

WPA 2983
1996

537.8
E 73 e

TBA 6 323



537.8
E73 e

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNİK ARAŞTIRMA KURUMU
Matematik, Fizik ve Biyolojik Bilimler
Araştırma Grubu
Proje No : 323

ELEKTRİK VE ISIYI İLETEN
MANYETİK SİMETRİLİ MANYETO-TERMOVİZKOELASTİK
ANİZOTROP KATI CİSİM

Proje Yürütücüsü : Y.Prof.Dr. Yaşar ERSOY
ODTÜ Mühendislik Bilimleri
Bölümü, Ankara

Bu Proje Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma
Kurumu'nun desteği ile ODTÜ Mühendislik Fakültesi,
Mühendislik Bilimleri Bölümünde yapılmıştır.

Aralık 1977 , ANKARA

13753

ZDSN7

Bu alışma, TBTAK desteği ile O.D.T.Ü. olanakları kullanılarak tamamlanmıştır. Bu araştırmanın bir kısmının 9-12 Mayıs, 1978'de Florence-İtalya'da yapılacak 16. Uluslararası Manyetik Cisimler Kongresine (INTERMAG-16) sunulmasına izin veren TBTAK yetkililerine teşekkür ederim.

Y. PROF. DR. YAŞAR ERSOY

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
Abstrakt	iv
Abstract	iv
I. GİRİŞ	1
II. TEMEL DENKLEMLER VE SINIR KOŞULLARI	5
1. Denge (Balans) Denklemleri	7
2. Sınır Koşulları	8
III. BÜNYE BAĞINTILARI	10
IV. MANYETİK SİMETRİLİ ANİZOTROP KATININ DOĞRUSAL BÜNYE YASALARI	13
V. DENKLEMLERİN VE SINIR KOŞULLARININ DOĞRUSALLAŞTIRILMASI	16
1. Cismin Rijit Konumdaki Denklemler	19
2. Pertürbasyon Konumundaki Denklemler	23
VI. ÖZEL DURUMLAR, BAZI DÜŞÜNCE VE ÖNERİLER	27
1. Özel Durumlar	27
2. Bazı Düşünce ve Öneriler	29
Özet	31
Summary	32
KAYNAKLAR	33
EKLER	
A. DENGE DENKLEMLERİNİN TÜMLEV VE TÜREVSEL BİÇİMLERİ	36
B. CHU FORMÜLASYONU VE ELEKTROMANYETİK ALANLARIN DÖNÜŞÜMÜ	39
C. NORMAL VE TEĞET VEKTÖRLERİN AYRIŞTIRILMASI	41

ABSTRAKI

ELEKTRİK VE İSİYİ İLETEN, MANYETİK SİMETRİLİ MANYETO - TERMO VİZKOELASTİK ANİZOTROP KATI CİSİM

Bu çalışmada, elektrik ve ısıyı ileten manyetik simetrikli manyeto-termovizkoelastik anizotrop katı cismin yarı duruk (kuazi-statik) manyetik alan içerisinde sonlu şekil değiştirmesinin dinamik kuramı geliştirilmiştir. Olayı yönelten denklemler doğrusal olmadığından ve ayrıca karışık olduğundan, cismin sonsuz küçük şekil değiştirmesinde diğer alanlardaki değişmelerin de küçük olacağı varsayımı yapılarak bütün denklemler doğrusallaştırılmıştır. Böylece, sonlu rijit cisim hareketinin üzerine bindirilen (superimposed) sonsuz küçük şekil değiştirme ile denklemler iki gruba ayrılmıştır. Bu nedenle, pertürbasyon durumundaki denklemler, ilk gruptakiler bilindiğinde doğrusal olmaktadır. Daha sonra, genel anizotrop cisim için genelleştirilen kuramdan manyetik simetrisi olmayan, belirli simetrisi olan ve bazı alanların olmamasındaki özel durumlarıdaki etkileşimleri belirliyen yasaların elde edildiği gösterilmiştir.

ABSTRACT

ELECTRICALLY AND THERMALLY CONDUCTIVE MAGNETO-THERMO VISCOELASTIC ANISOTROPIC SOLIDS HAVING MAGNETIC SYMMETRY

A dynamic theory for electrically and thermally conductive magneto-thermovisco-elastic anisotropic solids possessing magnetic symmetry under finite deformations is developed for a quasi static magnetic field system. Since the governing equations are nonlinear and complicated, they are linearized by assuming infinitesimal deformations and small changes in other fields due to the deformation. Thus, the governing equations are decomposed into two groups by assuming the infinitesimal deformation superimposed on the finite rigid body motion of the material. Therefore, the equations in the perturbation state are linear provided that the fields in the first group are known. Further, the theory developed for general anisotropy and fields is applied to special cases, materials with special symmetries and materials not possessing magnetic symmetry and certain variables.

I. GIRIS

Elektromanyetik, mekanik ve ısı alanlarının dogrusal olmayan etkileşmeleriyle ilgili kuramsal çalışmalar son 20 yılda hızlı bir biçimde artmıştır. Araştırmacıların bu tür sorunlara yönelmesinin en belirgin nedeni, klâsik sonsuz küçük şekil değiştirme kuramı ile dogrusal olmayan bazı fiziksel etkileşmelerin açıklanmasının yanısıra, etkileşmelerin önemli olduğu bazı cisimlerin teknolojiye değişik biçimlerde kullanılmasıdır. Böylece, elektromanyetik etkileşmelerle ilgili yayınlar çok kısa zamanda sayıca artmasının yanısıra içerikliği bakımından değişik evrimlerden geçmiş olup, günümüzde de gelişmesini sürdürmektedir. Örneğin, ilk araştırmalar dielektrik ya da manyetik cisimlerin duruk kuramlarına yönelik iken, sonraları aynı türdeki cisimlerin yarı duruk (kuazi-statik) kuramlarına ve de dinamik kuramlarına yöneliktir. Oysa ki, mekanik ve ısı alanlarının dogrusal etkileşmeleriyle ilgili çalışmalar çok daha önceki yıllarda bilinmektedir.

19. yüzyılda, şekil değiştiren cismin mekanığı ilkin matematiksel fizigin bir dalı iken gelişerek elastisite kuramı adını aldığı gibi teknolojik uygulamasının çok yaygın olması nedeniyle hemen sonra aynı bilim dalı içerisinde gelişen mukavemet, plak ve yapı kuramları mühendislik içerisinde yer almıştır. Daha sonraki yıllarda ise, şekil değiştiren cisimlerin mekanığında plastisite, vizkoelastisite ve reoloji gibi diğer bilim dallarında hızlıca gelişmiştir. Tüm bu gelişmelerin yanısıra, fenomenolojik fizigin iki ya da daha çok dalları arasında etkileşmeleri içeren kuramların da önem kazandığı görülmektedir. Bunların içerisinde ilki ve en belirgin olanı ısı ve mekanik alanların etkileşmeleriyle ilgili olan termoelastisite kuramıdır. Ayrıca elektrik ve mekanik alanların bir arada etkileşmesinin en belirgin görüldüğü piezoelektrik olay 19. yüzyılın sonlarında bazı araştırmacılarca bilinmektedir. Diğer taraftan, etkileşmelerle ilgili teknolojik uygulamaların artması ise etkileşmelerle ilgili dogrusal olan ve de olmayan kuramsal çalışmaları hızlandırmıştır. Örneğin, piezoelektrik kristallerin (α -kuartz) dalga fi-litresi yapımında, sıklık (frekans) denetiminde, elektromanyetik-mekanik enerji dönüşümünde (transdürlerde), manyetik cisimlerin de benzer biçimde elektronik devrelerde, bilgisayarlarda, tam geciktirmeli iletim hatları (compact delay line) ve radyo antenle-rindeki kullanılmaları sayılabilir.

