  $b$**  Parametre değerlerinin ilk grubu aşağıdaki yapıyı içerir: Bu örnek grubunda stokta tutma maliyeti bütün ürünler için aynıdır ve  $h \in \{1, 3, 5, 10\}$  kümesindeki değerleri alır. Ardısmarlama maliyetleri artan bir sıralama gösterir.  $b_1 \in \{5, 6, 7\}$ ,  $b_2 = 2b_1$ ,  $b_3 = 3b_1$ , ve  $b_4 = 4b_1$ . Talep gelme hızları her ürün ve her durum için aynıdır ve  $\lambda_i = 0.2$ 'ye eşitlenmiştir. Toplam olarak 12 örnek çalışılmıştır. Öncelik sırası  $4 \prec 3 \prec 2 \prec 1$  olarak alınmıştır. Tablo 7'da sıralı ardısmarlama maliyetleri

Table 7: Küme 2-Grup 1 için sezgisel yöntemlerin karşılaştırması (yüzde olarak)

| Ornek | h  | $b_1$ | Prio-DH | LQ-SSTLA | SICOST | SILEVEL | UB   | LB   |
|-------|----|-------|---------|----------|--------|---------|------|------|
| 1     | 1  | 5     | 6.4     | 0.7      | 1.0    | 2.1     | 38.8 | -5.7 |
| 2     |    | 6     | 6.2     | 0.3      | 0.8    | 2.0     | 36.6 | -6.4 |
| 3     |    | 7     | 10.1    | 0.2      | 0.8    | 2.1     | 39.5 | -4.4 |
| 4     | 3  | 5     | 5.0     | 1.1      | -0.5   | 0.3     | 49.3 | -3.6 |
| 5     |    | 6     | 4.9     | 0.3      | -0.1   | 0.8     | 45.0 | -5.2 |
| 6     |    | 7     | 1.1     | 0.1      | -0.3   | 0.5     | 42.1 | -6.5 |
| 7     | 5  | 5     | 6.5     | 0.4      | 0.1    | 0.8     | 56.9 | -1.8 |
| 8     |    | 6     | 4.7     | 0.0      | -0.6   | 0.1     | 51.6 | -3.3 |
| 9     |    | 7     | 1.5     | 0.0      | -0.9   | -0.2    | 46.9 | -5.6 |
| 10    | 10 | 5     | 21.5    | 0.0      | -0.1   | 0.3     | 61.8 | -0.5 |
| 11    |    | 6     | 11.0    | 0.0      | -0.2   | 0.4     | 57.8 | -0.7 |
| 12    |    | 7     | 6.5     | 0.0      | -0.2   | 0.3     | 59.0 | -0.5 |

altında ve  $h$  (ya da  $\frac{h}{b}$ ) düşük veya yüksek olduğunda, LQ-STLA'nın, Prio-DH'den daha iyi çalıştığı görülüyor. Eğer  $\frac{h}{b}$  düşükse, baz-stok düzeyleri yüksektir. Bu durumlarda, Prio-DH ürünlerin baz-stok düzeyleri arasındaki farkı arttırır. Öte yandan, LQ-STLA daha dengeli bir baz-stok dağılımına neden olur. En düşük öncelikli ürün Prio-DH'in aksine

en yüksek baz-stok seviyesine sahip olmak zorunda değildir, çünkü düşük ardısmarlama maliyeti, düşük baz-stok seviyesini de beraberinde getirir.  $\frac{h}{b}$  oranı yüksek olduğunda, baz-stok düzeyleri düşüktür (0 ya da 1). Bu durumda, LQ-STLA stoğu yüksek ardısmarlamalı üründe tutmaktadır, düşük ardısmarlama maliyetli ürünler için ise stok tutmamaktadır. Stokta tutmak, ardısmarlamalara engel olmakta ve ikameleri kolaylaştırmaktadır. Prio-DH ise bunun tersini yapmaktadır: düşük ardısmarlama maliyetli ürünün baz-stok düzeyini arttırmakta fakat yüksek ardısmarlamalı ürünler için stok tutmamaktadır. Yüksek stokta tutma maliyeti altında, gereksiz stok tutmak ekstra maliyete neden olmaktadır. Baz-stok düzeyleri LQ-STLA altında daha dengeli ve daha yüksektir, bu nedenle bu örneklerde daha tercih edilen bir yöntemdir. Son olarak bu grupta diğer sezgisel yöntemler (LQ-SSTLA, SICOST, SILEVEL) genellikle yakın sonuçlar vermiştir. Bazı örneklerde daha iyi sonuçlar da gözlemlenmiştir. Prio-DH dışındaki bütün sezgisel yöntemler LB'ye yakın sonuçlar vermiştir.

2. **Grup 2: Aynı  $h$ , değişken  $b$ , değişken  $\lambda$ .** Bu grupta,  $h = 3$ ,  $b_1 = 5$ ,  $b_2 = 10$ ,  $b_3 = 15$ ,  $b_4 = 20$  alınmıştır. Talep gelme hızları her ürün için eşittir ve  $\lambda_i = \{0.16, 0.18, 0.20, 0.21, 0.22\}$  kümesinden değerler almaktadır. Talep gelme hızı orta-yüksek olduğunda(0.16-0.18), talep

Table 8: Grup 2 için sezgisel yöntemlerin karşılaştırması(yüzde olarak)

| Ornek | $\lambda$ | Prio-DH | LQ-SSTLA | SICOST | SILEVEL | UB   | LB   |
|-------|-----------|---------|----------|--------|---------|------|------|
| 1     | 0.16      | 2.0     | 1.2      | -0.3   | 0.6     | 47.4 | -4.4 |
| 2     | 0.18      | 3.0     | 0.5      | -0.3   | 0.6     | 48.6 | -5.4 |
| 3     | 0.2       | 5.0     | 1.1      | -0.5   | 0.3     | 49.3 | -3.6 |
| 4     | 0.21      | -0.9    | 0.5      | -0.5   | 0.2     | 47.6 | -3.8 |
| 5     | 0.22      | -3.9    | 0.2      | 0.5    | 1.0     | 44.9 | -5.9 |

ardısmarlama düşmeden stoktan karşılanabilmektedir. Bu çizelgelemeye olan ihtiyacı ve Prio-DH için gerekliliği azaltmaktadır. LQ-STLA'da baz-stok düzeyleri düşük sıralama büyüklükleri gözeterek atandığından, bütün kapasite eksiğe atanabilmektedir. Bu da LQ-STLA'nın daha iyi performans göstermesine neden olmaktadır (Bakınız Tablo 8). Talep gelme hızları yükseldiğinde, politikanın hangi ürüne öncelikli olarak hizmet vereceğini kararlaştırması gerekmektedir, çünkü herhangi bir zamanda ürünlerin baz-stok düzeylerinden uzaklaşma ihtimali artmaktadır. Bu senaryo için, talep hızı artıkça, Prio-DH LQ-STLA'dan daha iyi çalışmıştır. Trafik yoğunluğu arttıkça, Prio-DH'in LB politikasına daha yakın sonuçlar verdiği görülmüştür. Bu nedenle politika yüksek trafikte şöyle bir yapı göstermektedir:

Stoklar tek bir ürün var gibi havuzlanmış ve stokta ardışmarlama maliyetine göre tayınlanmıştır. Trafik hızı arttıkça, Prio-DH baz-stok düzeylerini böyle bir politikaya yol açacak şekilde düzenlemektedir. En düşük önceliğe sahip ürün diğer ürünlere nazaran oldukça yüksek bir baz-stok düzeyine sahiptir, bu nedenle ikame LQ-STLA'ya oranla çok yüksektir. Prio-DH stoğu havuzlamakta bu nedenle daha düşük stok tuma maliyetinden faydalanmaktadır. LQ-STLA bütün ürünlere eşit davrandığından, havuzlamayı kolaylaştıran baz-stok yapısı gözlenmemektedir. Diğer sezgisel yöntemler LQ-STLA'ya yakın sonuçlar vermiştir. Yüksek trafik altında bu sezgisel yöntemlerin ikame hızları da benzerdir, bu oran Prio-DH'in verdiği ikame hızına oranla oldukça düşüktür.

3. **Grup 3: Serpilmiş  $b$ .** Bu grupta  $h = 3$ ,  $\lambda_i = 0.2$  kabul edilmiştir. (Stok tutma maliyeti ve talep gelme hızını sabit alarak)  $b_1 = 12.5 - 3X$ ,  $b_2 = 12.5 - X$ ,  $b_3 = 12.5 + X$ ,  $b_4 = 12.5 + 3X$  alınmıştır, burada  $X$  faktörü ardışmarlama maliyetlerinin dağılımını belirler. Dağılım faktörü from  $X \in \{2, 2.25, 2.5, 2.75, 3\}$  kümesinden seçilmiştir. Toplam 5 durum için analiz yapılmış, böylece ürünler arasındaki öncelikli yapının güçlenmesinin performansa etkisi araştırılmıştır. SICOST her durum altında LQ-STLA'dan daha iyi sonuçlar vermiştir

Table 9: Grup 3 için sezgisel yöntemlerin karşılaştırması(yüzde olarak )

| Ornek | Serpilme (X) | Prio-DH | LQ-SSTLA | SICOST | SILEVEL | UB    | LB    |
|-------|--------------|---------|----------|--------|---------|-------|-------|
| 1     | 12           | 4.57    | 0.00     | -1.20  | -0.49   | 43.29 | -1.45 |
| 2     | 13.5         | 4.78    | 0.21     | -0.89  | -0.15   | 46.15 | -2.20 |
| 3     | 15           | 5.03    | 1.12     | -0.47  | 0.30    | 49.32 | -3.59 |
| 4     | 16.5         | 1.33    | 1.13     | -0.37  | 0.43    | 52.13 | -5.39 |
| 5     | 18           | 3.36    | 0.00     | -0.42  | 0.35    | 57.20 | -5.81 |

(Tablo 9). Bu da optimal politikanın bu politikalar tarafından belirlenen üretim ve ikame politikasına özellikle dağılım faktörünün yüksek olduğu durumlarda yakın olduğunu söyler. Daha önemlisi arttırılmış ikame oranı bu grupta performansı arttırmıştır. Ardışmarlama dağılımı düşük olduğunda, LQ-STLA Prio-DH'den daha iyi çalışmıştır. Dağılım faktörünün 0 olduğu durumda, bütün ürünler eşittir, bu durumda optimal politikanın LQ-tipi olmasını bekleriz. Dağılım faktörü düşük olduğunda, üretim politikası en uzun kuyruk politikasına benzerdir, bu nedenle LQ-STLA baz-stok düzeylerini daha iyi hesaplar, bu LQ-STLA'nın daha iyi performans göstermesine neden olur. Dağılım arttığında Prio-DH'in performansı artmış ama LQ-STLA'yı yakalayamamıştır. Bunda seçilen stok tutma maliyetinin etkisi vardır. Seçilen düşük stok tuma maliyeti yüksek baz-stok düzeylerine neden olmuş, öncelikli



yapının görüldüğü ardışmarlama durumlarının daha nadir görülmesine neden olmuştur, bu da Prio-DH'in performansını kötü etkilemiştir. Diğer bir ilginç gözlem de, hem LQ-STLA hem de Prio-DH için, ardışmarlama maliyetlerinin dağılımı arttıkça, sistemin daha düşük maliyet vermesidir. Bunun nedeni yüksek ardışmarlama maliyetli ürünün hemen hizmet alması, bu nedenle çok yüksek maliyetli olsa bile bunun çok öneminin kalmamasıdır. Ama düşük önceliğe sahip ürün daha uzun süreler hizmet beklediğinden, ardışmarlama maliyeti dağılımı arttıkça bekleyen ardışmarlanan ürünler görece olarak daha düşük maliyet yaratacaktır. Diğer bir gözlem de, Prio-DH için (LQ-STLA için de), ardışmarlama maliyeti dağılımı arttıkça, baz-stok düzeyleri düşmektedir. Böylece daha düşük stokta tutmayla, üretim planlama maliyeti daha iyi kontrol etmektedir.

4. **Grup 4: Aynı  $b$ , değişken  $h$ .** Bu düzenekte  $h_1 = 5$ ,  $h_2 = 3$ ,  $h_3 = 2$ ,  $h_4 = 1$ ,  $b \in \{15, 18, 21\}$ , and  $\lambda_i = \{0.2, 0.22\}$  olduğu varsayılmıştır. Ürünler arasındaki öncelik sadece stokta tutma maliyetlerinden kaynaklanmıştır. Ürünler stokta tutma maliyetlerine

Table 10: Grup 4 için sezgisel yöntemlerin karşılaştırması(yüzde olarak)

| Ornek | b  | $\lambda$ | Prio-DH | LQ-SSTLA | SICOST | SILEVEL | UB    | LB     |
|-------|----|-----------|---------|----------|--------|---------|-------|--------|
| 1     | 15 | 0.2       | -13.71  | 1.21     | 7.27   | 7.38    | 29.85 | -34.52 |
| 2     | 18 |           | -13.99  | 1.71     | 6.28   | 6.48    | 25.52 | -36.66 |
| 3     | 21 |           | -2.18   | -0.68    | 9.17   | 9.23    | 20.74 | -39.27 |
| 4     | 15 | 0.22      | -17.94  | 1.26     | 10.23  | 10.10   | 21.79 | -32.06 |
| 5     | 18 |           | -12.91  | 0.10     | 13.32  | 13.29   | 17.96 | -34.23 |
| 6     | 21 |           | -10.46  | 0.12     | 12.46  | 12.46   | 17.70 | -34.71 |

göre sıralandığında, Prio-DH'in LQ-STLA'ya nazaran daha iyi performans gösterdiği ortaya çıkmıştır (Bakınız Tablo 10). Talep hızı arttıkça Prio-DH'in performansı azalmaktadır. Bu grupta, LQ-SSTLA'nın da LQ-STLA'ya yakın sonuç verdiği gözlenmiştir, ama SICOST ve SILEVEL görece olarak yüksek maliyetler vermiştir. SICOST ve SILEVEL altında ikame hızları LQ-STLA'nın oranına göre düşüktür. Dahası, bütün sezgisel yöntemler LB'nin uzağında, görece olarak UB'ye yakın çalışmışlardır. LQ-STLA için baz-stok düzeyleri kendi aralarında en fazla 1 fark göstermiştir, buna karşılık Prio-DH için bu fark oldukça yüksektir. İkame oranları her iki sezgisel yöntem için de yakındır. Prio-DH için düşük stok tutma maliyetli üründe yüksek stok bulundurmamak, kapasite atanmasını daha etkili yapmasına neden olmuştur.

5. **Grup 5: Kümelenmiş ürünler** Bu grupta  $h - b$  değerlerine göre kümelenmiş ürünler

değerlendirilmektedir. 1. kümede  $h = 5$ ,  $b = 20$  ve 2. kümede  $h = 1$ ,  $b = 10$ . 2. küme Prio-DH'de daha düşük önceliğe sahiptir. Tablo 11'da talep gelme hızları  $\lambda_i = \{0.2\}$ 'ye ve Tablo 12'da ise  $\lambda_i = \{0.10, 0.11, \dots, 0.18\}$  eşitlenmiştir. Her iki tabloda da 1. kümedeki ürün sayısı No-C1, 2. küme'deki ürün sayısı ise No-C2 olarak gösterilmiştir. Tablo 11'da

Table 11: Grup 5 için  $\lambda_i = 0.2$  olduğu durum için sezgisellerin karşılaştırması(yüzde olarak)

| Örnek | (No-C1, No-C2) | Prio-DH | LQ-SSTLA | SICOST | SILEVEL | UB    | LB     |
|-------|----------------|---------|----------|--------|---------|-------|--------|
| 1     | (1,3)          | 5.82    | -7.97    | 16.35  | 15.89   | 42.47 | -26.73 |
| 2     | (2,2)          | -0.97   | -6.21    | 17.28  | 17.43   | 46.75 | -43.05 |
| 3     | (3,1)          | -12.48  | -2.49    | 10.39  | 10.58   | 40.69 | -54.59 |

Table 12: Grup 5 için farklı  $\lambda_i$  değerleri için sezgisellerin karşılaştırması(yüzde olarak)

| Instance | $\lambda$ | Prio-DH | LQ-SSTLA | SICOST | SILEVEL | UB    | LB     |
|----------|-----------|---------|----------|--------|---------|-------|--------|
| 1        | 0.10      | 0.85    | 0.00     | 0.00   | 0.00    | 39.93 | -21.14 |
| 2        | 0.11      | 0.84    | 0.00     | 0.00   | 0.00    | 44.81 | -38.27 |
| 3        | 0.12      | 0.83    | 0.00     | 0.00   | 0.00    | 36.88 | -51.31 |
| 4        | 0.13      | -22.03  | 0.00     | 0.00   | 0.00    | 39.93 | -21.14 |
| 5        | 0.14      | -30.13  | 1.52     | 6.57   | 7.10    | 44.81 | -38.27 |
| 6        | 0.15      | -23.12  | 1.54     | 6.88   | 7.46    | 36.88 | -51.31 |
| 7        | 0.16      | -3.81   | 1.36     | 6.94   | 7.52    | 39.93 | -21.14 |
| 8        | 0.17      | -2.76   | -4.03    | 3.87   | 4.28    | 44.81 | -38.27 |
| 9        | 0.18      | -5.86   | -3.95    | 3.94   | 4.35    | 36.88 | -51.31 |
| 10       | 0.19      | -10.25  | -3.27    | 3.00   | 3.40    | 39.93 | -21.14 |

2. kümedeki ( $h = 1$ ,  $b = 10$ ) ürün sayısı arttıkça Prio-DH'in LQ-STLA'ya olan görece performansı azalmıştır. Eğer 2. kümede birkaç ürün bulunursa Prio-DH bu gruptakilerin birine en düşük önceliği vermekte, bu ürüne en yüksek baz-stok düzeyini atamaktadır. Ama bu yüksek baz-stok düzeyi 2. kümede elemanları arasında paylaşılmalıdır, LQ-STLA bunu daha iyi yaptığından, daha iyi performans göstermektedir. Öte yandan, 1. kümedeki ürün sayısı fazla olduğunda Prio-DH'in görece performansı artmıştır. Prio-DH'de yüksek öncelikli gruptakilere düşük baz-stok düzeyi atandığından, 1. kümedeki ürün sayısı fazla olduğunda, bu gruptaki ürünlerin baz-stok düzeyleri düşük ve düzenli olarak atanmaktadır, buna karşın 2. kümedeki ürünlerin baz-stok düzeyleri daha yüksektir. Doğası gereği Prio-DH ürünler aynı olsa bile farklı önceliğe sahip olduklarında aynı stok düzeyini atamamaktadır. LQ-STLA aynı olan ürünlere aynı baz-stok düzeyini atamaktadır. Ama LQ-STLA'da 1. küme ve 2. küme için atanan baz-stok düzeyleri gerçek  $h$  ve  $b$  değerlerini değil sadece

of  $\frac{h}{b}$  oranını gözönüne aldığından çok az fark göstermektedir. Bu nedenle Prio-DH düşük stok tutma maliyetli ürünlerin baz-stok düzeylerini arttırarak iyi bir iş çıkarmaktadır. Bu nedenle düşük öneme sahip ürünlerin sayısı azaldığında Prio-DH daha iyi çalışmaktadır.

