TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNİK ARAŞTIRMA KURUMU
MAKİNA, KİMYASAL TEKNOLOJİLER
MALZEME VE İMALAT SİSTEMLERİ ARAŞTIRMA GRUBU
PROJE NO : 84

C++ DERLEYİCİSİ KULLANILARAK ÜÇ BOYUTLU SIKIŞTIRILABİLEN AKIMLAR İÇİN EULER ÇÖZÜCÜSÜNÜN GELİŞTİRİLMESİ

PROJE NO : MİSAG- 84

Proje Yürütücüsü : Prof. Dr. M. Halûk AKSEL

Haziran 1998, ANKARA

ÖNSÖZ

Ülkemizde savunma sanayi ve uygulamaları gün geçtikçe gelişmektedir. Özellikle, roket ve uçakların uçuş sırasında üzerlerinde oluşan kuvvetlerin bulunması gün geçtikçe önem kazanmaktadır. Roket ve uçakların tasarımları ve elde mevcut olan tasarımlardaki değişiklikler ancak bu kuvvetlerin bilinmesi ile mümkün olmaktadır. Güdümsüz ve güdümlü roketlerin uçuş simülasyonları, yine uçaklar üzerine takılabilecek çeşitli aygıtların uçuşu ne şekilde etkileyeceği bu kuvvetlerin çeşitli uçuş şartlarında hesaplanabilmesi ile gerçekleşmektedir. Bu nedenle uçan bir cisim üzerinde oluşan kuvvetlerin hesaplaması son derece önemlidir. Bu proje çerçevesinde, sıkıştırılabilen bir akışkan içerisinde ses altı, ses etrafı ve ses üstü hızlarda uçan üç boyutlu bir cisim etrafındaki akış Euler denklemleri kullanılarak bulunmuştur. Geliştirilen yazılım C++ biligisayar derleme dili kullanılarak etkileşimli olarak hazırlandığı için kullanıcıların yazılımın detaylarını öğremmeden hesaplama yapmaları mümkün olmaktadır. Araştırmacılar, projeye destek sağlayarak gerçekleşmesine yardımcı olan Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu, Makina, Kimyasal Teknolojiler Malzeme ve İmalat Sistemleri Araştırma Grubuna, grupça önerilen ve proje süresince nesneye yönelik programlama ilkelerinin mühendislik amaçlı kullanımı konusunda danışmanlık veren Dr. Cem DENER'e katkılarından dolayı teşekkür ederler.

ÖZ

Sıkıştırılabilen akışların zamanla değişmeyen çözümlerini bulmak için EULER++ adında, üç boyutlu, zamanla değişen Euler denklemlerini çözen bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Korunmuş haldeki Euler denklemleri, ikinci dereceden hassas, tek adımlı Lax-Wendroff şeması ve hücre köşeli sonlu hacim metodu kullanılarak sayısal olarak ayrıştırılmıştır. Belirli zaman ilerlemeli bu çözümü hızlandırabilmek için bölgesel zaman adımı kullanılmıştır. Şok bölgelerindeki salınımları düzenlemek için yapay sönümleme uygulanmıştır. Uzak bölge sınırlarında iki çesit sınır şartı kullanılmıştır. Birincisi Ni[18] tarafından geliştirilen dağıtma formüllerinin doğrudan uygulanması, ikicisi ise karakteristik sınır şartıdır. Bunların her ikiside yansıtmayan sınır şartlarıdır. Duvar sınırlarında da yine karakteristik sınır şartı uygulanmıştır.

Programlama dili olarak, SAD (Sayısal Akışkanlar Dinamiği) uygulamalarında fazla tercih edilmeyen, C++ kullanılmıştır.

Veri girişini daha güvenli ve kolay hale getirmek için bir kullanıcı arabirimi geliştirilmiştir. Bu arabirim sayesinde kullanıcının daha önceden belirlenen verilerin değerlerini, ve çözümün yakınsamasını her aşamada izleyebilmesi sağlanmıştır.

Programın geçerliliği üç test durumu için denenmiştir. Bunlar, Ni-tümseği üzerindeki sesaltı, sescıvarı ve sesüstü kanal akışı, üç değişik giriş Mach sayısı için sfır hücum açısındaki NACA0012 kanat profili etrafındaki akış ve SOCBT mermisi etrafındaki tümüyle üç boyutlu, eksenel simetrik akışlardır.

Anahtar Kelimeler: Euler Denklemleri, Hücre-Köşeli Sonlu Hacim Metodu, Lax-Wendroff Şeması, Karakteristik Sınır Şartları, C++, Nesneye Yönelik Proglamlama

ABSTRACT

A numerical code, called EULER++, is developed in order to solve three dimensional, unsteady Euler equations to obtain steady solutions of compressible flows. Conservative form of Euler equations are discretized with a second order accurate, one-step Lax-Wendroff scheme combined with a cell-vertex finite volume formulation. In order to accelerate this explicit, time-marching scheme, local time stepping is used. Artificial damping at shock locations is applied for stabilizing the oscillations. Two types of boundary conditions are used for the far-field boundaries. First is the direct application of distribution formulas developed by Ni [18] and second is the characteristic type boundary conditions. Both are non-reflecting. Solid wall boundary conditions are also characteristic type.

C++ is used as the programming language which is not a common application for CFD (Computational Fluid Dynamics) studies.

A user interface is designed in order to make data input more safe and easy. Also, this interface enables the user to watch the values of variables at pre-specified node locations and view the convergence history after every iteration.

Three test cases are used to check the validity of the code. These are the subsonic, transonic and supersonic channel flow over a Ni-bump, flow over a NACA0012 airfoil at zero angle of incidence for three different inlet Mach numbers and fully three-dimensional and an axisymmetric flow past a secant-ogive-cylinder-boattail (SOCBT) projectile.

Keywords: Euler Equations, Cell-Vertex Finite Volume Method, Lax-Wendroff Scheme, Characteristic Boundary Conditions, C++, Object-Oriented Programming

İÇİNDEKİLER

ÖZ iv
ABSTRACT v
ŞEKİL LİSTESİ viii
SEMBOL LİSTESİ xi
BÖLÜM
1. GİRİŞ 1
1.1 Genel 1
1.2 Literatür Taraması 4
1.3 Gerçekleştirilen Çalışmanın İçeriği 6
2. TEMEL DENKLEMLER 8
2.1 Genel 8
2.2 Euler Denklemlerinin Korunmuş Formülasyonu 9
3. SONLU HACİM FORMÜLASYONU 11
3.1 Genel 11
3.2 Temel Denklemlerin Ayrıştırılması 11
3.3 Karalılık Analizi 21
3.4 Yapay Sönümleme 22
4. SINIR ŞARTLARI 25
4.1 Genel 25
4.2 Dağıtma Formüllerinin Sınırlarda Kullanılması 25
4.3 Karakteristik Sınır Şartları 28
4.3.1 Temel Denklemlerin Karakteristik Formülasyonu 28
4.3.2 Sesaltı İçakış Sınır Şartı ($0<V_n<a$) 30
4.3.3 Sesaltı Dışakış Sınır Şartı ($V_n\leq 0$, $|V_n|\leq a$) 33

4.3.4 Sesüstü İçakış Sınır Şartı (V_n>a) 34
4.3.5 Sesüstü Dışakış Sınır Şartı (V_n<0, |V_n|>a) 34
4.3.6 Karakteristik Duvar Sınır Şartı 35
5. PROGRAMLAMA DETAYLARI ve ÇÖZÜM ALGORİTMASI 37
5.1 Genel 37
5.2 C++ ile Programlama 37
5.3 EULER++'ın Yapısı ve Çözüm Algoritması 39
6. SONUÇLAR 44
6.1 Genel 44
6.2 Ni-tümseği Üzerideki Sesaltı Akış 44
6.3 Ni-tümseği Üzerindeki Sescivarı Akış 47
6.4 Ni-tümseği Üzerindeki Sesüstü Akış 49
6.5 NACA0012 Kanat Profili Etrafindaki Akış 52
6.6 SOCBT Mermisi Etrafindaki Akış 53
7. DEĞERLENDİRME 61
7.1 Özet 61
7.2 Gelecekte Yapıllabilecek Çalışmalar 62
KAYNAKLAR 63
EKLER
A. ALAN VEKTÖRÜ ve HACİM HESAPLARI 68
A.1 Alan Vectörü Hesabı 68
A.2 Hücre Hacmi Hesabı 72
B. YEREL YÜZEY KOORDİNATLARININ HESABI 74
B.1 Genel 74
B.2 Yerel Yüzey Koordinatlarının Tanımı 74
B.3 Jacobian ve Metriklerin Hesabı 76

ŞEKİL LİSTESİ

ŞEKİLLER

3.1 Düğüm 1'in etrafindaki ağ yapısı 13

3.2 Düğüm 1'in etrafindaki kontrol hacmi 14

3.3 Düğüm 1'in etrafindaki kontrol hacminin Hücre I içinde kalan kısmı 14

3.4 Hücre alan vektörlerinin tanımı 17

4.1 Model denklem için bir boyutlu hesaplama bölgesi 26

4.2 Üç boyutlu hesaplama bölgesinde sınırlar 27

4.3 Uzak bölge sınırlarında karakteristik dalga yayılımı 31

5.1 İki bloktan oluşan bir problemin tanımı 38

5.2 EULER++'ın kullanıcı arabiriminden bir ekan görüntüsü 39

5.3 Hücreler ve düğümler için işaretleme sistemi 41

6.1 %10'luk Ni-tümseği üzerindeki iki boyutlu ağ 45

6.2a Ni-tümseğinin alt ve üst duvarlarındaki Mach sayısı dağılımı
(Sesaltı durumu - Ni'nin çözümü) 45

6.2b Ni-tümseğinin alt ve üst duvarlarındaki Mach sayısı dağılımı
(Sesaltı durumu - EULER++'ın çözümü) 45

6.3a Ni-tümseği üzerideki eş-Mach sayısı eğrileri
(Sesaltı durumu - Ni'nin çözümü) 46

6.3b Ni-tümseği üzerideki eş-Mach sayısı eğrileri
(Sesaltı durumu - EULER++ çözümü) 46

6.4a Ni-tümseğinin alt ve üst duvarlarındaki Mach sayısı dağılımı
(Sescivarı durumu - Ni'nin çözümü) 47

6.4b Ni-tümseğinin alt ve üst duvarlarındaki Mach sayısı dağılımı
(Sescivarı durumu - EULER++'ın çözümü) 47

6.5a Ni-tümseği üzerideki eş-Mach sayısı eğrileri
(Sescivarı durumu - Ni'nin çözümü) 48
6.5b Ni-tümseği üzerideki Mach eş-Mach sayısı eğrileri
(Sescivarı durumu - EULER++'ın çözümü) 48
6.6 $\tau = 5.0$ kullanılarak bulunan Ni-tümseğinin alt ve üst duvarlarındaki
Mach sayısı dağılımı 49
6.7a Ni-tümseğinin alt ve üst duvarlarındaki Mach sayısı dağılımı
(Sesüstü durumu - Ni'nin çözümü) 50
6.7b Ni-tümseğinin alt ve üst duvarlarındaki Mach sayısı dağılımı
(Sesüstü durumu - EULER++'ın çözümü) 50
6.8a Ni-tümseği üzerideki Mach eş-Mach sayısı eğrileri
(Sesüstü durumu - Ni'nin çözümü) 51
6.8b Ni-tümseği üzerideki Mach eş-Mach sayısı eğrileri
(Sesüstü durumu - EULER++'ın çözümü) 51
6.9 Üst duvarda uzak bölge sınır şartı kullanılarak bulunan Ni-tümseği üzerideki
Mach koturları (Sesüstü durumu - EULER++'ın çözümü) 52
6.10 NACA0012 kanat profili etrafindaki ağın kesitinin büyütülmüş görüntüsü 53
6.11a $M_{giriş}$=0.85 için NACA0012 etrafindaki eş-Mach sayısı eğrileri
(Hirsch [2]'den alınan sonuç) 54
6.11b $M_{giriş}$=0.85 için NACA0012 etrafindaki eş-Mach sayısı eğrileri
(EULER++'dan alınan sonuç) 54
6.12a $M_{giriş}$=0.95 için NACA0012 etrafindaki eş-Mach sayısı eğrileri
(Hirsch [2]'den alınan sonuç) 55
6.12b $M_{giriş}$=0.95 için NACA0012 etrafindaki eş-Mach sayısı eğrileri
(EULER++'dan alınan sonuç) 55
6.13a $M_{giriş}$=1.2 için NACA0012 etrafindaki eş-Mach sayısı eğrileri
(Hirsch [2]'den alınan sonuç) 56
6.13b $M_{giriş}$=1.2 için NACA0012 etrafindaki eş-Mach sayısı eğrileri konturları
(EULER++'dan alınan sonuç) 56
6.14 Deneysel SOCBT geometrisi 57

6.15a SOCBT mermisi etrafindaki üç boyutlu ağ 57
6.15b SOCBT mermisi etrafindaki ağın büyütülmüş kesiti ve kuyruk bölgesi detayı 58
6.16 SOCBT için kullanılan hesaplama bölgesi 58
6.17a 7° kuyruk açılı SOCBT mermisi etrafindaki eş-Mach sayısı eğrileri
(Fu-Liang [37]'ın çözümü) 59
6.17b 7° kuyruk açılı SOCBT mermisi etrafindaki Mach konturları
(EULER++'ın çözümü) 59
A.1 Alan vektörünün tanımı 68
A.2 $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ and $\vec{A}_3$ alan vektörleri 71
A.3 Bir hücrenin hacim hesabı için bölünmesi 72
B.1 Yerel Yüzey Koordinatları 75

SEMBOL LİSTESİ

a	ses hızı
$\bar{A}$	alan vektörü
A	jacobian matrisi
$\bar{b}$	binormal vector
e	birim hacimdeki toplam enerji
$\bar{\bar{E}}$	akı tensörü
$\bar{F}$	x doğrultusundaki akı
$\bar{G}$	y doğrultusundaki akı
$\bar{H}$	z doğrultusundaki akı
h_o	toplam entalpi
$\bar{i}$	x doğrultasındaki birim vektör
$\bar{j}$	y doğrultasındaki birim vektör
J	jacobian
$\bar{k}$	z doğrultasındaki birim vektör
$\bar{\bar{I}}$	birim tensör
L	benzerlik matrisi
M	Mach sayısı
$\bar{n}$	normal vektör
p	basınç
$\bar{r}$	pozisyon vektörü
$\bar{s}$	teğet vektör
$\bar{S}$	alan vektörü

t zaman

$\bar{U}$ korunmuş değişken vektörü

u x doğrultusundaki hız

V hız, hacim

$\bar{V}$ hız vektörü

v y doğrultusundaki hız

w z doğrultusundaki hız

$\bar{W}$ karakteristik geğişken vektörü, dalga hızı

x fiziksel bölgedeki x koordinatı

y fiziksel bölgedeki y koordinatı

z fiziksel bölgedeki z koordinatı

Yunan Sembolleri

Δ birinci derece değişim operatörü

Δt zaman dilimi

ΔV hücre hacmi

$\Delta\Delta$ ikinci derece değişim operatörü

Λ dayagonal jacobian matrisi

β SOCBT mermisinin kuyruk açısı

δ düzeltme operatörü

ε normalize edilmiş basınç değişim katsayısı

γ spesifik ısı oranları

η hesaplama bölgesindeki yerel koordinat

λ dayagonal jacobian matrisinin karakteristik değerleri

μ yapay sönümleme operatörü

ρ yoğunluk

τ yapay sönümleme faktörü

ξ hesaplama bölgesindeki yerel koordinat

ζ hesaplama bölgesindeki yerel koordinat

∇ eğim operatörü

∂ parçalı türev operatörü

Altindisler

b binormal doğrultu

c düzeltilmiş değer

f uzak bölge değeri

i düğüm indisi

n normal doğrultu

o durağan değer

p tahmin edilen değer

s teğet doğrultu

x x bileşeni, x türevi

y y bileşeni y türevi

z z bileşeni, z türevi

ξ ξ bileşeni, ξ türevi

η η bileşeni, η türevi

ζ ζ bileşeni, ζ türevi

Üstindisler

n zaman seviyesi

- iç düğümler kullanılarak bulunan değer

* değiştirilmiş değer

~ ilkel form

BÖLÜM 1
GİRİŞ

1.1 GENEL

Akışkanlar dinamiği ile uğraşan araştırmacıların kullandıkları yöntemler analitik, sayısal ve deneysel olmak üzere üçe ayrılır.

Analitik yöntemler çabuk ve kapalı formda sonuçlar verir. Fakat çok kısıtlayıcı varsayımlara dayanır ve sadece basit geometrilerin sınırlı aerodinamik özellikleri elde edilebilir. Deneysel yöntemlerle gerçek veya model geometri test edilip bütün aerodinamik veriler elde edilebilir. Ancak bu yöntem modelleme ve test zamanı göz önüne alındığında uzun ve pahalıdır. Diğer taraftan elde edilen verilerin doğruluğu doğrudan kullanılan ekipmanın (rüzgar tüneli, v.b.) özelliklerine bağlıdır [1].

Analitik metotlarla karşılaştırıldığında sayısal metotlar daha az sayıda kısıtlayıcı varsayıma ihtiyaç duyarlar ve daha karmaşık geometrilerin çözümünde kullanılabilirler. Öte yandan Mach ve Reynolds sayıları için daha geniş limitlerde çalışırlar. Deneysel yöntemlerle kıyaslandığında ise daha ucuzdurlar [1]. Kullanılan bilgisayarın hızı ve kapasitesi bazen kısıtlayıcı olmakla beraber, bilgisayar teknolojisinin günümüzdeki gelişim hızı göz önüne alındığında bu sorun önemini yitirmektedir.

Her üç yöntemin de avantaj ve dezavantajları karşılaştırıldığında Sayısal Akışkanlar Dinamiğinin (SAD) rolü her geçen gün artmaktadır. SAD, aerodinamik uygulamalarının yanında, meteoroloji, inşaat mühendisliği, nükleer bilimler, makina mühendisliği, otomotiv sanayii gibi daha birçok disiplinde de yaygın olarak kullanılmaktadır.

Akışkanlar dinamiği fiziksel olarak üç temel prensibe dayanır: Kütlenin, momentumun ve enerjinin korunumu. SAD ile yapılan, bu formüllerde geçen diferansiyel ya da integral denklemlerini ayrıştırılmış cebirsel formlara dönüştürmek ve daha sonra da

bunları çözerek uzay ve/veya zamanda belirlenen ayrışık noktalarda akış parametrelerini sayısal olarak hesaplamaktır. SAD ile elde edilen, kapalı çözümlerin aksine, formüller değil sadece sayılardır [2][3].

Akışkanlar mekaniğinin kanunları birçok değişik şekilde formüle edilebilir. Örnek olarak, korunmuş veya korunmamış, integral veya diferansiyel formülasyonlar, temel denklemleri sırasıyla, sabit veya hareketli, sonlu kontrol hacmi veya sonsuz küçüklükteki eleman için yazmakla elde edilir. Bütün bu formlar matematiksel olarak aynı olmakla beraber, sayısal modellemede bazılarının diğerlerine üstünlükleri vardır [2][3].

Akışkanlar dinamiğinin temel denklemlerinin tümüne birden Navier-Stokes denklemleri adı verilir. Bunların kesin çözümleri bugünün sayısal olanaklarıyla mümkün değildir[4]. Bu yüzden, bu denklemler üzerinde çeşitli seviyelerde basitleştirmelere gidilmektedir. En üst seviyedeki basitleştirme Reynolds ortalamalı Navier-Stokes denklemleridir. Ondan sonra gelen ince kayma-tabakası varsayımı, ancak viskoz bölgelerin fazla yaygın ve önemli olmadığı durumlarda geçerlidir. Viskoz olmayan modeller ise duvarlardan uzak bölgeler için veya sınır tabakasının etkileri gözardı edilebilecek durumlarda geçerlidir. Ele alınan problemin çözümünde en basit, fakat bunun yanıda akış karakteristiğini de yeterli derecede yansıtabilen uygun modeli şeçmek çok önemlidir [2].

Varsayım seviyesi seçilmesinden sonraki basamak, uzay ve formül ayrıştırmasında kullanılacak matematiksel metodun belirlenmesidir. Uzay ayrıştırması, süreklilik uzayının sonlu sayıdaki noktalardan oluşan bir ağ ile ifade edilmesidir. Sayısal varsayımların doğruluğu, doğrudan bu ağın boyutlarına bağlıdır. Ağ oluşturma yötemlerinin mükemmel bir özeti Thompson [5]'da bulunabilir.

Bütün sayısal metotların temeli fiziksel denklemlerin lineer veya lineer olmayan cebirsel denklemlere dönüştürülmesidir. Ayrıca zamana bağlı ve zamana bağlı olmayan formülasyonları ayırt etmek de önemlidir. Fiziksel olarak zamana bağlı olan, örneğin geçiş özelliği taşıyan veya zamanla değişen sınır şartı kullanan problemler için zamana bağlı matematiksel model seçmekten başka alternatif yoktur. Durağan problemler için de zamana bağlı denklemler kullanılıp, zamanla değişmeyen sonuçlar elde edinceye kadar çözüme devam edilebilir. Buna zamanda ilerleme yöntemi denir [2].

Kullanılacak metot açık ve kapalı olarak ta sınıflandırılabilir. Açık yöntemlerde çözümün yeni bir zaman basamağındaki değişken değerleri daha önceki zaman basamaklarındaki değerlere bağlıdır. Bu yöntem her zaman basamağında az sayıda hesaplama gerektirir, fakat yakınsama ve stabilite açısından kullanılabilecek en büyük zaman dilimi ile ilgili çok ciddi kısıtlayıcı koşullar oluşturur. Kapalı metotlarda ise her zaman diliminde birden fazla bilinmeyen değişken seti bulunmasından dolayı ihtiyaç duyulan hesaplama sayısı daha fazladır. Bunun yanında daha büyük zaman dilimi kullanımına müsade ettiği için zamanla değişmeyen sonuçlara ulaşmak daha kısa sürer [2].

Cebirsel sistemlerin çözümünde kullanılan yöntemler direkt ve iteratif olarak ta sınıflandırılabilir. İlki, tek bir basamakta, diğeri ise birçok basamakta sonuca ulaşır. Lineer olmayan problemlerin çözümünde iteratif denklemlerin kullanılması zorunludur. İteratif metotlarla birlikte kullanılan hızlandırma yöntemleri yakınsamayı önemli ölçüde çabuklaştırmaktadır. Bölgesel zaman adımı ve çoklu ağ kullanımı hızlandırma yöntemlerinin en yaygın olanlarıdır.

Sonlu fark metodu diferansiyel denklemleri sayısal olarak çözmek için en çok kullanılan ve en eski metottur. Bu yöntemde, diferansiyel denklemlerdeki türevler Taylor açılımıyla ifade edilir. Uygulaması en basit metot olmakla birlikte kullanılacak ağın çok düzenli olması gerekmektedir.

Sonlu eleman metodu zamanla yaygınlık kazanmaktadır. En önemli avantajı kullanılacak ağın düzenli olma şartını istememesidir. Bu metodun matematiksel formülasyonu ile ilgili mükemmel bir giriş Strang ve Fix [7] te bulunabilir. Metodun genel mühendislik uygulamaları Zienkiewicz [8], akışkanlar ile ilgili uygulamaları ise Chung [9] tarafından verilmiştir.

Sonlu hacim metodu korunmuş haldeki integral denklemlerini ayrıştırır. İntegral denklemlerinin kullanımı şokların yakalanmasına olanak sağlar. Bu metot sonlu eleman yönteminin ağ oluşturmadaki serbestliği ile sonlu fark metodunun ayrışık akış bölgesi tanımlamadaki esnekliğini birleştirmeyi amaçlamaktadır [10][11]. Bu yöntem ilk olarak iki boyutlu Euler denklemlerinin çözümü için McDonald [12] ile MacCormack ve Paullay [13] tarafından kullanılmıştır.

1.2 LITERATÜR TARAMASI

Euler denklemlerinin çözümünde ilk olarak merkezi-uzay algoritmaları kullanılmıştır. Bunlar günümüze kadar geliştirilen diğer tekniklerin de temelini oluşturur. Bunların en önemlisi, Lax-Wendroff'un [14] ikinci dereceden hassas şemasıdır. Bu şemanın özelliği lineer konveksiyon denkleminin ikinci dereceden hassas, merkezi ve kapalı çözümünü veren üç noktaya dayalı tek şema olmasıdır.

Lax-Wendroff şemasının türevleri, lineersizlikleri ele almalarındaki farklılıklar ve çok boyutlu olma özellikleriyle birbirinden ayrılmalarına karşın, tek boyutlu lineer hale indirgendiklerinde aynı forma dönüşmektedirler. Örneğin, bu türevlerden biri Ritchmyer ve Morton [15] tarafından geliştirilen ve Jacobian hesaplamasını gerektirmeyen iki adımlı bir şemadır. Ritchmyer şeması olarak da bilinen bu şema, günümüzün lineersizlikleri çok basit bir şekilde ele alan iki adımlı tahmin-düzeltme metotlarının temelini oluşturur. Muhtemelen Lax-Wendroff şemasının en çok kullanılan türevi MacCormack [16] şemasıdır.

Lerat ve Peyret [17] uzay ve zamanda ikinci dereceden hassas, merkezi fark kullanan ve tahmin-düzeltme yapısında olan tüm şemaların sistematik bir analizini yapmışlardır. Lerat ve Peyret şemalarındaki sabitlere değişik değerler verilerek Ritchmyer ve MacCormack şemalarını elde etmek mümkündür.

Tek adımlı Lax-Wendroff şeması çoklu ağ yöntemleriyle birlikte kullanılarak günümüzde praktik hesaplar için tekrar yaygınlık kazanmıştır (Ni[18]). Ni'nin şeması merkezi olmakla birlikte upwind özellikleri de taşımaktadır ve sonlu hacim formülasyonuna uygundur.

İkinci dereceden hassas, üç noktalı bütün Lax-Wendroff şemaları kuvvetli süreksizlik bölgelerinde salınımlar meydana getirir. Diğer taraftan, birinci dereceden hassas şemalardaki kesme hataları sayısal bir viskozite görevi görerek salınımları sönümler. İkinci dereceden hassas şemalardaki bu salınımların detaylı bir açıklaması Lax ve Wendroff [14]'da bulunabilir. Bu makaledeki açıklamalar günümüzde de hala geçerlidir. Süreksizlik bölgelerindeki salınımları önlemek için Von Neumann ve Ritchmyer [19] tarafından yapay sönümleme fikri geliştirilmiştir. Lax ve Wendroff [14] bu ek sönümleme terimlerinin kullanılmasında uyulması gereken kuralları açıklar.

Jameson [20] ve Moitra [21] ikinci ve dördüncü dereceden yapay sönümleme terimlerini beraber kullanmışlardır.

Bağımsız zaman integrasyonlu merkezi şemaların ortak özelliği, akı farklarının ikici dereceden merkezi olarak ayrıştırılması ve ayrı bir zaman integrasyonu kullanmalarıdır. Bu şemayı kullanan tek boyutlu denklemlerin lineerizasyonuyla ilgili ilk çalışmalar Beam ve Warming [22] tarafından yapılmıştır. Standart Beam-Waming şeması esasında her elemanı, tek boyutlu problemlerde 3x3, üç boyutlu problemlerde 5x5 matrisler olan blok üç dayagonelli bir sistemdir. Bu Jacobian matrislerinin her zaman basamağında tersinin alınması çok uzun bir işlemdir. Bunun yerine skalar üç dayagonelli matrislerin tersini almak çok daha basittir. Bu ilk olarak Pulliam ve Chaussee [23] tarafından önerilmiştir. Esasında yapılan denklem setini Jacobian matrisleri dayagonel olacak şekilde düzenlemekten ibarettir.

Jameson [20] tarafından geliştirilen çoklu adım metodu, Runge Kutta çoklu adım zaman integrasyonunun merkezi akı ayrıştırmasına uygulanmasıdır. Bu metotla, dağıtım terimleri, yakınsama hızlandırması ve çoklu ağ tekniği çok verimli ve hassas sonuçlar elde edilecek şekilde birleştirilmiştir.

Upwind şemaları akış denklemlerinin fiziksel özelliklerini ayrıştırılmış formülasyonla birlikte kullanır. Bu teknik, akı vektörü ayırma, akı farkı ayırma ve çeşitli akı kontrolü metotlarını kapsar. Akı vektörü ayırma yöntemi, akıları karakteristik değerlerin işaretine bakarak yapar ve Steger ve Warming [24] tarafından bulunmuştur. Ses civarı akışlardaki problemleri çözmek için Van Leer [25] değişik bir akı ayırma yöntemi geliştirmiştir.

Akışın fiziksel özelliklerini ayrıştırma metoduna uygulamada bir sonraki adım Euler denklemlerinin yerel çözümlerini kullanmaktır. Bu konudaki en orijinal fikir Godunov [26] tarafından sunulmuştur. Esasında Godunov'un şeması başarılı olmuş ilk korunumlu upwind şemasıdır. Bu şemadan türetilen birkaç yaklaşık Riemann çözücüleri Harten ve Hyman [27] da birarada bulunabilir.