Kısaca yukarıda belirtilmeye çalışılan birbiriyle ilişkileri olan konulardaki tüm araştırmaları incelemek ve değerlendirmek oldukça karmaşık bir iş olduğu kanısın-dayım. İçlerinde yalnız elektromanyetik alanların, mekanik ve ısı alanlarıyla olan etkileşmelerini içeren kuramsal çalışmaları incelediğimizde bu araştırmaların da değişik boyutlara ulaştıkları görülmektedir. Aralarında bir karşılaştırılmanın yapıla-bilmesi ancak belirli gruplara ayırdıktan sonra olabilmektedir. Yoksa herbir çalışmada diğeri-ne göre değişik ayrıntılar vardır. Aşağıda belirtilen tüm ayrıntıları içeren ge-nel bir kuram ise daha geliştirilmemiştir.

Böylece, literatürdeki ilgili araştırmaları aşağıdaki biçimlerde gruplandırmak mümkündür:

1. İncelenen cismin elektromanyetik özelliklerine göre,

- a) Dielektrik cisimler [1-11]
- b) Manyetik cisimler [12-19]
- c) İletken cisimler [20-23]
- d) Elektromanyetik cisimler [24-29]
- e) Manyeto-elektrik cisimler¹ [30].

2. Fiziksel olayın zamana bağımlılığına göre,

- a) Duruk kuramlar [1-3, 5, 24]
- b) Yarı duruk kuramlar [6, 12-18, 25, 27]
- c) Dinamik (relativistik olmayan) kuramlar
 - i) Galilean invaryant olanlar [4, 26, 31]
 - ii) Galilean ve Lorentz invaryant olmayanlar [21, 28-30]
- d) Relativistik kuramlar [32-42].

3. Bünye yasalarındaki cismin simetrisine göre

- a) İzotrop cisimler [2, 6, 24, 43-45]
- b) Anizotrop cisimler
 - i) Klâsik kristaller [4, 8, 12-14, 21-23, 25, 26, 28, 46]
 - ii) Manyetik kristaller [30].

4. Etkileşme olayındaki matematiksel formülasyona göre,

- a) Varyasyon kuralı kullanılarak [1-3, 5, 6, 8, 13-16, 34, 46]
- b) Sürekli ortam fizikinin kuralları kullanılarak [4, 17, 18, 21, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33]
- c) Enerji-momentum tansörü kullanılarak [32, 38, 39, 41]

ayrıştırmak mümkündür.

Ayrıca, elektromanyetik kuramın temel denklemleri olan Maxwell denklemlerinin formülasyonunda seçilen değişik fiziksel modeller, dolaylı olarak da etkileşmede etkinliği olan kuvvet, kütle momenti ve enerji terimlerindeki farklılıklar nedeniyle, yapılan araştırmaları formülasyon biçimlerine göre de ayırmak mümkündür.² Seçilen bir formülasyonda, bünye yasaları elde edilirken farklı elektromanyetik büyüklüklerin bağımsız değişken seçildiği ve seçilen büyüklüklerin değişik mertebelere kadar gradyenleri ve/ya da bazı büyüklüklerin zamana göre maddesel türevlerinin de değişken seçimine göre de sınıflandırmak mümkündür [5, 6, 50-52].

¹ Eger duran bir cisim manyetik alan içerisinde polarize, elektrik alanı içerisinde manyetize oluyorsa bu tür cisimlere manyeto-elektrik cisim denir [47,48].

² Maxwell denklemlerinin bilinen ve kullanılan 4 tür formülasyonu olup, bunlar i) Minkowski, ii) Ampere, iii) Boffi ve iv) Chu diye adlandırılır [34,49]. Herbirinin kendine göre avantaj ve dezavantajları olup, birindeki büyüklüklerin anlamı ve Maxwell denklemlerinin görünen biçimleri diğerlerinininkinden farklıdır.

makroskopik oluşuna göre de olabılır [12, 13, 25, 26, 31, 36, 37, 46]. Bunların yanı sıra, etkileşimde incelenen cismin mekanik özelliklerine göre elastik ya da visko-elastik, elektromanyetik özelliklerine göre elektronik spinli, manyetik doyumlu (magnetically saturated) ve termodinamik yönü ile de entropi kuralında Clausius-Duhem eşitsizliği ya da Müller eşitsizliğinin seçimine göre de olabılır [12-14, 53-55].

Tüm bu ayrıntılar literatürde olduğundan yayınların birbirleriyle tam uyumlu olup olmadıklarını saptamak oldukça güç bir iştir. Fakat bu olanaksız demek değildir. Karşılaştırmanın yapılabilmesi için yukarıda belirtilen ayrıntıların giderilmesi gerekir. Bu araştırmada amaç tüm bu ayrıntılardaki karşılaştırmaları yapmak olduğundan, bu araştırma ile çok yakından ilgisi olan bazı araştırmalarla aralarında benzerlik ve farklılıklar belirtilecektir.

1964'de Tiersten [12] sonlu şekil değiştiren ve manyetik doyumlu yalıtkan cisimlerin mikroskopik modelden yararlanarak ve sürekli ortam fizığının denge kurallarını kullanarak makroskopik denge (balans) denklemlerini ve sürekli ortam mekanığının aksiyomlarını kullanarak bünye yasalarını elde etmiştir. Bir yıl sonra ise aynı bağlantıları varyasyon yöntemini kullanarak doğrulamıştır [13]. Brown [14]'un fenomenolojik makroskopik manyeto elastik kuramı ise birçok deneysel sonuçları açıkladığından ilgi ile karşılammıştır. Tiersten ve Brown'un araştırmalarında [12-14] manyetizasyon vektörünün gradyenleri de bağımsız değişken olarak seçildiğinden ve ayrıca cisim manyetik doyumlu varsayıldığından feritlerde gözlenen olaylar bu kuramlarla açıklanmaktadır.

Duruk ve doğrusal olmayan ısı ve elektrigi ileten elektromanyeto-termoelastik ortamlarla ilgili çalışma Jordan ve Eringen [24] tarafından yapılmış olup, daha sonraları Pao ve Yeh [27] ve Hutter ve Pao [21] sıra ile sonlu şekil değiştiren makroskopik yarı duruk manyetik alan için duruk (statik) ve dinamik kuramsal çalışmalar yapmışlardır. Bu çalışmalarda Maxwell denklemlerinin Ampere formülasyonu kullanılmış olup, klasik kristallerden özel simetrisi olanlar incelenmiştir.