6. **Grup 6: Aynı ürünler, farklı talep gelme hızları.** En son grup talep gelme hızı ve dağılımının etkisini incelemek için oluşturulmuştur.  $\lambda \in \{0.06, 0.07, 0.08, 0.085, 0.09\}$  değerleri arasından değer almaktadır ve  $\lambda_1 = \lambda$ ,  $\lambda_2 = 2\lambda$ ,  $\lambda_3 = 3\lambda$ ,  $\lambda_4 = 4\lambda$ . Bu düzenekte  $(h, b) = (1, 20)$  ve  $(5, 20)$  olarak alınmıştır. Hiçbir dağılımın olmadığı durumda LQ-STLA'nın daha iyi çalışacağını çünkü optimal politikanın en uzun kuyruk yapısında olduğunu tahmin etmekteyiz. Ama sayısal sonuçlarımızda talep gelme hızı dağılımı ve sezgisel yöntemlerin performansı arasında doğrudan açıklanabilir bir ilişkinin olmadığını gözlemledik.  $\frac{h}{b}$  oranı düşük olduğunda, talep gelme hızının dağılımı arttığında performansın karışık olarak etkilendiğini gözlemlemekteyiz. LQ-STLA'nın performansı  $\lambda$  arttıkça, artmakta veya azalmakta olabilir, ama LQ-STLA, Prio-DH'den ortalama olarak %10 daha iyi çalışmaktadır.  $\frac{h}{b}$  oranı arttığında, talep gelme hızı dağılımı arttığında Prio-DH'in performansı iyileşmiştir, bu durumda hala LQ-STLA daha iyi çalışmaktadır.

### 3.3 İş Paketi-1 için projenin 2. döneminde yapılan çalışmalar

2.dönemde problem için yeni bir parametre seti tanımlanmış, önceki bölümde tanımlanan sezgiseller bu parametre seti altında karşılaştırılmıştır. Projenin 1. döneminde 5 sezgisel yöntem karşılaştırılmıştır. Bu parametre seti için ise önceki karşılaştırmalarda öne çıkan iki sezgisel karşılaştırılmıştır. Bu sezgiseller Prio-DH ve LQ-STLA'dır. İş Paketi-1'de hedef hangi koşullar altında hangi sezgiselin daha iyi çalışacağını belirlemektir. Yeni bir parametre kümesi tanımlanmasındaki amaç bu koşulların daha iyi belirlenmesini sağlamaktır. Parametre kümesi aşağıdaki özellikleri taşımaktadır.

1. 4 ürün olduğu varsayılmıştır.
2. Ürünlerin gelme sıklığının aynı olduğu varsayılmıştır.  
Gelme sıklığı  $\lambda = \{0.04, 0.07, 0.1, 0.13, 0.16, 0.18, 0.21, 0.22\}$  değerlerinde alınmıştır.
3. Birim stok ve ardsımarlama maliyetlerinin sıralı olduğu varsayılmıştır. Buna göre ilk

ürünün birim stok tutuma maliyeti  $h_1$  ise,  $h_2 = (k_1)h_1$ ,  $h_3 = (k_1)h_2$  ve  $h_4 = (k_1)h_3$  olarak alınmıştır. Bir ürünün birim ardısmarlama maliyeti  $b_i$  ise,  $b_i = (k_2)h_i$  varsayılmıştır.

Bu çarpanlar için kullanılan değerler  $k_1 = \{0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1\}$  ve  $k_2 = \{10, 20, 50, 80\}$  olarak belirlenmiştir.

4. İlk ürünün birim stok tutma maliyeti,  $h_1 = 0.25$  olarak alınmıştır.
5. İkame maliyeti her bir ikame için  $c_s = 1$ , ikame hızı  $\tau = 5$  ve üretim hızı  $\mu = 1$  olarak alınmıştır.

Toplam  $8 \times 5 \times 4 = 160$  durum için koşu alınmıştır. Karşılaştırma için

$$\frac{Cost_{PrioDH} - Cost_{LQSTLA}}{Cost_{LQSTLA}} 100\%$$

değerlerine bakılmıştır. Bu değerler EK-1'de Tablo A1'de sunulmuştur. Bu değerlerin yanısıra optimal stok değerleri ve ikame miktarları da gözlem yaparken gözönünde bulundurulmuştur. Gözlemleri aşağıdaki gibi özetlemek mümkündür:

1. İki sezgisel, stok seviyeleri ve ikame politikalarını farklı yaklaşımla belirlemektedir. Ancak bazı durumlarda iki yaklaşım da aynı sonucu vermiştir (160 durumdan 9'unda). Bu durumlar düşük geliş hızı olan durumlara karşılık gelir, ve bu durumlarda stok seviyeleri bütün ürünler için 0 ya da bütün ürünler için 1'dir. Stok seviyelerinin aynı olduğu ancak çizelgeleme ve ikame politikalarının farklı olduğu 35 durum belirlenmiştir. Bu durumlarda LQ-STLA Prio-DH'den daha iyi çalışmakta, maliyetler arasındaki fark  $0 - \%3.5$  arasında gerçekleşmektedir. LQ-STLA ve Prio-DH politikalarının verdiği maliyetler kıyaslandığında fark  $(-)\%75$  ve  $(+)\%35$  arasında değişmektedir. Buna bakarak temel farklılığın stok seviyelerindeki farklılıktan kaynaklandığı söylenebilir.
2. Bu parametre kümesi ürünler arasında bir hiyerarşiyi yansıtmaktadır. Yüksek birim stok tutma maliyeti ve ardısmarlama maliyetine sahip ürünler yüksek öncelikliğe sahip olduklarında daha az maliyetli bir politika elde edilebilmektedir. Sayısal sonuçlar, ürünler arasındaki hiyerarşi daha belirginleştikçe ( $k$  çarpanı arttıkça) Prio-DH'nin LQ-STLA'dan daha az maliyetli bir politika verdiğini, ürünler birbirine benzedikçe LQ-STLA'nın daha iyi

performans gösterdiğini ortaya koymaktadır. Geliş hızı arttıkça performanslar arasındaki farklar belirginleşmektedir. LQ-STLA'da stok seviyesi  $\frac{h}{b}$  ile belirlenmektedir ve bu oran bütün ürünler için aynıdır. Bu nedenle bu parametre kümesi için LQ-STLA bütün ürünler için aynı stok seviyesini vermektedir. LQ-STLA Prio-DH performans karşılaştırılmasına bakıldığında, ürünler arasındaki farklılıklar belirginse ( $k_1 \leq 0.5$ ) politika hiyerarşiye göre şekillendirilmeli, değilse  $\frac{h}{b}$  oranı stok seviyelerini belirlemede etkili olmalıdır.

3.  $k_2$  çarpanının sezgisellerin performansına belirgin bir etki gösterdiği gözlenmemiştir. Ancak bazı durumlarda Prio-DH'in LQ-STLA'ya kıyasla %75'e varan oranlarda daha iyi performans gösterdiği görülmüştür. Bu durumlar daha detaylı incelendiğinde düşük geliş hızı altında belirli  $k_2$  değerleri için maliyet farkının çok yüksek olduğu, bu farkın Prio-DH ile belirlenen stok seviyelerinin LQ-STLA'nın stok seviyeleri ile farkından kaynaklandığı anlaşılmıştır. Prio-DH en düşük öncelikli ürüne yüksek stok seviyesi atadığı için özellikle yüksek birim stok tutma maliyeti altında stokların en etkin biçimde kullanılmasını sağlamaktadır. örneğin,  $\lambda = 0.04$  be  $\frac{h}{b} = 20$  altında Prio-DH stok seviyelerini  $(0, 0, 0, 1)$  olarak belirlerken LQ-STLA  $(0, 0, 0, 0)$  olarak belirlemiş, bu Prio-DH'in ikameyi stok havuzlama yerine kullanabilmesine ve maliyeti azaltmasına olanak sağlamıştır. Prio-DH'in performans farkı bütün  $k_1$  değerleri için korunmuştur. EK-1, Tablo A1'de Prio-DH'in LQ-STLA'dan belirgin bir şekilde farklı olduğu  $b$  değerleri rastgele bir yapı sergilemektedir. Bu durumlar incelendiğinde  $(0, 0, 0, 0)$ 'dan  $(0, 0, 0, 1)$ 'e ya da  $(1, 1, 1, 1)$ 'den  $(1, 1, 1, 2)$ 'ye geçişe neden olan  $\frac{h}{b}$  değerlerinde bu fark sıçramalarının olduğunu gözlemledik. Bu yapı için detaylandırdığımız çalışmada  $\lambda = \{0.03, 0.06, 0.09, 0.12, 0.18, 0.21\}$ ,  $k_2 = \{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80\}$  ve  $k_1 = \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$  durumlarına baktık. Sonuçlar EK-1'de Sekil 1.a ve 1.b'de sunulmuştur.

### 3.4 İş Paketi-1 için sonuçlar

Projenin ilk döneminde n-ürünlü rassal bir sistemde stoğa üret politikasına göre üretim yapan bir üreticinin üretim, çizelgeleme ve ikame kararları incelenmiştir. Bu problemde Markov karar süreci kullanılarak optimal politika elde edilmesi mümkündür. Ancak, ürün sayısı arttıkça optimal politikanın belirlenmesi mümkün olmamaktadır. Bu nedenle sezgiseller geliştirilmiş, sezgisellerin performansı değişen parametreler altında incelenmiştir. Projenin 1.döneminde parametreler

iki grup altında incelenmiştir: Küme 1’de parametre değerleri rassal olarak dağılmaktadır. Küme 2’de ise özel bazı durumlar incelenmiştir. Bu parametreler altındaki sonuçlara bakarak her bir sezgiselin diğer sezgisellerden daha iyi çalıştığı durumlar ortaya konmuştur. Ayrıca farklı ikame rejimleri altında getiriler karşılaştırılmış ve ikamenin ve iyi bir cizelgeleme politikasının değeri elde edilmiştir.

Projenin ikinci döneminde sezgiseller yeni bir parametre seti altında karşılaştırılmıştır. Bu parametre seti Pena-Perez ve Zipkin (1995)’in çalışmasından alınmıştır. Bu karşılaştırmadan elde edilen çıkarımlar ise aşağıdaki gibidir:

- (i) Ürün hiyerarşisinin baskın olduğu durumlarda Prio-DH’in tercih edilmesi gerekmektedir. Aksi durumlarda ise LQ-STLA’nın daha iyi performans gösterdiği görülmüştür.
- (ii) Düşük geliş hızı altında ve yüksek birim stok tutma maliyeti altında Prio-DH’in stok havuzlamaya elverişli stok seviyeleri verdiği, bunun maliyeti önemli ölçüde azalttığı ve ürün hiyerarşisinden bağımsız olduğu görülmüştür.
- (iii) Yüksek geliş hızı altında ürün hiyerarşisinin Prio-DH’i tercih etmede daha etkili olduğu görülmüştür.
- (iv) Orta seviyedeki geliş hızlarında ise ürün hiyerarşisi mi yoksa  $\frac{h}{b}$  faktörü mü etkin olmalı, kesin bir yargıya varılamamıştır.

## 4 İş Paketi-2 Kapsamında yapılan çalışmalar

Projenin ilk kısmında sadece üreticinin ikame kararlarını ele alan bir model oluşturulmuş ve müşterinin ikame davranışı göz önünde bulundurulmamıştır. İkamenin üreticiye bir maliyeti olduğu varsayılmıştır. Bu maliyet, müşteriye ikame karşılığında yapılan bir ödeme olabilir. Müşterinin ikame edilen ürünü mutlaka kabul edeceği varsayılmıştır. Projenin ikinci kısmında ise müşterinin ikame davranışlarını gözönünde bulunduran bir problem ele alınmıştır. Müşterilerin ürünün fiyatına bağlı olarak ürünler arasında tercih geçişleri yapabildiği, yani ürünlerin ikame edilebilir olduğu varsayılmıştır. Rassal talep varsayımı altında, üreticinin her ürün için üretim miktarları ve ürün fiyatları, karar değişkenleri olarak belirlenmiştir.

## 4.1 İş Paketi-2 için projenin 1. döneminde yapılan çalışmalar

Üreticinin  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  ürün sunduğu bir kurgu düşünülmüştür. Her bir ürün için oluşan talep aşağıdaki gibidir:

$$D_i = A_i - p_i + \sum_{j \neq i} \gamma_{ij} p_j + \epsilon_i, \quad i \in N \quad (3)$$

Eşitlikte  $p_i$ ,  $i$  ürünü için ürün fiyatı,  $A_i + \epsilon_i$  pazardaki baz-talep, ve  $\gamma_{ij}$  ikame parametresidir. İkame parametrelerinin  $0 < \gamma_{ij} < 1$  olduğu varsayılmıştır. Bu yapıya göre,  $j$  ürününün fiyatındaki bir artış,  $i$  ürününün talebinde bir artışa neden olur. Eşitlikte  $\epsilon_i$ ,  $i$  ürünü için pazar hacmini etkileyen rassal bir değişkendir. İş Paketi-2'de aşağıdaki problem tanımlanmıştır:

1. Karı ençoklama amacı güden bir üretici, her bir ürün için ne kadar üretim yapacağına, ve ürünleri hangi fiyattan pazara sunacağına karar verir.
2. Her bir ürün için  $c$  üretim maliyeti ödenmektedir.
3. Talepteki rassallık, baz-talebin “yüksek” ya da “düşük” olması ile tanımlanmıştır. Her bir olayın olasılığı üretici tarafından bilinmektedir.
4. Üretim ve fiyat kararları verildikten sonra talep gerçekleşir.

Üretici, müşterilerin ikame davranışını üretim ve fiyat kararları ile etkilemektedir.

Analizde şu varsayımlar yapılmıştır. Öncelikle (3) eşitliğinde  $\epsilon_i$ , Bernoulli rassal değişkeni ile tanımlanmıştır:

$$\epsilon_i = \begin{cases} b_i, & \pi_i \text{ olasılığı ile} \\ 0, & 1 - \pi_i \text{ olasılığı ile} \end{cases}$$

Ürünlerin benzer olduğu varsayılmıştır, bu nedenle ürün fiyatları aynı varsayılmıştır. Toplam ikame talebinin akışının, fiyattan kaynaklı akıştan küçük olduğu varsayılmıştır. Yani,  $\sum_{j \neq i} \gamma_{ij} <$

1,  $\forall i$ , varsayılmıştır. Ürün  $i$  için,  $a_i = 1 - \sum_{j \neq i} \gamma_{ij}$  olarak tanımlanmıştır. Bu durumda  $0 \leq a_i < 1$  olur. Son olarak, fiyatın belirli bir  $\bar{p}$  seviyesini aşmayacağı varsayılmıştır:

$$p \leq \min_i \left\{ \frac{A_i}{a_i} \right\} = \bar{p}$$

Üretici her ürün için üretim seviyesini,  $K_i$ , belirler. Birim üretim maliyetinin  $c < \bar{p}$  olduğu varsayılmıştır. Her  $i$  için karar değişkeni  $K_i$  aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$K_i = A_i - a_i p + s_i$$

Bu ifadede karar değişkeni  $s_i$ , belirli (deterministik) talep üzerine üretilen ekstra miktara karşılık gelmektedir,  $0 \leq s_i \leq b_i$  olması gerektiği görülebilir.

Beklenen kar fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$R(p, \mathbf{s}) = E \left[ \sum_i \left( p \min\{\mathbf{D}_i, A_i - a_i p + s_i\} - c(A_i - a_i p + s_i) \right) \right] \quad (4)$$

Ifadede  $\mathbf{D}_i$  bir rassal degiskendir.  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$  olarak tanımlanır. Diğer bir ifadeyle,

$$\begin{aligned} R(p, \mathbf{s}) &= \sum_i \left( p(\pi_i(A_i - a_i p + s_i) + (1 - \pi_i)(A_i - a_i p)) - c(A_i - a_i p + s_i) \right) \\ \text{s. to } &0 \leq s_i \leq b_i \\ &c \leq p \leq \bar{p} \end{aligned}$$

olarak gösterilebilir.