Lineer, ikinci dereceden hassas upwind şemaların herzaman salınımlar yarattıkları teorik olarak ispatlanabilir [2]. Bu yüzden akı ayrıştırması metodunun ikinci dereceden hassas şemalara tek başına uygulanması salınımları sönümlemeye yetmemektedir.

Salınımları önlemek ve monoton ve keskin şok geçişleri elde etmek için kısıtlayıcı olarak bilinen lineer olmayan düzeltmelere ihtiyaç vardır.

Süreksizlik bölgelerindeki atlamaları önlemek için her hücredeki değişimi her zaman adımında uygun sınırlarda tutmak gerekir. Bu fikir yüksek çözünürlük şemalarını doğurmuştur. Burada önemli olan nokta, merkezi şemaların aksine, bu şemaların salınımların oluşma mekanizmalarını etkileyerek meydana gelmelerini önceden engellemeleridir. Bütün Değişim Azalması (TVD) şemaları da bu esasa dayanır.

Üç noktalı kapalı ve açık şemaların TVD olma koşulu Harten [28] tarafından geliştirilmiş ve Jameson ve Lax [29] tarafından çoklu nokta şemalarına uyarlanmıştır. TVD şemalarında kullanılan çeşitli kısıtlayıcıların karşılaştırmaları Hirsch'de [2] bulunabilir.

Düzenli, ikinci dereceden hassas, salınım yaratmayan şemalar geliştirilmesi konusunda Harten ve Osher [30] in çalışmaları Esasında Salınım Yaratmayan (ENO) şemaları ortaya çıkarmıştır. Bu şemalar çok daha karışıktır.

Sınır şartlarıyla ilgili olarak da çok sayıda çalışma vardır. Karakteristik sınır metodu, dışarı giden karakteristiklerin Riemann değişmezlerini istenen sınır şartlarıyla birleştirir. Bu konudaki genel bilgiler Moretti [31] de bulunabilir. Yansıtmayan sınır şartları da bir diğer fiziksel sınır şartıdır (Engquist ve Majda [32]). Sınırlarda ekstrapolasyon teknikleri Gottlieb ve Turkel [33] tarafından tartışılmıştır. Diğer birçok sınır şartının karşılaştırması yine bu çalışmada verilmiştir. Chakravarty [34] duvar sınır şartlarıyla ilgili çalışmalar yapmıştır. Son olarak, çok sayıdaki sınır şartının değişik uygulamalardaki karşılaştırmaları Ertük [34] te bulunabilir.

1.3 GERÇEKLEŞTİRİLEN ÇALIŞMANIN İÇERİĞİ

Bu çalışmanın amacı, üç boyutlu, viskoz olmayan, zamanla değişmeyen, ısı transferi olmayan, sıkıştırılabilen akışları çözmek için sayısal bir program geliştirmektir. Bu özellikteki akışlar Euler deklemleriyle ifade edilirler.

İkinci dereceden hassas, tek adımlı Lax- Wendroff şemasının Ni [18] tarafından geliştirilen hali hücre köşeli sonlu hacim metoduyla beraber kullanılmıştır. Bu kapalı, zamanda ilerlemeli şema ile zamanla değişmeyen çözümler elde etmek uzun sürmektedir. Hesaplama zamanını kısaltmak amacıyla bölgesel zaman dilimi uygulanmıştır. Euler

denklemleri tamamıyla korunumlu şekliyle formüle edildiğinden şoklar otomatik olarak yakalanabilmektedir. Şok bölgelerindeki salınımları önlemek amacıyla yapay sönümleme kullanılmıştır. Uzak bölgelerde iki çeşit sınır şartı kullanılmıştır. Birincisi Ni [18] tarafından geliştirilen dağıtım formüllerinin sınır noktalara doğrudan uygulanması, ikincisi ise karakteristik sınır şartıdır. Bunların her ikisi de yansıtmayan sınır şartlarıdır. Duvar sınırlarda da yine karakteristik sınır şartı kullanılmıştır.

EULER++ adı verilen program C++ dili kullanılarak yazılmıştır. Bu yönüyle çalışma hayli önemlidir, çünkü SAD uygulamalarında genellikle FORTRAN dili tercih edilmektedir. C++'ın nesneye yönelik özellikleri kullanılarak, düğüm, hücre, yüz, blok, v.b. gibi fiziksel elemanlar sınıflarla ifade edilmiştir. Bu ifade tarzı programı çok esnek ve daha sonraki gelişmelere çok açık bir hale getirmiştir. Ayrıca program herbiri kendi ağına sahip olan çoklu blok problemlerini de bağlantı sınır şartları kullanarak çözebilmektedir.

Veri girişini daha kolay ve güvenli hale getirebilmek için bir kullanıcı arabirimi geliştirilmiştir. Birçok sabit, kontrol değerleri, sınır özellikleri, başlangıç verileri, v.b. bu arabirim aracılığı ile programa girilebilir. Ayrıca kullanıcı tarafından belirlenen noktalardaki değişkenlerin değerleri ve çözümün yakınsaması her aşamada izlenebilmektedir. Böylelikle kullanıcı ıraksayan bir çözümü anında yarıda kesip gerekli değişiklikleri yaptıktan sonra yeni bir çözüme başlayabilir.

Programın performansı ve doğruluğu üç değişik test durumunda denenmiştir. Birincisi Ni tümseği üzerindeki sesaltı, sescivari ve sesüstü kanal akışları, ikincisi sıfır hücum açısındaki NACA0012 kanat profili etrafındaki akışın üç değişik giriş Mach sayısı için çözümü ve sonuncusu tümüyle üç boyutlu, eksenel simetrik SOCBT mermisi etrafındaki akıştır.

BÖLÜM 2
TEMEL DENKLEMLER

2.1 GENEL

Viskozitesiz ve ısı iletimi olmayan akışların en genel hali Euler denklemleriyle ifade edilir. Euler denklemleri, Navier-Stokes denklemlerindeki kayma gerilimleri ve ısı iletimi terimlerinin ihmal edilmesiyle elde edilir. Bu basitleştirme yüksek Reynolds sayılı akışlar için uygundur. Çünkü Reynolds sayısı yükseldikçe viskoz terimlerin etkili olduğu sınır tabakası kalınlığı azalmaktadır.

Viskoz terimlerin ihmal edilmesi matematiksel formülasyonu fazlasıyla basitleştirmektedir. Çünkü viskozitesiz akış denklemleri ikinci dereceden birinci derece diferansiyel denklemlere dönüşmektedir. Ayrıca çözüm için gerekli sınır şartlarının sayıları da değişmektedir.

Euler denklemlerinin fiziksel dayanağı korunma denklemleri olduğu için, çözümde de bu denklemlerin integral halleri kullanılmalıdır. Denklemlerin integral hallerini kullanmak, sabit kontrol hacimlerde süreksizliklere izin vermektedir ki matematiksel olarak ta aksi düşünülemez. Öte yandan diferansiyel haldeki denklemler akış değişkenlerinin sürekli olma şartını ister. Kısaca, denklemlerin integral halleri diferansiyel hallerine göre daha temel sayılır. Bu saptama akış içerisinde şok gibi gerçek süreksizlikler olduğunda önem kazanır[3].

Bağımlı değişkenlerin seçimiyle ilgili olarak cebirsel denklemler değişik şekillerde tanımlanabilirler. Bağımlı değişkenler $\{\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e\}$ vektörü olarak korunum kanunlarıyla uyumlu seçilirse korunum değişkenleri adını alırlar. Diğer taraftan deneysel olarak ölçülebilen $\{\rho, u, v, w, p\}$ değişkenleri ilkel değişkenler olarak bilinir.

2.2 EULER DENKLEMLERININ KORUNMUŞ FORMÜLASYONU

Kütle, momentum ve enerjinin korunumu integral formunda aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\vartheta} \rho \, d\vartheta + \int_{S} \rho \vec{V} \, dS = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\vartheta} \rho \vec{V} \, d\vartheta + \int_{S} (\rho \vec{V} \otimes \vec{V} + p\bar{\bar{I}}) \, dS = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\vartheta} e \, d\vartheta + \int_{S} (\rho \vec{V}) h_o \, dS = 0 \tag{2.3}$$

Bu üç denklem aşağıdaki gibi daha yoğun bir halde de ifade edilebilir.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\vartheta} U \, d\vartheta + \int_{S} \vec{F} \, dS = 0 \tag{2.4}$$

Bu form ileride kullanılacaktır. Notasyon kolaylığı bakımından aynı denklemler diferansiyel halde de yazılabilir.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho \vec{V}) = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho \vec{V} \otimes pI) = 0 \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial (e)}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho \vec{V} h_o) = 0 \tag{2.7}$$

Üç boyutlu kartezyen koordinat sistemi düşünüldüğünde (2.5), (2.5) ve (2.7) numaralı denklemler aşağıdaki hali alır.

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \tag{2.8}$$

burada

$$\vec{E} = \vec{F}\vec{i} + \vec{G}\vec{j} + \vec{H}\vec{k} \tag{2.9}$$

şeklindedir.

(2.8) ve (2.9) denklemleri birleştirilerek

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} = 0 \tag{2.10}$$

elde edilir. Burada $\vec{U}$ korunmuş değişkenler vektörü, $\vec{F}$, $\vec{G}$ ve $\vec{H}$ ise korunmuş akı vektörleridir. Bu vektörlerin açık halleri aşağıdaki gibidir.

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho u h_o \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho v h_o \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho w h_o \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

İdeal gazlar göz önüne alındığında ise

$$p = (\gamma - 1)\left[e - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2 + w^2)\right] \tag{2.12}$$

$$h_o = \frac{(e+p)}{\rho} \tag{2.13}$$

denklemleri geçerlidir. Tüm bu denklemlerde u, v ve w sırasıyla x, y ve z doğrultularındaki hızları, ρ yoğunluğu, p basıncı, e birim hacimdeki toplam enerjiyi, h_o toplam entalpiyi ve γ spesifik ısı oranını ifade eder.

BÖLÜM 3
SONLU HACİM İNTEGRASYONU

3.1 GENEL

Temel denklemleri ayrıştırmak için kapalı, zamanda ilerlemeli, hem uzayda hem de zamanda ikinci dereceden hassas bir şema kullanılmıştır. Bu metod ilk olarak Ni[18] tarafından tek adımlı Lax-Wendroff şemasından geliştirilmiştir.

İntegrasyon işlemi için hücre köşeli sonlu hacim metodu kullanılmıştır. Bu metodun iki ana özelliği vardır. Birincisi, uzay ayrıştırması için birbirleri üzerine düşmeyen sekizgen hücreler kullanılmıştır. Bu iş için kartezyen koordinat sisteminde düzenli bir ağ kullanılmıştır. İkincisi birbirini takip eden iki zaman adımında hücrelerde meydana gelen değişimler dağıtma formülleri kullanılarak hücrelerin sekizer köşesine dağıtılmıştır. Bu yöntemle bölgesel dalga karakteristiklerini yansıtan bir çeşit yukarı akış (upwinding) özelliği sağlanmıştır [18].

Kullanılan şema kapalı oldığundan her aşamada müsaade edilen en büyük zaman aralığı Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) koşulu uygulanarak hesaplanmıştır. Detaylı bir CFL analizi Oktay [35] da bulunabilir.

Şokları salınımsız bir şekilde yakalayabilmek için yapay sönümleme kullanılmıştır. Ayrıca bu çalışmada uygulanmamakla birlikte şemanın çoklu ağ hızlandırma tekniğine uygun olduğu Ertürk [11] ve Ni [18] tarafından belirtilmiştir.

3.2 TEMEL DENKLEMLERİN AYRIŞTIRILMASI

Korunmuş değişkenlerin zaman türevleri ikinci dereceden Taylor serisi şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$U_i^{n+1} \cong U_i^n + \Delta t(\frac{\partial U}{\partial t})_i^n + \Delta t^2(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2})_i^n \tag{3.1}$$

burada üstindisler zaman seviyesini, altindisler ise düğüm sayısını ifade eder.

Amaç, her düğümde $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ zaman diliminde korunmuş değişkenlerde meydana gelen düzeltmeleri hesaplamaktır. Düzeltmeler şöyle tanımlanır.

$$\delta U_i^n = U_i^{n+1} - U_i^n$$

$$\delta U_i^n = (\frac{\partial U}{\partial t})_i^n \Delta t + (\frac{\partial^2 U}{\partial t^2})_i^n \Delta t^2 \tag{3.2}$$

Burada

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = -\vec{\nabla}.\bar{\bar{E}} \tag{3.3}$$

şeklinde verilir ki bu temel denklemden başka birşey değildir.

Denklem (3.3) Deklem (3.2)'ye yerleştirilirse

$$\delta U_i^n = -(\nabla.\bar{\bar{E}})_i^n \Delta t - \left[\nabla.\frac{\partial E}{\partial t}\right]_i^n \Delta t^2 \tag{3.4}$$

elde edilir.

$$(\frac{\partial \bar{\bar{E}}}{\partial t})_i^n \Delta t = \Delta \bar{\bar{E}} \tag{3.5}$$

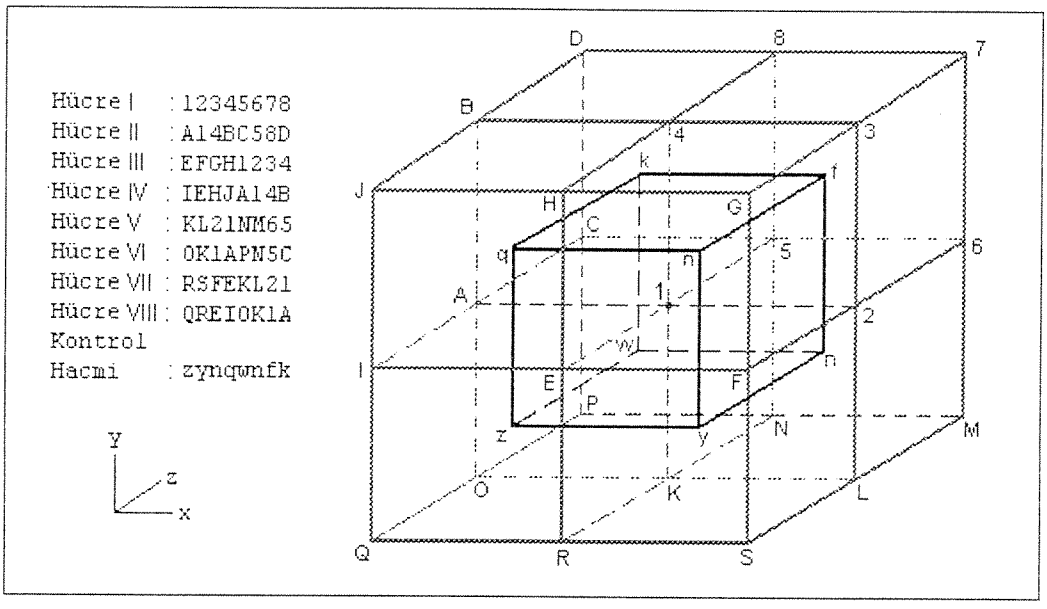
$$\Delta \bar{\bar{E}} = \Delta F\,\vec{i} + \Delta G\,\vec{j} + \Delta H\,\vec{k} \tag{3.6}$$

tanımları yapılıp Denklem (3.4)'e yerleştirilirse

$$\delta U_i^n = -(\nabla.E)_i^n \Delta t - (\nabla.\Delta E)_i^n \frac{\Delta t}{2} \tag{3.7}$$

elde edilir.

Bu denkleme sonlu hacim integrasyonu uygulamadan önce ağ yapısını tanımlayıp, Şekil 3.1'deki Düğüm 1'e konsantre olunabilir. Düğüm 1, Hücre I, Hücre II, v.b. gibi Roma rakkamlarıyla isimlendirilmiş sekiz adet hücreyle çevrilmiştir. Bu hücrelerin köşelerindeki diğer düğümler Düğüm 1, Düğüm 2, Düğüm A, Düğüm B, v.b. gibi tam sayılar veya büyük harflerle isimlendirilmişlerdir. Ayrıca Düğüm 1'in etrafında, üzeride Denklem (3.7)'nin integrasyonunun alınabileceği, (z-y-n-q-w-u-f-k)'den oluşan farazi bir kontrol hacmi vardır.



Şekil 3.1 Düğüm 1'in etrafındaki ağ yapısı

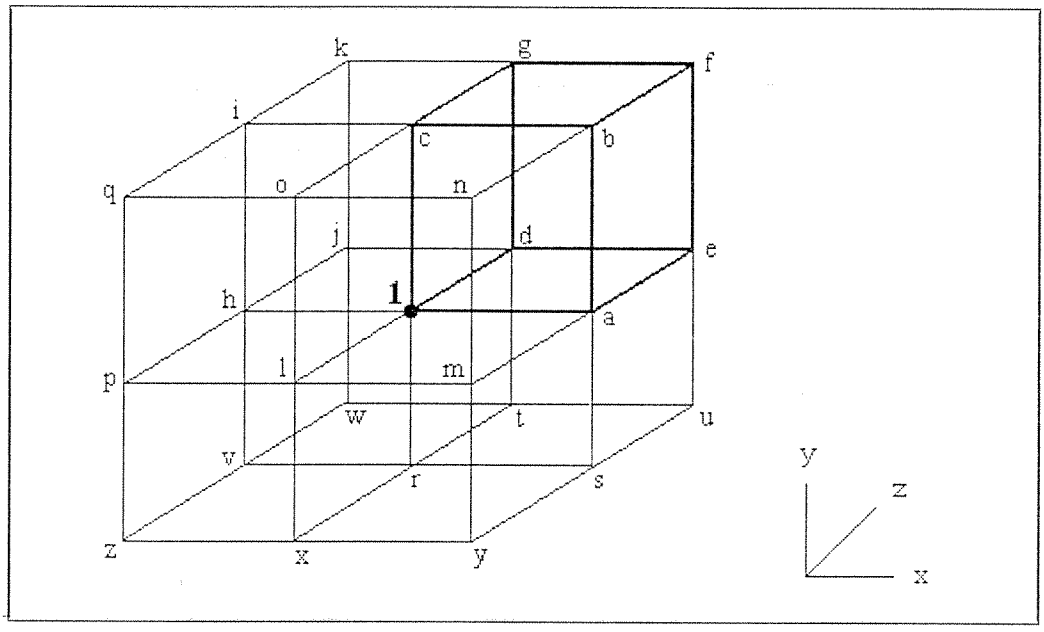
Bu ağ yapısı ile Denklem (3.7)'nin integrasyonu, z-y-n-q-w-u-f-k'den oluşan kontrol hacmi üzerinde yapılabilir.

$$\delta U_1 = -\frac{\Delta t}{\Delta V}\iiint_{CV}(\nabla.E)\,dV - \frac{\Delta t}{2\Delta V}\iiint_{CV}(\nabla.\Delta E)\,dV \tag{3.8}$$

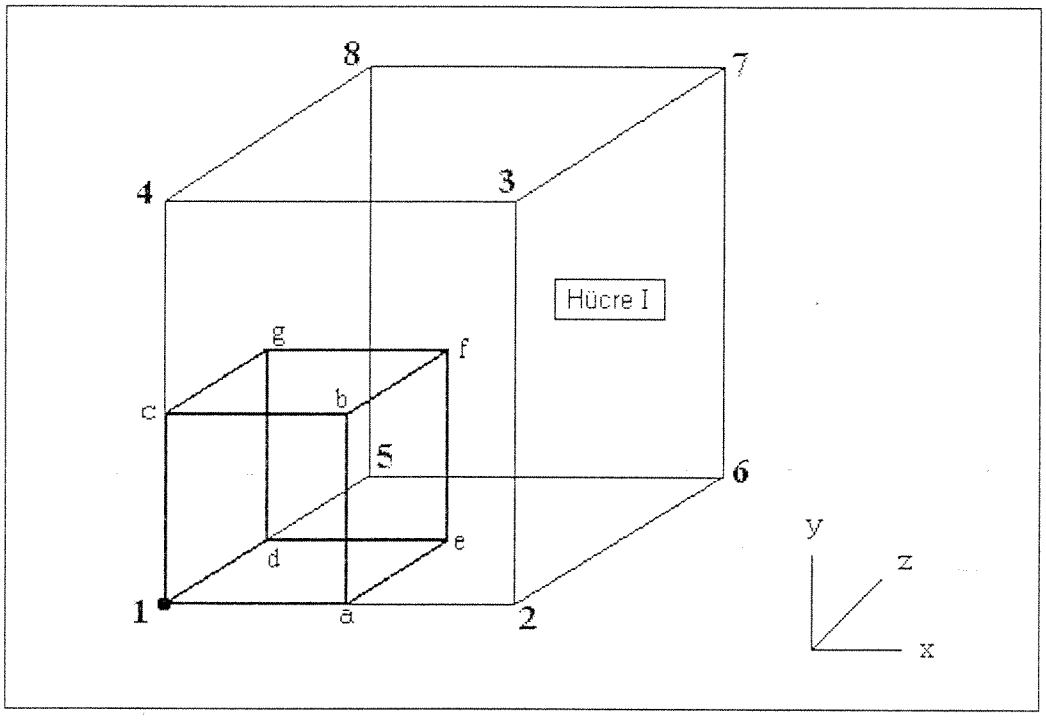
burada ΔV kontrol hacminin hacmidir ve detaylı hesabı Ek A'da bulunabilir.

Şekil 3.2 kontrol hacmini daha detaylı göstermektedir. Görüldüğü gibi kontrol hacmi sekiz parçaya bölünmüş ve oluşan köşeler a, b, c, v.b. gibi küçük harflerle adlandırılmışlardır. Bu parçalardan her biri Düğüm 1'i çevreleyen sekiz adet hücrenin bir

tanesinin içinde yer alır. Örneğin kontrol hacminin Hücre I'in içinde kalan kısmı Şekil 3.3'de görülebilir.



Şekil 3.2 Düğüm 1'in etrafındaki kontrol hacmi



Şekil 3.3 Düğüm 1'in etrafındaki kontrol hacminin Hücre I içinde kalan kısmı

Denklem (3.8)'in ilk terimi sekiz ayrı hacim integraline bölünebilir. Bu sekiz integral kotrol hacminin Şekil 3.2'de görülen 1-a-b-c-d-e-f-g, h-1-c-i-j-d-g-k, v.b. parçalarını kapsar. Dahası bu integraller, bu parçaların içinde yer aldıkları hücrelerin üzerinde alınan integrallerin sekizde birine eşit sayılabilirler.

Dolayısıyla δU_1

$$\delta U_1 = \begin{pmatrix} \delta U_{1,I} + \delta U_{1,II} + \delta U_{1,III} + \delta U_{1,IV} + \\ \delta U_{1,V} + \delta U_{1,VI} + \delta U_{V,II} + \delta U_{V,III} \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

toplamı olarak verilebilir. Burada $\delta Q_{1,I}$, Hücre I'de meydana gelen değişimlerin Düğüm 1'deki düzeltmeye yansıyan kısmıdır ve Denklem(3.8) kullanılarak şu şekilde verilir.

$$\delta U_{1,I} = -\frac{\Delta t}{8\Delta V}\iiint_{CellI}(\nabla.E)\,dV - \frac{\Delta t}{2\Delta V}\iiint_{1abcdefg}(\nabla.\Delta E)\,dV \tag{3.10}$$

Bu denkleme Gauss Iraksama Teoremi uygulanarak

$$\delta U_{1,I} = -\frac{\Delta t}{8\Delta V_1}\iint_{Cell\,I} E\,d\vec{s} - \frac{\Delta t}{2\Delta V_1}\iint_{1abcdefg} \Delta E\,d\vec{s} \tag{3.11}$$

elde edilir. Bu denklemde birinci terim Hücre I'de meyana gelen değişimlerden dolayı Düğüm 1'de oluşan birinci derece düzeltme, ikinci terim Hücre I'de meyana gelen değişimlerden dolayı Düğüm 1'de oluşan ikinci derece düzeltmedir ve aşağıdaki gibi tanımlanabilirler.

$$\Delta U_I = -\frac{\Delta t}{8\Delta V_1}\iint_{Cell\,I} E.d\vec{s} \tag{3.12}$$

$$\Delta\Delta U_{1,I} = -\frac{\Delta t}{2\Delta V_I} \iint_{1abcdefg} \Delta \bar{\bar{E}}.d\vec{s} \tag{3.13}$$

Bu durumda toplam değişim

$$\delta U_{1,I} = \Delta U_I + \Delta\Delta U_{1,I} \tag{3.14}$$

Benzer şekilde Düğüm 1'i çevreleyen diğer hücrelerden gelen bileşenler de hesaplanabilir. Dikkat edilmelidir ki bir hücrenin tüm düğümlerinin birinci derece düzeltmeleri aynı olduğu halde, ikici derece düzeltmeleri farklıdır. Yani her hücre için bir adet birinci derece düzeltme ve sekiz adet ikinci derece düzeltme hesaplanacaktır.

Bu noktada sadece Hücre I'den gelen bileşeni düşünülerek bunun Düğüm 1'de yarattığı birinci derece düzeltme hesaplanabilir.

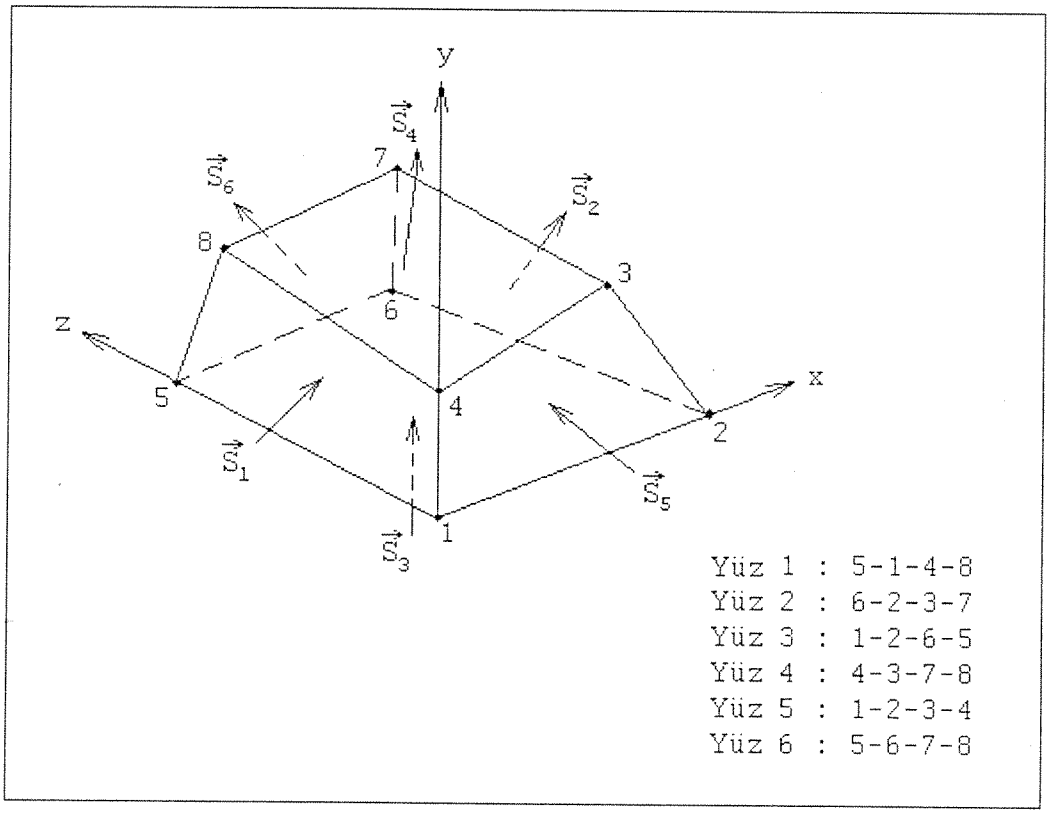
Denklem (3.12)'de verilen alan integralini hesaplamak için Şekil 3.4'de alan vektörleri tanımlanmıştır. Bunlar kullanılarak Denklem (3.12) şöyle yazılabilir.

$$\Delta U_I = \frac{\Delta t}{8\Delta V_I}\begin{pmatrix} \bar{\bar{E}}_{5148}.\vec{S}_1 - \bar{\bar{E}}_{6237}.\vec{S}_2 + \bar{\bar{E}}_{1265}.\vec{S}_3 + \\ -\bar{\bar{E}}_{4378}.\vec{S}_4 + \bar{\bar{E}}_{1234}.\vec{S}_5 - \bar{\bar{E}}_{5678}.\vec{S}_6 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

Diğer taraftan akı tensörü $\bar{\bar{E}}$, üç akı vektörü, $\vec{F}$, $\vec{G}$ ve $\vec{H}$ olarak olarak ifade edilip, bunlar da kartezyen bileşenlerine ayrılabilir

$$\Delta U_I = \frac{\Delta t}{8\Delta V_I}\begin{pmatrix} F_{5148}.S_{1,x} + G_{5148}.S_{1,y} + H_{5148}.S_{1,z} \\ -(F_{6237}.S_{2,x} + G_{6237}.S_{2,y} + H_{6237}.S_{2,z}) \\ + F_{1265}.S_{3,x} + G_{1265}.S_{3,y} + H_{1265}.S_{3,z} \\ -(F_{4378}.S_{4,x} + G_{4378}.S_{4,y} + H_{4378}.S_{4,z}) \\ + F_{1234}.S_{5,x} + G_{1234}.S_{5,y} + H_{1234}.S_{5,z} \\ -(F_{5678}.S_{6,x} + G_{5678}.S_{6,y} + H_{5678}.S_{6,z}) \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

burada, örneğin F_{5148}, F akısının Hücre I'in Yüzey 1'indeki ortalamasıdır ve bu da hücrenin sekiz köşesindeki F akılarının aritmetik ortalamasına eşit alınabilir.