Sayıca oldukça çok olan yukarıdaki araştırmalarda [30]'un dışındakilerde alanların etkileşmelerinde cismin manyetik simetrisi gözönüne alınmamıştır. Oysa ki, kuramsal ve deneysel çalışmalar göstermektedir ki bazı fiziksel olayların örneğin, piezomanyetik, payromanyetik, manyeto-elektrik v.b. açıklanmasında cismin manyetik simetrisi gözönüne alınmalıdır [47,48,56]. Diğer taraftan, cismin elektrigi ve ısıyı iletmesinden oluşan enerji kayıplarının yanısıra, cismin yapısındaki viskozluk nedeniyle de enerji kaybı olmaktadır. Elektromanyetik alanların diğer alanlarla olan etkileşmelerinde cismin elastik olması yerine viskoelastik düşünülmesi gerekmektedir. Bu nedenle, bu araştırma projesinde yarı duruk manyetik alan ve ısı alanının, elektrik ve ısıyı ileten, manyetik simetrisi sonlu şekil değiştirmiş Kelvin-Voigt türünde viskoelastik anizotrop katılardaki etkileşmeleri incelenmiştir. Böylece ilgili temel denklemler, sınır koşulları ve bünye yasaları elde edilmiştir.

Cismin bünyesinden, sonlu şekil değiştirmesinden ve hareketli olmasından dolayı incelenen fiziksel olayla ilgili denklemler doğrusal değildirler. Şekil değiştiren cisimlerle ilgili bu tür denklemler değişik biçimlerde doğrusallaştırılmaktadır [4, 12, 15, 23, 27, 60, 63-76]. Bu seçimlerde genellikle fiziksel olay gözönüne alınmakta olup literatürdeki bu çalışmaları gruplandırmak mümkündür. Bu araştırmada bu yönde bir sınıflandırılma yapıldıktan sonra, içlerinden bir seçim yapılarak tüm denklemler iki

gruba ayrıştırılmıştır. Her gruptaki denklem takımları doğrusal olup, daha özel durumları incelemek mümkündür.

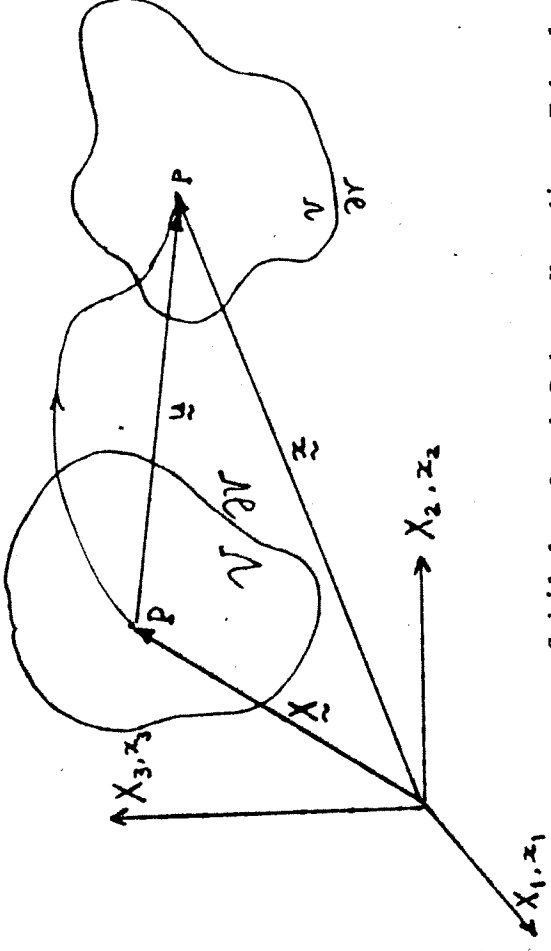
Bu çalışmada altı bölüm vardır. Bölüm 2'de klasik sürekli ortam mekanizinin denge denklemleri, Chu formülasyonunda yarı duruk manyetik alanlar için Maxwell denklemleri ve ilgili sınır koşulları alanlar bir arada olduğunda formüle edilmiştir.³ Bu yolla elde edilen denklemler sayıca yeterli olmadığından ve cismin dış etkilere karşı yapısal özelliklerini belirlemediğinden Bölüm 3'de bazı varsayımlar ve aksiyomlardan yararlanarak bünne bağıntıları elde edilmiştir. Böylece, entropi, manyetizasyon ve gerilme tansörünün kayıpsız kısmının bir potansiyelden türetilebileceği; gerilme tansörünün kayıplı kısmı, elektrik akım ve ısı akısvektörlerinin ise artık eğitsizlik adı verilen koşulu sağladığı gösterilmiştir. Bölüm 4'de ise cismin bünne yasalarındaki yalnız doğrusal davranışı cismin manyetik simetrisi gözönüne alınarak ve artık eşitsizliğin minimum değerinden yararlanarak tüm bağımlı değişkenler için doğrusal bünne yasaları elde edilmiştir.

Hernekadar bünne yasalarında doğrusal davranışlar gözönüne alınmış ise de fiziksel etkileşmelerle ilgili denklemler cismin sonlu şekil değiştirmesinden ve hareketli olmasından matematiksel açıdan doğrusal değildir. Bu nedenle, Bölüm 5'de etkin alanlar içerisinde rijit cisim hareketi yapan, sonra da sonsuz küçük şekil değiştirmeye uğrayan cisim için tüm denklemler iki gruba ayrılmıştır. Her iki gruptaki denklemler doğrusal olup, şekil değiştiren cisimlerle ilgili denklemlerin değişik biçimlerdeki doğrulaslaştırılmalarından farklıdır. Bu ayrıştırmanın yararı, rijit konumdaki büyüklükler bilindiğinde, diğer konumdaki denklemlerde doğrusal olmaktadır. Ayrıca, elektrik ve ısıyı ileten ve yarı duruk manyetik alan içerisinde rijit cisim hareketi yapan ilgili cismin Euler hareket denklemleri elde edilmiştir. Cismin özel simetrisine göre ve etkileşmede bazı alanların olmaması durumunda ilgili denklemlerin nasıl elde edileceği Bölüm 6'da açıklanmış olup, bu özel durumların diğer yayınlarla uyumlu olduğu gösterilmiştir. Örneğin, cisim yapısal olarak izotrop olsa bile, cismin şekil değiştirmesi ve hareket etmesi ilgili denklemlerdeki izotropluğu koruyamamaktadır. Ayrıca, bu çalışmada ile ilgili bazı düşünce ve öneriler de sıralanmıştır.

³ Elektromanyetik kuramın Chu formülasyonunda, polarizasyon elektrik dipol, manyetizasyon manyetik dipol olarak açıklanmaktadır [34,49,57]. Fakat Tai [58], daha sonra EPHM formülasyonu için manyetik dipol modeline gerek olmadığını göstermiştir.

II. TEMEL DENKLEMLER VE SINIR KOŞULLARI

Bir cismin hareketini ve şekil değiştirmesini tanımlamak için 3-boyutlu Euclid uzayı \mathcal{E}^3 'de \mathcal{B} cismi gözönüne alınmalıdır. \mathcal{B} cisminin τ_0 anında $\mathcal{V}_0 \mathcal{V}$ bölgesinde, herhangi bir $t \geq \tau_0$ anında ise $\mathcal{V}_t \mathcal{V}$ bölgesinde bulunduğunu varsayalım, Şekil 1. Eğer \mathcal{B} 'nin herhangi



Şekil 1. Ortak Dekart Koordinat Takımları

bir parçasığı P 'nin başvuru (referans) konumu \mathcal{B}_0 'de iken konum vektörü $\underline{X}(X_k)$ ve şimdiki konumu \mathcal{B}_t 'de konum vektörü $\underline{z}(z_k; k,t=1,2,3)$ ise, şekil değiştiren cismin hareket denklemleri

$$\underline{z} = \underline{z}(\underline{X}, t) ; z_k = z_k(X_k, t), X \in \mathcal{B}, t \quad (2.1)$$

biçiminde sürekli bir işlevdir. Böylece, cismin hızı \underline{V} ve ivmesi \underline{a} bilinen tanımları kullanılarak (2.1)'den

$$V_k \equiv \dot{z}_k = \partial_t z_k(X, t) ; a_k \equiv \ddot{z}_k = \partial_t^2 v_k + v_l v_{k,l} \quad (2.2)$$

biçiminde kolaylıkla yazılır.⁴ Hareket denklemleri ile $\mathcal{V}_t \mathcal{V}$ bölgesi $\mathcal{V}_t \mathcal{V}$