Herhangi bir  $p$  seviyesi için problem her bir  $i$  ürünü için ayrıştırılabilir,

$$R^i(p, s_i) = (p - c)(A_i - a_i p) + (p\pi_i - c)s_i$$



Bu durumda,  $p\pi_i - c < 0$  ise,  $s_i^* = 0$ , ve  $p\pi_i - c > 0$  ise  $s_i^* = b_i$  olur.  $p$  karar değişkenini belirlemek için,  $L(p)$   $\frac{c}{\pi_i} < p$  koşulunu sağlayan ürünlerin kümesi,  $U(p)$  de  $\frac{c}{\pi_i} \geq p$  koşulunu sağlayan ürünlerin kümesi olsun. Buna göre  $i \in L(p)$  için  $s_i^* = b_i$  ve  $i \in U(p)$  için  $s_i^* = 0$  olur.  $T(p) = \{i : \frac{c}{\pi_i} \leq \bar{p}\}$  olsun. Buna göre,  $p$   $c$ 'den  $\bar{p}$ 'a yükselirken,  $L(p)$   $\emptyset$ 'den  $T(p)$ 'a yükselir. Herhangi bir  $p$  için,

$$R(p) = \max_{\mathbf{s}} R(p, \mathbf{s}) = R(p, \mathbf{s}^*(p))$$

olsun. Buna göre,  $R(p)$ 'yi

$$\begin{aligned} R(p) &= \sum_{i \in L(p)} \left( p(\pi_i(A_i - a_i p + b_i) + (1 - \pi_i)(A_i - a_i p)) - c(A_i - a_i p + b_i) \right) \\ &\quad + \sum_{i \in U(p)} \left( p(\pi_i(A_i - a_i p) + (1 - \pi_i)(A_i - a_i p)) - c(A_i - a_i p) \right) \\ &= \sum_i (p - c)(A_i - a_i p) + p \sum_{i \in L(p)} \pi_i b_i + c \sum_{i \in L(p)} b_i \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Ürünleri  $\pi_1 > \pi_2 > \dots > \pi_n$ 'ye göre sıralayalım. Bu durumda her bir  $\frac{c}{\pi_k} \leq p \leq \frac{c}{\pi_{k+1}}$  aralığı için  $R(p)$  değişecektir.  $R_k(p)$   $R(p)$  fonksiyonunun  $k$  aralığındaki kısmını gösterebilir,  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Buna göre  $0$  aralığı  $[c, \frac{c}{\pi_1}]$  aralığına karşılık gelir.  $k$ -aralığı'ndaki optimal fiyat,  $p_k^*$ , aşağıdaki gibi belirlenir.

$P_k$  aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$P_k = \frac{\sum A_i + \sum_{i \leq k} \pi_i b_i}{2 \sum a_i} + \frac{c}{2}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

Bu durumda,  $P_0 < P_1 < \dots < P_n$  olur.  $p_k^*$ 'nin belirlenmesi.

1. 0-aralığı.  $c \leq p < \frac{c}{\pi_1}$  için,  $R_0(p) = (p - c)(\sum A_i - \sum a_i p)$ .  $\frac{d^2 R_0(p)}{dp^2} < 0$  olduğu ve  $R_0(p)$ 'nin içbükey (konkav) olduğu görülebilir. Birinci türev sıfıra eşitlendiğinde,

$$\frac{dR_0(p)}{dp} = 0$$

olur ve  $P_0$ 'nin bu eşitliği sağlayan değeridir. Buna göre 0-aralığında  $R(p)$ 'yi en çoklayan  $p$

değeri,

$$p_0^* = \min\{\max\{c, P_0\}, \frac{c}{\pi_1}\}$$

olarak ifade edilebilir.

2.  $k$ -aralığı için.  $\frac{c}{\pi_k} \leq p < \frac{c}{\pi_{k+1}}$  için,  $R_k(p) = (p - c)(\sum A_i - \sum a_i p) + p \sum_{i \leq k} \pi_i b_i - c \sum_{i \leq k} b_i$ .  $R_k(p)$ 'nin  $p$ 'ye göre içbükey olduğu görülebilir, ve  $P_k$  birinci türevi sıfır'a eşitleyen değerdir.
3. Herhangi bir  $k$  için,  $\frac{c}{\pi_k} \leq \bar{p} < \frac{c}{\pi_{k+1}}$  durumu sağlamıyor olsun. Bu durumda,  $P_k > \bar{p}$  ise  $p_k^* = \bar{p}$  olur. Aksi halde,  $p_k^* = \min\{P_k, \frac{c}{\pi_k}\}$ 'dir.

Aşağıda  $p^*$ 'yi belirlemeden önce bir kaç gözlem daha yapılmıştır.  $\frac{c}{\pi_k}$ 'da,

$$\lim_{p \rightarrow \frac{c}{\pi_k}^-} \frac{dR(p)}{dp} = \sum A_i - \sum a_i p - (p - c) \sum a_i + \sum_{i \leq k-1} \pi_i b_i$$

$$\lim_{p \rightarrow \frac{c}{\pi_k}^+} \frac{dR(p)}{dp} = \sum A_i - \sum a_i p - (p - c) \sum a_i + \sum_{i \leq k} \pi_i b_i.$$

Bu durumda  $\frac{c}{\pi_k}$ 'da,  $\frac{dR_k(p)}{dp} < \frac{dR_{k+1}(p)}{dp}$ . Ayrıca  $\frac{c}{\pi_k}$ 'da,

$$\lim_{p \rightarrow \frac{c}{\pi_k}^-} R(p) = (p - c)(\sum A_i - \sum a_i p) + p \sum_{i \leq k-1} \pi_i b_i + c \sum_{i \leq k-1} b_i$$

$$\lim_{p \rightarrow \frac{c}{\pi_k}^+} R(p) = (p - c)(\sum A_i - \sum a_i p) + p \sum_{i \leq k-1} \pi_i b_i + c \sum_{i \leq k-1} b_i + p \pi_k b_k + c b_k$$

$$= \lim_{p \rightarrow \frac{c}{\pi_k}^-} R(p)$$

Buna göre  $R(p)$   $p$ 'ye göre sürekli bir fonksiyondur. Görülebilir ki,  $p > \frac{c}{\pi_{k+1}}$ ,  $R_k(p) < R_{k+1}(p)$ , ve  $p < \frac{c}{\pi_{k+1}}$  için  $R_k(p) > R_{k+1}(p)$ 'dir. Bu da  $R_k(p)$  ve  $R_{k+1}(p)$ 'in sadece bir defa, ve  $p = \frac{c}{\pi_{k+1}}$  noktasında kesiştiğini gösterir. Ayrıca,  $R(p) = \max_i R_i(p)$ ,  $c \leq p \leq \bar{p}$ 'dir, yani  $R(p)$   $R_k(p)$  fonksiyonlarını yukarıdan zarflar.

### $p^*$ 'in belirlenmesi

Aşağıdaki adımlar izlenerek  $p^*$  belirlenebilir.

1.  $P_k$  ile  $\frac{c}{\pi_k}$  ve  $\frac{c}{\pi_{k+1}}$  değerleri karşılaştırılır. Eğer herhangi bir  $k$  için,  $P_k < \frac{c}{\pi_k}$  ya da  $P_k > \frac{c}{\pi_{k+1}}$  ise,  $p^*$   $k$ -aralığı'nda değildir.
2. Diğer  $k$  değerleri için,

$$p^* = P_j, \quad j = \arg \min_k R_k(P_k)$$

**Örnek.** 3 ürünlü bir durum düşünelim. Parametreler aşağıdaki gibi olsun.  $A_1 = 10$ ,  $A_2 = 13$ ,  $A_3 = 14$ ,  $\gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0.15$ ,  $\pi_1 = 0.8$ ,  $\pi_2 = 0.5$ ,  $\pi_3 = 0.2$ ,  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 5$ ,  $b_3 = 6$ . Birim üretim maliyeti  $c = 3$  olsun. Bu durum için,  $a_1 = 0.7$ ,  $a_2 = 0.7$  and  $a_3 = 0.7$ 'dir.  $\frac{c}{\pi_i}$ , ürün 1, 2ve 3 için sırasıyla 3.75, 6, ve 15'dir. Son olarak,  $P_0 = 10.31$ ,  $P_1 = 10.69$ ,  $P_2 = 11.28$  ve  $P_3 = 11.57$ , ve  $\bar{p} = 14.286$ 'dir. Prosedüre göre 0- ve 1- aralığı'nda,  $P_k > \frac{c}{\pi_{k+1}}$ 'dir. Ayrıca 3- aralığı'nda  $P_k < \frac{c}{\pi_k}$ 'dir. Buna göre  $p^*$  'ı bulmak için sadece 2-aralığı'nın değerlendirilmesi yeterlidir. En iyi fiyat  $p^* = P_2$ 'dir (EK-1'de Şekil 4).  $p^* = P_2$  olması üretim değerlerinin,  $s_1 = 2$ ,  $s_2 = 5$ ,  $s_3 = 0$  olmasına karşılık gelmektedir. Bu karar değişkeni değeri altında beklenen kar 135.47 olarak bulunabilir.

## 4.2 İş Paketi-2 için projenin 2. döneminde yapılan çalışmalar

2.dönemde, araştırma sorularını cevaplamak üzere 1.dönemde ele alınan probleme ek olarak 3 yeni problem (senaryo) tanımlanmıştır. Modelin ana kurgusu değişmemiştir.

### 4.2.1 Senaryolar

Ele alınan 4 senaryo aşağıdaki gibidir:

1. **Senaryo 1.** Üretim miktarları ve fiyatlar talep gerçekleşmeden önce belirlenir. Problem tek dönem için tanımlanmıştır (Projede 1.dönemde incelendi).
2. **Senaryo 2.** Üretim miktarı talep gerçekleşmeden önce belirlenir, fiyat ise talepteki belirsizlik ortadan kalktıktan sonra belirlenebilir. Problem tek dönem için tanımlanmıştır.

3. **Senaryo 3.** Üretim miktarı ve fiyat, ilk dönemde, talep gerçekleşmeden önce belirlenir. Talep gerçekleştikten sonra, ikinci dönemde, talebi karşılanamayan ürün ve stokta kalan ürün varsa, bu ürünler arasında ikame yapılabilir. İkame için ürünlerin fiyatı yeniden belirlenebilir. Üretim miktarı ve ilk dönem ürün fiyatı, ikinci dönemde gerçekleştirilebilecek ikameler gözönünde bulundurulurularak yapılır.
4. **Senaryo 4.** Senaryo 3'ten farklı olarak üretim miktarı ve ilk dönem ürün fiyatı, ikinci dönemde gerçekleştirilebilecek ikameler gözönünde bulundurulmayarak belirlenir.

Bütün senaryolarda ürünlerin aynı fiyattan satıldığı varsayılmıştır. Bu bölümde ikinci dönemde ele alınan Senaryo 2, Senaryo 3 ve Senaryo 4 için yapılan analizler sunulacaktır.

**Senaryo 2** Bu senaryo altında yapılan analizler, fiyatın talepteki belirsizlik ortadan kalktıktan sonra belirlenmesi probleminin oldukça karmaşık bir yapıya sahip olduğunu ortaya koymuştur. Bu nedenle  $N$  ürün yerine 2 ürünün olduğu, ve ürünlerin simetrik olduğu bir durum ele alınmıştır. Olay akışı:

1. Her iki ürün için üretim miktarlarına karar verilir.
2. Ürünler için talep gözlemlenir.
3. Ürünlerin fiyatına karar verilir.

Simetrik ürün varsayımı altında model aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$D_i = A - (1 - \gamma)p + \epsilon_i, \quad i \in \{1, 2\} \quad (5)$$

Ifadede  $A$ , fiyatın 0 olduğu durumda ürünler için “baz talep seviyesini,  $\gamma$  ise ikame oranını gösteren parametredir. Ürün  $i$ 'nin fiyatındaki artış, talebin düşmesine sebep olur. İfadede  $\epsilon_i$  talepteki belirsizliğe karşılık gelir. Talepteki belirsizlik Bernoulli rassal değişkeni ile ifade edilmektedir.

$$\epsilon_i = \begin{cases} b, & \text{w.p. } \pi \\ 0, & \text{w.p. } 1 - \pi \end{cases}$$

Modelde  $A$  ve  $b$  parametrelerinin yeniden tanımlanması ile daha sade bir ifade aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$D_i = A - p + \epsilon_i \quad (6)$$

Analizler sadeleştirilmiş model üzerinden yapılmıştır. Elde edilen sonuçlarda  $A$  yerine  $\frac{A}{1-\gamma}$ ,  $b$  yerine  $\frac{b}{1-\gamma}$ , ve  $D$  yerine  $(1-\gamma)D$  transformasyonu ile aynı sonuç elde edilebilir. Her iki ürün için üretim miktarları aynı olacağı öngörülebilir. Bu nedenle üretim miktarı  $K$  karar değişkeni ile tanımlanmıştır. Birim üretim maliyeti  $c$ 'dir.

Herhangi bir  $K$  değeri için kar fonksiyonu

$$R(K) = E\left[\max_{p:A-p+\epsilon_i \geq 0} \sum_i \min\{A-p+\epsilon_i, K\}p\right] - 2cK$$

$$R(K) = (1-\pi)^2 R_{ll}(K) + 2 * (1-\pi)\pi R_{hl}(K) + \pi^2 R_{hh}(K) - 2cK,$$

olarak ifade edilir. İfadede  $R_{ll}(K)$  her iki ürün için düşük seviyede talebin gerçekleştiği durumdaki geliri,  $R_{hl}(K)$  bir ürün için yüksek, diğer ürün için düşük seviyede talebin gerçekleştiği durumdaki geliri,  $R_{hh}(K)$  ise her iki ürün için yüksek seviyede talebin gerçekleştiği durumdaki geliri, ifade eder. Bu ifadeler aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$R_{ll}(K) = \max_{p:A-p \geq 0} \sum_i \min\{A-p, K\}p$$

$$R_{hl}(K) = \max_{p:A-p \geq 0} \min\{A-p, K\}p + \min\{A-p+b, K\}p$$

$$R_{hh}(K) = \max_{p:A-p+b \geq 0} \sum_i \min\{A-p+b, K\}p$$

Her bir  $R_u(K)$ ,  $R_{hl}(K)$  ve  $R_{hh}(K)$ 'in nasıl elde edildiği aşağıda sunulmuştur.

$$R_u(K) = \begin{cases} 2K(A - K) & ,K \leq \frac{A}{2} \\ \frac{A^2}{2} & ,K \geq \frac{A}{2} \end{cases}$$

Ifadedeki  $R_u(K)$ 'yi elde etmek için şu yaklaşım izlenmiştir.  $K$ 'nın kısıtlayıcı olmadığı durumda, talebin ürünler için düşük seviyede gerçekleştiğini bildiğimizden, talebi fiyat cinsinden  $D = A - p$  olarak yazabiliriz. Bu durumda her bir ürün için gelir değeri  $D(A - D)$ 'dir. Bu  $D$ 'ye göre içbükey (konkav) bir fonksiyondur.  $D^* = \frac{A}{2}$  ve  $p = \frac{A}{2}$  olarak elde edilir. Ancak  $D$ ,  $K$  ile sınırlıdır.  $K < \frac{A}{2}$  için optimal talep  $K$  olarak seçilecektir ve buna göre fiyata karar verilecektir. Optimal fiyat da  $p = A - D = A - K$  olarak belirlenir.  $K > \frac{A}{2}$  içinse optimal fiyat ve  $D = \frac{A}{2}$  dir. Bu durumda iki ürün için toplam gelir ifadedeki gibidir.  $R_{hh}(K)$  de benzer yaklaşımlarla elde edilir ve aşağıdaki ifadedeki gibi gösterilir:

$$R_{hh}(K) = \begin{cases} 2K(A - K + b) & ,K \leq \frac{A+b}{2} \\ \frac{(A+b)^2}{2} & ,K \geq \frac{A+b}{2} \end{cases}$$

$R_{hl}(K)$  için gelir ifadesi aşağıdaki önerme ile sunulmaktadır.

**Yardımcı önerme 1**  $A \leq \frac{b}{2}$  için

$$R_{hl}(K) = \begin{cases} 2K(A - K) & ,K \leq \frac{A}{3} \\ \frac{(A+K)^2}{4} & ,A \geq K \geq \frac{A}{3} \\ KA & ,b \geq K \geq A \\ bA & ,K \geq b \end{cases}$$

$\frac{b}{2} \leq A \leq b$  için

$$R_{hl}(K) = \begin{cases} 2K(A - K) & , K \leq \frac{A}{3} \\ \frac{(A+K)^2}{4} & , A \geq K \geq \frac{A}{3} \\ KA & , b \geq K \geq A \\ (2K - b)(A - K + b) & , \frac{A}{2} + \frac{3b}{4} \geq K \geq b \\ \frac{(2A+b)^2}{8} & , K \geq \frac{A}{2} + \frac{3b}{4} \end{cases}$$

$b \leq A$  için

$$R_{hl}(K) = \begin{cases} 2K(A - K) & , K \leq \frac{A}{3} \\ \frac{(A+K)^2}{4} & , \frac{A+2b}{3} \geq K \geq \frac{A}{3} \\ (2K - b)(A - K + b) & , \frac{A}{2} + \frac{3b}{4} \geq K \geq \frac{A+2b}{3} \\ \frac{(2A+b)^2}{8} & , K \geq \frac{A}{2} + \frac{3b}{4} \end{cases}$$

**Ispat.**  $R_{hl}(K)$  aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$R_{hl}(K) = \max_p \min\{D_1, K\}p + \min\{D_2, K\}p$$

s.t.

$$D_i = A - p + \varepsilon_i \quad i \in \{1, 2\}$$

$$D_1 \geq 0$$

$$D_2 \geq 0$$

$$p \geq 0$$

Modelde  $p \geq 0$  kısıtı gevşektir.  $\varepsilon_i(\omega)$   $\varepsilon_i$  rassal değişkeninin gerçekleştiği değeri gösterecek şekilde,  $hl$ ,  $\varepsilon_i(\omega) = b$ ,  $\varepsilon_{2-i}(\omega) = 0$ 'a karşılık gelir. Bu modelde verilen bir  $K$  değeri için karar değişkeni  $p$ 'dir.