Şekil 3.4 Hücre alan vektörlerinin tanımı

$$F_{5148} = \frac{F_5 + F_1 + F_4 + F_8}{4} \tag{3.17}$$

$$\Delta U_I = \frac{\Delta t}{8\Delta V_I}\left(\begin{array}{l} \frac{F_5+F_1+F_4+F_8}{4}.S_{1,x} + \frac{G_5+G_1+G_4+G_8}{4}.S_{1,y} + \frac{H_5+H_1+H_4+H_8}{4}.S_{1,z} \\ -(\frac{F_6+F_2+F_3+F_7}{4}.S_{2,x} + \frac{G_6+G_2+G_3+G_7}{4}.S_{2,y} + \frac{H_6+H_2+H_3+H_7}{4}.S_{2,z}) \\ + \frac{F_1+F_2+F_6+F_5}{4}.S_{3,x} + \frac{G_1+G_2+G_6+G_5}{4}.S_{3,y} + \frac{H_1+H_2+H_6+H_5}{4}.S_{3,z} \\ -(\frac{F_4+F_3+F_7+F_8}{4}.S_{4,x} + \frac{G_4+G_3+G_7+G_8}{4}.S_{4,y} + \frac{H_4+H_3+H_7+H_8}{4}.S_{4,z}) \\ + \frac{F_1+F_2+F_3+F_4}{4}.S_{5,x} + \frac{G_1+G_2+G_3+G_4}{4}.S_{5,y} + \frac{H_1+H_2+H_3+H_4}{4}.S_{5,z} \\ -(\frac{F_5+F_6+F_7+F_8}{4}.S_{6,x} + \frac{G_5+G_6+G_7+G_8}{4}.S_{6,y} + \frac{H_5+H_6+H_7+H_8}{4}.S_{6,z}) \end{array}\right) \tag{3.18}$$

$S_{1,x}$ Yüzey 1'in yz düzlemine izdüşümüdür ve detaylı hesapları Ek A'da verilmiştir. Denklem (3.17) kullanılsa Denklem (3.16) yukarıdaki gibi daha açık bir biçimde yazılabilir.

Hatırlatmak gerekirse Denklem (3.18), zaman seviyesi n'den n+1'e kadar olan Δt zaman diliminde Hücre I'de meydana gelen değişimlerden dolayı oluşan birinci derece düzeltmenin hesabıdır. Bu denklemde yer alan F, G, H akıları için n zaman seviyesindeki bilinen değerleri kullanılabilir.

Şimdi, Denklem (3.13) ile verilen, Δt zaman diliminde Hücre I'de meydana gelen değişmelerden dolayı Düğüm 1'de oluşan düzeltme hesaplanabilir. Bu düzeltmeyi Şekil 3.3'te verilen a-e-b-f, c-b-f-g and d-e-f-g yüzeylerinden geçen akılar oluşturur. O halde Denklem (3.13)'teki alan integrali sadece bu üç yüzey üzerinde hesaplanmalıdır. Bu integrali almak için sözü edilen üç yüzeyde alan vectörleri tanımlamak gerekir. Bu vektörler $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ and $\vec{A}_3$ şeklinde adlandırılmıştır ve hesaplamaları Ek A'da verilmiştir. Böylece Denklem (3.13) şu şekilde yazılabilir.

$$\Delta\Delta U_{1,I} = -\frac{\Delta t}{2\Delta V_I}\,\Delta \overline{\overline{E}}_I \,.\, (\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3) \tag{3.19}$$

Flux tensörü $\overline{\overline{E}}$, flux vektörleri $\vec{F}$, $\vec{G}$ ve $\vec{H}$'ye ve alan vektörleri $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ ve $\vec{A}_3$ kartezyen bileşenlerine ayrılırsa Denklem (3.19) aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\Delta\Delta U_{1,I} = -\frac{\Delta t}{2\Delta V_I}\begin{pmatrix} \Delta F_I \,.\, (A_{1,x} + A_{2,x} + A_{3,x}) + \\ \Delta G_I \,.\, (A_{1,y} + A_{2,y} + A_{3,y}) + \\ \Delta H_I \,.\, (A_{1,z} + A_{2,z} + A_{3,z}) \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

Notasyon kolaylığı açısından aşağıdaki tanımlar yapılırsa

$$\Delta f_I = \Delta F_I \,.\, (A_{1,x} + A_{2,x} + A_{3,x})$$

$$\Delta g_I = \Delta G_I \,.\, (A_{1,y} + A_{2,y} + A_{3,y}) \tag{3.21}$$

$$\Delta h_I = \Delta H_I \ . \ (A_{1,z} + A_{2,z} + A_{3,z})$$

Denklem (3.20) şu hali alır

$$\Delta\Delta U_{1,I} = \frac{\Delta t}{2\Delta V_I}(-\Delta f_I - \Delta g_I - \Delta h_I) \tag{3.22}$$

Denklem (3.21)'deki ΔF, ΔG, ΔH terimleri, (ξ, η, ζ) dönüştürülmüş sistemindeki akı bileşenleri diye adlandırılır ve yaklaşık olarak aşağıdaki gibi hesaplanırlar.

$$\Delta F_I = \left(\frac{\partial F}{\partial Q}\right)_I \Delta U_I \qquad \Delta G_I = \left(\frac{\partial G}{\partial Q}\right)_I \Delta U_I \qquad \Delta H_I = \left(\frac{\partial H}{\partial Q}\right)_I \Delta U_I \tag{3.23}$$

Bu denklemlerdeki türevlere jacobian denir ve hesaplanmaları çok zahmetlidir. Ancak Ni[18], akı değişimlerini jacobianları hesaplamadan bulmak için basit bir yöntem önerir. Bu yöntemde düğümlerdeki birinci derece düzeltmeler hesaplandıktan sonra akı değişimleri şöyle hesaplanır.

$$\Delta U = \begin{pmatrix} (\Delta\rho) \\ (\Delta\rho u) \\ (\Delta\rho v) \\ (\Delta\rho w) \\ (\Delta e) \end{pmatrix} \qquad \Delta F = \begin{pmatrix} (\Delta\rho u) \\ u(\Delta\rho u) + u(\rho\Delta u) + \Delta p \\ v(\Delta\rho u) + u(\rho\Delta v) \\ w(\Delta\rho u) + u(\rho\Delta w) \\ h_o(\Delta\rho u) + u(\rho\Delta h_o) \end{pmatrix}$$

$$\Delta G = \begin{pmatrix} (\Delta\rho v) \\ u(\Delta\rho v) + v(\rho\Delta u) \\ v(\Delta\rho v) + v(\rho\Delta v) + \Delta p \\ w(\Delta\rho v) + v(\rho\Delta w) \\ h_o(\Delta\rho v) + v(\rho\Delta h_o) \end{pmatrix} \qquad \Delta H = \begin{pmatrix} (\Delta\rho w) \\ u(\Delta\rho w) + w(\rho\Delta u) \\ v(\Delta\rho w) + w(\rho\Delta v) \\ w(\Delta\rho w) + w(\rho\Delta w) + \Delta p \\ h_o(\Delta\rho w) + w(\rho\Delta h_o) \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

Aşağıdaki denklemler kullanılarak ΔF, ΔG, ΔH'de geçen bütün terimler ΔU'da geçen terimler cinsinden yazılabilir.

$$(\rho\Delta u)=(\Delta\rho u)-u(\Delta\rho)$$

$$(\rho\Delta v)=(\Delta\rho v)-v(\Delta\rho)$$

$$(\rho\Delta w)=(\Delta\rho w)-w(\Delta\rho) \tag{3.25}$$

$$\Delta p=(\gamma-1)\left\{(\Delta e)-\frac{1}{2}\left[u(\Delta\rho u)+v(\Delta\rho v)+w(\Delta\rho w)+u(\rho\Delta u)+v(\rho\Delta v)+w(\rho\Delta w)\right]\right\}$$

$$(\rho\Delta h_o)=(\Delta e)+(\Delta\rho)-h_o(\Delta\rho)$$

Böylece, Hücre I'deki değişimlerden dolayı Düğüm 1'de oluşan birinci ve ikinci derece düzeltmeler sırasıyla Denklem (3.18) ve Denklem (3.22)'de verilmiştir. Bunlar Denklem (3.14)'e konursa Düğüm 1'deki toplam düzeltme bulunabilir.

$$\delta U_{1,I}=\Delta U_I+\frac{\Delta t}{2\Delta V_I}(-\Delta f_I-\Delta g_I-\Delta h_I) \tag{3.26}$$

Daha önce de belirtildiği gibi Hücre I'in diğer düğümlerindeki düzeltmeler farklı olacaktır. Hücre I'in diğer düğümlerindeki düzeltmeler aşağıdaki gibi sıralanabilir.

$$\delta U_{2,I}=\Delta U_I+\frac{\Delta t}{2\Delta V_I}(\Delta f_I-\Delta g_I-\Delta h_I)$$

$$\delta U_{3,I}=\Delta U_I+\frac{\Delta t}{2\Delta V_I}(\Delta f_I+\Delta g_I-\Delta h_I)$$

$$\delta U_{4,I}=\Delta U_I+\frac{\Delta t}{2\Delta V_I}(-\Delta f_I+\Delta g_I-\Delta h_I)$$

$$\delta U_{5,I}=\Delta U_I+\frac{\Delta t}{2\Delta V_I}(-\Delta f_I-\Delta g_I+\Delta h_I) \tag{3.27}$$

$$\delta U_{6,I} = \Delta U_I + \frac{\Delta t}{2\Delta V_I}(\Delta f_I - \Delta g_I + \Delta h_I)$$

$$\delta U_{7,I} = \Delta U_I + \frac{\Delta t}{2\Delta V_I}(\Delta f_I + \Delta g_I + \Delta h_I)$$

$$\delta U_{8,I} = \Delta U_I + \frac{\Delta t}{2\Delta V_I}(-\Delta f_I + \Delta g_I + \Delta h_I)$$

Bu hesaplamalar kullanılan ağdaki bütün hücreler için tekrar edildiğinde korunmuş değişkenler vektörü U yeni zaman seviyesi için yenilenebilir. Örneğin Şekil 3.1'e bakarak Düğüm 1 için yeni U değeri şöyle bulunur.

$$U_1^{n+1} = U_1^n + \delta U_1$$

$$\delta U_1 = \delta U_{1,I} + \delta U_{1,II} + \delta U_{1,III} + \delta U_{1,IV} + \delta U_{1,V} + \delta U_{1,VI} + \delta U_{1,VII} + \delta U_{1,VIII} \quad (3.28)$$

3.3 KARARLILIK ANALİZİ

Yukarıda kullanılan şema kapalı, zamanda ilerlemeli bir şemadır. n+1 zaman seviyesindeki sonuçlar n zaman seviyesindeki sonuçları kullanarak hesaplanır. Ancak zaman dilimi Δt'nin seçimi CFL koşuluyla kısıtlanmıştır. CFL koşulu basitçe ağ oranına $\Delta t/\Delta x$'in (bir boyutta) bir sınırlama getirir. Diğer bir deyişle U_1^{n+1} hesaplanırken bu hesabı etkileyecek bütün fiziksel bilgi dikkate alınmalıdır [2].

$$\Delta t_I = \frac{\Delta V_I}{4\sqrt{3}}\left(\frac{1}{u.A_{1,x} + v.A_{1,y} + w.A_{1,z} + a\sqrt{A_{1,x}^2 + A_{1,y}^2 + A_{1,z}^2}} + \frac{1}{u.A_{2,x} + v.A_{2,y} + w.A_{2,z} + a\sqrt{A_{2,x}^2 + A_{2,y}^2 + A_{2,z}^2}} + \frac{1}{u.A_{3,x} + v.A_{3,y} + w.A_{3,z} + a\sqrt{A_{3,x}^2 + A_{3,y}^2 + A_{3,z}^2}}\right) \quad (3.29)$$

Euler denklemlerinin kesin CFL analizi mümkün değildir. Ancak üç boyutlu lineer dalga denklemi de Euler denklemleriyle benzer özellikler gösterir ve stabilite analizi bu denklemler için yapılabilir. Nitekim bu çalışma Von Neumann metodu kullanılarak Oktay [35] tarafından yapılmış ve CFL< $1/\sqrt{3}$ sonucu bulunmuştur. Yukarıdaki denklem Şekil 3.2'deki Hücre I'için zaman adımı verir. Burada a ses hızıdır. u, v, w ve a için hücredeki ortalama değerleri kullanılabilir.

Kullanılan şema zamanda ilerlemeli olduğundan yani zamanla değişmeyen sonuçlar istendiğinden zaman dilimi ağın bütün hücreleri için aynı alınabileceği gibi her hücre için ayrı bir zaman dilimi de kullanılabilir. Bu çalışmada yakınsamayı hızlandırdığı için ikinci yol olan bölgesel zaman dilimi kullanımı yöntemi uygulanmıştır.

3.5 YAPAY SÖNÜMLEME

İkinci dereceden hassas, merkezi, üç adımlı bütün Lax-Wendroff ailesi şemaları süreksizlik bölgelerinde salınımlar meydana getirir. Bu yüksek frekanslı kaçınılmaz salınımları gidermek için yapay viskozite denen ilave terimlere ihtiyaç vardır. Bunlar süreksizlik bölgelerinde fiziksel viskozite görevi görürlerken düzenli bölgelerde işlevsiz olamalıdırlar. Ayrıca yapay viskozite, fiziksel olmayan ancak bazı çözümlerde ortaya çıkan, genişleme şoklarını da ortadan kaldırmaktadır [2].

Literatürde çok değişik yapay sönümleme teknikleri vardır. Bu çalışmada Ni [18] tarafından sunulan yapay sönümleme kullanılmıştır. Bunda esas fikir, düğümlerdeki korunmuş değişkenlerin değerlerini hücrelerdeki ortalama değerlerle kıyaslayarak, aralarındaki farkla orantılı olarak düğümlerdeki değerlerle oynamaktır.

Şekil 3.1'e bakarak Hücre I'deki ortalama korunmuş değişkenler aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$U_{I,\,av} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8 \qquad (3.30)$$

Düğümlerdeki sönümlenmiş düzeltmeler

$$\delta U_i^* = \delta U_i + \frac{1}{8}\mu(U_{I,av} - U_{I,i}) \qquad i=1, 2, \ldots\ldots, 8 \qquad (3.31)$$

şeklinde hesaplanabilir. Burada μ yapay sönümleme operatörüdür ve şu şekilde hesaplanır.

$$\mu = \tau \frac{\Delta t}{\Delta V_I}(A_1 + A_2 + A_3) \qquad i=1, 2, \ldots\ldots 8 \qquad (3.32)$$

Burada

$$A_1 = \sqrt{A_{1,x}^2 + A_{1,y}^2 + A_{1,z}^2}$$

$$A_2 = \sqrt{A_{2,x}^2 + A_{2,y}^2 + A_{2,z}^2} \qquad (3.33)$$

$$A_3 = \sqrt{A_{3,x}^2 + A_{3,y}^2 + A_{3,z}^2}$$

şeklinde hesaplanır. τ yapay sönümleme faktörüdür ve genelde her problem için farklı olan değeri deneme yanılma yoluyla bulunur. Denklem (3.33)'de geçen alan vektörleri bileşenlerinin hesabı Ek A'da bulunabilir.

Yapay sönümleme fiziksel olmamasından dolayı sonuçlarda bir miktar hataya yol açmaktadır. Bu hata süreksizlik bölgelerinde lokalize edilmelidir. Diğer bir deyişle yapay sönümleme gerekmeyen düzenli bölgelerde herhangi bir işleme gerek yoktur. Bu ancak Ertürk [11]'ün kullandığı gibi kendindan ayarlı bir sönümleme tekniği ile mümkün olabilir. Bu teknikte uygulanacak sönümleme miktarı o bölgedeki basınç eğimiyle orantılıdır. Bunun için yapay sönümleme operatörü şu şekilde değiştirilmelidir.

$$\mu^* = \mu\varepsilon_i \qquad (3.34)$$

burada ε_i normalize edilmiş basınç değişim katsayısıdır ve Şekil 3.1'deki Düğüm 1 için şöyle hesaplanır.

$$\varepsilon_{1,I} = \frac{p_{2,I} + p_{3,I} + p_{4,I} + p_{5,I} + p_{6,I} + p_{7,I} - p_{1,I}}{p_{2,I} + p_{3,I} + p_{4,I} + p_{5,I} + p_{6,I} + p_{7,I} + p_{1,I}} \tag{3.35}$$

BÖLÜM 4
SINIR ŞARTLARI

4.1 GENEL

Euler denklemlerini sayısal olarak çözebilmek için hesaplamaların yapılacağı sonlu bir bölgeye ihtiyaç vardır. Hesaplama bölgesi denilen bu alan ya duvarlarla ya da uzak bölgelerde bizim yarattığımız yapay sınırlarla çevrilmiştir. Bu sınırlarda uygun sınır şartlarının seçimi yakınsama va doğruluk açısından çok önemlidir.

Bu çalışmada iki ayrı sınır şartı kullanılmıştır. İlki Ni [18] tarafından geliştirilen dağıtma formüllerinin sınırlara uyarlanması, ikincisi ise karakteristik sınır şartıdır.

4.2 DAĞITMA FORMÜLLERİNİN SINIRLARDA KULLANILMASI

Dağıtma formülleri bir hücrede meydana gelen değişimleri komşu düğümlere dağıtmak için kullanılır. Hiperbolik denkelemleri tek adımlı, kapalı, ikinci dereceden hassas bir prosedürle çözmeye dayanan bu denklemler yerel dalga karakteristiklerine de uygundur [6][18]. Bu en iyi şekilde, aşağıda verilen tek boyutlu model denklemi üzerinde anlaşılabilir.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -W\frac{\partial U}{\partial x} \tag{4.1}$$

Bu denklemin çözümünde kullanılan hesaplama bölgesi Şekil 4.1'de gösterilmiştir. Düğüm i'deki Δt zaman diliminde meydana gelen U düzeltmesini bulabilmek için komşu hücreler olan B ve C'den gelen bileşenlere bakmak gerekir. Şekil 4.1'e bakarak dağıtma denkelemri şu şekilde yazılabilir.

$$(\delta U_i)_C = \frac{1}{2}\Delta U_C\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}W\right) \tag{4.2}$$

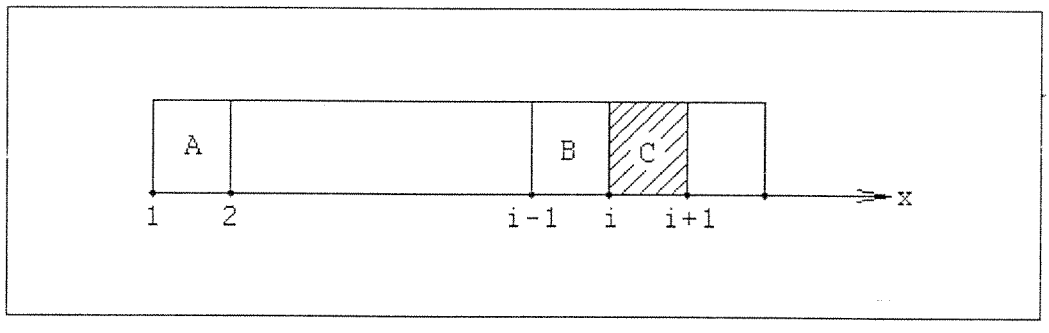
$$(\delta U_{i+1})_C = \frac{1}{2}\Delta U_C\left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x}W\right) \tag{4.3}$$

burada ΔU_C Hücre C'de Δt zaman diliminde meydana gelen değişimdir ve şu şekilde bulunur.

$$\Delta U_C = \frac{\Delta t}{\Delta x}W(U_i - U_{i+1}) \tag{4.4}$$

Denklem (4.2) ve (4.3)'e bakılarak şu ilginç sonuca varılabilir; eğer i ve i+1 noktaları arasında bir aşağıakış (downstream) dalgası ($W > 0$) transfer ediliyorsa Hücre C'deki değişmeden kaynaklanan i+1 noktasındaki düzeltme i noktasındakinden mutlak değerce daha büyüktür. Yani,

$$|(\delta U_{i+1})_C| > |(\delta U_i)_C| \tag{4.5}$$



Şekil 4.1 Model denklem için bir boyutlu hesaplama bölgesi

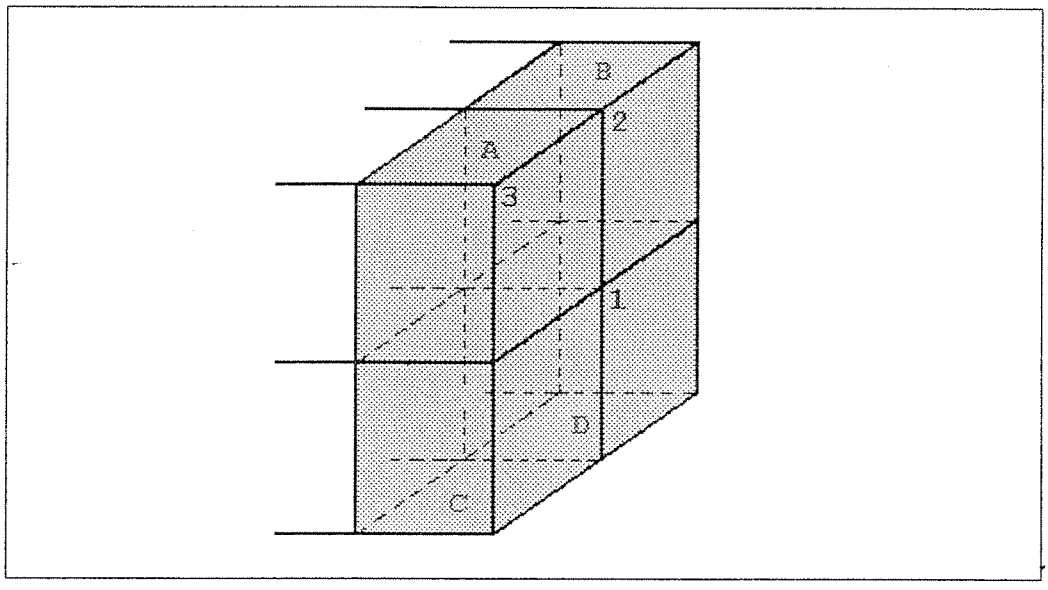
Diğer taraftan eğer bir yukarıakış (upstream) dalgası ($W < 0$) transfer ediliyorsa tam tersi söylenebilir. Böylece dağıtma formüllerinin yerel dalga ilerlemesiyle uyumlu olduğu sonucuna varılabilir.

Dağıtma formüllerinin uzak bölge sınırlarında kullanımı çok verimlidir. Çünkü dalgalar bu sınırlardan yansımadan dışarı çıkarlar. Bunun için tek yapılması gereken sınır düğümlerindeki düzeltmelerin hesaplanmasında sadece komşu hücrelerden gelen

düzeltmeleri hesaba katmaktır. Örneğin Şekil 4.1'deki Düğüm 1'deki düzeltme şöyle hesaplanır. .

$$\delta U_1 = (\delta U_1)_A \tag{4.6}$$

Üç boyutlu durum için Şekil 4.2'ye bakılabilir. Bu şekilde sınırlar koyu renkle gösterilmiştir. A, B, C hücreleri; 1, 2, 3 düğümleri gösterir. Düğüm 1 yüzey, Düğüm 2 kenar, Düğüm 3 ise köşe düğümleridir. Bu düğümlerdeki düzeltmeler şöyle hesaplanır.



Şekil 4.2 Üç boyutlu hesaplama bölgesinde sınırlar

$$\begin{aligned} \delta U_1 &= (\delta U_1)_A + (\delta U_1)_B + (\delta U_1)_C + (\delta U_1)_D \\ \delta U_2 &= (\delta U_2)_A + (\delta U_2)_B \\ \delta U_3 &= (\delta U_3)_A \end{aligned} \tag{4.7}$$

Bu formüllerde geçen terimler çözüm sırasında daha önce zaten hesaplandığından bu tip sınır şartlarının kullanımı ek hesaplama gerektirmemekte ve çözüm zamanını kısaltmaktadır.

4.3 KARAKTERİSTİK SINIR ŞARTLARI

Hiperbolik sistemlerin sınır şartları ile ilgili olarak şu üç soruya cevap bulmak gerekir.

i. Her sınırda kaç adet fiziksel şart verilmelidir?

ii. Her sınırda ilave kaç adet şarta gerek vardır?

iii. Bu şartlar kullanılan şemanın hassaslığına uyumlu olacak biçimde nasıl ayrıştırılıp formüle edilmelidirler?

Eğer bir sınırdaki tüm değişkenler bilinse herhangi bir sorun kalmazdı. Ancak hiberbolik denklemlerde durum genellikle böyle değildir. Bu yüzden sınırlardaki şartlar fiziksel ve sayısal olarak ikiye ayrılır. Bir sınırda serbestçe uygulanabilecek fiziksel şart sayısı sistemin ilerleme özelliklerine ve özellikle de sınırlardan içeriye ilerleyen bilgiye bağlıdır. Diğer bir deyişle sadece sınırlardan içeriye ilerleyen değişkenler fiziksel şart olarak uygulanabilirler. Geri kalan değişkenler ise sadece iç bölgeden etkileneceklerinden zaten çözümün bir parçası olacaklardır. Fakat bu değişkenleri hesaplamak için sayısal sınır şartları denilen ilave şartlara gerek duyulur.

4.3.1 Temel Denklemlerin Karakteristik Formülasyonu

Hiperbolik sistemlerin karakteristik ilerleme olgusunu anlamak için temel denklemler karakteristik formda ifade edilmelidir. Bu formülasyon burada yüzeysel olarak anlatılacaktır. Detayları Hirsch [2] ve Oktay [35]'da bulunabilir.

İşe, temel denklemleri n, s, ve b ile gösterilen normal, teğet ve binormal yerel koordinatlarında yazarak başlanabilir. Böylece Denklem (2.12) şu şekli alır.

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t}+\frac{\partial \tilde{F}}{\partial n}+\frac{\partial \tilde{G}}{\partial s}+\frac{\partial \tilde{H}}{\partial b}=0 \tag{4.8}$$

Yerel olarak $\tilde{U}$'nun normal değişimi diğer yöndekilere baskın varsayılırsa Denklem (4.8) şu forma indirgenebilir.

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t}+\frac{\partial \tilde{F}}{\partial n}=0 \tag{4.9}$$

ya da yarılineer formda

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \tilde{A}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial n} = 0 \tag{4.10}$$

halini alır. $\tilde{U}$ vektörü ise aşağıdaki gibidir.

$$\tilde{U} = \begin{vmatrix} \rho \\ V_n \\ V_s \\ V_b \\ p \end{vmatrix} \tag{4.11}$$

Burada V_n, V_s, V_b normal, teğet ve binormal hız bileşenleridir. Tanım ve hesaplanmaları Ek B'de verilmiştir.

Denklem (4.10)'daki $\tilde{A}$ jacobian matrisini dayagonal hale getirmek için benzerlik matrisleri L and L^{-1} kullanılır. Λ adı verilen dayagonal jacobian matrisi beş adet karakteristik değer içerir ve aşağıdaki gibidir.

$$\Lambda = \begin{vmatrix} V_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_n + a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V_n - a \end{vmatrix} \tag{4.12}$$

Karakteristik değişken vektörü W ve üstte verilen Λ kullanılarak Denklem (4.9) şu şekilde yazılabilir.

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial W}{\partial n} = 0 \tag{4.13}$$

Karakteristik vektör ise şöyle tanımlanmıştır.

$$W = \begin{vmatrix} \rho - \frac{p}{a^2} \\ V_b \\ V_s \\ V_n - \frac{p}{\rho a} \\ -V_n + \frac{p}{\rho a} \end{vmatrix} \tag{4.14}$$

Bu çalışmada da kullanılan yansıtmayan sınır şartları, fiziksel sınır şartlarını, sınırlardan içeri taşınan karakteristikler yok olacak şekilde ifade etmektir.

Bu bölümün başında verilen bilgiler hatırlanacak olursa içeri giren karakteristik değişkenler (Λ'nın pozitif karakteristik değerleri) fiziksel sınır şartlarıyla, yani uzak bölge değerleriyle belirlenirler. Dışarı çıkan karakteristik değişkenler ise (Λ'nın pozitif ya da sıfır karakteristik değerleri) iç bölgedeki değişkenlerin değerleri kullanılarak bulunur. Bu hesaplama tahmin-düzeltme şeklindedir. Tahmin aşamasında sınır düğümlerindeki değişkenler diğer düğümlerdeki gibi Lax-Wendroff şeması ile hesaplanır. Düzeltme aşamasında ise hesaplanan bu değerler yansıtmayan sınır şartlarına uyacak hale getirilirler.