⁴ Bu çalışmada bir indisten sonra gelen virgül uzaysal koordinatlara göre parçalı (kısmî) türevi, harflerin üzerine konan nokta zamana göre maddesel türevi ve ∂_t simgesi de zamana göre parçalı türevi göstermektedir. Tersini belirtmedikçe, yinelenen alt indisler üzerine toplam olduğu anlaşılacaktır. Ayrıca, cismin \mathcal{B}_t konumuna göre büyük büyük Latin indislerle, aynı büyüklükler \mathcal{B}_0 konumuna göre ise büyük Latin indislerle gösterilecek ve Dekart tensör gösterimleri kullanılacaktır.

bölgesine taşınmış olup bu dönüşümün tek ve tersinin olabilmesi için (2.1)'in Jacobiyeni J bazı tekil noktalar, eğriler ve yüzeyler hariç

$$J \equiv \det \frac{\partial x_k}{\partial X_k} = |x_{k,k}| \neq 0 \quad (2.3)$$

olmalıdır. Bu çalışmada $J > 0$ olduğu varsayılacaktır.

Cismin şekil değiştirme ölçümlerinden en önemlisi olan şekil değiştirme gradyeni

$$F_{kK} = x_{k,K} \quad (2.4)$$

olup, diğer ölçümler olan Green ve Lagrange tansörleri ise sıra ile, δ_{KL} Kronecker delta olmak üzere

$$\begin{aligned} C_{KL} &= F_{k,K} F_{k,L} , \\ E_{KL} &= \frac{1}{2} (C_{KL} - \delta_{KL}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

dir [59]. Ayrıca, (2.4) ve (2.5)'deki büyüklükleri yer değiştirme vektörü

$$u_k = x_k(X, t) - X_k \delta_{kK} ; U_K = x_k(X, t) \delta_{kK} - X_K \quad (2.6)$$

cinsinden de tanımlamak mümkündür. F_{kK} , C_{KL} ve E_{KL} 'nin maddesel türevleri

$$\dot{x}_{k,K} = v_{k,l} x_{l,K} ; \dot{X}_{K,k} = -v_{l,k} X_{K,l} \quad (2.7)$$

ve

$$d_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k,l} + v_{l,k}) \quad (2.8)$$

olmak üzere

$$\dot{C}_{KL} = 2 d_{kl} v_{k,K} v_{l,L} \quad (2.9)$$

dir.

Sürekli ortam mekanizindeki temel kurullarla ilgili formüllerin biçimi Ek A'dakine benzer olup, büyüklükler için uygun seçimler yaparak (A.12) ve (A.13)'den fiziksel etkileşmelerle ilgili temel yasaların tümlevsel biçimleri ve sınır koşulları olarak aşağıdaki denklemler elde edilir.

1. DENCE (BALANS) DENKLEMLERİ :

a) Kütlenin korunumu : ρ yoğunluk olmak üzere

$$\partial_t \rho + (\rho v_k)_{,k} = 0 \quad \in \mathcal{V} - \sigma \quad (2.10)$$

dir.

b) Doğrusal momentum dengesi (balansı) : t_{ij} gerilme tensörü, $f_i^{(m)}$ ve $f_i^{(e)}$ sıra ile birim kütleyle etkileyen mekanik ve manyetik kuvvet olmak üzere

$$t_{ik,l} + \rho (f_k^{(m)} + f_k^{(e)} - a_k) = 0 \quad \in \mathcal{V} - \sigma \quad (2.11)$$

dir.

c) Açısal momentum dengesi : $\ell_i^{(m)}$ manyetik kütle moment vektörü ve $t_{ij}^{(T)}$ toplam gerilme tensörü olmak üzere

$$\epsilon_{ijk} t_{jk} = -\rho \ell_i^{(m)} \quad \text{ya da} \quad \epsilon_{ijk} t_{jk}^{(T)} = 0 \quad \in \mathcal{V} - \sigma \quad (2.12)$$

dir. (2.12)'de ϵ_{ijk} permutasyon simgesi olup, ϵ_{ijk} 'nin iki indisi aynı ise 0, indisler 123, 231 ve 321 sırasında ise +1, diğer türlü ise -1'dir.

d) Enerjinin korunumu : \mathcal{E} birimi kütle için iç enerjisi, $\rho^{(m)}$ birim kütlenin manyetik enerjisi, $\rho^{(e)}$ birim kütlenin manyetik olmayan enerjisi ve q_i 'da ısı akısı vektörü olmak üzere

$$\rho \dot{\mathcal{E}} = t_{kl} v_{l,k} - q_{k,k} + \rho (\rho^{(m)} + \rho^{(e)}) \quad \in \mathcal{V} - \sigma \quad (2.13)$$

dir. Elektromanyetik alanlar olmadığında $f_i^{(m)}$, $\ell_i^{(m)}$ ve $\rho^{(m)}$ 'nin her üçü de sıfırdır.

e) Maxwell denklemleri (Yarı duruk manyetik alanlar için)

E_i elektrik alanı, H_i manyetik alan, J_i elektrik akım vektörü, $\rho^{(m)}$ manyetik yük yoğunluğu ve $J_i^{(m)}$ manyetik akım yoğunluğu olmak üzere Ek-B'de $\rho_i = 0$, $\partial_t E_i = 0$ ve $\rho^{(e)} = 0$ konarak, Chu formülasyonunda yarı duruk manyetik alanlar için

$$\mu_0 H_{i,i} = \rho^{(m)} \quad \in \mathcal{V} - \sigma \quad , \quad \epsilon_{ijk} E_{kj} + \mu_0 \partial_t H_i = -J_i^{(m)} ; \quad \epsilon_{ijk} H_{kj} = J_i \quad \in \mathcal{V} - \sigma \quad (2.14)$$

olan Maxwell denklemleri elde edilir.⁵ (2.14)'de μ_0 boşluğun manyetik geçirgenliği olup, boşluğun dielektrik geçirgenliği ϵ_0 ve ışık hızı c 'den bağımsız değildir. Kısaca, $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ 'dir.

f) Clausius - Duhem eşitsizliği (Entropi kuralı) :

\mathcal{Q} özgül entropi, θ mutlak sıcaklık olmak üzere

$$\rho \dot{\eta} + \left(\frac{1}{\theta} q_k \right)_{,k} - \frac{1}{\theta} \rho r^{(\theta)} \geq 0 \quad \in V - \sigma \quad (2.15)$$

dir. (2.15)'de $\frac{1}{\theta} q_k$ entropi akısı ve $\frac{1}{\theta} r^{(\theta)}$ 'da entropi üretimi olarak bilinirler.⁶

2. SINIR KOŞULLARI :

Denge denklemlerinin türevsel biçimleri elde edilirken (A.13)'de $V = V^*$ varsayımını kullanılırsa ; $\sigma(t)$ yüzeyinin normali \hat{n} ve $\gamma(t)$ çizgisine teğet birim vektör \hat{k} olmak üzere,

$$\left. \begin{aligned} \int [H_i + M_i] \hat{n}_i &= 0 ; \int [t_{ij}^{(v)}] \hat{n}_j = 0 \\ \int [t_{ij}^{(v)} v_j - q_i] \hat{n}_i &= 0 ; \int \left[\frac{1}{\theta} q_i \right] \hat{n}_i = 0 \end{aligned} \right\} \in \sigma(t) \quad (2.16)$$

ve

$$\int [\delta_i] k_i = 0 ; \int [\mathcal{H}_i] k_i = 0 \quad \in \gamma(t) \quad (2.17)$$

elde edilir. (2.17)'de $\int (\cdot) \int$ simgesi içerisindeki büyüklüğün (A.4)'deki gibi süreksizliğini göstermektedir.