Talep ise  $\min\{D_i, K\}$ 'dir. Başka bir ifade ile model:

$$\begin{aligned}
 R_{hl}(K) &= \max D_1p + D_2p \\
 &s.t. \\
 D_1 + p &\leq A + b \\
 D_2 + p &\leq A \\
 -D_1 &\leq 0 \\
 D_1 &\leq K \\
 -D_2 &\leq 0 \\
 D_2 &\leq K
 \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Bu modelde ise karar değişkenleri  $p, D_1$  and  $D_2$ 'dir. Talep  $D_i$  ile ifade edilmiştir. Karar değişkenlerinin optimal değerlerini bulmak için her bir kısıta karşılık gelen  $u_1, \dots, u_6$  gölge değişkenler (dual variables) tanımlanmıştır. Optimallik için Karush-Kuhn-Tucker (KKT) koşulları:

$$\begin{aligned}
 -\nabla f(x) + \sum_i u_i \nabla g(x) &= \begin{bmatrix} -p + u_1 - u_3 + u_4 \\ -p + u_2 - u_5 + u_6 \\ -(D_1 + D_2) + u_1 + u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\
 \text{(Tümler gevşeklik koşulları)} \\
 u_i &\geq 0
 \end{aligned}$$

(Tümler gevşeklik=Complementary slackness) Buna göre, olurlu optimal noktalar için:

1. Ya  $u_1 > 0$  ya da  $u_2 > 0$ .
2.  $u_3 = 0$ , ve  $u_4 \geq 0$ .
3.  $u_5 = 0$  ya da  $u_6 = 0$ .



4. Ya  $u_1 > 0$  ya da  $u_4 > 0$ .

5. Ya  $u_2 > 0$  ya da  $u_6 > 0$ 'dır.

Bütün olası KKT noktaları  $B$  kümesinde sıralanmıştır.

$$B = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 5, 4\}, \{2, 6, 4\}, \{2, 4\}\}$$

diğer kümeler olursuz ya da boşa (degenerate)'dir. Aktif olan kısıtlar aşağıdaki gibi gösterilmiştir.  $Ac$  aktif olan kısıtlar kümesini gösterebilirsin,  $Ac \in B$ 'dir. Eğer  $u_i > 0$  ise,  $i \in Ac$ , değilse, yani  $u_i = 0$  ise,  $i \in Ac^c$ 'dir.

Her bir küme bir KKT noktasına karşılık gelir. KKT noktaları Tablo-13'te sunulmuştur.

Table 13: KKT Noktaları

| Aktif Kume    | $(D_1, D_2, p)$  | Lagrange değerleri   | $R^{hl}(K)$                 | Koşul   |
|---------------|--|--|-----------------------------|---|
| $\{1, 2\}$    | $(\frac{A}{2} + \frac{3b}{4}, \frac{A}{2} - \frac{b}{4}, \frac{A}{2} + \frac{b}{4})$ | $u_1 = u_2 = \frac{A}{2} + \frac{b}{4}$                            | $\frac{(2A+b)^2}{8}$        | $K \geq \frac{A}{2} + \frac{3b}{4},$<br>$2A \geq b$                 |
| $\{1, 2, 5\}$ | $(b, 0, A)$  | $u_1 = A,$<br>$u_2 = b - A,$<br>$u_5 = b - 2A$                     | $bA$                        | $K \geq b, 2A \leq b$   |
| $\{2, 5, 4\}$ | $(K, 0, A)$  | $u_4 = A, u_2 = K,$<br>$u_5 = K - A$                               | $KA$                        | $b \geq K \geq A$   |
| $\{1, 2, 4\}$ | $(K, K - b, A - K + b)$  | $u_2 = A - K + b,$<br>$u_1 = 3K - A - 2b,$<br>$u_4 = 2A + 3B - 4K$ | $(2K - b)$<br>$(A - K + b)$ | $K \geq b,$<br>$K \geq \frac{A+2b}{3},$<br>$K \leq \frac{2A+3b}{4}$ |
| $\{2, 4\}$    | $(K, \frac{A-K}{2}, \frac{A+K}{2})$  | $u_2 = u_4 = \frac{A+K}{2}$  | $\frac{(A+K)^2}{4}$         | $A \geq K,$<br>$\frac{A+2b}{3} \geq K \geq \frac{A}{3}$             |
| $\{2, 4, 6\}$ | $(K, K, A - K)$  | $u_2 = 2K,$<br>$u_4 = A - K,$<br>$u_6 = A - 3K$                    | $2K(A - K)$                 | $K \leq \frac{A}{3}$  |

$R(K)$ 'yi en çoklayan karar değişkenlerini belirlemek için,  $R_{ul}(K)$ ,  $R_{hl}(K)$  ve  $R_{hh}(K)$  için belirlenen koşulların tümü gözönünde bulundurulmuştur.  $K$ ,  $A$  ve  $b$ 'nin birbirine göre durumları, optimal

$p$  düşünülduğünde farklı  $R(K)$  fonksiyonlarına sebep olur.  $K$   $R(K)$ 'yi ençoklayan değer olmaktadır. Her bir koşul altında  $K$  hangi değeri alacağı Tablo 13, 14 ve 15'te sunulmuştur.  $A$  ve  $b$  parametre değerlerini bilmeden,  $R(K)$  için içbükey ya da dışbükey bir yapı öngörülememektedir, bu nedenle optimal  $K$  kapalı-form'da elde edilememektedir.

### 4.3 Senaryo 3

Bu senaryo altında, iki ürün olduğu ve ürünlerin ikame oranlarının aynı olduğu varsayılmıştır. Bunun dışında ürünler farklı özelliklere sahiptir. İki dönemden oluşan bir problem ele alınmaktadır. Olay akışı aşağıda verilmiştir:

1. Ürünler için üretim miktarlarına ve ilk dönem fiyatına karar verilir.
2. Talep gerçekleşir.
3. Talebe bağlı olarak, iki üründe de stok fazlası olabilir, ya da birinde stok fazlası olurken diğesinde talep fazlası olabilir. Yeniden fiyatlandırma yapılarak, ve ikame oranları gözönünde bulundurularak stok fazlası ürün talep fazlasını karşılamak kullanılır. Ya da iki üründe de stok fazlası varsa, fiyat düşürülerek stoklar eritmeye çalışılır.
4. 2. dönemde talepte rassallık yoktur, ilk dönemin artık ya da eksik talep miktarları göz önünde bulundurulur.

Problem iki dönemden oluşmaktadır. Karar değişkenleri: üretim miktarları  $K_1$ ,  $K_2$  ve 1. ve 2. dönemdeki fiyatlardır  $p_1$ ,  $p_2$ . ürünlerin iki dönemde de aynı fiyattan satıldığı varsayılmıştır. 1. dönemde talep aşağıdaki yapı ile ifade edilir:

$$D_i^1 = A_i - p_i^1 + \gamma p_j^1 + \epsilon_i, i, j = 1, 2, i \neq j \quad (7)$$

Talepteki belirsizlik aşağıdaki rassal değişken yapısı ile tanımlanmıştır:

$$\epsilon_i = \begin{cases} 0 & w.p. 1 - \pi_i \\ \epsilon_i^h & w.p. \pi_i \end{cases}$$

Table 14:  $A \leq \frac{b}{2}$  durumu altında  $R(K)$

| Aralik                                | $R(K)$  | Optimal $K$   |
|---------------------------------------|---|---|
| $b \leq K$                            | $\frac{(A+b)^2}{2}\pi\pi + 2Ab\pi(1-\pi) + \frac{A^2}{2}(1-\pi)(1-\pi) - 2cK$       | $K^* = b$   |
| $\frac{A+b}{2} \leq K \leq b$         | $\frac{(A+b)^2}{2}\pi\pi + 2AK\pi(1-\pi) + \frac{A^2}{2}(1-\pi)(1-\pi) - 2cK$       | $2A\pi(1-\pi) - c \geq 0 \implies K^* = b$<br>$2A\pi(1-\pi) - c \leq 0 \implies K^* = \frac{A+b}{2}$  |
| $A \leq K \leq \frac{A+b}{2}$         | $2K(A+b-K)\pi\pi + 2AK\pi(1-\pi) + \frac{A^2}{2}(1-\pi)(1-\pi) - 2cK$               | $\bar{K} = \frac{2(A+b)\pi^2 + 2A\pi(1-\pi) - 2c}{4\pi^2}$<br>$K^* = \min(\frac{A+b}{2}, \max(A, \bar{K}))$   |
| $\frac{A}{2} \leq K \leq A$           | $2K(A+b-K)\pi\pi + \frac{(A+K)^2}{2}\pi(1-\pi) + \frac{A^2}{2}(1-\pi)(1-\pi) - 2cK$ | $\bar{K} = \frac{2(A+b)\pi^2 + A\pi(1-\pi) - 2c}{4\pi^2} + \pi(1-\pi)$<br>$K^* = A \wedge \frac{A}{2} \wedge \bar{K}$                                       |
| $\frac{A}{3} \leq K \leq \frac{A}{2}$ | $2K(A+b-K)\pi\pi + \frac{(A+K)^2}{2}\pi(1-\pi) + 2K(A-K)(1-\pi)(1-\pi) - 2cK$       | $\bar{K} = \frac{2(A+b)\pi^2 + A\pi(1-\pi) + 2A(1-\pi)^2 - 2c}{4\pi^2 + \pi*(1-\pi) + 4(1-\pi)^2}$<br>$K^* = \frac{A}{3} \wedge \frac{A}{2} \wedge \bar{K}$ |
| $0 \leq K \leq \frac{A}{3}$           | $2K(A+b-K)\pi\pi + 4K(A-K)\pi(1-\pi) + 2K(A-K)(1-\pi)(1-\pi) - 2cK$                 | $\bar{K} = \frac{2(A+b)\pi^2 + 4A\pi(1-\pi) + 2A(1-\pi)^2 - 2c}{4\pi^2 + 8\pi(1-\pi) + 4(1-\pi)^2}$<br>$K^* = \frac{A}{3} \wedge \bar{K}$                   |

Table 15:  $\frac{b}{2} \leq A \leq b$  durumu altında  $R(K)$ 

| Aralık                                     | R(K)   | Optimal K   |
|--|--|---|
| $\frac{A}{2} + \frac{3b}{4} \leq K$        | $\frac{(A+b)^2}{2}\pi\pi + \frac{(2A+b)^2}{4}\pi(1-\pi) + \frac{A^2}{2}(1-\pi)(1-\pi) - 2cK$ | $K^* = \frac{A}{2} + \frac{3b}{4}$  |
| $b \leq K \leq \frac{A}{2} + \frac{3b}{4}$ | $\frac{(A+b)^2}{2}\pi\pi + 2(2K-b)(A-K+b)\pi(1-\pi) + \frac{A^2}{2}(1-\pi)(1-\pi) - 2cK$     | $\bar{K} = \frac{A}{2} + b - \frac{2c}{8\pi(1-\pi)}$<br>$K^* = \min(\frac{A}{2} + \frac{3b}{4}, \max(b, \bar{K}))$  |
| $\frac{A+b}{2} \leq K \leq b$              | $\frac{(A+b)^2}{2}\pi\pi + 2KA\pi(1-\pi) + \frac{A^2}{2}(1-\pi)(1-\pi) - 2cK$                | $2A\pi(1-\pi) - c \geq 0 \implies K^* = b$<br>$2A\pi(1-\pi) - c \leq 0 \implies K^* = \frac{A+b}{2}$  |
| $A \leq K \leq \frac{A+b}{2}$              | $2K(A+b-K)\pi\pi + 2AK\pi(1-\pi) + \frac{A^2}{2}(1-\pi)(1-\pi) - 2cK$                        | $\bar{K} = \frac{2(A+b)\pi^2 + 2A\pi(1-\pi) - 2c}{4\pi^2}$<br>$K^* = \min(\frac{A+b}{2}, \max(A, \bar{K}))$   |
| $\frac{A}{2} \leq K \leq A$                | $2K(A+b-K)\pi\pi + \frac{(A+K)^2}{2}\pi(1-\pi) + \frac{A^2}{2}(1-\pi)(1-\pi) - 2cK$          | $\bar{K} = \frac{2(A+b)\pi^2 + A\pi(1-\pi) - 2c}{\pi(1-\pi) + 4\pi^2}$<br>$K^* = A \wedge \frac{A}{2} \wedge \bar{K}$   |
| $\frac{A}{3} \leq K \leq \frac{A}{2}$      | $2K(A+b-K)\pi\pi + \frac{(A+K)^2}{2}\pi(1-\pi) + 2K(A-K)(1-\pi) - 2cK$                       | $\bar{K} = \frac{2(A+b)\pi^2 + A\pi(1-\pi) + 2*A(1-\pi)^2 - 2c}{4\pi^2 + \pi*(1-\pi) + 4*(1-\pi)^2}$<br>$K^* = \frac{A}{3} \wedge \frac{A}{2} \wedge \bar{K}$ |
| $0 \leq K \leq \frac{A}{3}$                | $2K(A+b-K)\pi\pi + 4K(A-K)\pi(1-\pi) + 2K(A-K)(1-\pi)(1-\pi) - 2cK$                          | $\bar{K} = \frac{2(A+b)\pi^2 + 4A\pi(1-\pi) + 2A(1-\pi)^2 - 2c}{8\pi(1-\pi) + 4\pi^2 + 4(1-\pi)^2}$<br>$K^* = \frac{A}{3} \wedge \bar{K}$                     |

Table 16:  $b \leq A$  durumu altında  $R(K)$ 

| Aralik  | $R(K)$  | Optimal $K$  |
|---|---|--|
| $\frac{A}{2} + \frac{3b}{4} \leq K$                                 | $\frac{(A+b)^2}{2} \pi \pi + \frac{(2A+b)^2}{4} \pi(1-\pi) + \frac{A^2}{2}(1-\pi)(1-\pi) - 2cK$ | $K^* = \frac{A}{2} + \frac{3b}{4}$   |
| $\frac{A+b}{\frac{3b^2}{4}} \leq K \leq \frac{A}{2} + \frac{3b}{4}$ | $\frac{(A+b)^2}{2} \pi \pi + 2(2K-b)(A-K+b)\pi(1-\pi) + \frac{A^2}{2}(1-\pi)(1-\pi) - 2cK$      | $\bar{K} = \frac{A}{2} + b - \frac{2c}{8\pi(1-\pi)}$<br>$K^* = \min(\frac{A}{2} + \frac{3b}{4}, \max(\frac{A+b}{2}, \bar{K}))$   |
| $\max(\frac{A}{2}, \frac{A+2B}{3}) \leq K \leq \frac{A+b}{2}$       | $2\bar{K}(A+b-K)\pi\pi + 2(2K-b)(A-K+b)\pi(1-\pi) + \frac{A^2}{2}(1-\pi)(1-\pi) - 2cK$          | $\bar{K} = \frac{2(A+b)\pi^2 + (4(A+b)+2b)\pi(1-\pi) - 2c}{4\pi^2 + 8\pi(1-\pi)}$<br>$K^* = \min(\frac{A+b}{2}, \max(\frac{A}{2}, \frac{A+2B}{3}, \bar{K}))$                     |
| If $A \leq 4b$<br>$\frac{A}{2} \leq K \leq \frac{A+2B}{3}$          | $2K(A+b-K)\pi\pi + \frac{(A+K)^2}{2} \pi(1-\pi) + \frac{A^2}{2}(1-\pi)(1-\pi) - 2cK$            | $\bar{K} = \frac{2(A+b)\pi^2 + A\pi(1-\pi) - 2c}{4\pi^2 + \pi(1-\pi)}$<br>$K^* = \frac{A+2B}{3} \wedge \frac{A}{2} \wedge \bar{K}$   |
| If $A \geq 4b$<br>$\frac{A+2B}{3} \leq K \leq \frac{A}{2}$          | $2\bar{K}(A+b-K)\pi\pi + 2(2K-b)(A-K+b)\pi(1-\pi) + 2K(A-K)(1-\pi)(1-\pi) - 2cK$                | $\bar{K} = \frac{2(A+b)\pi^2 + (4(A+b)+2b)\pi(1-\pi) + 2A(1-\pi)^2 - 2c}{8\pi(1-\pi) + 4\pi^2 + 4(1-\pi)^2}$<br>$K^* = \frac{A+2B}{3} \wedge \frac{A}{2} \wedge \bar{K}$         |
| $\frac{A}{3} \leq K \leq \min(\frac{A}{2}, \frac{A+2B}{3})$         | $2K(A+b-K)\pi\pi + \frac{(A+K)^2}{2} \pi(1-\pi) + 2K(A-K)(1-\pi)(1-\pi) - 2cK$                  | $\bar{K} = \frac{2(A+b)\pi^2 + A\pi(1-\pi) + 2A(1-\pi)^2 - 2c}{\pi(1-\pi) + 4\pi^2 + 4(1-\pi)^2}$<br>$K^* = \frac{A}{3} \wedge \min(\frac{A}{2}, \frac{A+2B}{3}) \wedge \bar{K}$ |
| $0 \leq K \leq \frac{A}{3}$   | $2K(A+b-K)\pi\pi + 4K(A-K)\pi(1-\pi) + 2K(A-K)(1-\pi)(1-\pi) - 2cK$                             | $\bar{K} = \frac{2(A+b)\pi^2 + 4A\pi(1-\pi) + 2A(1-\pi)^2 - 2c}{4\pi^2 + 8\pi(1-\pi) + 4(1-\pi)^2}$<br>$K^* = \frac{A}{3} \wedge \bar{K}$  |

Bu ifadede  $p_i^1 = p_j^1 = p_1$  varsayılmıştır. (Senaryo 2'de  $b$  ile gösterilen parametre Senaryo 3'te  $\epsilon_i^b$  ile gösterilmektedir). İlk dönem belirlenen üretim karar değişkeni,  $K_i$  yerine  $s_i$  karar değişkeni tanımlanmıştır. Bu durumda  $K^i = A_i - (1 - \gamma)p_1 + s_i$  olur. Eğer  $s_i - \epsilon_i(\omega) > 0$  olursa,  $i$  ürünü için ilk dönem sonunda stok fazlası olacaktır, aksi durumda ise talep fazlası gerçekleşecektir. Bunun yanısıra üretim miktarları negatif olamayacağından,  $s_i > -A_i + (1 - \gamma)p_1$ , kısıtı geçerlidir. üretim birim maliyeti  $c$ 'dir. 2. dönemde talep fazlası ya da stok fazlası olma durumuna göre talep-fiyat ilişki denklemi yeniden tanımlanmıştır. 3 tur olay gerçekleşebilir:

1. İkinci dönemde eğer iki ürün de stok fazlasına sahipse, yani  $K_i > D_i^1$  ise, 2. dönemde fiyat düşürerek 1. dönemde reddedilen talebin bir kısmı geri çağrılabilir. Bu durumda 2. dönemdeki talep-fiyat ilişkisi

$$D_i^2 = p_i^1 - p_i^2 - \gamma(p_j^1 - p_j^2), \quad i, j \in \{1, 2\}, i \neq j$$

olur. Ürün fiyatları aynı olacağından  $p_i^1 = p_1$  and  $p_i^2 = p_2$  tanımlandığında, talep fonksiyonu

$$D_i^2 = (1 - \gamma)(p_1 - p_2), \quad i = 1, 2$$

olur. Bu durumda her iki ürün de aynı fonksiyonla (simetrik olarak) tanımlanacaktır.