Tekrar etmek gerekirse bir sınırda serbestçe verilebilecek sınır şartı sayısı pozitif karakteristik değer sayısı kadardır. Bu sayı da doğrudan akışın içeri mi dışarı mı ve sesaltı mı sesüstü mü olduğuna bağlıdır. Muhtemel dört durum Şekil 4.3'te gösterilmiştir. Şimdi bu dört değişik durum tek tek incelenecektir.

4.3.2 Sesaltı İcakış Sınır Şartı ($0<V_n<a$)

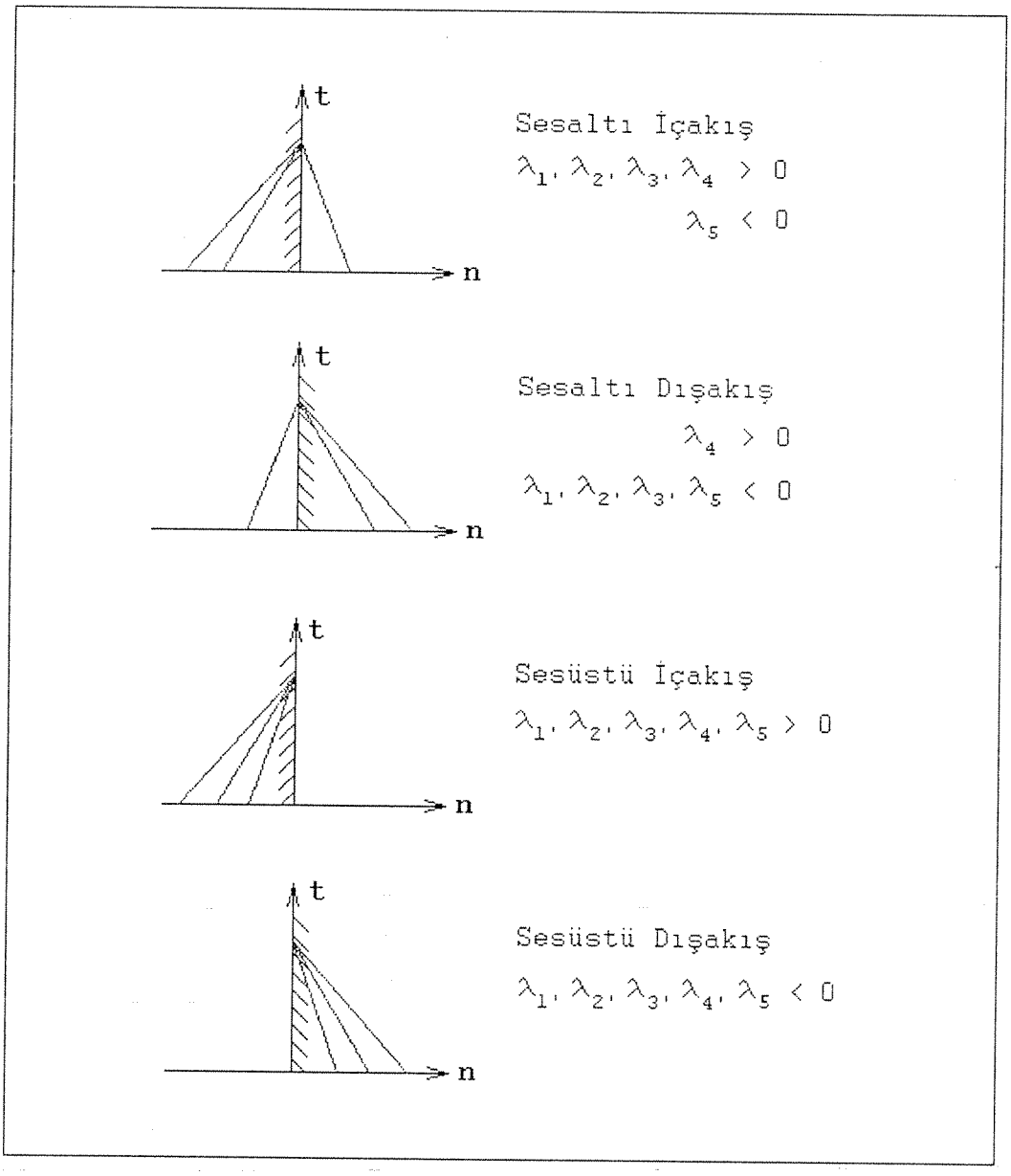
Denklem (4.12)'ye bakılarak λ_1, λ_2, λ_3 ve λ_4 karakteristik değerlerinin pozitif λ_5'in negatif olduğu görülür. O halde pozitif karakteristik değerlere denk gelen W_1,

W_3, ve W_4 karakteristik değişkenleri fiziksel sınır şartı olarak verilmeli ve W_5 ise iç düğümlerdeki değerlerden hesaplanmalıdır.

$$W_1: \quad \rho_c - \frac{p_c}{a^2} = \rho_f - \frac{p_f}{a^2}$$

$$W_2: \quad V_{b,c} = V_{b,f}$$

$$W_3: \quad V_{s,c} = V_{s,f} \tag{4.15}$$



Şekil 4.3 Uzak bölge sınırlarında karakteristik dalga yayılımı

$$W_4: \quad V_{n,c} + \frac{p_c}{\rho a} = V_{n,f} + \frac{p_f}{\rho a}$$

$$W_5: \quad -V_{n,c} + \frac{p_c}{\rho a} = -V_{n,p} + \frac{p_p}{\rho a}$$

Burada c, p, f sırasıyla düzeltilmiş, Lax-Wendroff kullanılarak tahmin edilen ve uzak bölge değerlerini gösterir. Üzeri çizgili değerler ise iç düğüm kullanılarak hesaplanacaktır. Denklem (4.15)'ten düzeltilmiş değerler aşağıdaki gibi çekilebilir

$$\begin{aligned}
\rho_c &= \rho_f + \frac{p_c - p_f}{a^2} \\
V_{b,c} &= V_{b,f} \\
V_{s,c} &= V_{s,f} \\
V_{n,c} &= V_{n,f} + \frac{p_f - p_c}{\rho a} \\
p_c &= \frac{1}{2}\left[p_f + p_p + \rho a(V_{n,f} - V_{n,p})\right]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Problemlerde genellikle giriş Mach sayısı verilir. Eşentropi (isentropic) bağıntıları kullanılarak uzak bölge değerleri şöyle hesaplanır

$$\begin{aligned}
p_f &= p_o\left(1 + \frac{\gamma+1}{2} M^2_{inlet}\right)^{-\gamma/\gamma-1} \\
\rho_f &= \rho_o\left(1 + \frac{\gamma+1}{2} M^2_{inlet}\right)^{-\gamma/\gamma-1} \\
V_f &= \sqrt{\gamma \frac{p_f}{\rho_f}}\, M_{inlet}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

burada o, durağan değerleri ifade eder.

Uzak bölgedeki hız bileşenleri, $V_{n,f}$, $V_{s,f}$, $V_{b,f}$, giriş açıları kullanılarak bulunur.

4.3.3 Sesaltı Dışakış Sınır Şartı ($V_n \leq 0$, $|V_n| \leq a$)

Sadece λ_4 karakteristik değeri pozitiftir. O halde sadece W_4 dışarıdan verilebilir. Diğer karakteristik değerler ise iç bölge kullanılarak bulunmalıdır.

$$
\begin{aligned}
W_1 &: \quad \rho_c - \frac{p_c}{a^2} = \rho_p - \frac{p_p}{a^2} \\
W_2 &: \quad V_{b,c} = V_{b,p} \\
W_3 &: \quad V_{s,c} = V_{s,p} \\
W_4 &: \quad V_{n,c} + \frac{p_c}{\rho a} = V_{n,f} + \frac{p_f}{\rho a} \\
W_5 &: \quad -V_{n,c} + \frac{p_c}{\rho a} = -V_{n,p} + \frac{p_p}{\rho a}
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

Düzeltilmiş değerler ise şöyledir.

$$
\begin{aligned}
\rho_c &= \rho_p + \frac{p_c - p_p}{a^2} \\
V_{b,c} &= V_{b,p} \\
V_{s,c} &= V_{s,p} \\
V_{n,c} &= V_{n,p} + \frac{p_c - p_p}{\rho a} \\
p_c &= \frac{1}{2}\left[p_f + p_p + \rho a(V_{n,f} - V_{n,p})\right]
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

4.3.4 Sesüstü İçakış Sınır Şartı ($V_n > a$)

Bu durumda bütün karakteristik değerler pozitif olduğundan beş karakteristik değişken de uzak bölge değerlerinden bulunur.

$$
\begin{aligned}
W_1 &: \quad \rho_c - \frac{p_c}{a^2} = \rho_f - \frac{p_f}{a^2} \\
W_2 &: \quad V_{b,c} = V_{b,f} \\
W_3 &: \quad V_{s,c} = V_{s,f} \\
W_4 &: \quad V_{n,c} + \frac{p_c}{\rho a} = V_{n,f} + \frac{p_f}{\rho a} \\
W_5 &: \quad -V_{n,c} + \frac{p_c}{\rho a} = -V_{n,f} + \frac{p_f}{\rho a}
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Düzeltilmiş değerler ise,

$$
\begin{aligned}
\rho_c &= \rho_f + \frac{p_c - p_f}{a^2} \\
V_{b,c} &= V_{b,f} \\
V_{s,c} &= V_{s,f} \\
V_{n,c} &= V_{n,f} \\
p_c &= p_f
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

4.3.5 Sesüstü Dışakış Sınır Şartı ($V_n < 0$, $|V_n| > a$)

Bütün karakteristik değerler negatiftir ve beş karakteristik değişken iç bölge değerlerinden bulunur.

$$W_1 : \quad \rho_c - \frac{p_c}{a^2} = \rho_p - \frac{p_p}{a^2}$$

$$W_2: \quad V_{b,c} = V_{b,p}$$

$$W_3: \quad V_{s,c} = V_{s,p} \tag{4.22}$$

$$W_4: \quad V_{n,c} + \frac{p_c}{\rho a} = V_{n,p} + \frac{p_p}{\rho a}$$

$$W_5: \quad -V_{n,c} + \frac{p_c}{\rho a} = -V_{n,p} + \frac{p_p}{\rho a}$$

Düzenlendiğinde,

$$\rho_c = \rho_p + \frac{p_c - p_p}{a^2}$$

$$V_{b,c} = V_{b,p}$$

$$V_{s,c} = V_{s,p} \tag{4.23}$$

$$V_{n,c} = V_{n,p}$$

$$p_c = p_p$$

4.3.6 Karakteristik Duvar Sınır Şartı

Viskoz olmayan akışlarda duvarlarda istenebilecek tek fiziksel sınır şartı normal hızın sıfır olmasıdır. O halde sadece bir karakteristik değer, λ_4, pozitiftir. Diğer karakteristiklere denk gelen karakteristik değişkenler iç bölge kullanılarak bulunur.

$$W_1: \quad \rho_c - \frac{p_c}{a^2} = \rho_p - \frac{p_p}{a^2}$$

$$W_2: \quad V_{b,c} = V_{b,p}$$

$$W_3: \quad V_{s,c} = V_{s,p} \tag{4.24}$$

$$W_4: \quad V_{n,c} =$$

$$W_5: \quad \frac{p_c}{\rho a} = -V_{n,p} + \frac{p_p}{\rho a}$$

Ya da düzeltilmiş değerler,

$$\begin{aligned}
\rho_c &= \rho_p - \frac{V_{n,p}\rho}{a} \\
V_{b,c} &= V_{b,p} \\
V_{s,c} &= V_{s,p} \\
V_{n,c} &= V_{n,p} + \frac{p_c - p_p}{\rho a} \\
p_c &= p_p - V_{n,p}\rho a
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Duvardaki hız bileşenleri $V_{n,p}$, $V_{s,p}$, $V_{b,p}$ Lax-Wendroff'tan bulunduktan sonra düzeltilmiş hız, normal hız sıfır olacağından, teğet ve binormal hızların birleşimi olarak alınır.

BÖLÜM 5
PROGRAMLAMA DETAYLARI ve ÇÖZÜM ALGORİTMASI

5.1 GENEL

Hiçbir sayısal çalışma bir akış probleminin gerçek çözümünü veremez. Sayısal çalışmalar, hassaslıkları, güvenilirlikleri, kararlılıkları ve yakınsama özellikleriyle değerlendirilirler. Bütün bunlar da temel denklemlerde kullanılan basitleştirme seviyesi, denklem ve uzay ayrıştırma teknikleri, kullanılan yapay çözümleme, hızlandırma teknikleri, v.b. dayanır.

Ancak programlamada en önemli unsurlardan biri olan kullanılan dil genellikle ihmal edilir. Hemen hemen bütün SAD programları FORTRAN dili ile yazılır. FORTRAN'ın tercih edilmesinin en önemli sebebi bilimsel çalışmaya uygun en eski dil oluşu ve bugüne kadar pek çok bu dilde yazılmış hazır program bulunmasıdır. Ayrıca FORTRAN basit, kullanımı kolay bir dildir.

Diğer taraftan yazılım teknolojisindeki hızlı gelişmeler bugünün programcıları için değişik alternatifler sunmaktadır. Bunlardan en önemlisi nesneye yönelik programcılığa olanak veren C++ dilidir. Bu çalışmanın en önemli amaçlarından biri de daha önce yazılmış olan bir Euler çözücüsünün nesneye yönelik programlamaya adapte etmektir. Bu hedefle çalışma benzerlerinden ayrılmaktadır.

5.2 C++ İLE PROGRAMLAMA

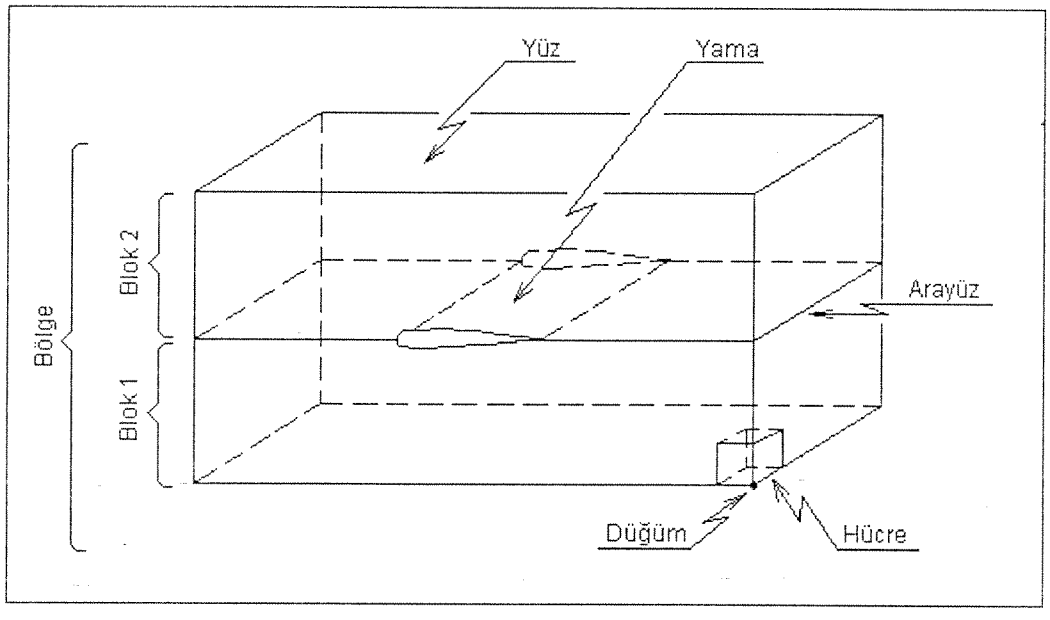
C++'ın getirdiği en önemli yeniliklerden biri nesneye yönelik programlamadır. Nesneye yönelik programcılıkta önemli olan sınıflardır. Sınıflar programcı tarafından tanımlanan veri tipleridir. Ancak çok verimli hiyerarşik yapılar oluşturmaya uygundurlar. Fiziksel objeleri, tüm özellikleri ve bu objelerle ilgili hesaplamaları yapabileceğiniz

fonksiyonlarla, ifade ederler. Sınıflar öyle yoğun ve bağımsız yaratılırlar ki kullanıcı programın bütünlüğünü bozmadan onlar üzerinde değişiklikler yapabilir ya da benzer sınıflarla değiştirebilir. Hatta programcı kendi sınıf kütüphanesini oluşturup yarattığı sınıfları birden çok programında kullanıp başkalarının yarattığı sınıfları kendi programına adapte edebilir.

C++'ın bir başka özelliği dinamik hafıza kullanımıdır. Bu özellik programcıya program çalışırken yeni değişkenler yaratma ve bunları kullandıktan sonra yok ederek hafizayı boşaltma imkanı verir. Sayısal uygulamalarda kullanılan değişkenlerin çokluğu ve hafizaya olan ihtiyaç göz önüne alındığında bu özellik çok önem kazanmaktadır.

C++, program çalışırken sonuçları izleme ve bunları dökümleme imkanı veren gafik kullanıcı arabirim kütüphanelerine sahiptir. Sayısal çalışmaların sonuçları ancak görselliğe döküldüğünde anlaşılabilir hale geldiğinden bu özellik de faydalıdır.

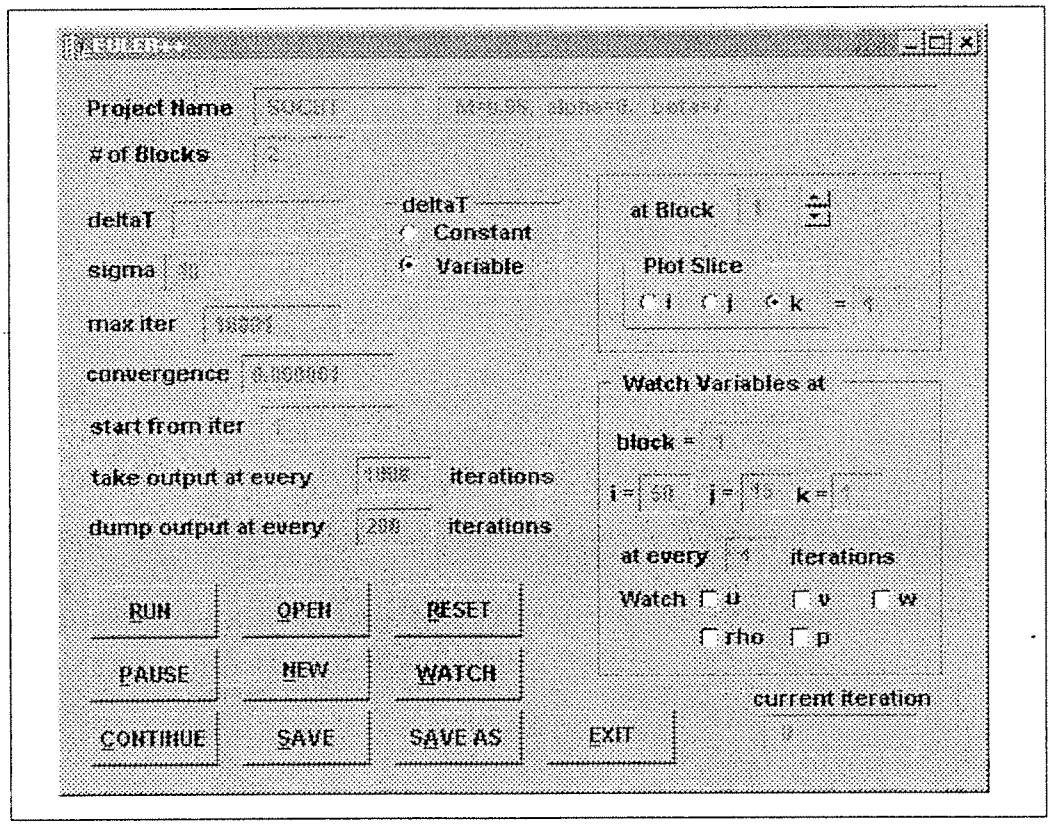
C++ yeni ve hala gelişen bir dil olduğundan kullanıcı kolaylığı sağlayan derleyicilere sahiptir. Alt seviye bir dil olduğundan makina diline en yakın dildir ve bu da derleme zamanını diğer dillere nazaran azaltır.



Şekil 5.1 İki bloktan oluşan bir problemin tanımı

5.3 EULER++'IN YAPISI VE ÇÖZÜM ALGORİTMASI

EULER++ bu çalışma sırasında yazılan Euler çözücüsünün adıdır. [40] Esas olarak bir kullanıcı arabiriminden, ana programdan ve beş sınıftan oluşur. Hiyerarşik olarak bu sınıflar Bölge, Blok, Yüz, Hücre ve Düğüm olarak sıralanır. Şekil 5.1'de bu sınıfların ifade ettiği fiziksel objeler ve ileride anlatılacakları rahat takip edebilmek için bazı tanımlar gösterilmiştir. Bu yapıya benzer özellikler taşıyan hiyerarjik bir veri yapısı Hemker ve Zeeuew [37] tarafından FORTRAN ve Pascal dilleri için geliştirilmiştir.



Şekil 5.2 EULER++'ın kullanıcı arabiriminden bir ekran görüntüsü

Yaratılan kullanıcı arabirimi klasik MS-Windows® pencerelerinden oluşur. Arabirimi gösteren bir ekran görüntüsü Şekil 5.2'de verilmiştir. Yeni bir çözüme başlamak ya da yarım kalan bir çözüme devam etmek için gerekli tüm bilgiler bu pencereler yardımı ile girilebilir. İlk olarak çözülecek projenin adı girilir. Bu ad önemlidir çünkü daha sonra program içerisinden yaratılacak olan bütün giriş ve çıkış dosyalarının adları proje adına uygun uzantılar eklenerek yaratılır. Proje adını çözülen problemin çok kısa bir tarifi ve problemin blok sayısı izler. Daha sonra zaman dilimi seçimi, yakınsama

kriterleri, maximum aşama sayısı, v.b. gibi çeşitli parametrelerin girişini sağlayan diyalog kutuları gelir. Eğer yarım kalmış bir çözüme devam edilecekse hangi aşamadan başlanılacağı girilir. Her blok için uygulanacak ilk değerlerin hesaplama tekniği belirtilir. Program çalıştığı esnada değerleri izlenmek istenilen değişkenler seçilir. Bu ve buna benzer tüm bilgiler *project-name*.slv adlı dosyada saklanır. Arabirim kullanılarak yapılan her değişiklik anında bu dosyaya kaydedilebilir. Eğer bir problem ilk defa çözülecekse arabirim daha önceden belirlenmiş değerlerle açılır. Ayrıca kullanıcı çözümün yakınsamasını izlemek için başka bir pencere açabilir.

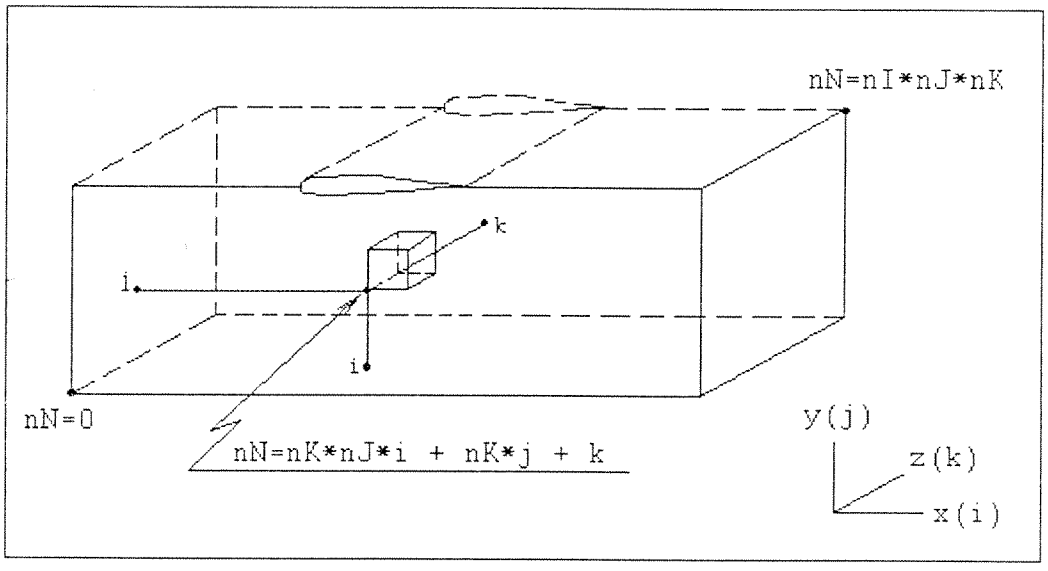
Çözüm ana program ile başlar. Ana program çözümde gerekecek bütün bilgileri arabirimden alır. Projenin adına bakarak gerekli giriş ve çıkış dosyalarını yaratır. Bölge sınıfını kullanarak bir Bölge objesi yaratır. Arabirimden aldığı bilgileri Bölge objesine geçirir. Her problem için tek bir Bölge objesi yaratılır.

Bölge sınıfının başlatıcı fonksiyonunda ilk olarak her bloğun veri dosyasından, ki bunlar *project-name*.bl1, *project-name*.bl2, v.b. şeklinde adlandırılırlar, o bloğun ağ ölçülerini yani x, y, z, doğrultularında kaçar tane düğüm olduğu okunur. Daha sonra problemin içerdiği blok sayısı kadar blok objesi yaratılır. Örneğin Şekil 8'de görülen problem için iki Blok objesi yaratılmalıdır. Birden fazla bloğa duyulan ihtiyaç karmaşık geometrilerin etrafına tek bir ağ örmenin zorluğundan kaynaklanır. Ayrıca bu teknik paralel hesaplama mantığına da uygundur ve daha sonraki çalışmalarda kullanılabilir. Blok sayılarının seçiminde sınır koşulları da göz önüne alınmalıdır.

Bölge sınıfı iki adet üye fonksiyona sahiptir. Bu fonksiyonlarda birden fazla bloğun verisinin birarada kullanılacağı hesaplamalar yapılır. Bu hesaplamalar blokların birleştiği arayüzleri ilgilendirir (Şekil 5.1). Bu fonksiyonların ilkinde arayüzde yer alan düğümler birebir çakıştırılır. İkinci fonksiyon ise her aşama sonunda bu düğümlerdeki korunmuş değişkenleri yenilemekten sorumludur.

Programın ana döngüsü Bölge sınıfı içerisindedir. Bu döngü, problemin yeni çözülmesine yada yarım kalmış bir çözüme devam edilmesine göre sıfırdan yada çözümün yarım kaldığı aşamadan başlar. Bu döngünün içerisinde daha önce bahsedilen Bölge sınıfına ait üye fonksiyonları ve her blok için tek tek çıktı ve çözücü fonksiyonları çağırılır.

Blok sınıfı Bölge'den başlatılır ve ilk olarak o blok içerisinde toplam kaç adet Düğüm olduğunu hesaplayıp o kadar Düğüm objesi yaratır. Bunu yaparken Şekil 5.3'de görülen işaretleyici sisteminden faydalanılır. Bu işaretleyici sistem sayesinde her düğüm üç koordinat indisi yerine sadece bir tane düğüm numarasıyla ifade edilir. Eğer yarım kalmış bir çözüme devam ediliyorsa, devam etmek için gereken sonuçlar *project-name*.red isimli dosyadan okunur. Daha sonra altı adet Yüz objesi yaratılır. Bloktaki hücre sayısı hesaplanır ve o kadar Hücre objesi yaratılır. Her hücre için yüz vektörlerini ve bu yüzlerden geçen ortalama akıları hesaplayan Hücre üye fonksiyonları çağrılır.



Şekil 5.3 Hücreler ve düğümler için işaretleme sistemi

Blok sınıfının, Bölge sınıfının yaratıcı fonksiyonundan çağırılan ve daha önce açıklandığı gibi bloklar arasındaki arayüzlerle ilgili işlemleri yapan fonsiyonlara yardımcı olan üye fonksiyonları vardır. Çözücü adı verilen ve Bölge sınıfındaki ana döngüden çağırılan diğer bir üye fonksiyon ise her düğüm için birinci ve ikinci derece düzeltmeleri hesaplar ve her aşama sonunda düğümlerdeki korunmuş değişkenleri yeniler. Blok sınıfının Çıktı adı verilen üye fonksiyonu ise iki çeşit çıktı almaya yarar. İlk olarak, bir terslik olduğunda daha sonra devam devam edebilmek amacıyla belli aralıklarda *project-name*.sav isimli dosyaya o andaki sonuçların dökümünü yazar. İkinci olarak yine belirli aralıklarda iki boyutlu bir dilimdeki sonuçların grafiklerini çizmek amacıyla çıktıları alınır.

Yüz sınıfı Blok sınıfı ile arkadaş sınıflardır. Her Blok objesi için altı adet Yüz objesi vardır. Yani Yüz sınıfının başlatıcı fonksiyonu her Blok objesi yaratılırken altı kere çağırılır. Yüz sınıfının başlatıcı fonksiyonunda ilk olarak her yüzde kaç adet yama olduğu *project-name*.bcs adlı dosyadan okunur. Yamalar yüzler üzerindeki küçük parçalardır. Bir yüzde birden fazla çeşit sınır şartı kullanmak gerekiyorsa o yüzü yamalara ayırma ihtiyacı doğar. Örneğin Şekil 5.1'deki Blok 1'in üst yüzü ile Blok 2'nin alt yüzü üç yamadan oluşur. Ortadaki yamalar kanat profilinin duvarlarıdır ve buralarda duvar sınır şartları kullanılır. Oysa diğer yamalar gerçek sınırlar olmayıp sadece iki bloğu birbirine bağlama görevi gördüklerinden buralarda birleştirme sınır şartları kullanılır. Yama sayısı okunduktan sonra yine aynı dosyadan sırasıyla, her yamada kullanılacak sınır şartı çeşidi, eğer sınır şartı birleştirme sınır şartıysa birleştirme verileri, yani o yamanın hangi bloğun hangi yüzündeki hangi yama ile çakıştığı ve son olarakta yamaların yüzlerde nerelere denk geldiğini anlamak için başlangıç ve bitişlerinin koordinat indisleri okunur.