Manyetik cisimler için (2.10-17)'de kullanılan büyüklüklerden bazıları

$$\left. \begin{aligned} t_{ij}^{(v)} &\equiv t_{ij} + T_{ij} = t_{ij} + \mu_0 \left(-\frac{1}{2} H_k H_k \delta_{ij} + H_i H_j + M_i H_j \right) \\ \rho^{(m)} &= -\mu_0 M_{i,i} ; J_i^{(m)} = \partial_k \mu_0 M_i + \epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn} (\mu_0 M_m v_n)_{,j} \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

biçiminde tanımlanmış olup, diğerleri yarı duruk manyetik alanlar için $(v/c)^2$ 'li terimler ihmal edildiğinde

⁵ Chu formülasyonunda kullanılan \underline{E} , \underline{P} , \underline{H} ve \underline{M} 'nin anlamları ve de ilgili Maxwell denklemleri diğerlerininkinden farklıdır. Ayrıca, (2.14)'deki denklemleri vektör ve skaler potansiyeller cinsinden de yazmak mümkündür [60].

⁶ Entropi akısı ve entropi üretimi için farklı seçimlerin de yapıldığı olmaktadır [54,55]. Bu araştırmada, birçok araştırmada kullanılan ve [59]'da verilen entropi kuralı kullanılacaktır.

$$\left. \begin{aligned} \rho f_i^{(m)} &= \epsilon_{ijk} J_j \mu_0 \mathcal{H}_k + \mu_0 \mathcal{M}_k \mathcal{H}_{i,k} \\ \rho \mathcal{L}_i^{(m)} &= \epsilon_{ijk} \mu_0 \mathcal{M}_j \mathcal{H}_k ; \quad \rho \mathcal{L}^{(m)} = \mathcal{J}_k \mathcal{E}_k + \rho \mathcal{H}_k (\overline{\mathcal{J}} \mu_0 \mathcal{M}_k) \end{aligned} \right\} (2.19)$$

dır [34,49,60]. (2.18)'de T_{ij} yarı duruk manyetik alanlar için Maxwell gerilme tensörü, $\rho^{(m)}$ ve $\mathcal{J}_i^{(m)}$ ise sıra ile manyetik yük ve akım yoğunluğudur. Ayrıca, (2.19)'daki büyüklükler için (B.5)'den

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}_i &= H_i ; \quad \mathcal{M}_i = M_i \\ \mathcal{E}_i &= E_i + \epsilon_{ijk} v_j \mu_0 H_k ; \quad \mathcal{J}_i = J_i \end{aligned} \right\} (2.20)$$

dönüşümleri kolaylıkla yazılır.

Daha sonra (2.13) ve (2.15) arasında $\mathcal{Y}^{(\theta)}$ yok edilip, ayrıca aynı denklemden Legendre dönüşümü

$$\Psi = \mathcal{E} - \gamma \theta - \frac{1}{\rho} \mu_0 \mathcal{M}_k \mathcal{H}_k \quad (2.21)$$

kullanılırsa, $\mathcal{G}_k = \theta, k$ olmak üzere

$$-\rho(\dot{\Psi} + \gamma \dot{\theta}) + t_{kl} v_{l,k} - \mu_0 \mathcal{M}_k \dot{\mathcal{H}}_k + \mathcal{J}_k \mathcal{E}_k - \frac{1}{\theta} \mathcal{I}_k \mathcal{G}_k \geq 0 \quad (2.22)$$

elde edilir. Bünye kuramında bağımsız değişkenlerin seçiminde değişik Legendre dönüşümü kullanılmakta olup, (2.22)'deki eşitsizlik ise bünye yasalarının elde edilmesinde çok önemli etkinliği vardır [61].

III. BÜNYE BAĞINTILARI

Bölüm II'deki temel denklemler bilinmeyenlerin bulunabilmesi için çok özel durumların dışında sayıca yeterli değildir. Şöyle ki: Verilen $f_k^{(M)}$ için, 31 tane bilinmeyen olmasına karşın 14 tane bağımsız değişken vardır. Ayrıca aynı geometrideki farklı cisimlerin aynı dış etkilere karşı farklı davranışları bu cisimlerin iç yapıları ile ilgili olup, bu davranışların matematiksel işlemlerle anlatılmasına bünye bağıntıları denir. Bu bağıntılardan da bünye yasalarını elde etmek mümkündür. Bu nedenle, Bölüm II'de 31-14=17 tane bağımsız denkleme daha gereksinme olup, bu denklemler sürekli ortam mekaniğinin bazı aksiyomları kullanılarak bu bölümde elde edilecektir [59].

Varsayalım ki, elektrik ve ısıyı ileten manyeto-termo vizkoelastik cisimler için \mathcal{X} konumunda ve t anında

$$\{t_{ij}, \mu_i, J_i, q_i, \gamma, \Psi\} \quad (3.1)$$

büyüklikleri, eş bulunma aksiyomuna göre tersi gösterilene kadar

$$\{F_{kK}, \dot{F}_{kK}, \dot{E}_k, \mu_0 \mathcal{H}_k, \mu_0 \mathcal{H}_k, \theta, g_k\} \quad (3.2)$$

değişkenlerinin sürekli işlevleri olsunlar.⁷ Örneğin, \mathcal{F} (3.1)'deki herhangi bir bağımlı değişken olmak üzere

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(F_{kK}, \dot{F}_{kK}, \dot{E}_k, E_k, \mu_0 \mathcal{H}_k, \mu_0 \mathcal{H}_k, \theta, g_k) \quad (3.3)$$

⁸ varsayalım. Objektif olma aksiyomu ve Cauchy teoremine göre (3.2) yerine objektif değişkenler olan (2.5)'deki C_{KL} ,

$$\{\underline{E}_k, \mathcal{H}_k, g_k\} = \{E_k, \mathcal{H}_k, g_k\} \varkappa_{k,K} \quad (3.4)$$

ve C_{KL} , \underline{E}_k ve \mathcal{H}_k 'nin maddesel türevleri seçilmelidir. Ayrıca, bazı matematiksel işlem kolaylığı sağlanması bakımından (3.1) yerine de

⁷ Değişik bağımsız değişkenler seçerek bünye bağıntılarını elde etmek mümkündür. Herbiri değişik cisimler için uygun olup (3.3)'e eşdeğerdirler [61].