2. İkinci dönemde  $i$  ürünü için stok fazlası varken,  $j$  ürünü için talep fazlası varsa,  $s_j - \epsilon_j(\omega) < 0$ , fiyat aynı kalsa bile stok fazlası ürün için  $j$  ürününü alamayan müşterilerden kaynaklanan bir talep olacaktır. Fiyatın düşürülmesi durumunda  $i$  ürününü fiyatı yüksek olduğu için alamayan müşteriler de eklendiğinde talep daha da artabilir. Ürün  $j$  için talep fazlası, 2. dönemde ikame oranına bağlı olarak ürün  $i$ 'nin baz talebini oluşturur. Bu durumda talep fonksiyonları:

$$\begin{aligned} D_i^2 &= \gamma((1 - \gamma)p_1 + \epsilon_j(\omega) - s_j) + (p_1 - p_2), \\ D_j^2 &= 0. \end{aligned}$$

olarak ifade edilir.

3. Her iki üründe de talep fazlası olması durumunda

$$D_i = 0, i = 1, 2,$$

olur.

#### 4.3.1 Kar Fonksiyonları

Senaryo 3'te kar fonksiyonu üç dönemde elde edilen gelir ya da maliyetin toplamı olarak tanımlanmıştır:  $t = 0, 1, 2$ . Dönem-0,  $t = 0$  " üretim maliyeti, Dönem-1: ilk dönem geliri, Dönem-2: ikinci dönem geliri.  $R_t(s_1, s_2, p_1, \epsilon(\omega))$  t dönemindeki geliri ya da maliyeti ifade etsin.  $R_t$ 'nin "domain"i  $S_1 \times S_2 \times P_1 \times E$  ile gösterilir ve  $\{(s_1, s_2, p_1, [e_1 e_2]) : p_1 \geq 0, s_i \geq -(A_i - (1 - \gamma))p_1, (A_i - (1 - \gamma))p_1 \geq 0, e_i \in \{0, \epsilon_i^h\}\}$  olarak tanımlanır. Değer kümesi ise  $R$ 'dir. Beklenen kar fonksiyonu:

$$\begin{aligned} E[R_t(s_1, s_2, p_1, \epsilon)] &= (1 - \pi_1)(1 - \pi_2)R_t(s_1, s_2, p_1, [00]) + \pi_1(1 - \pi_2)R_t(s_1, s_2, p_1, [\epsilon_1^h 0]) \\ &\quad (1 - \pi_1)\pi_2 R_t(s_1, s_2, p_1, [0\epsilon_2^h]) + \pi_1\pi_2 R_t(s_1, s_2, p_1, [\epsilon_1^h \epsilon_2^h]) \quad t = 1, 2 \end{aligned}$$

olur. İfadede  $s_1, s_2$  and  $p_1$  değerlerine göre  $E[R_t(\cdot)]$  fonksiyonunun yapısı değişecektir. Senaryo 2'dekine benzer şekilde  $E[R_t(\cdot)]$  de bir çok alt-fonksiyondan oluşan parçalı-tanımlı bir fonksiyondur.

Beklenen toplam kar fonksiyonu:

$$\begin{aligned} R(s_1, s_2, p_1) &= E[R_1(s_1, s_2, p_1, \epsilon) + R_2(s_1, s_2, p_1, \epsilon) + R_0(s_1, s_2, p_1, \epsilon)], \\ &= E[R_1(s_1, s_2, p_1, \epsilon)] + E[R_2(s_1, s_2, p_1, \epsilon)] \\ &\quad + E[R_0(s_1, s_2, p_1)] \end{aligned}$$

**$R_0$ : üretim maliyeti** Birim maliyete bağlı olarak  $R_0$  aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$R_0(s_1, s_2, p_1) = -c\left(\sum_i (A_i - (1 - \gamma)p_1)\right) + c(s_1 + s_2),$$

$R_0$  bütün tanım bölgesinde aynı yapıya sahiptir. Beklenen değer:

$$E[R_0(s_1, s_2, p_1)] = -c\left(\sum_i (A_i - (1 - \gamma)p_1)\right) + c(s_1 + s_2).$$

**$R_1$ : Dönem-1 kar fonksiyonu**

1. dönemde gelir, talebi karşılayan stok ile fiyatın çarpımından elde edilir.

$$R_1(s_1, s_2, p_1, \epsilon(\omega)) = \sum_i \min(A_i - (1 - \gamma)p_1 + \epsilon_i(\omega), A_i - (1 - \gamma)p_1 + s_i) \cdot p_1$$

$$R_1(s_1, s_2, p_1, \epsilon(\omega)) = \sum_i (A_i - (1 - \gamma)p_1 + \min(\epsilon_i(\omega), s_i)) p_1$$

**$R_2$ : Dönem-2 gelir fonksiyonu**

İkinci dönemdeki kar fonksiyonu gerçekleşen talebe bağlı olarak belirlenecektir.

$$R_2(s_1, s_2, p_1, \epsilon(\omega)) = \max_{p_2} \sum_i (s_i - \epsilon_i^r > 0) \min(s_i - \epsilon_i(\omega), D_i^2) p_2, p_2 \geq 0$$

Bu dönemde rassal olmayan bir problem tanımlıdır. Bunun yanısıra 1. dönem sonundaki fazla stok ve fazla talep değerleri biliniyorken, dönem-2 kar fonksiyonunu tanımlamak için  $A_i$  parametresine de ihtiyaç duyulmaz. İkinci dönem başında 1. ve 2. ürün için net stok seviyeleri  $K_1$  ve  $K_2$  olsun (üretim karar değişkenleri ile karıştırılmamalıdır.). Bu seviyeler ve ilk dönem fiyatı  $p_1$



verili iken karın en çoklandığı  $p_2$  değeri altında kar,  $R^*(K_1, K_2, p_1)$  ile gösterilsin.  $R_2$  aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$R_2(s_1, s_2, p_1, \epsilon(\omega)) = R^*(\min(s_1 - \epsilon_1(\omega), s_2 - \epsilon_2(\omega)), \max(s_1 - \epsilon_1(\omega), s_2 - \epsilon_2(\omega)), p_1)$$

### 4.3.2 Problemin ele alınması

Problemde, önce 2.donem, sonra 1.donem ele alınmıştır.

#### Dnem 2

Amaç  $R^*(K_1, K_2, p_1)$  veren optimal  $p_2$ 'yi bulmaktır. Stok fazlalığı ve/veya talep fazlalığı durumlarına göre:

1. Eğer stok fazlalığı varsa, yani  $K_i > 0$ ,  $i = 1, 2$  ise

$$R^*(K_1, K_2, p_1) = \max_{p_2} (\min(K_1, (1 - \gamma)(p_1 - p_2) + \min(K_1, (1 - \gamma)(p_1 - p_2)))p_2$$

olur. Bu problemi çözmek için  $K_1 \times K_2$  uzayı için de bir taksimleme gereklidir. Uzay 4 taksime ayrıldığında, problem için aşağıdaki çözüm elde edilir,

$$R^*(K_1, K_2) = \begin{cases} (1 - \gamma)\frac{(p_1)^2}{2} & (K_1, K_2) \in b1(K_1, K_2) \\ 2K_1(p_1 - \frac{K_1}{(1-\gamma)}) & (K_1, K_2) \in b2(K_1, K_2) \\ (1 - \gamma)(\frac{K_1}{2(1-\gamma)} + \frac{p_1}{2})^2 & (K_1, K_2) \in b3(K_1, K_2) \\ (K_1 + K_2)(p_1 - \frac{K_2}{(1-\gamma)}) & (K_1, K_2) \in b4(K_1, K_2) \end{cases}$$

Burada  $b_1, b_2, b_3, b_4$ , ( $K_1 > 0, K_2 > 0$ ) uzayını bölen bölgelerdir.

2. Ürün 1 için talep fazlası, ürün 2 için stok fazlası olması durumunda,  $K_1 < 0, K_2 > 0$ ,

$$R^*(K_1, K_2) = \max_{p_2} \min((\gamma((1 - \gamma)p_1 - K_1) + p_1) - p_2, K_2)p_2$$

elde edilir. Bu problemi çözmek için  $K_1 \times K_2$  uzayı 2 taksime ayrıldığında, aşağıdaki çözüm elde edilir:

$$R^*(K_1, K_2) = \begin{cases} \frac{(\gamma((1-\gamma)p_1 - K_1) + p_1)^2}{4} & (K_1, K_2) \in d1(K_1, K_2) \\ K_2((\gamma((1-\gamma)p_1 - K_1) + p_1) - K_2) & (K_1, K_2) \in d2(K_1, K_2) \end{cases}$$

Burada  $d_1, d_2, (K_1 < 0, K_2 > 0)$  uzayını bölen bölgelerdir.

3. 3 Eğer her iki ürün için de talep fazlası varsa,

$$R^*(K_1, K_2, p_1) = 0.$$

### Donem 1

Donem 1 için ele alınan problem, tüm dönemlerde elde edilen gelir ve maliyetin beklenen toplamını en çoklayacak  $s_1, s_2, p_1$  ve  $p_2$  değerlerini bulmaktır. Optimal  $p_2$  Donem 2 probleminden elde edilmiştir.

Optimal  $s_1, s_2$  ve  $p_1$ 'i elde etmek için,  $R(s_1, s_2, p_1)$  fonksiyonu incelenmiştir.  $s_i$ 'nin  $\varepsilon_1^h$ 'e kıyasla aldığı değerlere göre  $S_1 \times S_2$  9 farklı bölgeye ayrılmıştır.  $R(s_1, s_2, p_1)$  her taksim için ayrı incelenmelidir.

$$P = \{P_{\{1111\}}, P_{\{1101\}}, P_{\{1110\}}, P_{\{1100\}}, P_{\{1010\}}, \\ P_{\{1000\}}, P_{\{0101\}}, P_{\{0100\}}, P_{\{0000\}}\}$$

$$\begin{aligned}
P_{\{1111\}} &= \{(s_1, s_2) \in pp1 : (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_1 - \epsilon_1^h \geq 0, s_2 - \epsilon_2^h \geq 0\}, \\
P_{\{1110\}} &= \{(s_1, s_2) \in pp2 : (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_1 - \epsilon_1^h \geq 0, s_2 - \epsilon_2^h < 0\}, \\
P_{\{1101\}} &= \{(s_1, s_2) \in pp3 : (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_1 - \epsilon_1^h < 0, s_2 - \epsilon_2^h \geq 0\}, \\
P_{\{1100\}} &= \{(s_1, s_2) \in pp4 : (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_1 - \epsilon_1^h < 0, s_2 - \epsilon_2^h < 0\}, \\
P_{\{1010\}} &= \{(s_1, s_2) \in pn1 : (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2, s_1 \geq 0, s_2 < 0, s_1 - \epsilon_1^h \geq 0, s_2 - \epsilon_2^h < 0\}, \\
P_{\{1000\}} &= \{(s_1, s_2) \in pn2 : (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2, s_1 \geq 0, s_2 < 0, s_1 - \epsilon_1^h < 0, s_2 - \epsilon_2^h < 0\}, \\
P_{\{0101\}} &= \{(s_1, s_2) \in np1 : (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2, s_1 < 0, s_2 \geq 0, s_1 - \epsilon_1^h < 0, s_2 - \epsilon_2^h \geq 0\}, \\
P_{\{0100\}} &= \{(s_1, s_2) \in np2 : (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2, s_1 < 0, s_2 \geq 0, s_1 - \epsilon_1^h < 0, s_2 - \epsilon_2^h < 0\}, \\
P_{\{0000\}} &= \{(s_1, s_2) \in nn1 : (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2, s_1 < 0, s_2 < 0, s_1 - \epsilon_1^h < 0, s_2 - \epsilon_2^h < 0\}.
\end{aligned}$$

$P$ 'nin nasıl tasksimlere ayrıldığı EK'te Sekil-2'de gösterilmiştir. Buna göre  $E[R_1]$  9 alt fonksiyon ile tanımlanabilir, bunların herbirini,  $f_1^{[abcd]}(\cdot)$  ile gösterelim,  $a, b, c, d, n \in \{0, 1\}$ . Her bir  $f_1^{[abcd]}(\cdot)$   $s_1, s_2$  and  $p_1$  göre türevi alınabilir ve sürekli bir fonksiyondur ,ve 2. türevi de süreklidir.

$$\begin{aligned}
E[R_1(s_1, s_2, p_1, \epsilon)] &= (A_1 - (1 - \gamma)p_1 + x_1(a, 0)p_1(1 - \pi_1) + (A_1 - (1 - \gamma)p_1 + x_1(c, \epsilon_1^h))p_1\pi_1 \\
&\quad + (A_2 - (1 - \gamma)p_1 + x_2(b, 0)p_1(1 - \pi_2) + (A_1 - (1 - \gamma)p_1 + x_1(d, \epsilon_2^h))p_1\pi_2 \\
&\quad \text{if } (s_1, s_2) \in P_{\{abcd\}} \\
&= [A_1 + A_2] - 2 * [(1 - \gamma)p_1] \\
&\quad + [x_1(a, 0)(1 - \pi_1) + x_1(c, \epsilon_1^h)\pi_1]p_1 + [x_2(b, 0)(1 - \pi_2) + x_2(d, \epsilon_2^h)\pi_2]p_1 \\
&= f_1^{[a,b,c,d]}(s_1, s_2, p_1) \quad \text{if } (s_1, s_2) \in P_{\{abcd\}},
\end{aligned}$$

ifadede

$$x_i(y, z) = s_i \cdot (1 - y) + z \cdot y,$$

alınmıştır. Bu ifadede  $y$ , artık kapasitenin gerçekleşecek değerini  $\{0, 1\}$  ile ifade eden bir indikatör,  $z$  ise  $\{0, \epsilon_i^h\}$  değerlerini alan bir parametredir.

İki dönemli problemde optimal  $s_1, s_2, p_1, p_2$  değerleri bulunurken  $R(s_1, s_2, p_1)$  beklenen toplam kar fonksiyonunda karar değişkenlerinin alabileceği değerlere göre çok fazla taksimleme yapmak gerekmektedir.  $R$  fonksiyonu  $13^4 = 28561$  ayrı fonksiyondan oluşabilir (bunlardan bazıları olurlu taksimler değildir). Olurlu olmayan parçalar ayıklanabilirse, hesaplama süreleri oldukça kısalmaktadır. Sekil2'de verilen 1. dönem için yapılan  $P$  taksimlemesi,  $R_2$  hesaplarındaki  $K_1, K_2$  değerlerini ve 2. dönemdeki taksim sayısını da etkileyecektir. Aşağıdaki  $P$  taksimindeki bazı durumlar için olurlu olmayan bölgelerin nasıl elimine edileceği açıklanmaktadır.

### 4.3.3 Taksim $P_{0000}$ (Bkz. EK-1 Sekil2, nn1)

Bu taksim  $s_1 < 0, s_2 < 0$ 'a karşılık gelmektedir.

$$R(s_1, s_2, p_1) = (A_1 + A_2 + (1 - \gamma) * p_1 + s_1 + s_2)(p_1 - c), \quad (s_1, s_2) \in nn1$$

olarak tanımlıdır. Karar değişkeni  $p_1$  üretim maliyetinden yüksek olacağı için  $R$ 'nin  $s_1$  ve  $s_2$ 'ye göre türevi her zaman pozitiftir, ve  $P_{0000}$  taksiminde optimum  $s_1, s_2$  değerleri 0'dır.  $s_1$  ve  $s_2$  değerleri belirlendikten sonra  $p_1^* = \max(\min(\frac{A_1+A_2}{2(1-\gamma)}, \frac{A_1}{(1-\gamma)}, \frac{A_2}{(1-\gamma)}), c)$  olmakta ve ikinci dönemde iki ürün de talep fazlasıyla girmektedir. Bu durumda  $p_2$  tanımlı olmaz.