Yüz sınıfının üye fonksiyonlarından bir tanesi duvar sınırlarında yer alan düğümlerle ilgili işlemleri yapar. Duvar sınırlarında normal hızın sıfır olma şartı bu fonksiyonla sağlanır. Diğer bir fonksiyon başlangıç verilerini *project-name*.ini adlı dosyadan okur. Eğer yarım kalmış bir çözüme devam ediliyorsa bu fonksiyon kullanılmaz. Yüzlerde yer alan düğümler için başlangıç değerleri üç ayrı çeşitte verilebilir. İlkinde, bir yüzde yer alan bütün düğümlerin korunmuş değişkenleri aynı değerlere eşitlenir. İkinci olarak bir yüzün sadece dört köşesindeki düğümlerin korunmuş değişkenlerinin değerleri okunur ve o yüzdeki geri kalan düğümlerin başlangıç değerleri bu dört değer kullanılarak hesaplanır. Son olarak bir yüze parabolik bir hız profili uydurulabilir. Bu son yöntem iki boyutlu problemlerde iki tarafı da duvar sınırlarla çevrilmiş girişler için düşünülmüştür. Yüzeylerde yer almayan iç düğümlerin değerleri ise ya tek bir değer olarak aynı dosyadan okunur ya da yüzlerdeki değerler yardımıyla hesaplanarak bulunur. Diğer bir üye fonksiyon hücrelerin köşelerinde yer alan düğümlerin numalarını ve hücrenin nerede olduğuna bakarak bu düğümlerdeki düzeltmelerin hücrede oluşan değişimlerden nasıl etkileneceğini hesaplar. Örneğin iç bölgede yer alan bir düğümdeki düzeltme etrafındaki sekiz adet hücrede meydana gelen değişimden etkileneceği halde bir köşe düğümü sadece tek hücreden etkilenir.

Hücre sınıfı Blok sınıfının yaratıcı fonksiyonu içerisinde yaratılır. Bir bloktaki her hücre için bir Hücre objesi vardır. Hücre sınıfı, alan vektörleri, alanlardan geçen akılar, hücre içi ortalama değerler gibi hücrelere özgü değişkenleri depolar. Hücre sınıfının, Blok sınıfının Çözücü fonksiyonu içinden çağırılan ve hücre yüzlerinde alan ve akı hesapları yapan üye fonksiyonları vardır. Hücrelerde meydana gelen değişimleri hesaplayan fonksiyonlar da yine Çözücü'den çağırılır. Yapay sömümleme de bu fonksiyonlarda uygulanır.

Düğüm sınıfı Blok, Yüz ve Hücre sınıflarının arkadaş sınıfıdır. Bir bloktaki her düğüm için bir adet Düğüm objesi vardır. Korunmuş ve temel değişkenler, düzeltmeler, v.b. gibi düğümlere özgü değişkenler burada depolanır. Korunmuş değişkenleri temel değişkenlere çeviren ve her aşama sonunda korunmuş değişkenleri yenileyen üye fonksiyonları vardır.

BÖLÜM 6
SONUÇLAR

6.1 GENEL

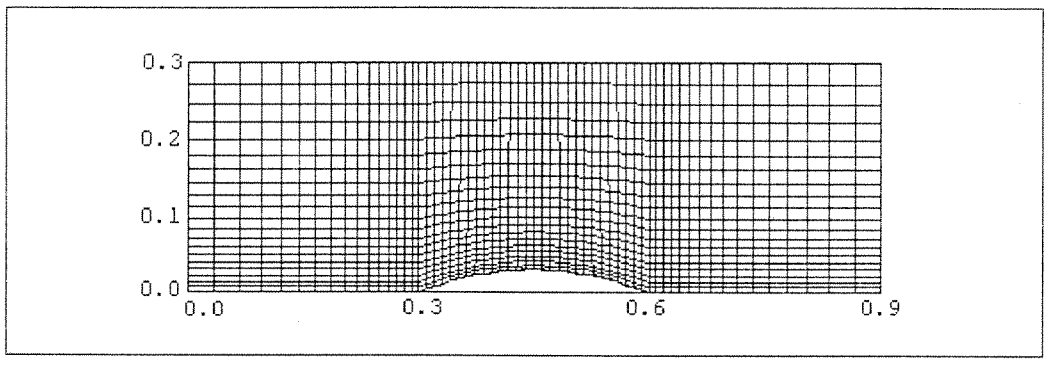
EULER++ üç test durumunda denenmiştir. İlk test durumu kanaldaki Ni-tümseği üzerindeki sesaltı, sescivarı ve sesüstü akışlardır. Bu test durumu pek çok defalar çözüldüğünden elde edilen sonuçları karşılaştırma imkanı vermiştir. İkinci olarak sıfır hücum açısındaki NACA0012 kanat profili etrafındaki akış üç değişik giriş Mach sayısı için incelenmiştir. Bu da SAD uygulamalarında en çok tercih edilen test durumlarından biridir. Ayrıca bu akışın çözümünde yansıtmayan karakteristik sınır şartlarını deneme imkanı vardır. Son olarak SOCBT füzesi etrafındaki üç boyutlu eksenelsimetrik akış ele alınmıştır. Bu test durumu da EULER++'ın üç boyutlu bir akışı çözmedeki başarısını görmek amacıyla seçilmiştir.

6.2 NI-TÜMSEĞİ ÜZERİDEKİ SESALTI AKIŞ

Bu test için kullanılan ağ Şekil 6.1'de verilmiştir. Ağın tamamı 61x21x3 düğümden oluşmaktadır. Bu şekilde xy düzlemindeki bir kesit görülmektedir. z doğrultusunun akışa herhangi bir katkısı olmadığından bu yöndeki düğüm sayısı yakınsamayı hızlandırmak amacıyla küçük tutulmuştur. Kanalın boyutları Ni [18]'nin orijinal çalışmasında kullanılan ile aynıdır.

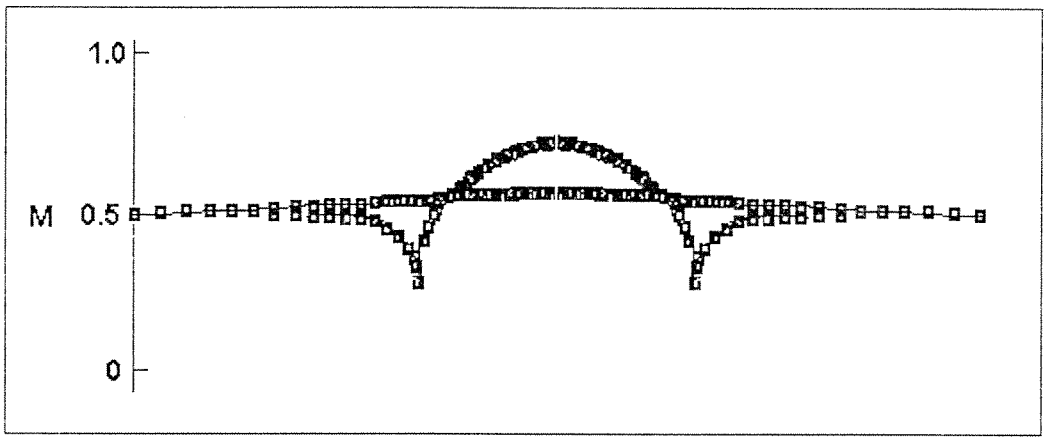
Başlangıç değerleri olarak bütün düğümler için durağan değerler olan 100 kPa basınç, 300 K sıcaklık ve 0.5 Mach sayısı kullanılmıştır. Yine başlandıçta y ve z doğrultularındaki hızlar sıfır olarak alınmıştır.

Uzak bölge sınırlarında dağıtma formüllerini kullanan sınır şartları kullanılmıştır. Duvar sınırlarında ise sadece normal hızın sıfır olması sağlanmış ve basınç iç bölge değerleri kullanılarak hesaplanmıştır.

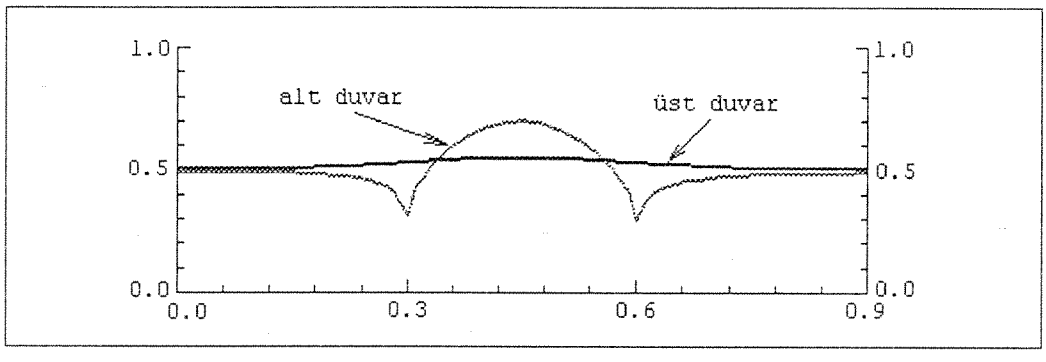


Şekil 6.1 %10'luk Ni-tümseği üzerindeki iki boyutlu ağ

Şekil 6.2a, kanalın üst ve alt yüzeylerindeki Mach sayısı dağılımını göstermektedir. Bu Ni [18]'nin çözümüdür.

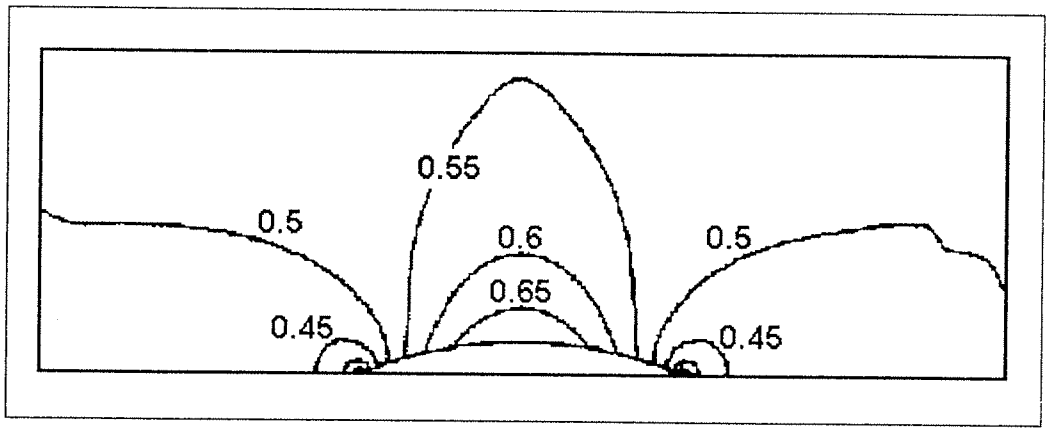


Şekil 6.2a Ni-tümseğinin alt ve üst duvarlarındaki Mach sayısı dağılımı
(Sesaltı durumu - Ni'nin çözümü)

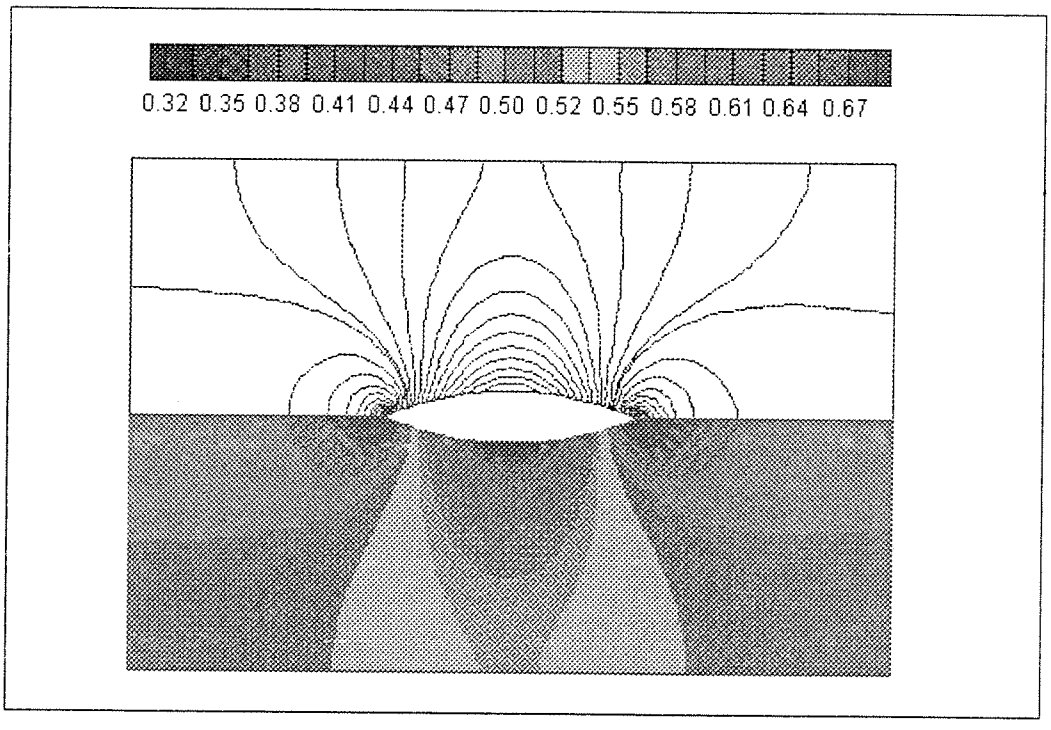


Şekil 6.2b Ni-tümseğinin alt ve üst duvarlarındaki Mach sayısı dağılımı
(Sesaltı durumu - EULER++'ın çözümü)

EULER++ tarafından elde edilen çözüm ise 6.2b'de verilmiştir. Şekil 6.3a ve 6.3b sırasıyla Ni ve EULER++'ın kanaldaki Mach sayısı dağılımını gösteren sonuçlarıdır. Görüldüğü üzere sonuçlar birbiriyle iyi derecede uyuşmaktadır.



Şekil 6.3a Ni-tümseği üzerideki eş-Mach sayısı eğrileri
(Sesaltı durumu - Ni'nin çözümü)



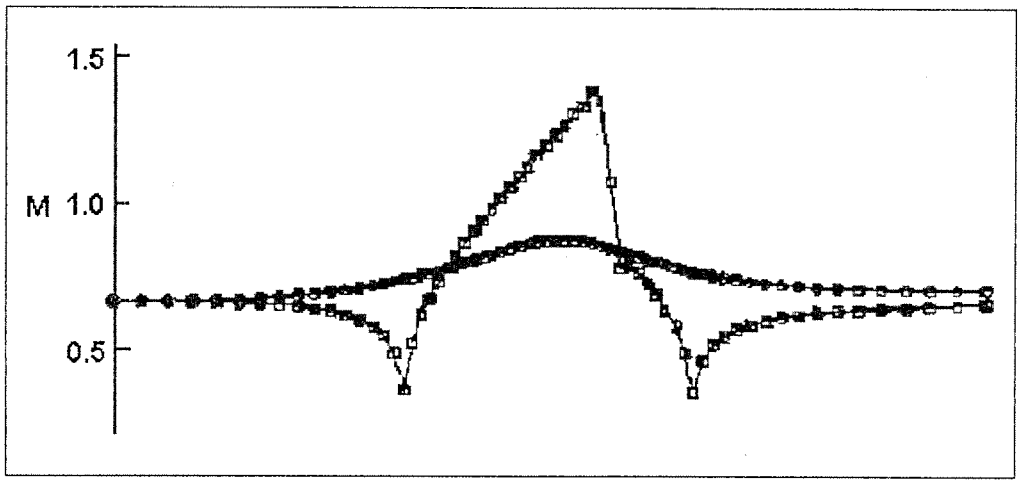
Şekil 6.3b Ni-tümseği üzerideki eş-Mach sayısı eğrileri
(Sesaltı durumu - EULER++'ın çözümü)

Şekil 6.2b ve 6.3b'ye göre tümseğin ortasına göre tam bir simetri vardır. Maximum Mach sayısı 0.7 ile tam orta noktada, minimum Mach sayısı ise 0.3 ile tümseğin her iki uçunda elde edilmiştir.

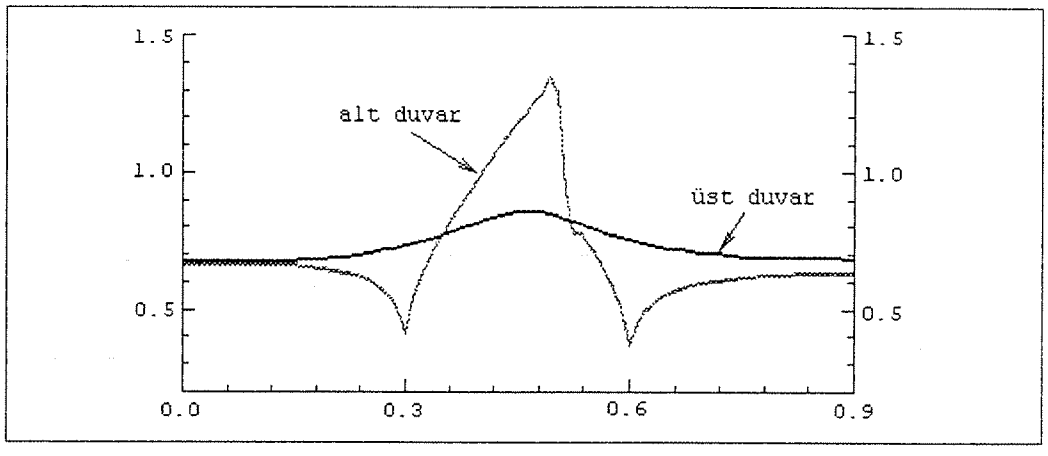
Şekil 6.3b'deki düzgün dağılımı elde edebilmek için sönümleme katsayısı, τ, olacak şekilde yapay sönümleme yapılmış ve çözüm 8000 aşama sonunda yakınsamıştır.

6.3 NI-TÜMSEĞİ ÜZERİNDEKİ SESCİVARI AKIŞ

Bu test durumunda kullanılan ağ sesaltı akış için kullanılan ile aynıdır. Başlandıç ve sınır şartları da aynıdır. Fakat bu durumda giriş Mach sayısı 0.675'tir.

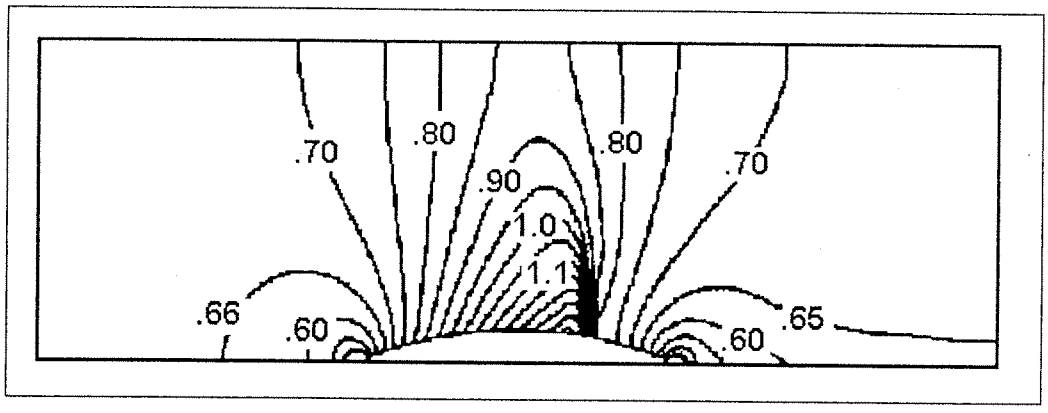


Şekil 6.4a Ni-tümseğinin alt ve üst duvarlarındaki Mach sayısı dağılımı (Secivarı durumu - Ni'nin çözümü)

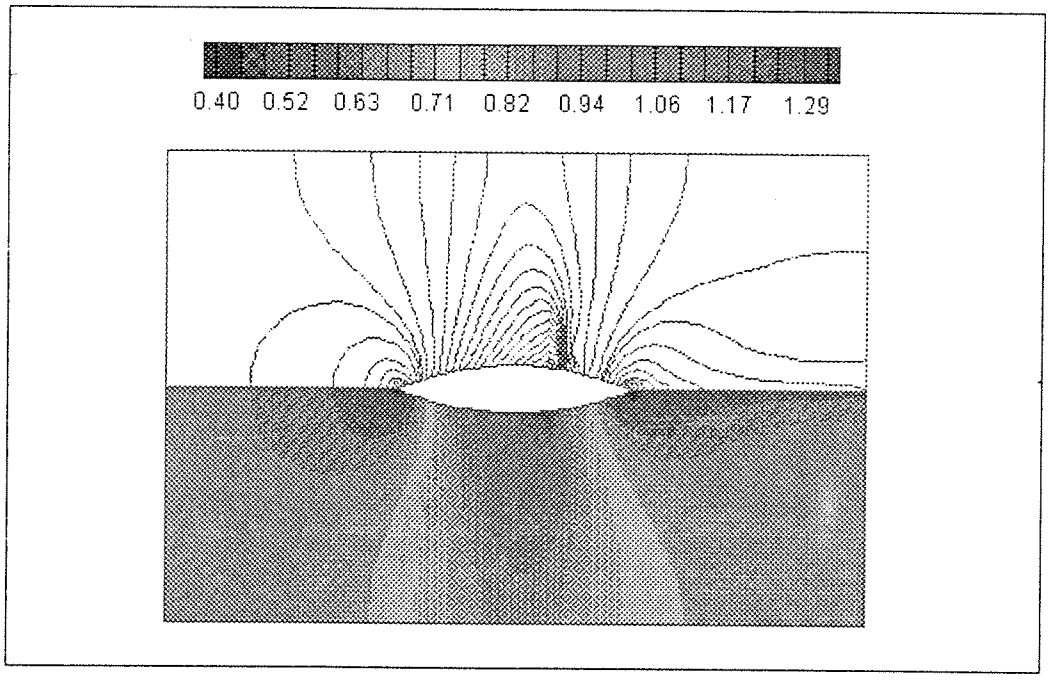


Şekil 6.4b Ni-tümseğinin alt ve üst duvarlarındaki Mach sayısı dağılımı (Secivarı durumu - EULER++'ın çözümü)

Şekil 6.4a ve 6.5a Ni tarafından elde edilen sonuçları Şekil 6.4b ve 6.5b EULER++'ın verdiği sonuçları göstermektedir. Sonuçlar yine iyi derecede uyuşmaktadır.



Şekil 6.5a Ni-tümseği üzerideki eş-Mach sayısı eğrileri
(Seciyarı durumu - Ni'nin çözümü)



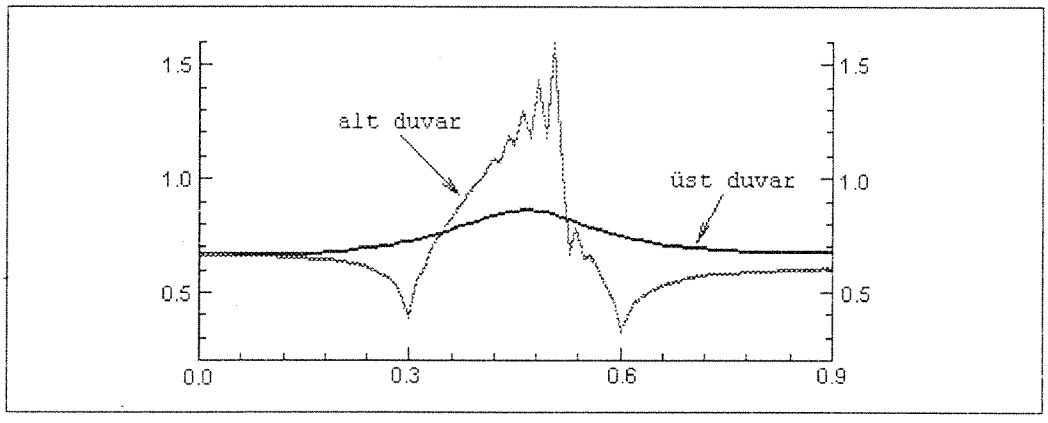
Şekil 6.5b Ni-tümseği üzerideki eş-Mach sayısı eğrileri
(Seciyarı durumu - EULER++'ın çözümü)

Şekil 6.5b'ye göre tümsek üzerinde dik bir şok ile sonlanan sesüstü bir bölge vardır. Şok, tümsek genişliğinin %70'ine denk gelmektedir. Maksimum Mach sayısı 1.3 ile şokun hemen önünde tümseğin üzerinde, minimum Mach sayısı ise 0.4 ile tümseğin

uçlarında oluşmuştur. Şokun arkasındaki bölgede dönel bir akış vardır ve bu bölgedeki eş-Mach eğrileri alt duvarı, bir önceki durumun aksine, dik kesmezler.

Bu test durumunda yapay sönümleme katsayısı, şok bölgesi göz önüne alınarak, 20'ye yükseltilmiştir. Şekil 6.6, yapay sönümleme katsayısı sesaltı akış durumunda kullanılan değer olan 5.0 olarak alındığında, kanalın alt ve üst duvarlarındaki Mach sayısı dağılımını göstermektedir. Bu sonuç Şekil 6.4b'de verilen ile kıyaslandığında özellikle şok bölgesinde sönümlemenin yetmediği ve salınımlar oluştuğu rahatça gözlemlenebilir.

Son olarak çözüm 6000 zaman dilimi sonrasında yakınsamıştır.

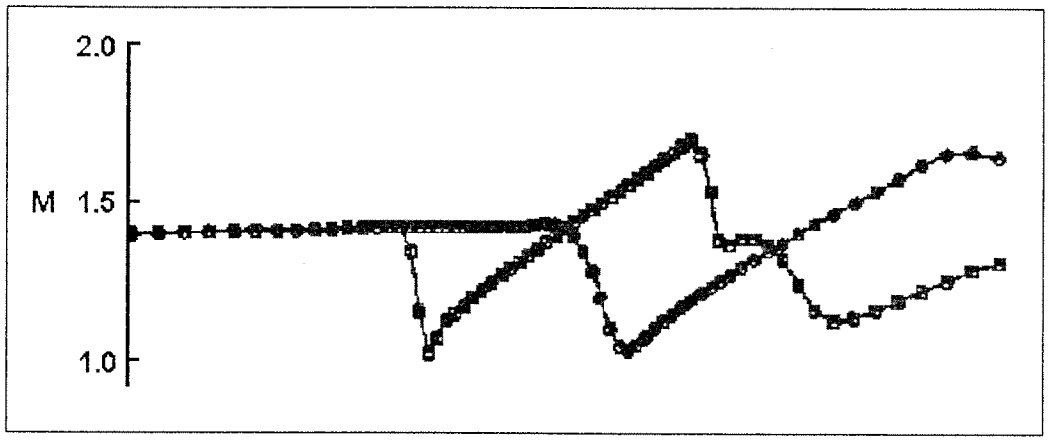


Şekil 6.6 $\tau = 5.0$ kullanılarak bulunan
Ni-tümseğinin alt ve üst duvarlarındaki Mach sayısı dağılımı
(Seciyarı durumu - EULER++'ın çözümü)

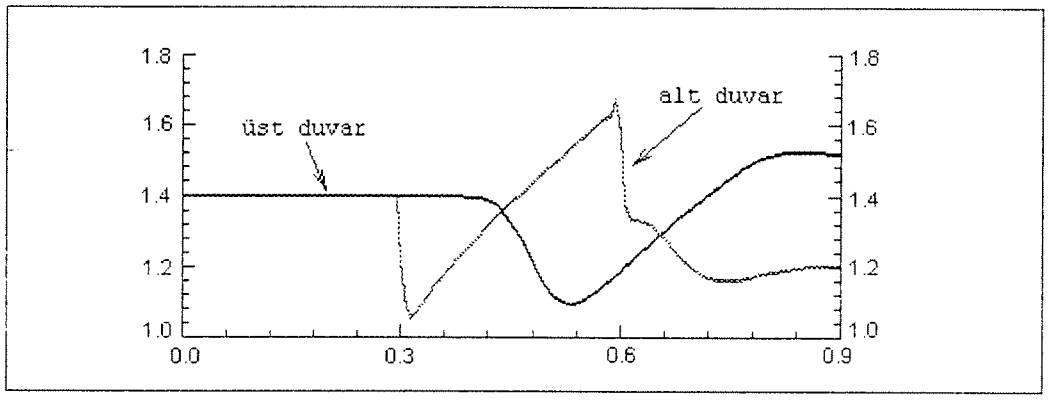
6.4 NI-TÜMSEĞİ ÜZERİNDEKİ SESÜSTÜ AKIŞ

Bu test durumunda daha önceki iki durumda kullanılanın aksine %10 yükseliğinde değil sadece %4 yüksekliğinde bir tümsek kullanılmıştır. Büylece tümseğin her iki ucunda da şokların oluşması sağlanmıştır. Ayrıca şok beklenen bölgelerde ağ yapısı sıklaştırılmış ve 110x60x3'lük bir ağ kullanılmıştır. Başlangıç ve sınır değerleri daha önceki test durumlarındakilerle aynıdır. Ancak giriş Mach sayısı 1.4'tür.