⁸ Bu araştırmada manyetik değişebilen olay (exchange effect), manyetik histeresis olayı ve manyetik doyumlu cisimler gözününe alınmadığından bağımlı büyüklikler bağımsız büyükliklerden \underline{E} ve $\mu_0 \mathcal{H}$ 'nin gradyanlarının işlevi, (3.3)'ü tümlevsel biçimde bir bağıntı ve $\mathcal{H} \cdot \mathcal{H} = s \delta t$ olacak biçimde alınmamıştır. Bu tür olaylar özellikle [12-14,43]'de incelenmiş olup, bu tür cisimler için başka bir araştırma yapılabilir.

$$\left. \begin{aligned} \underline{t}_{KL} &= J \underline{t}_{kl} X_{k,K} X_{L,l} \\ \{ \underline{u}_k, \underline{\dot{J}}_k, \underline{g}_k \} &= J \{ \underline{u}_k, \underline{J}_k, \underline{g}_k \} X_{k,K} \end{aligned} \right\} (3.5)$$

seçilecek ve gerilme tansörü

$$\underline{t}_{KL} = \underline{\sigma}_{KL}(\underline{C}, \underline{\dot{C}}, \theta) + \underline{\sigma}_{KL}(\underline{C}, \underline{\dot{C}}, \underline{g}, \underline{\dot{g}}, \theta) \quad (3.6)$$

biçiminde sıra ile kayıpsız $\underline{\sigma}_{KL}$ ve kayıplı $\underline{\sigma}_{KL}$ gibi iki kısma ayrıştırılacaktır. Gerekli türevler alınarak (3.4-6), (2.22)'de yerine konur ve düzenlemeler yapılırsa

$$\left. \begin{aligned} -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{C}_{KL}} \dot{\underline{C}}_{KL} + \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{E}_K} \dot{\underline{E}}_K + \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{H}_K} \dot{\underline{H}}_K + \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{H}_K} \mu_0 \dot{\underline{H}}_K + \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{g}_K} \dot{\underline{g}}_K \\ -\rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \eta \right) \dot{\theta} - \mu_0 (\underline{u}_k + \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{H}_k}) \dot{\underline{H}}_k + \rho_0 \left[-\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{C}_{KL}} \right. \\ \left. + \frac{1}{2\rho} (\underline{\tau}_{kl} - \mu_0 \underline{H}_k \underline{u}_l) X_{k,K} X_{L,l} \right] \dot{\underline{C}}_{KL} + (\underline{\sigma}_{KL} x_{k,K} x_{l,L} v_{k,l} + \underline{\dot{J}}_k \underline{E}_k - \frac{1}{\theta} \underline{g}_k \underline{g}_k) \geq 0 \end{aligned} \right\} (3.7)$$

elde edilir. (3.7)'de ρ cismin şekil değiştirmeden önce yoğunluğu olup, (3.7) elde edilirken (2.9) ve

$$\underline{E}_k x_{k,K} = \underline{E}_K X_{L,K} C_{LK} \quad (3.8)$$

bağıntısı da kullanılmıştır. Elde edilen (3.7), bağımsız değişkenlerden

$$\{ \dot{\underline{C}}_{KL}, \dot{\underline{C}}_{KL}, \dot{\underline{E}}_K, \dot{\underline{E}}_K, \mu_0 \dot{\underline{H}}_K, \dot{\theta}, \dot{\underline{g}}_K \} \quad (3.9)$$

'e göre doğrusal olup, bunların gelişigüzel değişimlerinde sağlanabilmesi için

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{E}_{KL}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{E}_K} = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{H}_K} = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{g}_K} = 0 \quad (3.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta &= -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} ; \quad \underline{u}_k = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{H}_k} x_{k,K} \\ \underline{\tau}_{kl} &= \rho \frac{\partial \Psi}{\partial E_{KL}} x_{k,K} x_{l,L} + \mu_0 \underline{H}_k \underline{u}_l \end{aligned} \right\} (3.11)$$

ve

$$\underline{\mathcal{D}} = \hat{\underline{\sigma}}_{KL} \dot{\underline{E}}_{KL} + \underline{\dot{J}}_k \underline{E}_k + \frac{1}{\theta} \dot{\underline{g}}_k \underline{g}_k \geq 0 \quad (3.12)$$

olmak zorundadır. Denklem (3.10-12) elde edilirken (2.5), (2.9) ve

$$\tau_{[KL]} = \tau_{[KQ]} ; \tau_{[KLQ]} = 0 \quad (3.13)$$

özellikleri kullanılmış olup, (3.12)'ye artık (residual) eşitsizlik denir. Böylece, (3.10)'dan kolaylıkla Ψ 'nin $\dot{E}_{KL}, \dot{E}_K, \dot{Z}_K$ ve g_K 'nin işlevi olmadığını ve Ψ bilindiğinde de (3.11)'deki bağıntılardan da η, μ_K ve τ_{KL} 'yi elde etmek mümkündür. Diğer bağımlı değişkenler ise (3.12)'yi sağlamak zorundadır. Ayrıca, (3.13)'den anlaşıldığı gibi τ_{KL} 'nin antisimetrik kısmı τ_{KL} 'nin antisimetrik kısmına eşit olup, τ_{KL} ise simetriktir.

Diğer taraftan (3.12)'nin minimum değeri

$$\mathcal{D}_{min} = 0 \quad (3.14)$$

olup, (3.14)'ün sağlanabilmesi için \mathcal{D} 'nin

$$\{ E_{KL}, \dot{E}_{KL}, \dot{E}_K, \dot{E}_K, \mu_0 \dot{Z}_K, \mu_0 \dot{Z}_K, \theta, g_K \} \quad (3.15)$$

göre parçalı türevleri sıfır olmalıdır. İlgili türevler alınır (3.14)'ün sağlanması için

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\dot{E}_{KL}} \mathcal{D} \Big|_0 &= \hat{\sigma}_{KL} (E_{MN}, 0, 0, \dot{E}_M, \mu_0 \dot{Z}_M, \mu_0 \dot{Z}_M, \theta, 0) \\ \partial_{\dot{E}_K} \mathcal{D} \Big|_0 &= \hat{\sigma}_K (E_{MN}, 0, 0, \dot{E}_M, \mu_0 \dot{Z}_M, \mu_0 \dot{Z}_M, \theta, 0) \\ \partial_{g_K} \mathcal{D} \Big|_0 &= \hat{g}_K (E_{MN}, 0, 0, \dot{E}_M, \mu_0 \dot{Z}_M, \mu_0 \dot{Z}_M, \theta, 0) \end{aligned} \right\} (3.16)$$

olması gerektiği bulunur. (3.16)'ın sol tarafındaki $\Big|_0$ simgesi ilgili türevlerin $\dot{E}_{KL} = \dot{E}_K = g_K = 0$ noktasında alındığını göstermektedir. Elde edilen (3.11) ve (3.16), elektrigi ve ısıyı ileten manyeto-termovizkoelastik katı cisim için bünye bağıntılarıdır. Bu bağıntılardan cismin doğrusal olan ve de olmayan bünye yasalarını türetmek mümkündür. Bir sonraki bölümde doğrusal bünye yasalarının elde edilişi gösterilecektir.