### 4.3.4 Taksim: $P_{0100}$ ve $P_{1000}$ (Bkz.Sekil-2, np2 ve pn2)

Bu taksim  $s_1 \geq 0, 0 < s_2 \leq s_2 - \epsilon_2^h$ 'e ve onun simetrik durumuna karşılık gelmektedir.

$$\begin{aligned} R(s_1, s_2, p_1) &= (A_1 + A_2 + (1 - \gamma) * p_1 + s_1)(p_1 - c) + s_2(p_1\pi_2 - c) \\ &+ (1 - \pi_2)(\pi_1 R_2(s_1, s_2) + (1 - \pi_2)R_2(s_1 - \epsilon_1^h, s_2)), \quad (s_1, s_2) \in np2 \end{aligned}$$

$R_2$  geçerli olacak fonksiyonu bulmak için  $(s_1, s_2)$  taksimine bakılması gerekir

$$\frac{\gamma((1-\gamma)p_1 - s_1 + \epsilon_1^h) + p_1}{2} \leq s_2 \quad (C1)$$

$$\frac{\gamma((1-\gamma)p_1 - s_1) + p_1}{2} \leq s_2 \quad (C2)$$

$$C1 \Rightarrow (s_1, s_2) \in d_1, (s_1 - \epsilon_1^h, s_2) \in d_1$$

$$\bar{C}1 \& C2 \Rightarrow (s_1, s_2) \in d_2, (s_1 - \epsilon_1^h, s_2) \in d_1$$

$$\bar{C}2 \Rightarrow (s_1, s_2) \in d_2, (s_1 - \epsilon_1^h, s_2) \in d_2$$

Buna göre  $R_2$ 'yi oluşturan sadece 3 alt fonksiyon yapısı vardır. Olurlu taksim sayısı 16'dan 3'e indirilmiştir.

**Taksim: np2-(d1,d1)**

$$R(s_1, s_2, p_1) = (A_1 + A_2 + (1 - \text{beta}) * p_1 + s_1)(p_1 - c) + s_2(p_1\pi_2 - c) \\ + (1 - \pi_2)(\pi_1 \frac{(\gamma((1-\gamma)p_1 - s_1) + p_1)^2}{4} + (1 - \pi_2) \frac{(\gamma((1-\gamma)p_1 - s_1 + \epsilon_1^h) + p_1)^2}{4})$$

(s.t)C1&np2

$R(s_1, s_2, p_1)$ ın  $s_2$ 'ye göre türevi alındığında aşağıdaki aday değerler elde edilir:

$$(s_2)_1 = \epsilon_2^h \\ (s_2)_2 = \frac{\gamma((1-\gamma)p_1 - s_1 + \epsilon_1^h) + p_1}{2}$$

$(s_2)_1$  np2'den,  $(s_2)_2$  C1'den gelmektedir.  $R(s_1, (s_2)_i, p_1)$ 'in  $s_1$ 'e göre 2. türevi alındığında, her zaman (+) olduğu görülür. Buna göre  $s_1$  için alt ve üst limitlere bakılmalıdır. Adaylar np2'ye

bağlı olarak

$$(s_1)_i^1 = 0$$

$$(s_1)_i^2 = -A + (1 - \gamma)p_1$$

olarak belirlenir. C1 koşulundan da bir aday gelmektedir:

$$(s_1)_1^3 = \gamma((1 - \gamma)p_1 + \epsilon_1^h) - \frac{2\epsilon_2^h - p_1}{\gamma}$$

Verilen bir  $(s_1, s_2) = ((s_1)_i^j, (s_2)_i^j)$ , için optimal  $p_1$  değerleri sınırlara ve türevin sifara eşit olduğu noktalara bakılarak belirlenir:

$${}_1(p_1)_i^j = (p_1)_{FOC(i,j)},$$

np2'ye bağlı adaylar ise

$${}_2(p_1)_i^j = c$$

$${}_3(p_1)_i^j = \frac{A_1}{1 - \gamma}$$

$${}_4(p_1)_i^j = \frac{A_2}{1 - \gamma}$$

olarak belirlenir.

**Taksim:np2-(d2,d2)**

$$\begin{aligned} R(s_1, s_2, p_1) &= (A_1 + A_2 + (1 - beta) * p_1 + s_1)(p_1 - c) + s_2(p_1\pi_2 - c) \\ &+ (1 - \pi_2)(\pi_1 s_2((\gamma((1 - \gamma)p_1 - s_1) + p_1) - s_2)) \\ &+ (1 - \pi_1)s_2((\gamma((1 - \gamma)p_1 - s_1 + \epsilon_1^h) + p_1) - s_2)) \end{aligned}$$

(s.t) $\bar{C}2$ &np2

Benzer yaklaşımla adaylar:

$$(s_1)^1 = 0$$

$$(s_1)^1 = -A_1 + (1 - \gamma)p_1$$

$$(s_1)^3 = (s_1)^{\bar{C}2},$$

$$(s_2)_1^j = 0,$$

$$(s_2)_2^j = \epsilon_2^h,$$

$$(s_2)_3^j = (s_2)_{FOC(i)},$$

$$(s_2)_4^j = (s_2)_{\bar{C}2(i)},$$

ve

$$\begin{aligned}
1(p_1)_i^j &= (p_1)_{FOC(i,j)}, \\
2(p_1)_i^j &= c \\
3(p_1)_i^j &= \frac{A_1}{1-\gamma} \\
4(p_1)_i^j &= \frac{A_2}{1-\gamma} \\
5(p_1)_i^j &= (p_1)_{\bar{C}2(i,j)},
\end{aligned}$$

olarak belirlenir.

**Taksim: np2-(d2,d1)**

$$\begin{aligned}
R(s_1, s_2, p_1) &= (A_1 + A_2 + (1 - \gamma) * p_1 + s_1)(p_1 - c) + s_2(p_1\pi_2 - c) \\
&+ (1 - \pi_2)(\pi_1 s_2((\gamma((1 - \gamma)p_1 - s_1) + p_1) - s_2)) \\
&+ (1 - \pi_1)\frac{(\gamma((1 - \gamma)p_1 - s_1 + \epsilon_1^h) + p_1)^2}{4}
\end{aligned}$$

(s.t) $\bar{C}1 \& C2 \& np2$

Adaylar:

$$\begin{aligned}
(s_1)^2 &= -A_1 + (1 - \gamma)p_1, \\
(s_1)^3 &= (s_1)^{\bar{C}1}, \\
(s_1)^4 &= (s_1)^{C2}.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
(s_2)_1^j &= 0, \\
(s_2)_2^j &= \epsilon_2^h, \\
(s_2)_3^j &= (s_2)_{FOC(i)}, \\
(s_2)_4^j &= (s_2)_{\bar{C}1(j)}, \\
(s_2)_5^j &= (s_2)_{C2(j)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
_1(p_1)_i^j &= (p_1)_{FOC(i,j)}, \\
_2(p_1)_i^j &= c \\
_3(p_1)_i^j &= \frac{A_1}{1-\gamma} \\
_4(p_1)_i^j &= \frac{A_2}{1-\gamma} \\
_5(p_1)_i^j &= (p_1)_{\bar{C}1(i,j)}, \\
_6(p_1)_i^j &= (p_1)_{C2(i,j)},
\end{aligned}$$

olarak belirlenir. Analizler  $P$  bölgesi için  $pp1, pp2, pp3, pp4$  dışındaki bütün taksimler için tamamlanmıştır. Şu anda bu bölgeler üzerinde çalışılmaktadır. Analizler tamamlandığında iki dönemli problemin çözümü için harcanacak hesaplama zamanında önemli ölçüde tasarruf sağlanacaktır.

#### 4.3.5 Senaryo 4

Bu senaryoda iki ürün ve iki dönem varsayılmıştır. Karar değişkenleri: ürünler için üretim seviyeleri, ve her iki dönem için fiyatlardır. ürünlerin ikame oranı dışındaki parametre değerleri farklı kabul edilmiştir. Olay akışı:

1. üretim seviyelerine ve ilk dönem için fiyata karar verilir
2. Talep gerçekleşir

3. İkinci dönem başında stok fazlası ya da talep fazlası olması durumuna göre ürünlerin fiyatına karar verilir.

Bu senaryo altında, ilk dönemde verilen üretim seviyesi ve fiyat kararları Senaryo 1'deki yaklaşımla ele alınmıştır. Yani ikinci dönemde fiyat yoluyla talebi etkileyebilme esnekliği düşünülmeden ilk dönemdeki kararlar verilmektedir. İkinci dönemde ise Senaryo 3'un ikinci dönemindeki yaklaşımla kararlar doğrudan verilebilir.

#### 4.4 İş paketi-2 için Sayısal Analiz

Bu bölümde İş Paketi-2'de sorduğumuz araştırma sorularını yanıtlamak için sayısal analiz yapılmıştır. Senaryo 2 ürün özellikleri açısından en kısıtlı modeldir. Karşılaştırmaların tutarlı olması için bu senaryo baz alınarak ürün özellikleri tanımlanmıştır. ürünlerin simetrik olduğu varsayılmıştır. Sayısal analiz için kullanılan parametreler  $A = \{200, 400, 600\}$ ,  $c = \{5, 20, 50, 100\}$ ,  $b = \{15, 40\}$ ,  $\pi = \{0.2, 0.7\}$ ,  $\gamma = \{0.3, 0.8\}$ 'dir. Toplam 96 durum incelenmiştir. Senaryo 3 için karar değişkenlerinin alabileceği uzay ızgaralara bölünüp bütün değerler için hesaplanmış, en yüksek karı veren değerler seçilmiştir. Bu yaklaşımla her bir durumun Senaryo 3 altında hesaplanması  $\sim 1200$  sn sürmektedir. Senaryo  $k$  altındaki kar  $Kar_k$  ile gösterilsin. Karlılıkların  $Kar_4 > Kar_3 > Kar_1$  olarak ve  $Kar_2 > Kar_1$  olarak sıralanması beklenir. İlgilendiğimiz performans ölçüleri:

1. Talep fazlası ve stok fazlasını ikame ve yeniden fiyatlandırma esnekliği ile dengelemenin getirisi (yok satma durumunda ikamenin getirisi) :  $\frac{Kar_3 - Kar_1}{Kar_1}$
2. Sonradan çıkan bir Yok satma durumunda ikame opsiyonunun getirisi:  $\frac{Kar_4 - Kar_1}{Kar_1}$
3. Fiyatlamayı talebi gördükten sonra yapmanın getirisi:  $\frac{Kar_2 - Kar_1}{Kar_1}$
4. Fiyatı talepten sonra belirleme esnekliği ya da yok satma durumunda ikame esnekliğinin getirilerinin kıyaslanması  $\frac{Kar_3 - Kar_2}{Kar_2}$ .
5. üretim seviyelerini ve ilk dönem ürün fiyatını, yok satma durumunda ikame esnekliğini gözönünde bulundurarak belirlemenin getirisi:  $\frac{Kar_3 - Kar_4}{Kar_4}$

## 4.5 İş Paketi-2 için sonuçlar

Karşılaştırmalarda kullanılan sayısal sonuçlar EK-1'de Tablo A2'de verilmiştir. Herbir karşılaştırma için aşağıdaki gözlemler yapılmıştır:

1. Yok satma durumunda ikame esnekliği getiriye oldukça artırmıştır. 96 durumdan 8'inde getiri %40 – %100 aralığında, diğer durumlarda ise %100 çok üstündedir. Senaryo 1'de stok seviyeleri eşit iken, Senaryo 3'te daha çok tek üründe stok tutmayı ve ikame yapmayı tercih etmiştir.
2. Sonradan çıkan yok satma durumunda ikame opsiyonunun getirisi 8 durumda 0, 48 durumda %40 – %100 aralığında geri kalanında ise %100'den fazladır. Getirinin olmadığı durumlar ikame oranının düşük olduğu durumlara karşılık gelmektedir.
3. Fiyatlamayı talebi gördükten sonra yapmanın getirisinin de her zaman %100den yüksek olduğu görülmüştür. Aradaki fark ikame oranı ile artmıştır. Talepteki varyans farka ikame oranı kadar etki etmemiştir.
4. Fiyatlama esnekliği mi yok satma durumunda ikame esnekliği mi diye sorulduğunda, ikame esnekliğinin getirisini daha yüksek olduğu gözlenmiştir. Getiri %30–%200 arasında değişmektedir. Getirini daha yüksek olduğu durumlar ikame oranının yüksek olduğu durumlara karşılık gelmektedir. Diğer bir etkili faktör de üretim maliyetidir. Maliyet arttıkça ikame esnekliğinin getisi artmaktadır. Talepteki varyansın getiriye etkisi yansımamış görünmektedir.
5. Son olarak, yok satma durumunda ikame esnekliğini yok sayarak üretim miktarlarını belirlemek karı en az yarıya düşürmekte bu oran baz taleple artmaktadır.

Sayısal analizler kısıtlı bir parametre kümesi için yapılabilmektedir. Senaryo 3 için analitik çalışmaların tamamlanmasından sonra daha kapsamlı bir sayısal analiz ve daha geniş çerçevede yorumlar planlanmaktadır.

## 5 Projeden elde edilen sonuçlar

Bu projede üreticilerin ikame yönetimi problemi iki ayrı bakış açısı ile ele alınmıştır. İlkinde ikame kararları üretici tarafından verilmekte, müşterinin ikame davranışı gözönünde bulundurulmamaktadır, yani üreticinin ikame kararlarının müşteri tarafından kabul edildiği varsayılmaktadır. Bu problem sürekli zamanlı Markov karar süreçleri kullanılarak ele alınmış için çoklu-ürün durumunda stok seviyesi, üretim çizelgeleme ve ikame kararlarını veren sezgiseller geliştirilmiş, farklı parametre kümeleri altında bu sezgiseller karşılaştırılmıştır. İkinci bakış açısında müşterilerin ikame davranışları ile üreticinin ikame kararları bir arada ele alınmıştır. üretici üretim miktarları ve fiyata karar vermekte, fiyatı bir araç olarak kullanarak müşterilerin ikame kararlarını etkilemektedir. İki dönemli bir problemde, ilk dönem sonunda stok veya talep fazlası olan ürünlerin yok satma durumunda ikame esnekliği kullanılarak, karlılığın nasıl artırılabilceği üzerinde çalışılmıştır.

Projede yapılan çalışmalar bir kaç yönden geliştirilebilir. Bütün ürünlerin aynı firma tarafından satıldı varsayımı yerine firmalar arasında rekabet oldu, ve ürünlerin farklı firmalar tarafından satıldı durum da incelemeye deerdir. Bu analizler sonucunda, firmaların ürün çeşitlili kararlarını da incelemek mümkün olabilir. Gelecekte yapılabilecek bir diier çalışma da müşterilerin bir sonraki dönemde yapılacak fiyat deşikliklerini öngörerek satın alma kararlarını deıştirdikleri varsayımı altında stok ve fiyatlandırma kararlarını incelemek olabilir.

## 6 Kaynakça

Y.-S. Zheng ve P. Zipkin (1990), A Queueing Model to Analyze the Value of Centralized Inventory Information, *Operations Research* , vol. 38, no. 2, pp. 296-307.

Michael H. Veatch ve Lawrence M. Wein (1996), Scheduling a Make-To-Stock Queue: Index Policies and Hedging Points, *Operations Research*, July/August, vol. 44 no. 4 634-647.

JA Buzacott ve JG Shanthikumar (1993), *Stochastic models of manufacturing systems*, Prentice. Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.

Israel Cidon ve Moshe Sidi (1990), Recursive Computation Of Steady-State Probabilities In Priority Queues, *Operations Research Letters*,9, 249-256.

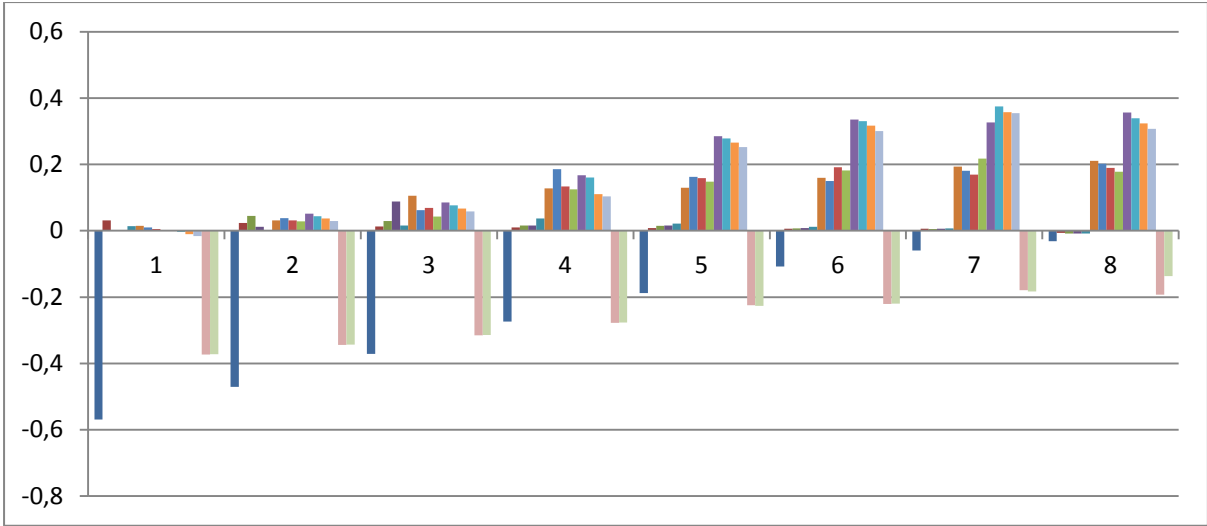
deVericourt, Francis and Karaesmen, Fikri and Dallery, Yves, Optimal Stock Allocation for a Capacitated Supply System, 48, 11, 1486-1501, 2002, *Management Science*.