Şekil 6.7a ve 6.8a Ni'nin sonuçlarını, Şekil 6.7b ve 6.8b ise EULER++'ın sonuçlarını göstermektedir. Şekil 6.8b'den görüldüğü üzere tümseğin her iki köşesinde eğik şoklar vardır. Öndeki köşeden çıkan şok tümseğin eğik yüzeyinden dolayı oluşan Mach dalgaları ile zayıflar ve üst duvardan yansıyarak geri döner. Arkadaki köşeden çıkan şok ise yine tümsekten yayılan Mach dalgaları ile zayıflar, üst duvardan yansıyan diğer şok tarafından bozulur ve uzak bölge sınırından dışarı çıkar.



Şekil 6.7a Ni-tümseğinin alt ve üst duvarlarındaki Mach sayısı dağılımı
(Sesüstü durumu - Ni'nin çözümü)



Şekil 6.7b Ni-tümseğinin alt ve üst duvarlarındaki Mach sayısı dağılımı
(Seüstü durumu - EULER++'ın çözümü)

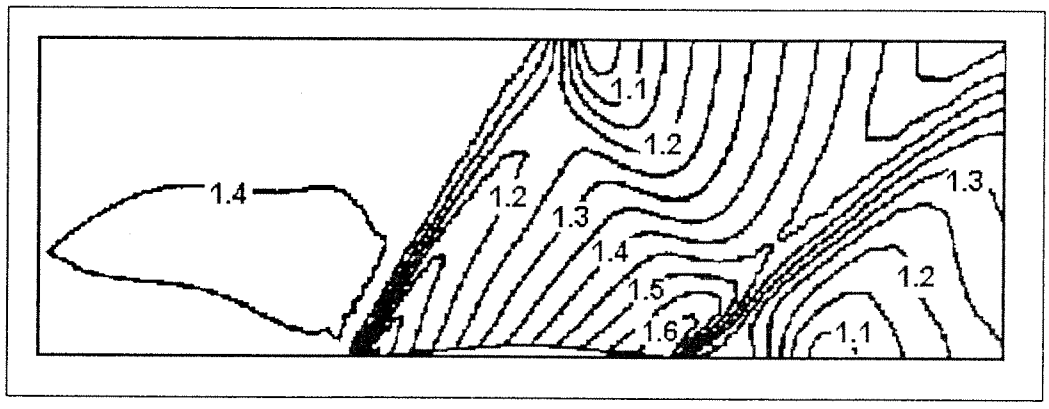
Akış her bölgede sesüstüdür. Maksimum Mach sayısı 1.67 ile ön köşeden çıkan şoktan hemen önce tümsek yüzeyinde, minimum Mach sayısı ise 0.9 ile arka köşeden çıkan şoktan hemen sonra yine tümsek üzerinde oluşmaktadır.

Diğer bir ilginç sonuç ise Şekil 6.7b'den izlenebilir. Kanalın üst duvarına yapışık ilerleyen bir akışkan taneciği tümseğin varlığını ancak tümseğin ortasına geldiğinde farkedebilmektedir.

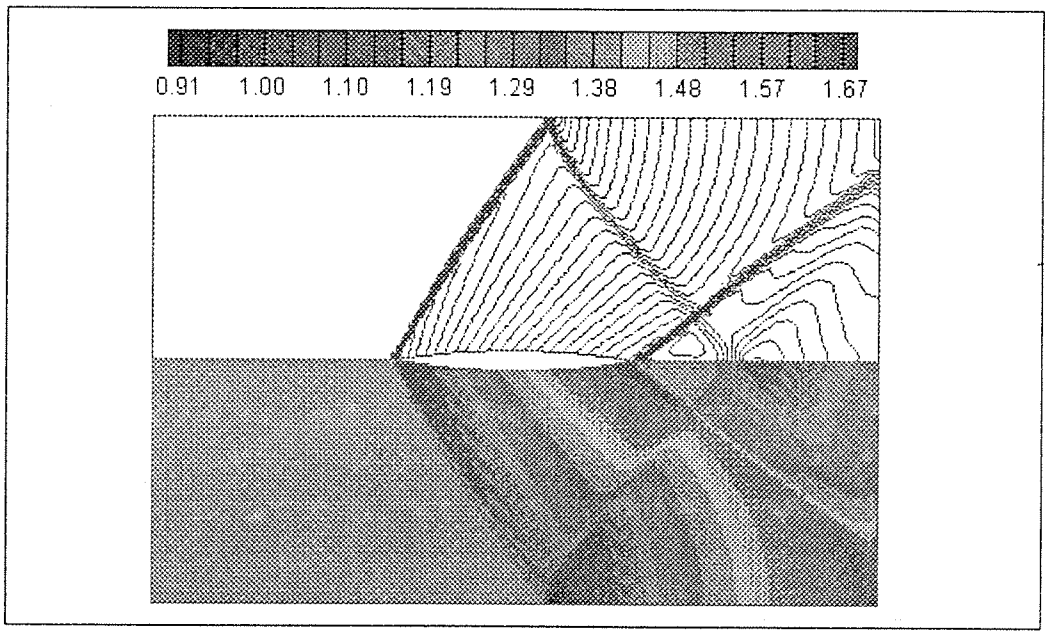
Ön köşeden çıkan şokun üst duvardan yansıması Şekil 6.8b'de Şekil 6.8a'dakinden daha net görülmektedir. Bunun sebebi EULER++ tarafından elde edilen çözümde daha sık bir ağ yapıaı kullanılmasıdır.

Şekil 6.9 üst duvarda uzak bölge sınır şartı uygulandığında elde edilen sonucu göstermektedir. Bu çözümün amacı uzak bölge sınırlarında uygulanan yansıtmayan

dağıtma formüllerini kullanan sınır şartlarını test etmektir. Görüldüğü üzere öndeki köşeden çıkan şok üst duvardan dışarı çıkmakta ve yansımamaktadır.

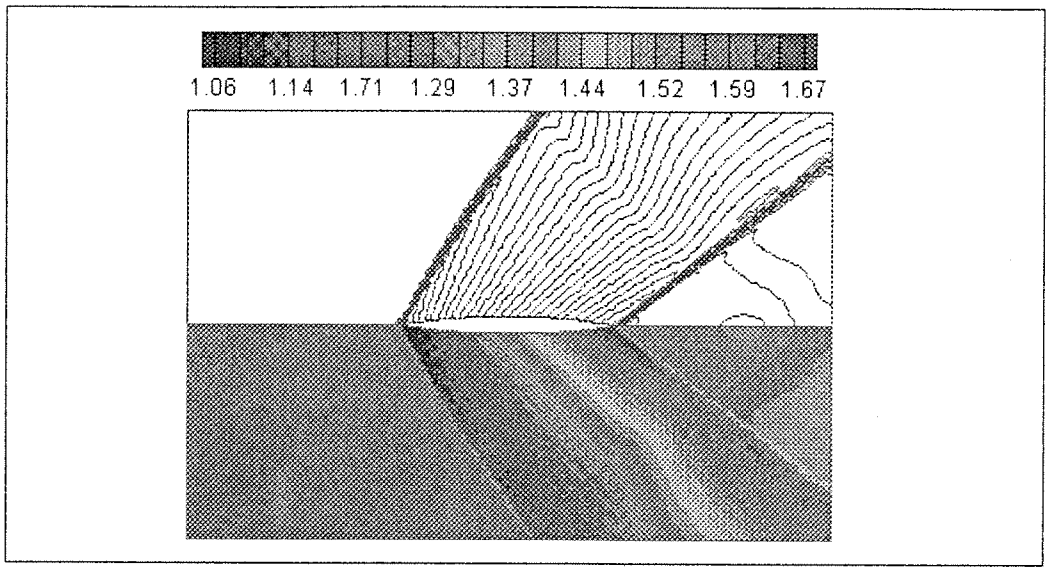


Şekil 6.8a Ni-tümseği üzerideki eş-Mach sayısı eğrileri
(Sesüstü durumu - Ni'nin çözümü)



Şekil 6.8b Ni-tümseği üzerideki eş-Mach sayısı eğrileri
(Sesüstü durumu - EULER++'ın çözümü)

Bu durumda yapay sönümleme katsayısı olarak 50 kullanılmış ve yakınsama 2000 aşamada gerçekleşmiştir.



Şekil 6.9 Üst duvarda uzak bölge sınır şartı kullanılarak bulunan Ni-tümseği üzerideki eş-Mach sayısı eğrileri (Sesüstü durumu - EULER++'ın çözümü)

6.5 NACA0012 KANAT PROFİLİ ETRAFINDAKİ AKIŞ

İkinci olarak NACA0012 kanat profili etrafındaki akış üç değişik giriş Mach sayısı için çözülmüştür.

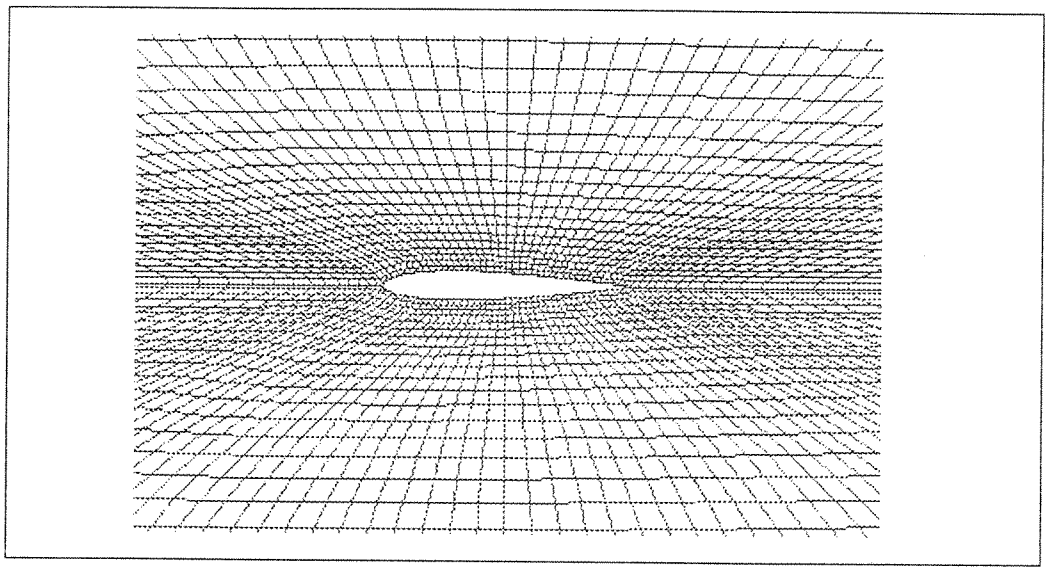
Bu test durumunda kullanılan ağın büyütülmüş bir kesiti Şekil 6.10'da verilmiştir. Esas ağ 120x60x3 düğüm içeren iki bloktan oluşur.

Başlangıç değerleri olarak bütün düğümlerde durağan değerler olan 100 kPa basınç ve 300 K sıcaklık verilmiştir. Ayrıca bütün düğümlerdeki y ve z doğrultularındaki başlangıç hızı sıfır, x yönündeki hız ise girişteki hıza eşit alınmıştır.

Hem duvar hem de uzak bölge sınırlarında karakteristik sınır şartları kullanılmıştır. İki bloğun birbiriyle çakıştığı sınırlarda ise, bloklar arası data transferini sağlamak amacıyla, birleştirme sınır şartı uygulanmıştır. Birleştirme sınır şartı sayesinde arayüzlerde yer alan düğümler iç düğümlermiş gibi ele alınmıştır.

EULER++ ile elde edilen sonuçlar, AGARD AR 211 raporunda [2] Euler denklemlerinin en hassas sayısal çözümleri olarak kabul edilen sonuçlarla kıyaslanmıştır.

Şekil 6.11a ve 6.11b sırasıya Hirsch [2] ve EULER++ tarafından 0.85 giriş Mach sayısı için elde edilen sonuçlardır. Mach sayısı dağılımı sescivarı Ni-tümseğine benzer bir karakter göstermektedir. Kanat profilinin her iki tarafında, kanat genişliğinin %72'sine denk delen bölgede dik şoklar oluşmuştur.



Şekil 6.10 NACA0012 kanat profili etrafındaki ağın kesitinin büyütülmüş görüntüsü

Şekil 6.12a ve 6.12b giriş Mach sayısı 0.95 olduğu durumda Hircsh [2] ve EULER++'tan alınan sonuçlardır. Kanadın sonunda iki adet eğik şok görülmektedir. Mach sayısı şoktan hemen önce ve kanadın yüzeyinde 1.45'e erişmektedir.

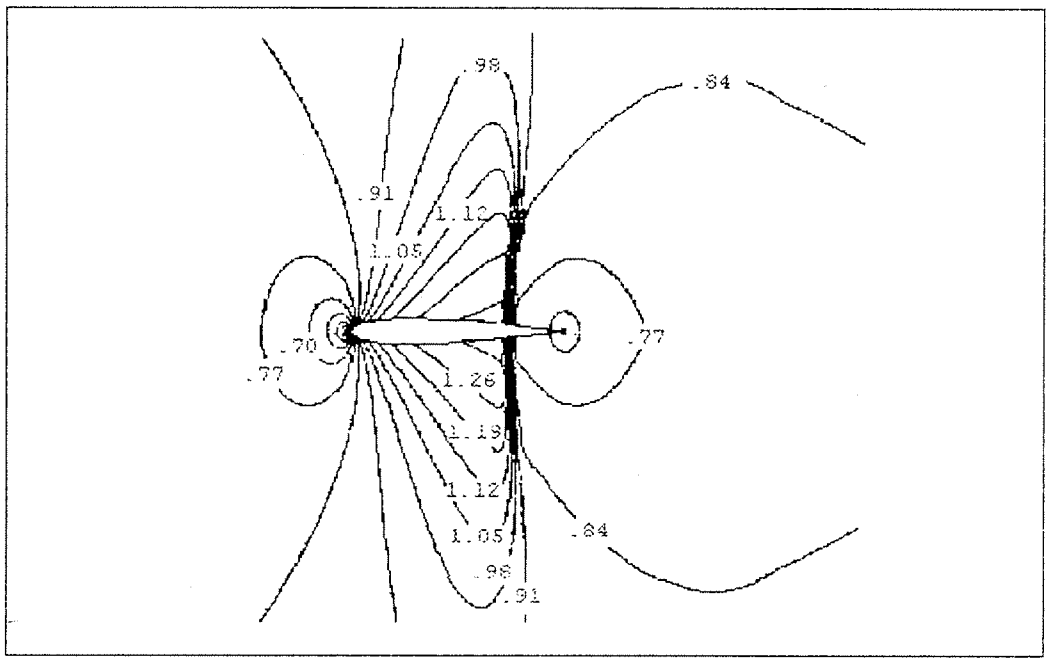
Şekil 6.13a ve 6.13b giriş Mach sayısı 1.2 alınarak Hirsch [2] ve EULER++'tan alınan sonuçları göstermektedir. Yine kanadın sonunda iki adet eğik şok vardır. Bu şoklar bir önceki durumda oluşanlardan daha kuvvetlidir. Ayrıca kanadın önünde, kanattan kanat genişliğinin %40'ı kadar uzaktıkta, bir yay şoku bulunmaktadır. Bu şok sebebiyle kanadın ön bölgesinde sesaltı bir alan oluşmuştur. Diğer bölümlerde ise akış sesüstüdür. Bu sonuç klasik küt burunlu cisim probleminin bir karakteristiğidir.

6.6 SOCBT MERMİSİ ETRAFINDAKİ AKIŞ

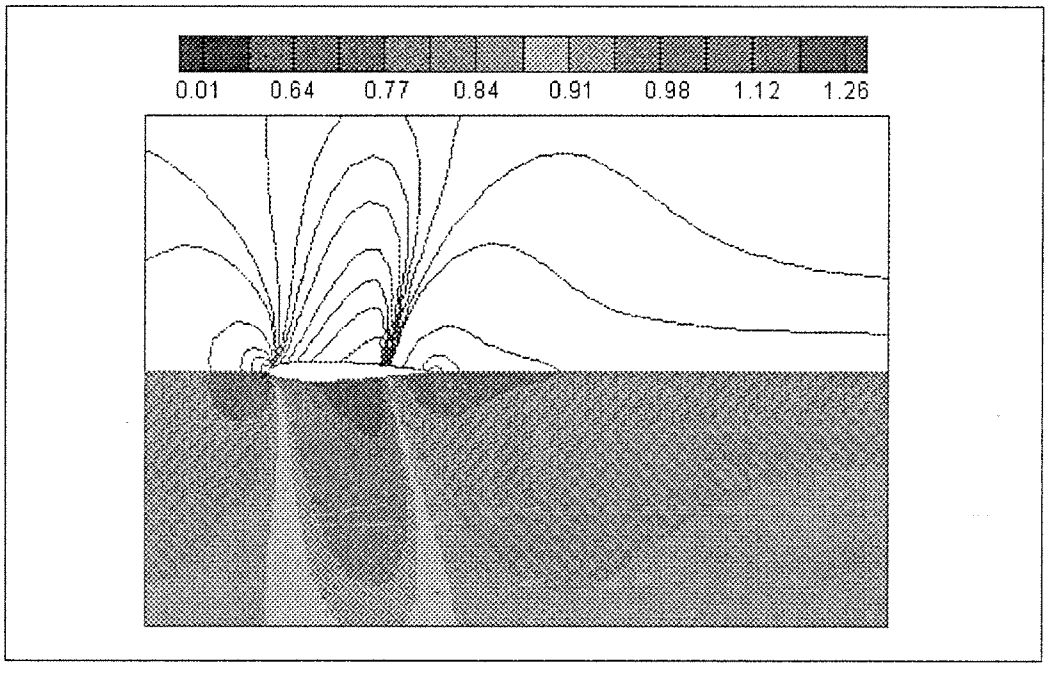
Bu test durumunda 7° kuyruk açılı, sıfır hücum açısındaki SOCBT mermisi etrafindaki akış incelenmiştir. EULER++'dan elde edilen sonuçlar Fu ve Liang [37]'ın sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Bu referansta mermi etrafindaki akış, Navier-Stokes denklemleri iki-katmanlı türbülans modeli ile beraber kullanılarak çözülmüştür.

Şekil 6.14'te görülen SOCBT mermisinin geometrisi Sturek [38]'ten alınmıştır. Şekildeki β kuyruk açısını göstermektedir ve bu çalışmada 7° olarak alınmıştır. Bu şekildeki ölçüler Şekil 6.15a'da görülen üç boyutlu ağı hazırlamakta kullanılmıştır. Bu 130x40x10'luk bir ağdır. Bu ağın büyütülmüş bir kesiti ve kuyruk bölgesi detayı Şekil

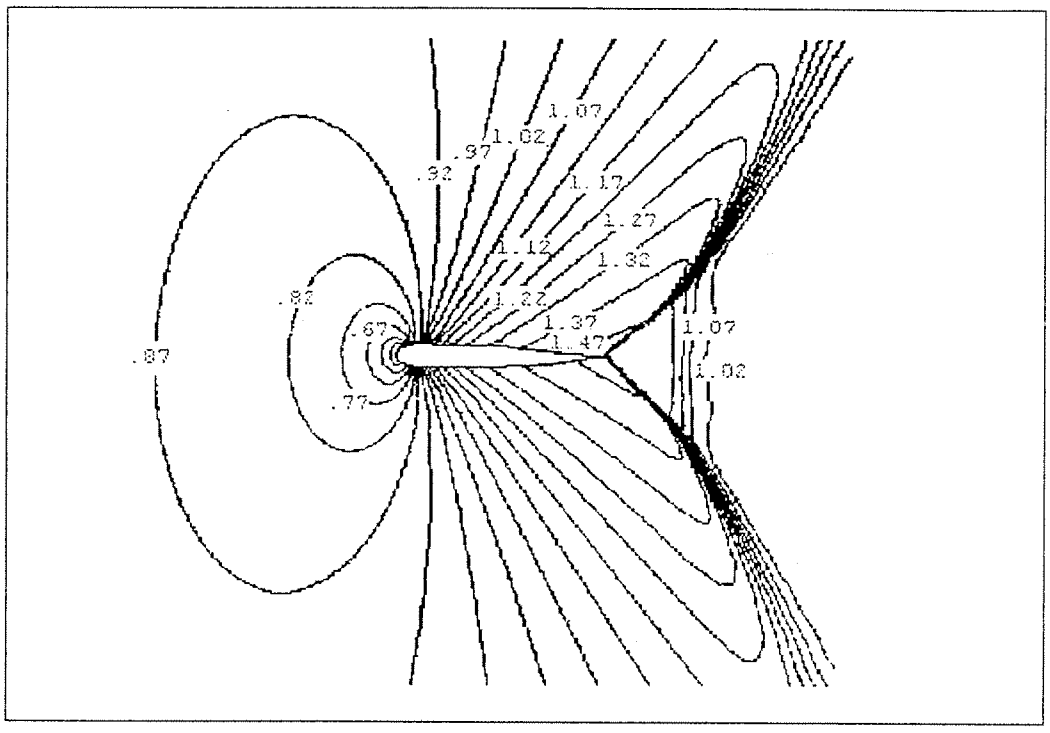
6.15b'de verilmiştir. Şekilden görüldüğü üzere merminin kuyruk bölgesi Euler denklemlerinin çözebileceği bir şekilde yuvarlatılmıştır.



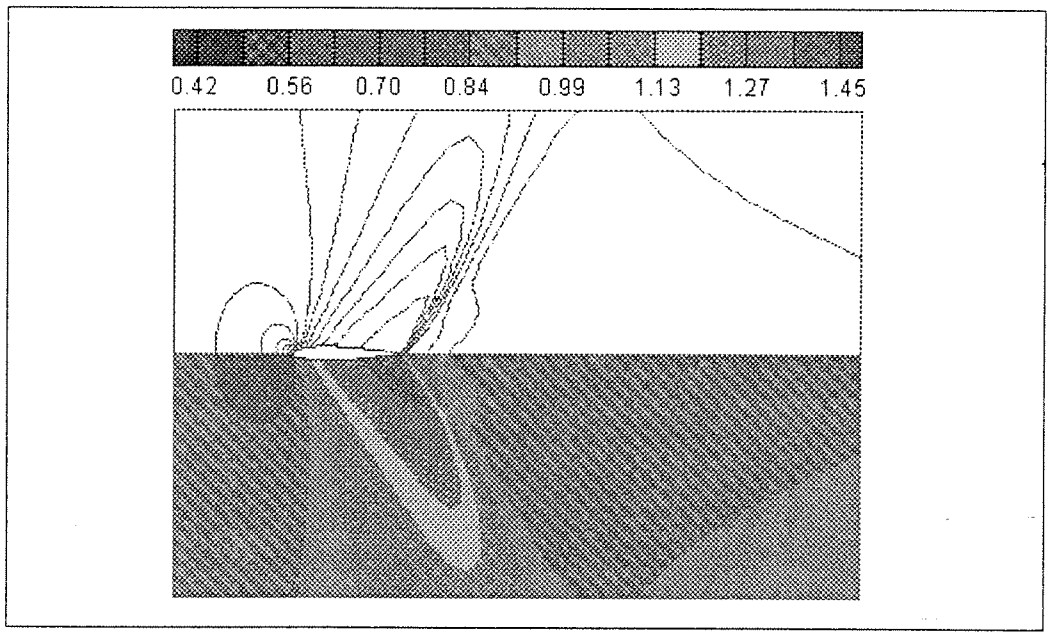
Şekil 6.11a $M_{giriş}$=0.85 için NACA0012 etrafındaki eş-Mach sayısı eğrileri (Hirsch [2]'den alınan sonuç)



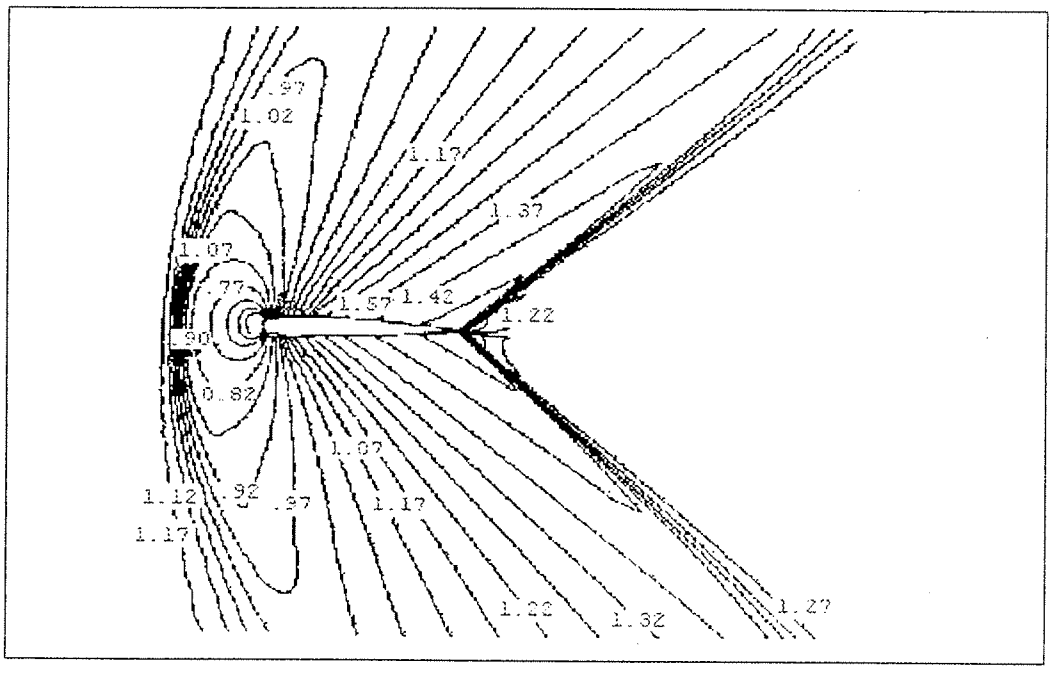
Şekil 6.11b $M_{giriş}$=0.85 için NACA0012 etrafındaki eş-Mach sayısı eğrileri (EULER++'dan alınan sonuç)



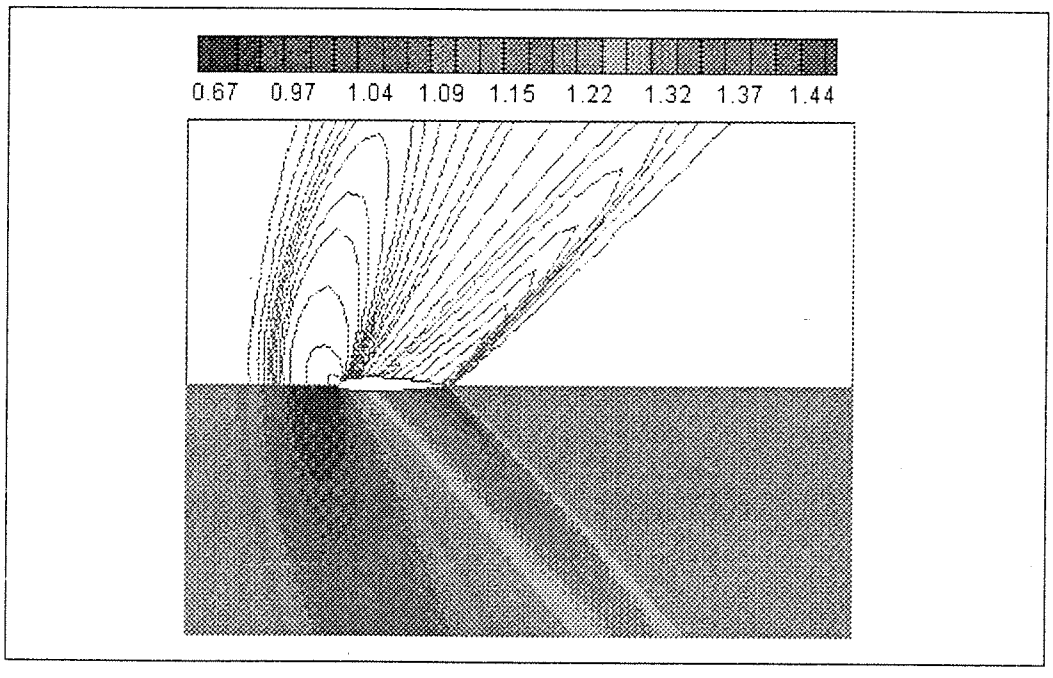
Şekil 6.12a $M_{giriş}$=0.95 için NACA0012 etrafindaki eş-Mach sayısı eğrileri (Hirsch [2]'den alınan sonuç)