IV, MANYETİK SİMETRİLİ ANİZOTROP KATININ DOĞRUSAL BÜNYE YASALARI

Bölüm III'de incelenen cisimle ilgili olarak elde edilen bünye bağıntılarından, manyetik simetrik anizotrop katılarla ilgili doğrusal ve doğrusal olmayan bünye yasalarını elde etmek mümkündür. Şöyle ki: (3.16)'daki bağıntının doğrusal yapıdaki bir cisim için

$$\left. \begin{aligned} \underline{\sigma}_{KL} &= \pi_{KLMN}^{(d)} \dot{E}_{MN} + \pi_{KLM}^{(dc)} \underline{E}_M + \pi_{KLM}^{(dg)} \underline{g}_M, \\ \underline{J}_K &= \pi_{KL}^{(e)} \underline{E}_L + \pi_{KL}^{(eg)} \underline{g}_L + \pi_{KLM}^{(ed)} \dot{E}_{LM}, \\ \underline{g}_K &= \pi_{KL}^{(g)} \underline{g}_L + \pi_{KLM}^{(gd)} \dot{E}_{LM} + \pi_{KL}^{(gc)} \underline{E}_L \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

olması gerektiği kolaylıkla yazılabilir. Bu gösterimde bünye yasalarındaki π kat-sayıları genel olarak

$$\{ E_{KL}, \dot{E}_K, \mu_0 \dot{H}_K, \mu_0 \dot{H}_K, \theta \} \quad (4.2)$$

nın birer işlevi olabilir ve ayrıca π 'nin

$$\left. \begin{aligned} \pi_{KLMN}^{(d)} &= \pi_{LKMN}^{(d)} = \pi_{KLMN}^{(d)}; & \pi_{KLM}^{(dc)} &= \pi_{LKM}^{(dc)}, \\ \pi_{KLM}^{(ed)} &= \pi_{KML}^{(ed)}; & \pi_{KLM}^{(gd)} &= \pi_{KML}^{(gd)} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

biçiminde bileşik (intrinsic) simetrisi vardır. Anizotrop ve doğrusal cisim için elde edilen (4.1)'deki 2. ve 3. denklemler sıra ile Ohm ve Fourier yasalarının incelenen cisim için genelleştirilmiş biçimleridir.

Tansörler gerçek (true, polar) ya da pseudo (pseudo, axial) olmalarının yanı sıra özellikle manyetik kristallerde $R: t \rightarrow -t$ dönüşümüne göre de ikiye ayrılmıyolar. [47,56,62]. Eğer tansörün bileşenleri R dönüşümü altında işaret değiştirmiyor (invariant) ise i-tansör, değiştiriyor ise c-tansör olarak bilinir. Elektromanyetik kuramda \underline{J} , \underline{H} ve \underline{M} birer c-tansör olup, ayrıca son ikisi pseudo vektördür. Diğer büyüklükler ise gerçek i-tansör olup, bir eşitliğin iki tarafı tansör türü ba-

Bilinen büyüklüklerin türünden yararlanarak ve çarpım kuralını kullanarak doğru yazılmış bir eşitlikteki diğer büyüklüklerin türleri bulunabilir.⁹

Diğer taraftan, Ψ 'nin E_{KL} , $\mu_0 \mathcal{H}_K$ ve θ 'nin açık bir biçimde işlevi olarak bilindiğinde, (3.11)'den diğer büyüklükler için bünye yasalarını da elde etmek mümkündür. Varsayalım ki, Ψ ilgili bağımsız değişkenlerin

$$\begin{aligned} \Psi = & \chi_{KL}^{(E)} E_{KL} + \chi_K^{(m)} \mu_0 \mathcal{H}_K + \chi^{(e)} \theta + \frac{1}{2} \sum_{KLMN}^{(E)} E_{KL} E_{MN} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{KL}^{(m)} \mathcal{H}_K \mathcal{H}_L - \frac{1}{2} \sum^{(e)} \theta^2 + \sum_{KLM}^{(Em)} E_{KL} \mathcal{H}_M \\ & + \sum_{KL}^{(E\theta)} E_{KL} \theta - \sum_K^{(m\eta)} \mathcal{H}_K \theta + \left\{ \text{yüksek mertebeden terimler} \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

biçiminde polinom işlevi olsun.¹⁰ Bu bağıntıda \mathcal{H} ve \sum katsayıları küçük alanlar için sabit varsayıлып,

$$\left. \begin{aligned} \chi_{KL}^{(E)} &= \chi_{LK}^{(E)} ; \quad \sum_{KL}^{(m)} = \sum_{LK}^{(m)} , \\ \sum_{KLMN}^{(E)} &= \sum_{LKMN}^{(E)} = \sum_{KLMN}^{(E)} = \sum_{MKNL}^{(E)} , \\ \sum_{KLN}^{(Em)} &= \sum_{KNL}^{(Em)} ; \quad \sum_{KL}^{(E\theta)} = \sum_{LK}^{(E\theta)} , \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

olacak biçimde bileşik simetrisi vardır. Enerjinin gerçek bir i-tansör olduğunu düşünerek ve çarpım kuralından yararlanarak (4.4)'deki $\chi_K^{(m)}$, $\sum_{KLM}^{(Em)}$ ve $\sum_K^{(m\theta)}$ 'nin birer pseudo c-tansör olduğunu elde etmek kolaydır. Böylece bu katsayı tansörleri ancak manyetik kristallerde sıfır olmayan bileşenleri vardır.

Eğer cisim doğal konumunda iken bağımsız alanlar

$$E_{KL} = \mathcal{H}_K = \theta = 0 \quad (4.6)$$

olduğunda, bu alanlardan türetilen bağımlı alanlar da

$$\mathcal{H}_K = \mathcal{M}_K = \eta = 0 \quad (4.7)$$

⁹ Çarpım kuralı $(-)(+) = (-)$ ve $(\pm)(\pm) = (+)$ kuralına benzeyen bir kural olup, tansörlerin türlerini bulmakta kullanılır [47].

¹⁰ Enerjinin bu tür polinom yazımından daha yüksek mertebeden olan, örneğin piezomanyeto-termal olayları belirliyen $\sum_{KLM}^{(Em\theta)} E_{KL} \mathcal{H}_M \theta$ gibi, etkileşim olaylarını belirliyen vasaları da elde etmek mümkündür.

ise, (4.4)'deki bazı enerji terimlerindeki katsayılar

$$\chi_{KL}^{(E)} = \chi_K^{(m)} = \chi^{(B)} = 0 \quad (4.8)$$

olmalıdır. Bu durumda, (4.4)'deki terimler sırayla özgül (birim kütleli) "elastik" enerjisi, "manyetik" enerjisi, "termal" enerjisi, "manyeto-elastik" enerjisi, "termo-elastik" enerjisi ve "termo-manyetik" enerjisi olarak bilinir.