Perez, A.P. and Zipkin, P., Dynamic scheduling rules for a multiproduct make-to-stock queue, *Operations Research*, 45, 6, 919-930, 1997.

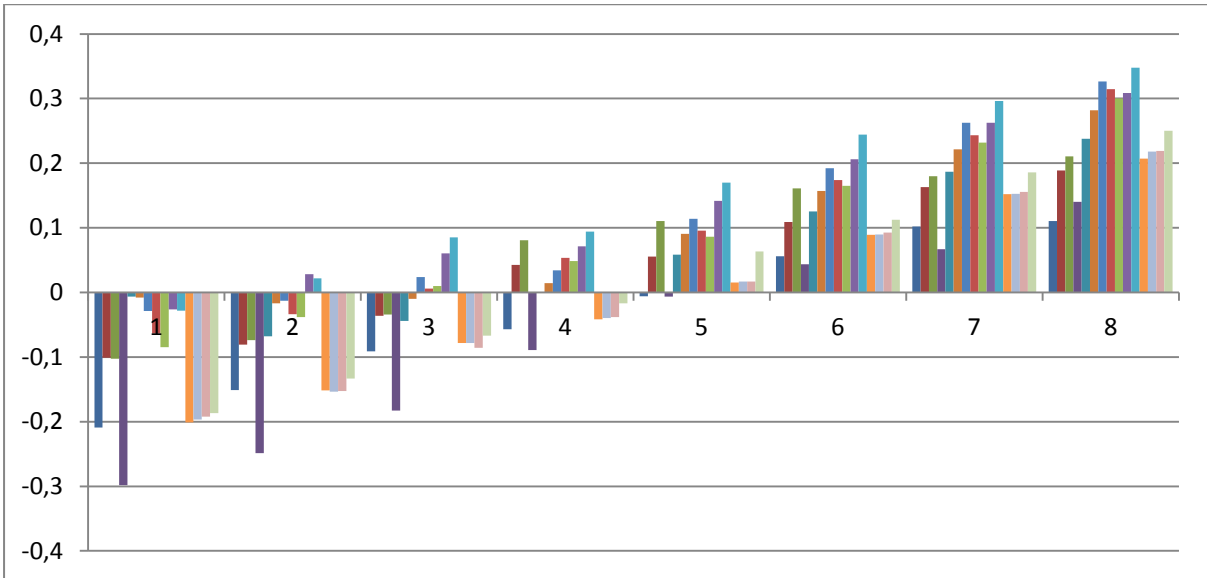
Albert Y. HA, Optimal Inventory Rationing Policy in a Make-to-Stock Production System with Backordering, *Naval Research Logistics*, 44, 5, 1997.

Tablo A1: Prio-DH ve LQ-STLA sezgisellerinin karşılaştırılması.

| $\lambda$ | $b/h \setminus h^*$ | 0.3     | 0.5     | 0.7     | 0.9     | 1       |
|-----------|---------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.04      | 10                  | 0.00%   | 0.00%   | 0.00%   | 0.00%   | 0.00%   |
|           | 20                  | -68.77% | -63.33% | -55.81% | -47.80% | -43.69% |
|           | 50                  | 0.00%   | 0.17%   | 0.27%   | 0.02%   | 0.01%   |
|           | 80                  | 0.00%   | 0.00%   | 0.27%   | 0.03%   | 0.02%   |
| 0.07      | 10                  | -74.52% | -62.12% | -48.72% | -37.14% | -32.32% |
|           | 20                  | 1.76%   | 1.56%   | 0.35%   | 0.08%   | 0.06%   |
|           | 50                  | 0.00%   | 2.28%   | 0.93%   | 0.22%   | 0.08%   |
|           | 80                  | -0.13%  | 3.32%   | 11.43%  | 24.78%  | 28.99%  |
| 0.1       | 10                  | 7.07%   | 1.04%   | 0.63%   | 0.46%   | 0.15%   |
|           | 20                  | 0.93%   | 3.24%   | 2.90%   | 0.80%   | 0.17%   |
|           | 50                  | -2.05%  | 4.05%   | 16.01%  | 30.56%  | 35.18%  |
|           | 80                  | -26.53% | -22.07% | -14.51% | -9.20%  | -7.13%  |
| 0.13      | 10                  | 3.09%   | 11.03%  | 9.33%   | 12.53%  | 14.09%  |
|           | 20                  | -3.03%  | 1.68%   | 16.05%  | 18.76%  | 16.21%  |
|           | 50                  | -19.40% | -13.27% | -5.85%  | 3.27%   | 7.79%   |
|           | 80                  | 11.72%  | 16.53%  | 24.01%  | 30.57%  | 33.32%  |
| 0.16      | 10                  | -4.04%  | 4.80%   | 11.09%  | 11.46%  | 11.66%  |
|           | 20                  | -14.65% | -8.87%  | 3.08%   | 15.59%  | 20.43%  |
|           | 50                  | -11.55% | -9.87%  | -2.99%  | 5.99%   | 10.11%  |
|           | 80                  | -13.26% | -5.36%  | 6.97%   | 20.87%  | 25.31%  |
| 0.18      | 10                  | -21.23% | -13.52% | 1.58%   | 11.12%  | 12.47%  |
|           | 20                  | -11.20% | -6.68%  | 5.99%   | 20.10%  | 24.57%  |
|           | 50                  | -9.85%  | -1.78%  | 10.94%  | 24.97%  | 30.83%  |
|           | 80                  | -19.17% | -8.96%  | 6.29%   | 19.92%  | 25.14%  |
| 0.21      | 10                  | -19.61% | -11.25% | 5.64%   | 16.23%  | 18.14%  |
|           | 20                  | -32.72% | -17.80% | 0.53%   | 16.76%  | 20.59%  |
|           | 50                  | -32.11% | -17.27% | 3.40%   | 19.07%  | 25.81%  |
|           | 80                  | -26.78% | -11.60% | 9.02%   | 25.23%  | 31.50%  |
| 0.22      | 10                  | -27.13% | -14.90% | 5.14%   | 18.25%  | 17.28%  |
|           | 20                  | -26.89% | -16.07% | 2.53%   | 18.04%  | 20.93%  |
|           | 50                  | -41.07% | -23.34% | 1.96%   | 17.56%  | 23.82%  |
|           | 80                  | -42.72% | -23.72% | 1.80%   | 18.91%  | 25.51%  |



Şekil 1a. x-ekseni ürün hiyerarşisini (k1 faktörünü), y-ekseni Prio-DH ve LQ-STLa performans farkını göstermektedir.1,2,3 ile gösterilen alanların herbirindeki çubuklar  $h/b=\{10,15,...,75,80\}$  için performansları göstermektedir. Geliş hızı ( $l=$ ) 0.09 olarak alınmıştır.



Şekil 1a. x-ekseni ürün hiyerarşisini (k1 faktörünü), y-ekseni Prio-DH ve LQ-STLa performans farkını göstermektedir.1,2,3 ile gösterilen alanların herbirindeki çubuklar  $h/b=\{10,15,...,75,80\}$  için performansları göstermektedir. Geliş hızı ( $l=$ ) 0.18 olarak alınmıştır.

Tablo A2. İş Paketi-2 Sayısal Analiz sonuçları

| c  | $\gamma$ | A   | b  | $\pi$ | Profit  |        |        |        | Comparison  |             |             |             |             |
|----|----------|-----|----|-------|---------|--------|--------|--------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
|    |          |     |    |       | Sc3     | Sc4    | Sc1    | Sc2    | Sc3 vs. Sc4 | Sc4 vs. Sc1 | Sc1 vs. Sc2 | Sc1 vs. Sc3 | Sc3 vs. Sc2 |
| 5  | 0,3      | 200 | 15 | 0,2   | 38356   | 7907   | 1564   | 28335  | 3,85        | 4,05        | 17,11       | 23,52       | 0,35        |
| 5  | 0,3      | 200 | 15 | 0,7   | 40764   | 8229   | 5850   | 30554  | 3,95        | 0,41        | 4,22        | 5,97        | 0,33        |
| 5  | 0,3      | 200 | 40 | 0,2   | 39716   | 18800  | 4171   | 29694  | 1,11        | 3,51        | 6,12        | 8,52        | 0,34        |
| 5  | 0,3      | 200 | 40 | 0,7   | 47881   | 21086  | 15600  | 35951  | 1,27        | 0,35        | 1,3         | 2,07        | 0,33        |
| 5  | 0,3      | 400 | 15 | 0,2   | 154090  | 16479  | 3279   | 113904 | 8,35        | 4,03        | 33,74       | 46          | 0,35        |
| 5  | 0,3      | 400 | 15 | 0,7   | 158650  | 16800  | 11850  | 118272 | 8,44        | 0,42        | 8,98        | 12,39       | 0,34        |
| 5  | 0,3      | 400 | 40 | 0,2   | 157020  | 41657  | 8743   | 116697 | 2,77        | 3,76        | 12,35       | 16,96       | 0,35        |
| 5  | 0,3      | 400 | 40 | 0,7   | 171490  | 43943  | 31600  | 128667 | 2,9         | 0,39        | 3,07        | 4,43        | 0,33        |
| 5  | 0,3      | 600 | 15 | 0,2   | 347220  | 25050  | 4993   | 256620 | 12,86       | 4,02        | 50,4        | 68,54       | 0,35        |
| 5  | 0,3      | 600 | 15 | 0,7   | 354090  | 25371  | 17850  | 263123 | 12,96       | 0,42        | 13,74       | 18,84       | 0,35        |
| 5  | 0,3      | 600 | 40 | 0,2   | 351690  | 64514  | 13314  | 260834 | 4,45        | 3,85        | 18,59       | 25,42       | 0,35        |
| 5  | 0,3      | 600 | 40 | 0,7   | 371300  | 66800  | 47600  | 278523 | 4,56        | 0,4         | 4,85        | 6,8         | 0,33        |
| 5  | 0,8      | 200 | 15 | 0,2   | 288910  | 28050  | 5850   | 101956 | 9,3         | 3,79        | 16,43       | 48,39       | 1,83        |
| 5  | 0,8      | 200 | 15 | 0,7   | 295590  | 29175  | 20850  | 109722 | 9,13        | 0,4         | 4,26        | 13,18       | 1,69        |
| 5  | 0,8      | 200 | 40 | 0,2   | 293180  | 66800  | 15600  | 107180 | 3,39        | 3,28        | 5,87        | 17,79       | 1,74        |
| 5  | 0,8      | 200 | 40 | 0,7   | 310060  | 74800  | 55600  | 129080 | 3,15        | 0,35        | 1,32        | 4,58        | 1,4         |
| 5  | 0,8      | 400 | 15 | 0,2   | 1153900 | 58050  | 11850  | 403960 | 18,88       | 3,9         | 33,09       | 96,38       | 1,86        |
| 5  | 0,8      | 400 | 15 | 0,7   | 1167500 | 59175  | 41850  | 419220 | 18,73       | 0,41        | 9,02        | 26,9        | 1,78        |
| 5  | 0,8      | 400 | 40 | 0,2   | 1162700 | 146800 | 31600  | 414180 | 6,92        | 3,65        | 12,11       | 35,79       | 1,81        |
| 5  | 0,8      | 400 | 40 | 0,7   | 1198000 | 154800 | 111600 | 456080 | 6,74        | 0,39        | 3,09        | 9,73        | 1,63        |
| 5  | 0,8      | 600 | 15 | 0,2   | 2594800 | 88050  | 17850  | 905960 | 28,47       | 3,93        | 49,75       | 144,37      | 1,86        |
| 5  | 0,8      | 600 | 15 | 0,7   | 2615300 | 89175  | 62850  | 928720 | 28,33       | 0,42        | 13,78       | 40,61       | 1,82        |
| 5  | 0,8      | 600 | 40 | 0,2   | 2608300 | 226800 | 47600  | 921180 | 10,5        | 3,76        | 18,35       | 53,8        | 1,83        |
| 5  | 0,8      | 600 | 40 | 0,7   | 2662000 | 234800 | 167600 | 983080 | 10,34       | 0,4         | 4,87        | 14,88       | 1,71        |
| 20 | 0,3      | 200 | 15 | 0,2   | 34772   | 7457   | 1114   | 24998  | 3,66        | 5,69        | 21,43       | 30,21       | 0,39        |
| 20 | 0,3      | 200 | 15 | 0,7   | 37029   | 7779   | 5400   | 27217  | 3,76        | 0,44        | 4,04        | 5,86        | 0,36        |
| 20 | 0,3      | 200 | 40 | 0,2   | 36070   | 17600  | 2971   | 25794  | 1,05        | 4,92        | 7,68        | 11,14       | 0,4         |
| 20 | 0,3      | 200 | 40 | 0,7   | 43146   | 19886  | 14400  | 32052  | 1,17        | 0,38        | 1,23        | 2           | 0,35        |
| 20 | 0,3      | 400 | 15 | 0,2   | 146830  | 16029  | 2829   | 107569 | 8,16        | 4,67        | 37,03       | 50,91       | 0,36        |
| 20 | 0,3      | 400 | 15 | 0,7   | 151420  | 16350  | 11400  | 111930 | 8,26        | 0,43        | 8,82        | 12,28       | 0,35        |
| 20 | 0,3      | 400 | 40 | 0,2   | 149680  | 40457  | 7543   | 109795 | 2,7         | 4,36        | 13,56       | 18,84       | 0,36        |
| 20 | 0,3      | 400 | 40 | 0,7   | 162760  | 42743  | 30400  | 121765 | 2,81        | 0,41        | 3,01        | 4,35        | 0,34        |
| 20 | 0,3      | 600 | 15 | 0,2   | 336270  | 24600  | 4543   | 247282 | 12,67       | 4,42        | 53,43       | 73,02       | 0,36        |
| 20 | 0,3      | 600 | 15 | 0,7   | 343130  | 24921  | 17400  | 253785 | 12,77       | 0,43        | 13,59       | 18,72       | 0,35        |
| 20 | 0,3      | 600 | 40 | 0,2   | 340660  | 63314  | 12114  | 250936 | 4,38        | 4,23        | 19,71       | 27,12       | 0,36        |
| 20 | 0,3      | 600 | 40 | 0,7   | 358610  | 65600  | 46400  | 268625 | 4,47        | 0,41        | 4,79        | 6,73        | 0,33        |
| 20 | 0,8      | 200 | 15 | 0,2   | 283510  | 27600  | 5400   | 98618  | 9,27        | 4,11        | 17,26       | 51,5        | 1,87        |
| 20 | 0,8      | 200 | 15 | 0,7   | 290190  | 28725  | 20400  | 106384 | 9,1         | 0,41        | 4,21        | 13,23       | 1,73        |
| 20 | 0,8      | 200 | 40 | 0,2   | 287780  | 65600  | 14400  | 103280 | 3,39        | 3,56        | 6,17        | 18,98       | 1,79        |
| 20 | 0,8      | 200 | 40 | 0,7   | 304660  | 73600  | 54400  | 125180 | 3,14        | 0,35        | 1,3         | 4,6         | 1,43        |
| 20 | 0,8      | 400 | 15 | 0,2   | 1143100 | 57600  | 11400  | 397620 | 18,85       | 4,05        | 33,88       | 99,27       | 1,87        |
| 20 | 0,8      | 400 | 15 | 0,7   | 1156700 | 58725  | 41400  | 412880 | 18,7        | 0,42        | 8,97        | 26,94       | 1,8         |
| 20 | 0,8      | 400 | 40 | 0,2   | 1151900 | 145600 | 30400  | 407280 | 6,91        | 3,79        | 12,4        | 36,89       | 1,83        |
| 20 | 0,8      | 400 | 40 | 0,7   | 1187200 | 153600 | 110400 | 449180 | 6,73        | 0,39        | 3,07        | 9,75        | 1,64        |
| 20 | 0,8      | 600 | 15 | 0,2   | 2578600 | 87600  | 17400  | 896620 | 28,44       | 4,03        | 50,53       | 147,2       | 1,88        |
| 20 | 0,8      | 600 | 15 | 0,7   | 2599100 | 88725  | 62400  | 919380 | 28,29       | 0,42        | 13,73       | 40,65       | 1,83        |
| 20 | 0,8      | 600 | 40 | 0,2   | 2592100 | 225600 | 46400  | 911280 | 10,49       | 3,86        | 18,64       | 54,86       | 1,84        |
| 20 | 0,8      | 600 | 40 | 0,7   | 2645800 | 233600 | 166400 | 973180 | 10,33       | 0,4         | 4,85        | 14,9        | 1,72        |
| 50 | 0,3      | 200 | 15 | 0,2   | 28152   | 19446  | 19446  | 18323  | 0,45        | 0           | -0,06       | 0,45        | 0,54        |
| 50 | 0,3      | 200 | 15 | 0,7   | 30225   | 6879   | 4500   | 20542  | 3,39        | 0,53        | 3,56        | 5,72        | 0,47        |
| 50 | 0,3      | 200 | 40 | 0,2   | 29311   | 19446  | 19446  | 17994  | 0,51        | 0           | -0,07       | 0,51        | 0,63        |
| 50 | 0,3      | 200 | 40 | 0,7   | 35049   | 17486  | 12000  | 24252  | 1           | 0,46        | 1,02        | 1,92        | 0,45        |