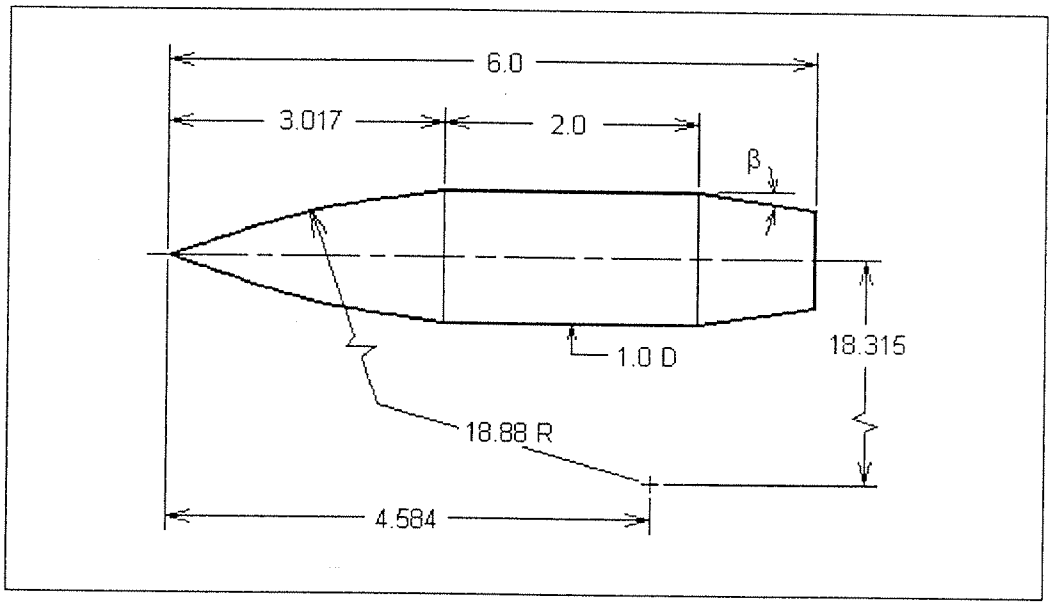
Şekil 6.12b $M_{giriş}$=0.95 için NACA0012 etrafindaki eş-Mach sayısı eğrileri (EULER++'dan alınan sonuç)



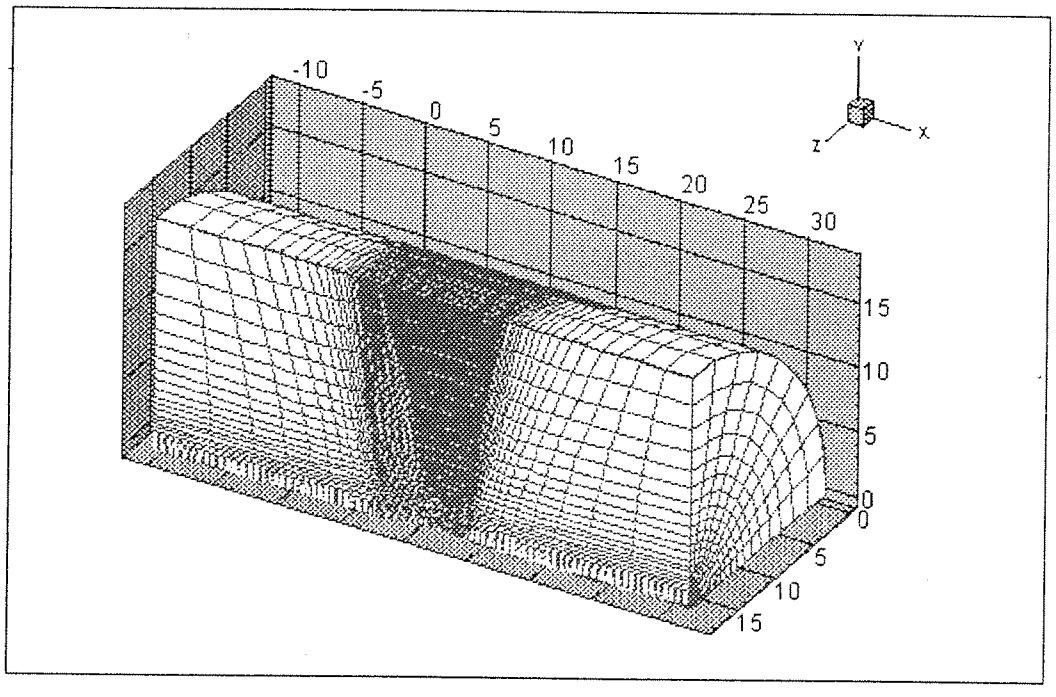
Şekil 6.13a $M_{giriş}$=1.2 için NACA0012 etrafındaki eş-Mach sayısı eğrileri (Hirsch [2]'den alınan sonuç)



Şekil 6.13b $M_{giriş}$=1.2 için NACA0012 etrafındaki eş-Mach sayısı eğrileri (EULER++'dan alınan sonuç)



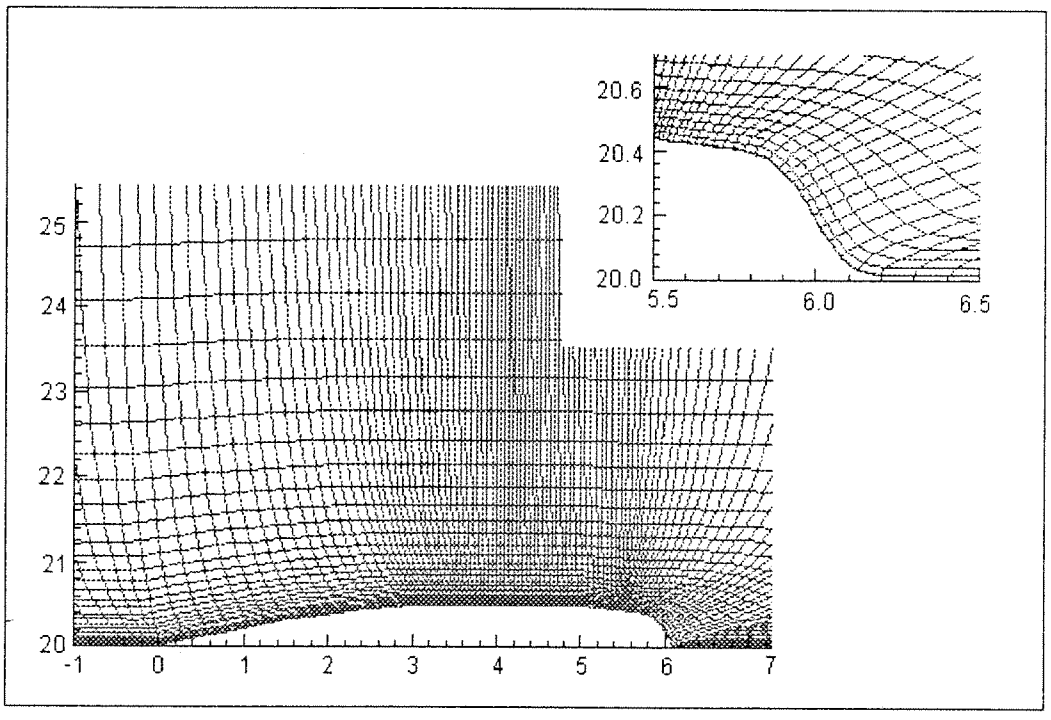
Şekil 6.14 Deneysel SOCBT geometrisi



Şekil 6.15a SOCBT mermisi etrafindaki üç boyutlu ağ

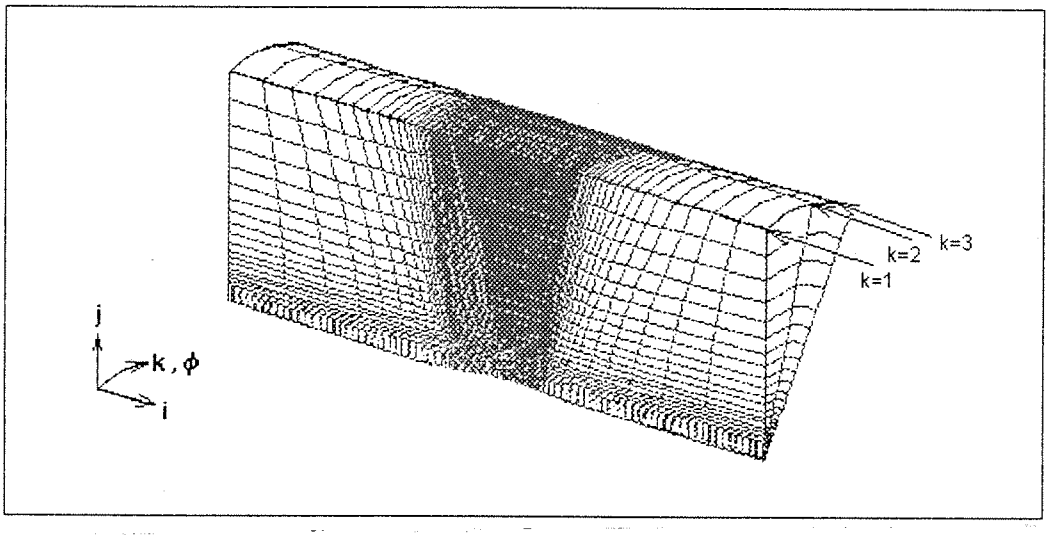
Mermi üzerindeki akış eksenel simetriktir ve Şekil 6.16'da gösterilen Φ yönünde değişkenler sabit kalmaktadır. Bu göz önüne alınarak, hesaplama zamanını azaltmak amacıyla çözümde sadece Şekil 6.15a'da görülen ilk üç dilim kullanılmıştır. Bu üç dilimden oluşan hesaplama bölgesi Şekil 6.16'da görülebilir. Hesaplamalar ortadaki dilim

üzerinde yapılmış ve her aşama sonunda diğer iki dilimdeki değişkenler orta dilimde hesaplananlara eşitlenmiştir. Diğer sınırlarda karakteristik sınır şartları kullanılmıştır.

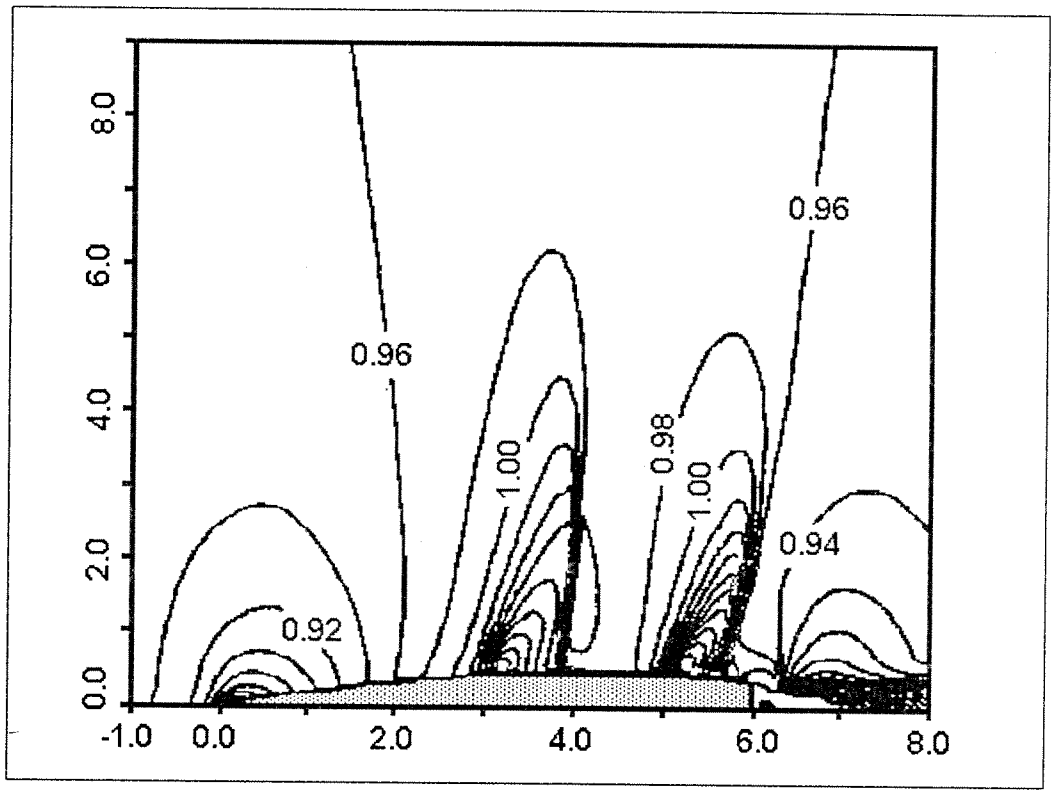


Şekil 6.15b SOCBT mermisi etrafındaki ağın büyütülmüş kesiti ve kuyruk bölgesi detayı

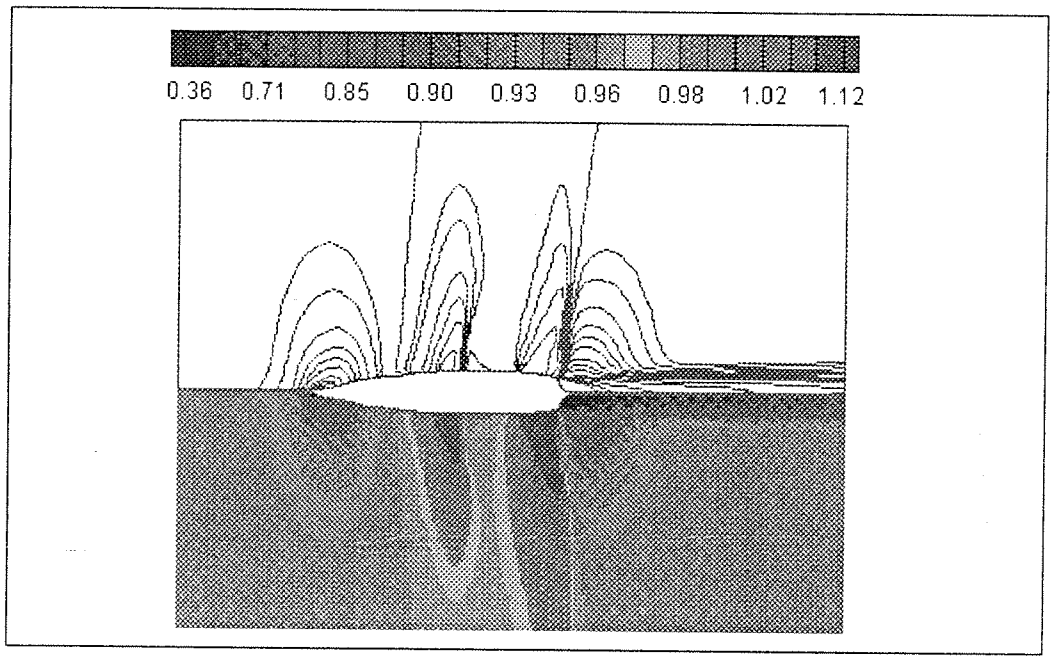
Başlangıç şartları bütün düğümler için girişteki şartlar olan P=100 kPa, T=300K, M=0.96 olarak alınmıştır.



Şekil 6.16 SOCBT için kullanılan hesaplama bölgesi



Şekil 6.17a 7° kuyruk açılı SOCBT mermisi etrafındaki eş-Mach sayısı eğrileri (Fu-Liang [37]'ın çözümü)



Şekil 6.17b 7° kuyruk açılı SOCBT mermisi etrafındaki eş-Mach sayısı eğrileri (EULER++'ın çözümü)

Fu ve Liang [37] ve EULER++'tan alınan eş-Mach sayısı eğrileri sırasıyla Şekil 6.17a ve 6.17b'de verilmiştir. Birisi merminin düz orta bölgesinde diğeri ise kuyruğunda olmak üzere iki adet dik şok oluşmuştur. Şoklardan önce sesüstü bölgeler vardır. İki şekil arasındaki ufak farklar bu çalışmada merminin kuyruk kısmının yuvarlatılmasından kaynaklanmaktadır.

BÖLÜM 7
DEĞERLENDİRME

7.1 ÖZET

Bu çalışmada EULER++ adında, zamanla değişen, sıkıştırılabilen akışlar için üç boyutlu bir Euler çözücüsü geliştirilmiştir. Korunmuş haldeki Euler denklemleri hücre köşeli sonlu hacim metodu ve Ni [18]'den alınan ikinci dereceden hassas, tek adımlı Lax-Wendroff şeması kullanılarak ayrıştırılmıştır.

Zamanda ilerlemeli bu şema, yerel zaman dilimi kullanılarak hızlandırılmıştır. Süreksizlik bölgelerindeki salınımlar yapay sönümleme tekniği ile giderilmeye çalışılmıştır. İki çeşit sınır şartı kullanılmıştır. Biri Ni [18]'nin dağıtma formüllerinin sınırlara doğrudan uygulanması, diğeri ise tahmin-düzeltme mantığı ile kullanılan karakteristik sınır şartıdır. Her ikisi de uzak bölge sınırlarında yansıtmayan özelliktedir.

EULER++ C++ diliyle yazılmıştır. Esasında bu çalışmanın önemli amaçlarından biri C++'ın nesneye yönelik programlama özelliklerinin bir sonlu eleman metoduna adaptasyonuydu. C++'ın bu amaca en uygun dil olduğu görülmüştür. Program algoritmasında bölge, blok, hücre, düğüm v.b. fiziksel nesneleri ifade eden sınıflara yer verilmiştir. Bu sayede program anlaşılması kolay, birbirinden bağımsız parçalara bölümüş ve ileride yapılması tasarlanan geliştirmelere açık hale getirilmiştir.

EULER++ üç değişik test durumunda denenmiştir. Bunlardan ilki bir kanal içerisindeki Ni-tümseği üzerindeki sesaltı, sescivarı ve sesüstü akışlardır. Bu test durumunun seçilmesindeki amaç, bu çalışmanın temelini oluşturan Ni [18]'nin çalışmasında da bu test durumunun çözülmüş olmasıdır. Böylece programın doğruluğu kendisine çok benzer başka bir programla kıyaslanarak ölçülmüştür. İkinci test durumu sıfır hücum açısındaki NACA0012 kanat profilidir. Bu test durumu üç değişik giriş Mach sayısı için çözülmüştür. Bu test durumu ise SAD uygulamalarında çok fazla başvurulan

bir test durumu olmasından ötürü seçilmiştir. Sonuçlar çok güvenilir kaynaklarınkilerle karşılaştırılmıştır. Son test durumunda ise sıfır hücum açısındaki SOCBT mermisi etrafındaki üç boyutlu eksenel simetrik akış incelenmiştir. Bu test durumu programın üç boyutlu problemleri çözmedeki başarısını görmek amacıyla seçilmiştir.

Elde edilen bütün sonuçlar literatürde bulunan sonuçlarla iyi derecede benzeşmektedir. Bu da EULER++'ın doğru ve güvenilir sonuçlar verdiğini göstermektedir.

7.2 GELECEKTE YAPILABİLECEK ÇALIŞMALAR

EULER++'ın nesneye yönelik yapısı ileride yapılabilecek değişikliklere son derece uygundur.

Kullanılan şema çoklu ağ kullanımına müsaittir [18]. Bu yapıldığı takdirde yakınsama zamanları çok daha kısaltılabilir. Diğer bir alternatifte, daha zor olmasına karşın, zamanla değişen ağ kullanmaktır. Böylece şok bölgelerindeki ağ yapısı otomatik olarak sıklaşacak ve daha hassas sonuçları daha kısa sürelerde elde etmek mümkün olacaktır.

EULER++ süreksizlik bölgelerinde yapay sönümleme tekniğini uygulamaktadır. Fiziksel olmayan bu yöntem sonuçlarda bir miktar hataya yol açmaktadır. Bunun önlemek için Lax-Wendroff yerine yapay sönümlemeye ihtiyaç duyulmayan, TVD gibi bir şema programın ana yapısı bozulmadan adapte edilebilir.

Program düzensiz ağlarda da çözüm yapabilecek şekilde değiştirilebilir. Böylece ağ oluşturmak için harcanan zaman ve çaba azaltılmış olur.

Programın yapısı parelel hesaplama mantığına uygundur. Bu yapıldığı takdirde daha büyük ve gerçek problemleri çözme imkanı doğar.

Son olarak EULER++'ın nesneye yönelik yapısından yola çıkarak türbulans modeli de içeren bir Navier-Stokes çözücüsü geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Kutler, P., "A Perspective of Theoretical and Applied CFD", AIAA Journal, Vol.23, pp.328-341, March 1985.

[2] Hirsh, C., "Numerical Computation of Internal and External Flows", Vol.1-2, John Wiley and Sons, New York, 1988-1990.

[3] Anderson J.D., "Computational Fluid Dynamics - The Basics with Applications", McGraw Hill, 1995, Singapore.

[4] Hoffman, K.A., "Computational Fluid Dynamics", Vol.1-2, Engineering Education System Publication, Austin, Texas, USA, 1989.

[5] Thompson, J.F., "A Survey of Grid Generation Techniques in CFD", AİAA Journal, Vol.22, pp.1505-1523, 1984.

[6] Kinoglu, F.E., "Three-Dimensional Euler Solver with Finite Volume Method For Internal Flows", M.Sc. Thesis, METU, September 1995.

[7] Strang, G., and Fix, G., "An Analysis of Finite Element Method", Prentice Halls, Englewood Clifts, NJ, 1973.

[8] Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method", 3rd. edn., McGraw Hill, New York, 1977.

[9] Chung, T.J., "Finite Element Analysis in Fluid Dynamics", McGraw Hill, New York, 1978.

[10] Dick, E., "An Introduction to Computational Fluid Dynamics", Von Karman Institute, Lecture Series 1989-02, January 1989.

[11] Erturk, E., "A Numerical Experimentation Of The Boundary Conditions For a Two Dimensional Multi-Grid Euler Solver Using Finite Volume Method For Internal Flows", M.Sc. Thesis, METU, July 1995.

[12] McDonald, P.W., "The Computation of Transonic Flow Through Two-Dimensional Gas Turbine Cascades", ASME Paper, 71-GT-89, 1971.

[13] MacCormack, R.W., and Paullay, A.J., "Computational Efficiency Achieved by Time Splitting of Finite Difference Operators", AIAA Paper, 72-154, SanDiego, 1972.

[14] Lax, P.D., and Wendroff, B., "Systems of Convection Laws", Comm. Pure and Applied Mathematics, Vol.13, pp.217-237, 1960.

[15] Ritchmyer, R.D., and Morton, K.W., "Difference Methods for Initial Value Problems", 2nd edn., John Wiley and Sons, New York, 1967.

[16] MacCormack, R.W., "The Effect of viscosity in Hypervelocity Impact Cratering", AIAA Paper, 69-354, 1969.

[17] Lerat, A., and Peyret, R. "Non centered schemes and shock propagation problems", Computers and Fluids, Vol.2, pp.35-52, 1974.

[18] Ni, R. N., "A Multiple-Grid Scheme for Solving the Euler Equations", AIAA Journal, Vol.20, pp.1565-1571, 1982.

[19] Von Neumann, J., and Ritchmyer, R.D., "A Method for the Numerical Calculations of Hydrodynamical Shocks", Journal Mathematical Physics, Vol.21, 1950.

[20] Jameson, A., Schmidt, W., and Turkel, E., "Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time Stepping Schemes", AIAA Paper81-1259, 14th Fluid and Plasma Dynamics Conference, California, 1981.

[21] Moitra, A., "Numerical Solution of the Euler Equations for High Speed, Blended Wing-Body Configurations", AIAA Paper 85-0123, 23rd Aerospace Science Meeting, Nevada, 1985.

[22] Beam, R.M., and Warming, R.F., "An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations", AIAA Journal, Vol.16, pp.393-402, 1978.

[23] Pulliam, T.H., and Chaussee, D.S., "A Diagonal Form of an Implicit Approximate Factorization Algorithm", AIAA Journal, Vol.24, pp.1734-1743, 1986.

[24] Steger, J.L., and Warming, R.F., "Flux Vector Splitting of the Inviscid Gas Dynamics Equations with Applications to Finite Difference Methods", Journal of Computational Physics, Vol.40, pp.263-293, 1981.

[25] Van Leer, B., "Flux Vector Splitting for the Euler Equations", Proceedings of the 8th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics", Springer Verlag, Berlin, 1982.

[26] Godunov, S.K., "A Difference Scheme for Numerical Computation of Discontinuous Solution of Hydrodynamic Equations", Math. Sbornik, Vol.47, pp.271-306 (in Russian) Translated by US Joint Publ. Res. Service, JPRS 722b, 1969.

[27] Harten, A., and Hyman, J.M., "Self Adjusting Grid Methods for One-Dimensional Hyperbolic Conservation Laws", Journal of Computational Physics, Vol.50, pp.235-269, 1983.

[28] Harten, A., "High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws", Journal of Computational Physics, Vol.49, pp.357-393, 1983.

[29] Jameson, A., and Lax, P.D. "Conditions for the Construction of Construction of TVD Difference Schemes", Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of Princeton, MAE Report 1650, 1984.

[30] Harten, A., and Osher, S., "Uniformly High-Order Accurate Nonoscillatory Schemes I", SIAM Journal Numerical Analysis, Vol.21, pp.279-309, 1987.

[31] Moretti, G., "A Physical Approach to the Numerical Treatment of Boundaries in Gas Dynamics", In Numerical Boundary Condition Procedures, NASA CP 2201, pp.73-96, NASA Ames Research Center, 1981.

[32] Engquist, B., and Majda, A., "Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves", Mathematics of Computation, Vol.31, pp.629-651, 1977.

[33] Gottlieb, D., and Turkel, E., "Boundary Conditions for Multistep Finite Difference Methods for Time Dependent Equations", Journal of Computational Physics, Vol.26, pp.181-196, 1978.

[34] Chakravarty, S.R., "Euler Equations - Implicit Schemes and Boundary Conditions", AIAA Journal, Vol.21, pp.699-706, 1983.

[35] Oktay, E., "A Cell Vertex Method for Three Dimensional Inviscid Internal Flows", Ph.D. Thesis, METU, November 1991.

[36] Hemker, P.W., and Zeeuw, P.M., "BASIS3 A Data Structure for 3-Dimensional Sparse Grids", presented in "Euler and Navier-Stokes Solver Using Multi-Dimensional Upwind Schemes and Multigrid Acceleration" edited by Deconinck, H., and Koren, B., 1997.

[37] Fu, J.K., and Liang, S.M., "Drag Reduction for Turbulent Flow over a Projectile: Part I", Journal of Spacecraft and Rockets, Vol.31, No.1, pp.85-92, 1994.

[38] Sturek, B.S., Nietubicz, C.J., Sahu, J., and Weinacht, P., "Applications of Computational Fluid Dynamics of Army Projectiles", Journal of Spacecraft and Rockets, Vol.31, No.2, pp.186-199, 1994.

[39] Kordulla, W., and Vinokur, M., "Efficient Computation of Volume in Flow Predictions", AIAA Journal, Vol.21, pp.917-918, 1983.

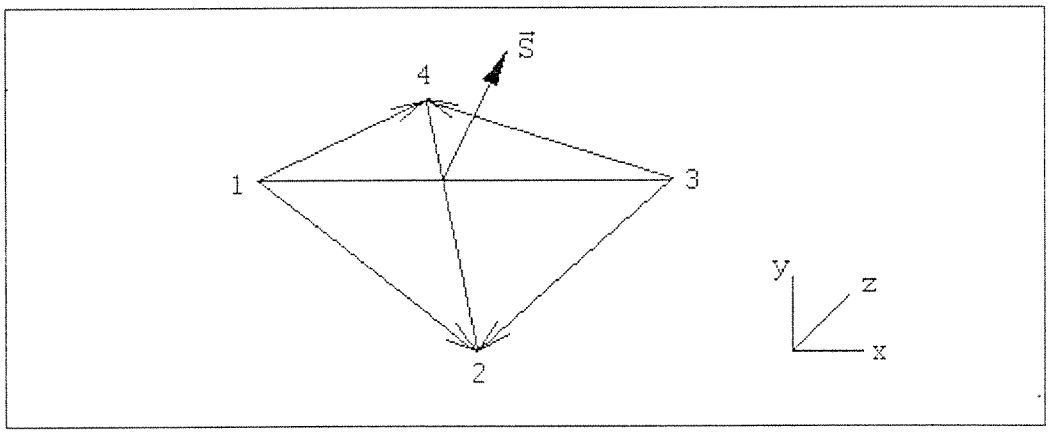
[40] Sert, C., "Development of a Three-Dimensional Object Oriented Euler Solver Using C++ Computer Language", M. Sc. Thesis, Middle East Technical University, June 1998.

EK A

ALAN VEKTÖRÜ ve HACİM HESAPLARI

A.1 ALAN VEKTÖRÜ HESABI

Amaç dikolmayan bir yüzeyin alan vektörünü üç adet kartezyen bileşenlerine ayırmaktır. Şekil A.1'deki vektörü ele alalım.



Şekil A.1 Alan vektörünün tanımı

Alan vektörü vectorü $\vec{S}$ şu şekilde hesaplanır.

$$\zeta(x, y, z) = \text{sabit} \tag{A.1}$$

Vektör çarpımları yapıldığında ise

$$\vec{S} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \left[(y_1-y_3)(z_4-z_2)-(y_4-y_2)(z_1-z_3)\right].\vec{i} + \\ \left[(z_1-z_3)(x_4-x_2)-(z_4-z_2)(x_1-x_3)\right].\vec{j} + \\ \left[(x_1-x_3)(y_4-y_2)-(x_4-x_2)(y_1-y_3)\right].\vec{k} \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

ya da basitçe

$$\vec{S} = -\frac{1}{2}\left[S_x.\vec{i}+S_y.\vec{j}+S_z.\vec{k}\right] \tag{A.3}$$

şeklinde ifade edilir. Kartezyen bileşenler ise

$$\begin{aligned} S_x &= -\frac{1}{2}\left[(y_1-y_3)(z_4-z_2)-(y_4-y_2)(z_1-z_3)\right] \\ S_y &= -\frac{1}{2}\left[(z_1-z_3)(x_4-x_2)-(z_4-z_2)(x_1-x_3)\right] \\ S_z &= -\frac{1}{2}\left[(x_1-x_3)(y_4-y_2)-(x_4-x_2)(y_1-y_3)\right] \end{aligned} \tag{A.4}$$

olmuş olur. Şimdi Denklem (3.18)'de yer alan alan vektörleri Şekil 3.12e bakılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\vec{S}_1 = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \left[(y_5-y_4)(z_8-z_1)-(y_8-y_1)(z_5-z_4)\right].\vec{i} + \\ \left[(z_5-z_4)(x_8-x_1)-(z_8-z_1)(x_5-x_4)\right].\vec{j} + \\ \left[(x_5-x_4)(y_8-y_1)-(x_8-x_1)(y_5-y_4)\right].\vec{k} \end{bmatrix}$$

$$\vec{S}_2 = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \left[(y_6-y_3)(z_7-z_2)-(y_7-y_2)(z_6-z_3)\right].\vec{i} + \\ \left[(z_6-z_3)(x_7-x_2)-(z_7-z_2)(x_6-x_3)\right].\vec{j} + \\ \left[(x_6-x_3)(y_7-y_2)-(x_7-x_2)(y_6-y_3)\right].\vec{k} \end{bmatrix}$$

$$\vec{S}_3 = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \left[(y_5-y_2)(z_1-z_6)-(y_1-y_6)(z_5-z_2)\right].\vec{i} + \\ \left[(z_5-z_2)(x_1-x_6)-(z_1-z_6)(x_5-x_2)\right].\vec{j} + \\ \left[(x_5-x_2)(y_1-y_6)-(x_1-x_6)(y_5-y_2)\right].\vec{k} \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

$$\vec{S}_4 = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \left[(y_8-y_3)(z_4-z_7)-(y_4-y_7)(z_8-z_3)\right].\vec{i} + \\ \left[(z_8-z_3)(x_4-x_7)-(z_4-z_7)(x_8-x_3)\right].\vec{j} + \\ \left[(x_8-x_3)(y_4-y_7)-(x_4-x_7)(y_8-y_3)\right].\vec{k} \end{bmatrix}$$

$$\vec{S}_5 = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \left[(y_1-y_3)(z_4-z_2)-(y_4-y_2)(z_1-z_3)\right].\vec{i} + \\ \left[(z_1-z_3)(x_4-x_2)-(z_4-z_2)(x_1-x_3)\right].\vec{j} + \\ \left[(x_1-x_3)(y_4-y_2)-(x_4-x_2)(y_1-y_3)\right].\vec{k} \end{bmatrix}$$

$$\vec{S}_6 = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \left[(y_5-y_7)(z_8-z_6)-(y_8-y_6)(z_5-z_7)\right].\vec{i} + \\ \left[(z_5-z_7)(x_8-x_6)-(z_8-z_6)(x_5-x_7)\right].\vec{j} + \\ \left[(x_5-x_7)(y_8-y_6)-(x_8-x_6)(y_5-y_7)\right].\vec{k} \end{bmatrix}$$

Denklem (3.19)'da kullanılan, $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ ve $\vec{A}_3$ diye adlandırılan, üç adet daha alan vektörü vardır. Bu vektörler sırasıyla Şekil A.2 'deki a-e-f-b, b-f-g-c ve d-e-f-g yüzlerine aittirler. Bu vektörler kontrol hacminin f köşesinden geçen k-l-m-n yüzeylerine ait vektörlerin dörtte birine eşit kabul edilebilirler. Örneğin $\vec{A}_1$

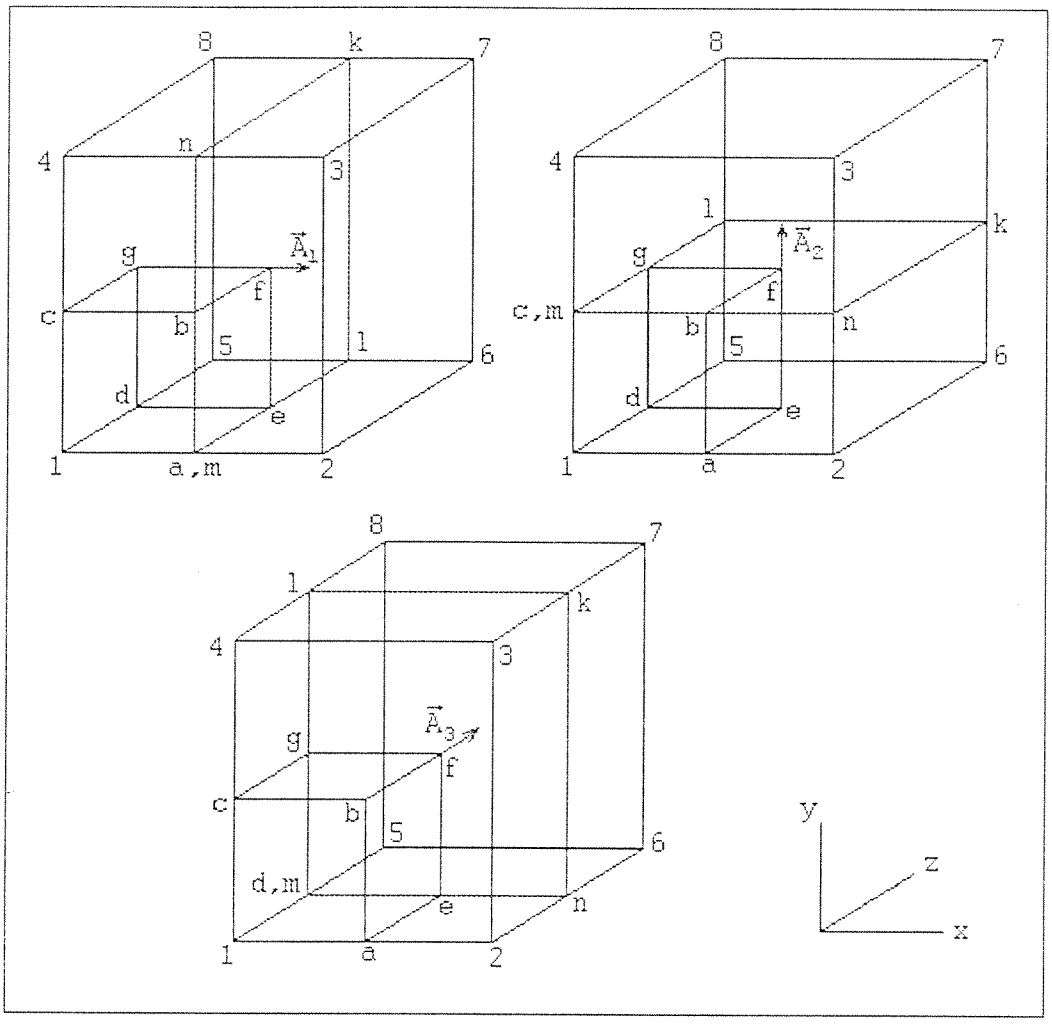
$$\vec{A}_1 = \frac{1}{4}\vec{S}_{klmn} = \frac{1}{4}\left[(\vec{r}_{ln}\times\vec{r}_{km})\right] \tag{A.6}$$

ya da Hücre I'in köşelerini kullanarak

$$\vec{A}_1 = \frac{1}{4}\left[\frac{(\vec{r}_5+\vec{r}_6)-(\vec{r}_3+\vec{r}_4)}{2}\times\frac{(\vec{r}_7+\vec{r}_8)-(\vec{r}_1+\vec{r}_2)}{2}\right] \tag{A.7}$$

şeklinde yazılabilir.

$\vec{A}_2$ ve $\vec{A}_3$ vektörleri de benzer şekilde ifade edilebilir. Denklem (3.21)'de kullanılan kartesyen bileşenleri ise aşağıdaki gibi yazılırlar.



Şekil A.2 $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ and $\vec{A}_3$ alan vektörleri

$$A_{1,x} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}(y_8+y_7-y_1-y_2)(z_5+z_6-z_4-z_3)- \\ (z_8+z_7-z_1-z_2)(y_5+y_6-y_4-y_3)\end{bmatrix}$$

$$A_{1,y} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}(x_8+x_7-x_1-x_2)(z_5+z_6-z_4-z_3)- \\ (z_8+z_7-z_1-z_2)(x_5+x_6-x_4-x_3)\end{bmatrix}$$

$$A_{1,z} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}(x_8+x_7-x_1-x_2)(y_5+y_6-y_4-y_3)- \\ (y_8+y_7-y_1-y_2)(x_5+x_6-x_4-x_3)\end{bmatrix}$$

$$A_{2,x} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}(y_8+y_5-y_3-y_2)(z_1+z_4-z_6-z_7)- \\ (z_8+z_5-z_3-z_2)(y_1+y_4-y_6-y_7)\end{bmatrix}$$

$$A_{2,y} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}(x_8+x_5-x_3-x_2)(z_1+z_4-z_6-z_7)- \\ (z_8+z_5-z_3-z_2)(x_1+x_4-x_6-x_7)\end{bmatrix} \qquad (A.8)$$

$$A_{3,z} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}(x_8+x_5-x_3-x_2)(y_1+y_4-y_6-y_7)- \\ (y_8+y_5-y_2-y_2)(x_1+x_4-x_6-x_7)\end{bmatrix}$$

$$A_{3,x} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}(y_1+y_5-y_3-y_7)(z_4+z_8-z_2-z_6)- \\ (z_1+z_5-z_3-z_7)(y_4+y_8-y_{24}-y_6)\end{bmatrix}$$

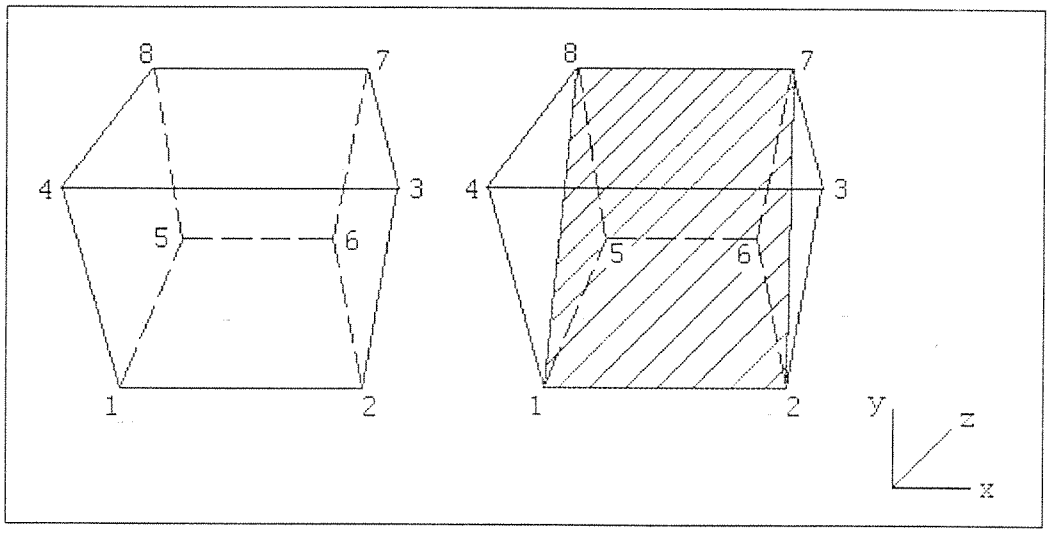
$$A_{3,y} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}(x_1+x_5-x_3-x_7)(z_4+z_8-z_2-z_6)- \\ (z_1+z_5-z_3-z_7)(x_4+x_8-x_2-x_6)\end{bmatrix}$$

$$A_{3,z} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}(x_1+x_5-x_3-x_7)(y_4+y_8-y_2-y_6)- \\ (y_1+y_5-y_3-y_7)(x_4+x_8-x_2-x_6)\end{bmatrix}$$

A.2 HÜCRE HACMİ HESABI

Sonlu hacim metodunu kullanılan SAD uygulamalarında Şekil A.3'te görülen sekiz rastgele köşeden oluşan hacimlerin hesaplanmaları gerekir. Özellikle zamanda hassas olarak ilerlemek için geometrik hataların en aza indirilmesi, yani hacimlerin doğru olarak hesaplanması önemlidir.

Şekil A.3'teki hücrenin hacmini hesaplamak için Kordulla ve Vinokur [39] tarafından önerilen şekilde hücre ikiye bölünmüştür. Her bir parçada 1-5-6-7, 1-5-8-7, 1-6-2-7, 1-4-8-7, 1-2-3-7, 1-4-3-7 şeklinde üçer adet piramitten oluşur. Hücrenin hacmi bu altı piramidin hacimlerinin toplamına eşittir.



Şekil A.3 Bir hücrenin hacim hesabı için bölünmesi

$$\Delta V = \frac{1}{6}\vec{r}_{71}.\begin{bmatrix}(\vec{r}_{61}\times\vec{r}_{51})+(\vec{r}_{51}\times\vec{r}_{81})+(\vec{r}_{21}\times\vec{r}_{61})+\\(\vec{r}_{31}\times\vec{r}_{21})+(\vec{r}_{41}\times\vec{r}_{31})+(\vec{r}_{81}\times\vec{r}_{41})\end{bmatrix}$$

$$= \vec{r}_{71}.\left[(\vec{r}_{61}\times\vec{r}_{52})+(\vec{r}_{81}\times\vec{r}_{45})+(\vec{r}_{31}\times\vec{r}_{24})\right] \qquad (A.9)$$

$$= 2\,\vec{r}_{71}.(\vec{S}_{1234}+\vec{S}_{1562}+\vec{S}_{1485})$$

Burada

$$\vec{r}_{71} = (x_7 - x_1)\,\vec{i} + (y_7 - y_1)\,\vec{j} + (z_7 - z_1)\,\vec{k}$$

ve $\vec{S}_{1234}$, $\vec{S}_{1562}$, $\vec{S}_{1485}$ alan vektörleridir.

O halde Şekil 3.1'deki Hücre I'in hacmi şu şekilde hesaplanabilir.

$$\Delta V_I = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}(x_7 - x_1).(S_{1,x}+S_{3,x}+S_{5,x})+\\(y_7 - y_1).(S_{1,y}+S_{3,y}+S_{5,y})+\\(z_7 - z_1).(S_{1,z}+S_{3,z}+S_{5,z})\end{bmatrix} \qquad (A.10)$$

$S_{1,x},\ldots, S_{5,z}$ Denklem(A.5)'te verilmiştir.

Bu yöntem sadece daha önce hesaplanan alan vektörleri kullanıldığından çok verimlidir [39].

EK B

YEREL YÜZEY KOORDİNATLARININ HESABI

B.1 GENEL

Bölüm 4'te karakteristik sınır şartı uygulanırken sınır düğümlerindeki hız vektörü normal, teğet ve binormal bileşenlerine ayrılmıştır. Ayrıca duvar sınır şartı uygulanırken de normal hız sıfıra eşitlenmiştir. Bütün bunlar sınırlardaki normal, teğet ve binormal birim vektörlerinin kartezyen koordinattaki $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ birim vektörleri cinsinden ifadesini gerektirir. Bu da sınırlardaki düğümlerde Jacobian ve metrik hesaplanmasını ifade eder ki bu da zahmetli bir iştir. Bu proses ayrıca fiziksel bölgeyi, (x,y,z), hesaplama bölgesine, (ξ,η,ζ), dönüştürmek olarak ta bilinir.

B.2 YEREL YÜZEY KOORDİNATLARININ TANIMI

Şekil B.1'de verilen yüzeyi ele alınırsa, bu yüzey

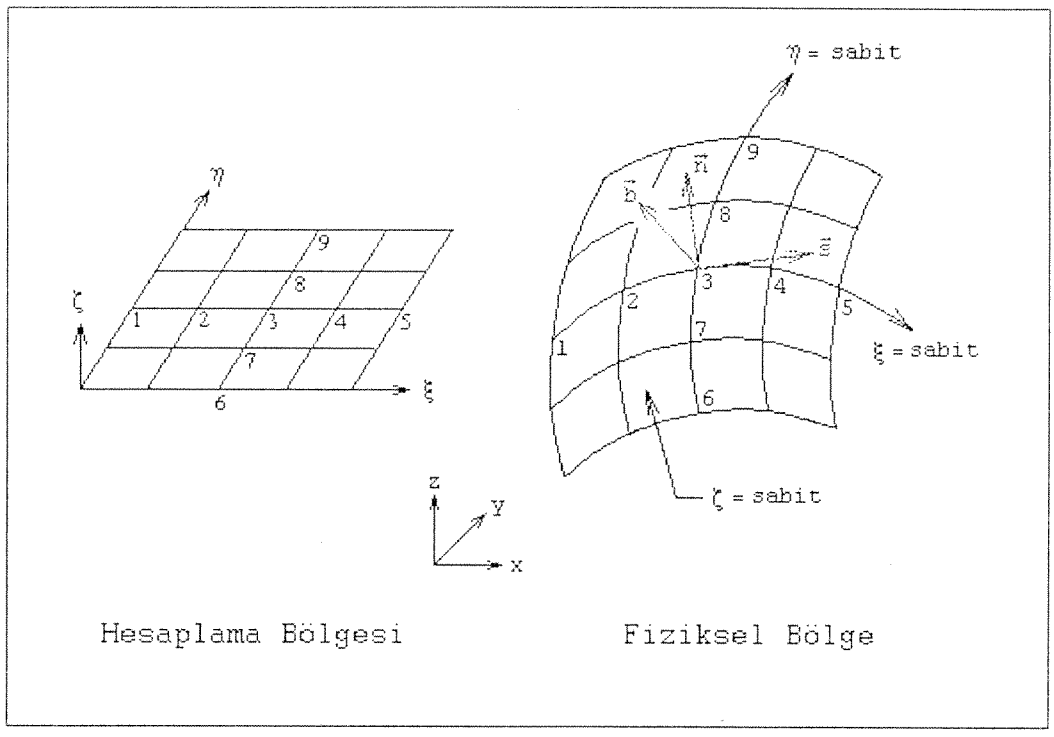
$$\zeta(x,y,z) = \text{sabit} \tag{B.1}$$

şeklinde ifade edilir.

Şekil B.1'de $\bar{n}$ birim normal vektör, $\bar{s}$ birim teğet vektör, $\bar{b}$ ise birim binormal vektördür.

Birim normal vektör şu şekilde hesaplanır.

$$\bar{n} = \frac{\bar{\nabla}\zeta}{\bar{\nabla}\zeta} = \frac{\zeta_x\bar{i} + \zeta_y\bar{j} + \zeta_z\bar{k}}{\sqrt{\zeta^2{}_x + \zeta^2{}_y + \zeta^2{}_z}} \tag{B.1}$$



Şekil B.1 Yerel Yüzey Koordinatları

Burada ζ_x, ζ'nın x'e göre birinci türevidir. Diğer benzer terimlerde aynı mantık kullanılmıştır.

ξ = sabit çizgisine teğet olan birim teğet vektör

$$\bar{s} = \frac{\frac{d\bar{r}}{d\xi}}{\frac{d\bar{r}}{d\xi}} = \frac{x_\xi \bar{i} + y_\xi \bar{j} + z_\xi \bar{k}}{\sqrt{x^2{}_\xi + y^2{}_\xi + z^2{}_\xi}} \tag{B.2}$$

denklemiyle verilir. Burada $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ herhangi bir sınırda yer alan bir düğüm noktasının pozisyon vektörüdür.

Hem birim normal, hem de bitrim teğet vektöre dik olan birim binormal vektör ise şöyle hesaplanır.

$$\bar{b} = \frac{\bar{n} \times \bar{s}}{\bar{n} \times \bar{s}} \tag{B.3}$$

Birim normal ve teğet vektörleri

$$\vec{n} = n_x\vec{i} + n_y\vec{j} + n_z\vec{k}$$

$$\vec{s} = s_x\vec{i} + s_y\vec{j} + s_z\vec{k} \tag{B.4}$$

şeklinde bileşenlerine ayırırsak, Denklem (B.3) aşağıdaki şekli alır.

$$\vec{b} = \frac{\left(n_y s_z - n_z s_y\right)\vec{i} + \left(s_x n_z - n_x s_z\right)\vec{j} + \left(n_x s_y - s_x n_y\right)\vec{k}}{\sqrt{\left(n_y s_z - n_z s_y\right)^2 + \left(s_x n_z - n_x s_z\right)^2 + \left(n_x s_y - s_x n_y\right)^2}} \tag{B.5}$$

Birim normal, teğet ve binormal vektörler sırasıyla Denklem (B.1), (B.2) ve (B.3)'te verilmiştir. Ancak üçü de metrikler, ξ_x, η_x, ζ_x, ξ_y, η_y, ζ_z, ξ_z, η_z, ζ_z ve x_ξ, y_ξ, z_ξ, x_η, y_η, z_η, x_ζ, y_ζ, z_ζ, cinsinden ifade edilmiştir. O halde metriklerin hesaplanmaları gerekir.

B.3 JACOBIAN VE METRİKLERIN HESABI

Birçok durumda metriklerin analitik hesaplanmaları mümkün olmadığından sayısal yollarla hesaplanmaları gerekir. Şekil B.1'de görüldüğü üzere hesaplama bölgesinde her üç doğrultuda da düğüm aralıkları eşit olduğundan, x_ξ, y_ξ, z_ξ, x_η, y_η, z_η, x_ζ, y_ζ, z_ζ metriklerinin türevleri sonlu fark metoduyla kolayca hesaplanabilir. Bu çalışmada ikinci derece merkezi, ileri ve geri farklar kullanılmıştır. Örneğin Şekil B.1'deki düğümler için türevlerin bazıları

$$\left(x_\xi\right)_3 = \frac{x_4 - x_2}{2\Delta\xi}, \quad \left(x_\xi\right)_1 = \frac{-x_3 + 4x_2 - 3x_1}{2\Delta\xi}, \quad \left(x_\xi\right)_5 = \frac{3x_5 - 4x_4 + 4x_3}{2\Delta\xi} \tag{B.6}$$

ya da

$$\left(y_\eta\right)_3 = \frac{y_8 - y_7}{2\Delta\eta}, \quad \left(y_\eta\right)_6 = \frac{-y_3 + 4y_7 - 3y_6}{2\Delta\eta}, \quad \left(y_\eta\right)_9 = \frac{3y_9 - 4y_8 + 4y_3}{2\Delta\eta} \tag{B.7}$$

şeklinde yazılır. Diğer düğümler içinde türevler benzer şekilde alınır. Burada $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ ve $\Delta\zeta$ sabit düğüm aralıklarıdır ve

$$\Delta\xi = \frac{1}{(nI-1)} \quad , \quad \Delta\eta = \frac{1}{(nJ-1)} \quad , \quad \Delta\zeta = \frac{1}{(nK-1)} \tag{B.8}$$

şeklinde hesaplanır. nI, nJ, nK sırasıyla x, y, z doğrultularındaki düğüm sayılarıdır.

Metrikler Denklem (B.6), (B.7), v.b'deki türevler cinsinden ifade edilebilirlerse hesaplanabilirler. Metrikler ve bu türevler arasındaki ilişkiyi Jacobian kurar. Jacobianın hesabı aşağıdaki gibidir.

$$J = \frac{1}{x_\xi(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) - x_\eta(y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)} \tag{B.9}$$

Metrikler ise

$$\begin{aligned}
\xi_x &= J(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) \\
\xi_y &= J(x_\zeta z_\eta - x_\eta z_\zeta) \\
\xi_z &= J(x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta) \\
\eta_x &= J(y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta) \\
\eta_y &= J(x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi) \\
\eta_z &= J(x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta) \\
\zeta_x &= J(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi) \\
\zeta_y &= J(x_\eta z_\xi - x_\xi z_\eta) \\
\zeta_z &= J(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)
\end{aligned} \tag{B.10}$$

olarak bulnurlar. Bu metrikler Denklem (B.1), (B.2) ve (B.3)'te yerlerine konulursa, normal, teğet ve binormal birimvektörler olan, $\bar{n}$, $\bar{s}$, $\bar{b}$ kartezyen koordinattaki birim vektörler olan $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ cinsinden hesaplanmış olur.

Son olarak $\bar{V}$ hız vektörü normal, teğet ve binormal bileşenlerine aşağıdaki gibi ayrılır.

$$\bar{V} = u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k} \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned} V_n &= \bar{V} \cdot \bar{n} = \bar{V} \cdot \left(n_x \bar{i} + n_y \bar{j} + n_z \bar{k}\right) = un_x + vn_y + wn_z \\ V_s &= \bar{V} \cdot \bar{s} = \bar{V} \cdot \left(s_x \bar{i} + s_y \bar{j} + s_z \bar{k}\right) = us_x + vs_y + ws_z \\ V_b &= \bar{V} \cdot \bar{b} = \bar{V} \cdot \left(b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}\right) = ub_x + vb_y + wb_z \end{aligned} \tag{B.12}$$

Bu bileşenler artık Bölüm 4'teki sınır şartlarında kullanılabilirler.

BİBLİYOGRAFİK BİLGİ FORMU

1- Proje No: MİSAG-84 2- Rapor Tarihi: 15 Haziran 1998

3- Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri: 8 Nisan 1996- 8 Ekim 1998

4- Projenin adı: C++ Derleyicisi Kullanılarak Üç Boyutlu Sıkıştırılabilen Akımlar için Euler Çözücüsünün Geliştirilmesi

5- Proje Yürütücüsü ve Yardımcı Araştırıcılar: Prof. Dr. M. Halûk AKSEL

6- Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi: Makina Mühendisliği Bölümü
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
06531 ANKARA

7- Destekleyen Kuruluş(ların) Adı ve Adresi:

8- Öz

Sıkıştırılabilen akışların zamanla değişmeyen çözümlerini bulmak için EULER++ adında, üç boyutlu, zamanla değişen Euler denklemlerini çözen bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Korunmuş haldeki Euler denklemleri, ikinci dereceden hassas, tek adımlı Lax-Wendroff şeması ve hücre köşeli sonlu hacim metodu kullanılarak sayısal olarak ayrıştırılmıştır. Belirli zaman ilerlemeli bu çözümü hızlandırabilmek için bölgesel zaman adımı kullanılmıştır. Şok bölgelerindeki salınımları düzenlemek için yapay sönümleme uygulanmıştır. Uzak bölge sınırlarında iki çesit sınır şartı kullanılmıştır. Birincisi Ni tarafından geliştirilen dağıtma formüllerinin doğrudan uygulanması, ikicisi ise karakteristik sınır şartıdır. Bunların her ikiside yansıtmayan sınır şartlarıdır. Duvar sınırlarında da yine karakteristik sınır şartı uygulanmıştır.

Programlama dili olarak, SAD (Sayısal Akışkanlar Dinamiği) uygulamalarında fazla tercih edilmeyen, C++ kullanılmıştır.

Veri girişini daha güvenli ve kolay hale getirmek için bir kullanıcı arabirimi geliştirilmiştir. Bu arabirim sayesinde kullanıcının daha önceden belirlenen verilerin değerlerini, ve çözümün yakınsamasını her aşamada izleyebilmesi sağlanmıştır.

Programın geçerliliği üç test durumu için denenmiştir. Bunlar, Ni-tümseği üzerindeki sesaltı, sescıvarı ve sesüstü kanal akışı, üç değişik giriş Mach sayısı için sfır hücum açısındaki NACA0012 kanat profili etrafındaki akış ve SOCBT mermisi etrafındaki tümüyle üç boyutlu, eksenel simetrik akışlardır.

Anahtar Kelimeler: Euler Denklemleri, Hücre-Köşeli Sonlu Hacim Metodu, Lax-Wendroff Şeması, Karakteristik Sınır Şartları, C++, Nesneye Yönelik Proglamlama

9- Proje ile ilgili Yayın/Tebliğlerle ilgili Bilgiler

10- Bilim Dalı:
Doçentlik B. Dalı Kodu: 625.04.03 ISIC Kodu:
Uzmanlık Alanı Kodu: 625.04.03

11- Dağıtım(*): ☐ Sınırlı ☐ Sınırsız

12- Raporun Gizlilik Dururmu: ☐ Gizli ☐ Gizli Degil

(*) *Projenizin Sonuç Raporunun ulaştırılmasını istediğiniz kurum ve kuruluşları ayrıca belirtiniz.*

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNİK ARAŞTIRMA KURUMU
MAKİNA, KİMYASAL TEKNOLOJİLER
MALZEME VE İMALAT SİSTEMLERİ ARAŞTİRMA GRUBU
PROJE NO : 84

C++ DERLEYİCİSİ KULLANILARAK ÜÇ BOYUTLU SIKIŞTIRILABİLEN AKIMLAR İÇİN EULER ÇÖZÜCÜSÜNÜN GELİŞTİRİLMESİ

Proje Yürütücüsü : Prof. Dr. M. Halûk AKSEL

Haziran 1998, ANKARA