|     |     |     |    |     |         |        |        |        |       |      |       |        |      |
|-----|-----|-----|----|-----|---------|--------|--------|--------|-------|------|-------|--------|------|
| 50  | 0,3 | 400 | 15 | 0,2 | 132830  | 15129  | 1929   | 94892  | 7,78  | 6,84 | 48,2  | 67,87  | 0,4  |
| 50  | 0,3 | 400 | 15 | 0,7 | 137220  | 15450  | 10500  | 99253  | 7,88  | 0,47 | 8,45  | 12,07  | 0,38 |
| 50  | 0,3 | 400 | 40 | 0,2 | 135530  | 38057  | 5143   | 95991  | 2,56  | 6,4  | 17,66 | 25,35  | 0,41 |
| 50  | 0,3 | 400 | 40 | 0,7 | 147470  | 40343  | 28000  | 107968 | 2,66  | 0,44 | 2,86  | 4,27   | 0,37 |
| 50  | 0,3 | 600 | 15 | 0,2 | 314870  | 23700  | 3643   | 228606 | 12,29 | 5,51 | 61,75 | 85,43  | 0,38 |
| 50  | 0,3 | 600 | 15 | 0,7 | 321610  | 24021  | 16500  | 235116 | 12,39 | 0,46 | 13,25 | 18,49  | 0,37 |
| 50  | 0,3 | 600 | 40 | 0,2 | 319130  | 60914  | 9714   | 231140 | 4,24  | 5,27 | 22,79 | 31,85  | 0,38 |
| 50  | 0,3 | 600 | 40 | 0,7 | 337300  | 63200  | 44000  | 248822 | 4,34  | 0,44 | 4,66  | 6,67   | 0,36 |
| 50  | 0,8 | 200 | 15 | 0,2 | 272710  | 26700  | 4500   | 91942  | 9,21  | 4,93 | 19,43 | 59,6   | 1,97 |
| 50  | 0,8 | 200 | 15 | 0,7 | 279390  | 27825  | 19500  | 99710  | 9,04  | 0,43 | 4,11  | 13,33  | 1,8  |
| 50  | 0,8 | 200 | 40 | 0,2 | 276980  | 63200  | 12000  | 95480  | 3,38  | 4,27 | 6,96  | 22,08  | 1,9  |
| 50  | 0,8 | 200 | 40 | 0,7 | 293860  | 71200  | 52000  | 117380 | 3,13  | 0,37 | 1,26  | 4,65   | 1,5  |
| 50  | 0,8 | 400 | 15 | 0,2 | 1E+06   | 56700  | 10500  | 384940 | 18,78 | 4,4  | 35,66 | 105,81 | 1,91 |
| 50  | 0,8 | 400 | 15 | 0,7 | 1135100 | 57825  | 40500  | 400200 | 18,63 | 0,43 | 8,88  | 27,03  | 1,84 |
| 50  | 0,8 | 400 | 40 | 0,2 | 1130300 | 143200 | 28000  | 393480 | 6,89  | 4,11 | 13,05 | 39,37  | 1,87 |
| 50  | 0,8 | 400 | 40 | 0,7 | 1165600 | 151200 | 108000 | 435380 | 6,71  | 0,4  | 3,03  | 9,79   | 1,68 |
| 50  | 0,8 | 600 | 15 | 0,2 | 2546200 | 86700  | 16500  | 877940 | 28,37 | 4,25 | 52,21 | 153,32 | 1,9  |
| 50  | 0,8 | 600 | 15 | 0,7 | 2566700 | 87825  | 61500  | 900700 | 28,23 | 0,43 | 13,65 | 40,73  | 1,85 |
| 50  | 0,8 | 600 | 40 | 0,2 | 2559700 | 223200 | 44000  | 891480 | 10,47 | 4,07 | 19,26 | 57,18  | 1,87 |
| 50  | 0,8 | 600 | 40 | 0,7 | 2613400 | 231200 | 164000 | 953380 | 10,3  | 0,41 | 4,81  | 14,94  | 1,74 |
| 100 | 0,3 | 200 | 15 | 0,2 | 18917   | 12071  | 12071  | 7198   | 0,57  | 0    | -0,4  | 0,57   | 1,63 |
| 100 | 0,3 | 200 | 15 | 0,7 | 21340   | 5379   | 3000   | 9417   | 2,97  | 0,79 | 2,14  | 6,11   | 1,27 |
| 100 | 0,3 | 200 | 40 | 0,2 | 19667   | 12071  | 12071  | 4994   | 0,63  | 0    | -0,59 | 0,63   | 2,94 |
| 100 | 0,3 | 200 | 40 | 0,7 | 24863   | 13486  | 8000   | 11251  | 0,84  | 0,69 | 0,41  | 2,11   | 1,21 |
| 100 | 0,3 | 400 | 15 | 0,2 | 111090  | 77786  | 77786  | 73766  | 0,43  | 0    | -0,05 | 0,43   | 0,51 |
| 100 | 0,3 | 400 | 15 | 0,7 | 115170  | 13950  | 9000   | 78134  | 7,26  | 0,55 | 7,68  | 11,8   | 0,47 |
| 100 | 0,3 | 400 | 40 | 0,2 | 113580  | 77786  | 77786  | 72996  | 0,46  | 0    | -0,06 | 0,46   | 0,56 |
| 100 | 0,3 | 400 | 40 | 0,7 | 124780  | 36343  | 24000  | 84966  | 2,43  | 0,51 | 2,54  | 4,2    | 0,47 |
| 100 | 0,3 | 600 | 15 | 0,2 | 280820  | 200640 | 200640 | 197484 | 0,4   | 0    | -0,02 | 0,4    | 0,42 |
| 100 | 0,3 | 600 | 15 | 0,7 | 287210  | 22521  | 15000  | 203987 | 11,75 | 0,5  | 12,6  | 18,15  | 0,41 |
| 100 | 0,3 | 600 | 40 | 0,2 | 284860  | 200640 | 200640 | 198135 | 0,42  | 0    | -0,01 | 0,42   | 0,44 |
| 100 | 0,3 | 600 | 40 | 0,7 | 302270  | 59200  | 40000  | 215824 | 4,11  | 0,48 | 4,4   | 6,56   | 0,4  |
| 100 | 0,8 | 200 | 15 | 0,2 | 254710  | 25200  | 3000   | 80818  | 9,11  | 7,4  | 25,94 | 83,9   | 2,15 |
| 100 | 0,8 | 200 | 15 | 0,7 | 261390  | 26325  | 18000  | 88584  | 8,93  | 0,46 | 3,92  | 13,52  | 1,95 |
| 100 | 0,8 | 200 | 40 | 0,2 | 258980  | 59200  | 8000   | 82480  | 3,37  | 6,4  | 9,31  | 31,37  | 2,14 |
| 100 | 0,8 | 200 | 40 | 0,7 | 275860  | 67200  | 48000  | 104380 | 3,11  | 0,4  | 1,17  | 4,75   | 1,64 |
| 100 | 0,8 | 400 | 15 | 0,2 | 1085500 | 55200  | 9000   | 363820 | 18,66 | 5,13 | 39,42 | 119,61 | 1,98 |
| 100 | 0,8 | 400 | 15 | 0,7 | 1099100 | 56325  | 39000  | 379080 | 18,51 | 0,44 | 8,72  | 27,18  | 1,9  |
| 100 | 0,8 | 400 | 40 | 0,2 | 1094300 | 139200 | 24000  | 370480 | 6,86  | 4,8  | 14,44 | 44,6   | 1,95 |
| 100 | 0,8 | 400 | 40 | 0,7 | 1129600 | 147200 | 104000 | 412380 | 6,67  | 0,42 | 2,97  | 9,86   | 1,74 |
| 100 | 0,8 | 600 | 15 | 0,2 | 2492200 | 85200  | 15000  | 846820 | 28,25 | 4,68 | 55,45 | 165,15 | 1,94 |
| 100 | 0,8 | 600 | 15 | 0,7 | 2512700 | 86325  | 60000  | 869580 | 28,11 | 0,44 | 13,49 | 40,88  | 1,89 |
| 100 | 0,8 | 600 | 40 | 0,2 | 2505700 | 219200 | 40000  | 858480 | 10,43 | 4,48 | 20,46 | 61,64  | 1,92 |
| 100 | 0,8 | 600 | 40 | 0,7 | 2559400 | 227200 | 160000 | 920380 | 10,26 | 0,42 | 4,75  | 15     | 1,78 |

## **Bildiri Özeti**

Production scheduling and substitution policies for multiple items with stochastic demand

Nursen Töre, Seçil Savaşaneril

Middle East Technical University  
Department of Industrial Engineering, Ankara TURKEY

We study a manufacturer's production scheduling problem for multiple substitutable items. For each item, inventory is kept separately, and if upon demand arrival stock is not available, then demand is backordered. Depending on the inventory level, it is possible to meet the demand via a substitute item. However, it takes a time and cost to substitute the item with another one. Thus, the substitution decisions need to be given before the demand is realized. Besides substitution the manufacturer decides on the production scheduling, i.e., which product to produce next. The production and substitution decisions are given dynamically over time depending on the net inventory level of the products. It is possible to show that for the two-product setting optimal production policy is characterized by a hedging point and a switching curve, and the substitution policies are characterized by threshold substitution levels. For the multiple item setting, we propose several heuristics. Through numerical analysis, the conditions under which each heuristic performs well are identified.

# Manufacturer-Driven Substitution Policies for Multiple Items

For manufacturers operating in an uncertain environment, flexibility is a valuable asset. Manufacturers may benefit from comprehensive review of types of manufacturing flexibility; ranging from operation flexibility, process flexibility to material handling flexibility. Another form of flexibility is in fulfilling the demand. This type of flexibility helps improve the “availability” and can be exemplified by product substitution, delayed differentiation, modularity in product design, or delivery flexibility. The manufacturing and demand fulfillment flexibility are intervened, and the latter cannot be achieved without the former. In this study, we aim to develop substitution policies for multiple items. In general, substitution can take place at the product (end-item) level or at the component level, can be static (anticipative) or dynamic (stock-out-based). Dynamic substitution is triggered by the occurrence of demand when the requested item is not in stock. Anticipative substitution is a planned-in-advance substitution and often times the aim is to achieve scale economies in cycle stock.

Practice of product substitution can be observed in various sectors. For example, in computer manufacturing the products are usually classified according to their processing capabilities. When demand occurs the manufacturer may offer a superior product at the price of the lower-grade product. This leads to savings in inventory holding or lost sales cost, but will result in loss of profit margin. In steel industry, demand for beams of lesser strength can be substituted by beams of higher strength. Although product substitution provides flexibility in satisfying the demand and have potential to generate savings, it is not clear how the manufacturers would tap such savings. Obviously substitution decisions cannot be given in isolation of the inventory or production decisions, there is a need for jointly addressing the problem of stock keeping, production switchovers, and substitution. This makes the problem under consideration a complex one, considering that the product variety could be high. Our work contributes to the stream on manufacturer-driven substitution policies for multiple items that have stochastic demand.

In the past work on manufacturer-driven substitution, either only the substitution problem is addressed under exogeneous stock levels, or only stock decisions and substitution decisions are given jointly in a single period or multi-period setting (Rao, Swaminathan and Zhang 2004; Xu, Yao and Zheng 2011). In the studied settings, production scheduling decisions are not incorporated. Of those

studies that address the substitution, inventory, and production (switchover) decisions jointly, the scope is usually limited to deterministic settings (Dawande et al. 2010). An exception is the recent study by Iravani, Kolfal and Oyen (2012). We study the joint production scheduling, substitution and inventory decisions in a stochastic setting with multiple items. The net inventory level of the products change over the time due to the stochastic nature of the demand and the production, and this results in dynamic policies. For the two item setting, (under certain assumptions) it is possible to characterize the structure of the optimal policies. For the multiple item setting we develop heuristic policies. We compare the policies and identify the conditions under which each heuristic performs well.

### **Description of the problem**

We study a manufacturer's joint production, scheduling and substitution problem. The manufacturer produces  $n$  products in a make-to stock queue setting. The stock for each product is kept separately. Demand for each product arrives independently following a Poisson process. The products are stored separately, but are produced by a single production facility one unit at a time. Production times are exponentially and identically distributed random variables. Switching from one product to the other is assumed to take no time or money. Upon demand arrival for a certain product, if the product is available in stock, the demand is immediately met. Otherwise, demand is either backlogged, or is met by a substitute product. Substitution of product  $j$  with product  $i$  requires processing on product  $i$  and thus is assumed to occur in an exponential time. It is assumed that the manufacturer may substitute product  $j$  with product  $i$  before a demand is realized as a hedge against the risk of product  $i$  stock-out. There is a cost of substituting product  $j$  with product  $i$ .

The system state is denoted by the net inventory level of the products. The manufacturer decides which item to schedule, and whether to substitute product  $j$  with product  $i$ . The aim is to minimize the total of holding, backordering and substitution costs. The system has memoryless property, the optimal policy is a state dependent Markovian policy which can be determined by a Markov decision process.

### **The solution approach and the findings**

Due to the curse of dimensionality, it is difficult to find optimal policies in a reasonable time. We

propose several heuristic policies for this problem. The heuristics can be roughly categorized into two. Those that are based on a complete ranking of the items, and those that take a longest queue policy as a base approach. We also propose an upper bound and a lower bound to obtain a benchmark for the performance of the policies. The upper bound is based on the FCFS policy where a separate stock is kept for each item and no substitutions take place. The optimal cost under this policy can be obtained in closed form. The lower bound is a policy constructed under the assumptions of no cost and time for substitutions, and again the cost can be obtained in closed form. These bounds are not necessarily tight, however give us insight on the structure of the optimal policy.

We test the performance of the heuristics under several parameter settings. Parameter Set 1 is a combination of small group of specific instances that promote certain heuristics. Parameter Set 2 is a more comprehensive random set of instances. Parameter Set 3 is a group of select instances that help understanding the impact of a single parameter on the performance. We test these parameter sets in light, medium and high arrival rates. It was observed that when (i) the traffic intensity is low, (ii) the holding and backordering cost structure apparently imposes a ranking among the items, (iii) backordering costs are identical but holding costs are not, (iv) there exist a small group of items that significantly differs from the others by their low holding and backordering costs, ranking based policies perform well. On the other hand when (i) traffic intensity is not low or very high, (ii) the items are close to each other in terms of the cost parameters, then longest-queue based policies perform well. As the arrival rate is high, and the items can be ordered in terms of the costs, the optimal policy approaches to the lower bound. On the other hand, under low arrival the optimal policy is close to the upper bound.

## Conclusions

We study a manufacturer's problem of production changeover, substitution and determining the inventory levels. The optimal policy uses inventory level information and has a dynamic structure. For the two-item setting it is possible to show that the optimal policy is characterized by hedging point, switchover curve and substitution threshold levels. For the multiple item setting we propose heuristic policies. We test the performance of the heuristics for a variety of parameter settings and observe that there does not exist a heuristic that outperforms the other under all parameter settings. We identify the conditions under which each heuristic performs well.

## References

- Dawande, M., Gavirneni, S., Mu, Y., Sethi, S. and Sriskandarajah, C. (2010). On the Interaction Between Demand Substitution and Production Changeovers. *Manufacturing & Service Operations Management*, **12**, 682–691.
- Iravani, S. M., Kolfal, B. and Oyen, M. P. (2012). Process flexibility and inventory flexibility via product substitution. *Flexible Services and Manufacturing Journal*, 1–24.
- Rao, U. S., Swaminathan, J. and Zhang, J. (2004). Multi-product inventory planning with downward substitution, stochastic demand and setup costs. *IIE Transactions*, **36**, 59–71.
- Xu, H., Yao, D. and Zheng, S. (2011). Optimal Control of Replenishment and Substitution in an Inventory System with Nonstationary Batch Demand. *Production and Operations Management*, **20**, 727–736.

**TÜBİTAK  
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU**

|   |  |
|---|--|
| Proje Yürütücüsü:                       | Yrd. Doç. Dr. SEÇİL SAVAŞANERİL TÜFEKÇİ  |
| Proje No:                               | 112M431  |
| Proje Başlığı:                          | Üreticiler İçin Ürün İkame Politikalarının Belirlenmesi Ve İkame Esnekliğinin Getiri Analizi   |
| Proje Türü:                             | Hızlı Destek   |
| Proje Süresi:                           | 12   |
| Araştırmacılar:                         |  |
| Danışmanlar:                            |  |
| Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi: | ORTA DOĞU TEKNİK Ü. MÜHENDİSLİK F. ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ B.  |
| Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri:  | 01/11/2012 - 01/11/2013  |
| Onaylanan Bütçe:                        | 15980.0  |
| Harcanan Bütçe:                         | 12380.0  |
| Öz:                                     | <p>Bu projede üreticilerin ikame yönetimi problemi iki ayrı bakış açısı ile ele alınmıştır. İlkinde ikame kararları üretici tarafından verilmekte, müşterinin ikame davranışı gözönünde bulundurulmamaktadır, yani üreticinin ikame kararlarının müşteri tarafından kabul edildiği varsayılmaktadır. Bu problem sürekli zamanlı Markov karar süreçleri kullanılarak ele alınmış için çoklu-ürün durumunda stok seviyesi, üretim çizelgeleme ve ikame kararlarını veren sezgiseller geliştirilmiş, farklı parametre kümeleri altında bu sezgiseller karşılaştırılmıştır.</p> <p>İkinci bakış açısında müşterilerin ikame davranışları ile üreticinin ikame kararları bir arada ele alınmıştır. Üretici üretim miktarları ve fiyata karar vermekte, fiyatı bir araç olarak kullanarak müşterilerin ikame kararlarını etkilemektedir. İki dönemli bir problemde, ilk dönem sonunda stok veya talep fazlası olan ürünlerin yok satma durumunda ikame esnekliği kullanılarak, karlılığın nasıl artırılacağı üzerinde çalışılmıştır.</p> |
| Anahtar Kelimeler:                      | Üretici-,müşteri-,yok satma-güdümlü ikame,Markov karar süreci,Kuyruk kontrolü, Sezgiseller   |
| Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu Mu?:  | Hayır  |