İlkönce (4.7), (4.4)'de yerine konur ve yalnız cismin doğrusal davranışı gözönünde tutularak (3.11)'deki gerekli türevler alınıp, sonra da (3.4-6) ve (4.1) kullanılırsa

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \sum^{(B)} \theta + \sum_K^{(mB)} \mathcal{H}_K x_{k,K} - \sum_{KL}^{(EB)} E_{KL} \\ \mathcal{M}_k &= \rho \left(\frac{1}{\rho_0} \sum_{KL}^{(m)} \mathcal{H}_L x_{l,L} + \sum_K^{(mB)} \theta - \sum_{LMK}^{(Em)} E_{LM} \right) x_{k,K} \\ t_{kl} &= \frac{\rho}{\rho_0} \left[\left(\sum_{KLMN}^{(E)} + \pi_{KLMN}^{(d)} \partial_t \right) E_{MN} + \left(\rho_0 \sum_{KLM}^{(Em)} \mathcal{H}_M \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \pi_{KLM}^{(dB)} E_M + \pi_{KLM}^{(dB)} g_M \right) x_{m,M} + \rho_0 \sum_{KL}^{(EB)} \theta \right] x_{k,K} x_{l,L} \\ &\quad + \mu_0 \mathcal{H}_k \mathcal{M}_l \\ J_k &= \frac{\rho}{\rho_0} \left[\left(\pi_{KL}^{(E)} E_L + \pi_{KL}^{(EB)} g_L \right) x_{l,L} + \pi_{KLM}^{(Ed)} \dot{E}_{LM} \right] x_{k,K} \\ &\quad \text{ve} \\ g_k &= \frac{\rho}{\rho_0} \left[\left(\pi_{KL}^{(B)} g_L + \pi_{KL}^{(EB)} E_L \right) x_{l,L} + \pi_{KLM}^{(Bd)} \dot{E}_{LM} \right] x_{k,K} \end{aligned} \right\} (4.9)$$

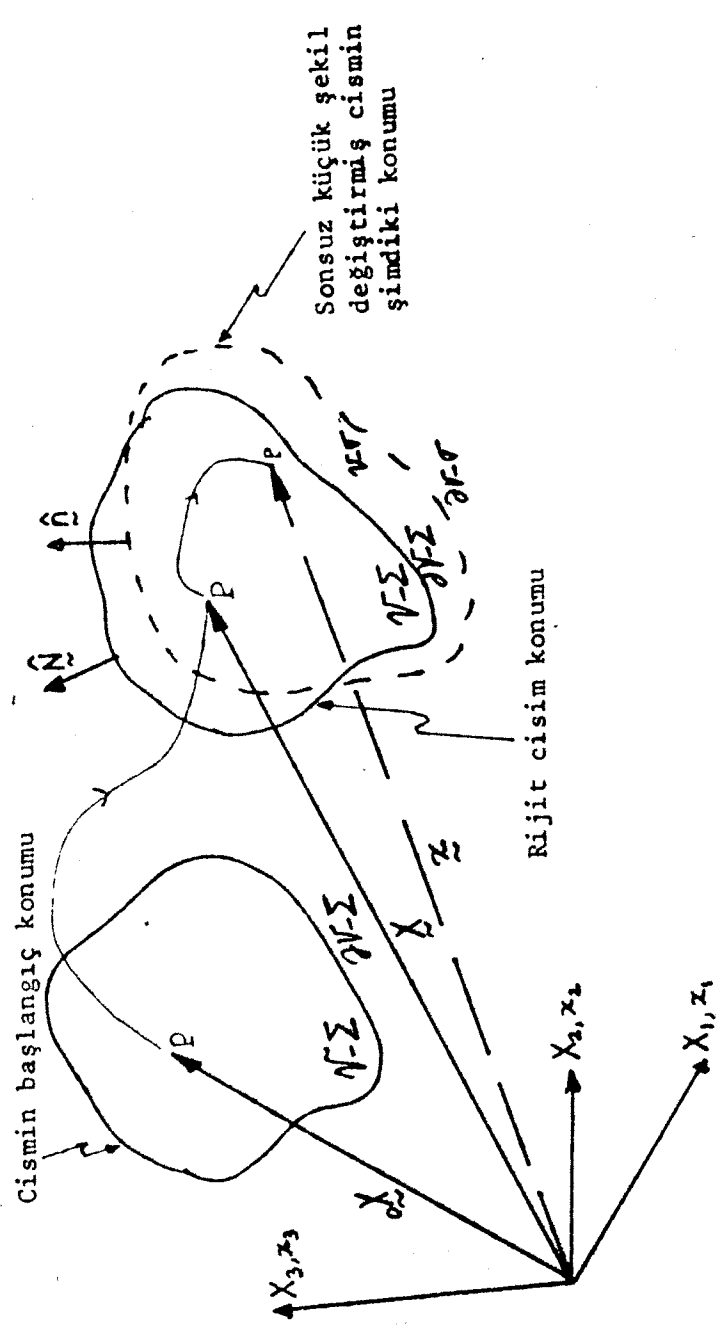
elde edilir. (4.9)'daki denklemler, elektriği ve ısıyı ileten, manyetik simetrik simetrik manyeto-termovizkoelastik anizotrop katı cisimle ilgili doğrusal bünye yasalarıdır. Verilen başlangıç koşulları ile (2.10-14) ve (4.9), (2.16,17)'daki sınır koşullarını sağlayacak biçimde çözülmelidir. Daha sonraki kesimde (4.9)'un özel durumları incelenecektir.

V. DENKLEMLERİN VE SINIR KOŞULLARININ DOĞRUSALLAŞTIRILMASI

Hernekadar bir önceki bölümde cismin davranışında doğrusal bünye yasaları göz-önüne alınmış ise de, cismin sonlu şekil değiştirmesi ve hareket etmesinden (2.10-14) ve (4.9)'daki denklemler doğrusal değildirler. İncelenen fiziksel problemin türüne göre doğrusal olmayan denklemler değişik biçimlerde doğrusallaştırılabilir. Literatürde cismin sonlu şekil değiştirmesiyle ilgili bu tür denklemlerin doğrusal biçimlere sokulmaları 4 grupta toplanabilir. Bu gruplar

1. Etkin üniform alan içerisinde cismin sonsuz küçük şekil değiştirmesi [15,63-75],
2. Zamandan bağımsız fakat konuma bağlı (stationary) etkin alanlar içerisinde cismin sonsuz küçük şekil değiştirmesi [60,76],
3. Cismin sonlu duruk şekil değiştirmesinden sonra, aynı cismin sonsuz küçük dinamik şekil değiştirmesi [4,12,27],
4. Cismin etkin alanlar içerisinde sonlu rijit hareket etmesinden sonra, aynı cismin sonsuz küçük dinamik şekil değiştirmesi [21,23,60]

biçimindedir. Bu çalışmada, elektromanyetik ve ısı alanları içerisinde rijit cisim hareketi etkin olan bir fiziksel olay düşünüldüğünden 4. türdeki doğrusallaştırma uygulanacaktır. Diğer bir deyişle, cismin (2.1)'deki hareketi, Şekil 2'de görüldüğü gibi a) Sonlu rijit cisim hareketi b) Sonsuz küçük şekil değiştirmeden oluşan iki hareketin birbirinin üzerine bindirilmesi (superimposed) biçiminde düşünülebilir. Bu durumda,



cismin hareket denklemleri

$$\left. \begin{aligned} X_k(t) &= \hat{X}_k(\underline{\alpha}, t), \quad X \in \mathcal{V} - \Sigma, \\ x_k &= \hat{x}_k(\underline{\alpha}(t), t), \quad x \in \mathcal{V} - \sigma \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

biçimindedir. Şimdi varsayalım ki cismin sonsuz şekil değiştirmesinden dolayı oluşan elektromanyetik ve termal büyüklükler aynı cismin rijit konumundakilerin yanında çok küçük olsunlar. Diğer bir deyişle, eğer bir rijit cisim hareketi var ise bu durumdaki elektromanyetik ve termal büyüklükler etkin büyüklükler olsun.¹¹

Şekil 2 ve (5.1)'deki hareket denklemlerinden, cismin rijit konumundan şimdiki konumuna yer değiştirmesi

$$u_k = x_k - X_\alpha \delta_{\alpha k} ; \quad u_\alpha = x_k \delta_{k\alpha} - X_\alpha \quad (k, \alpha = 1, 2, 3) \quad (5.2)$$

biçimindedir. Böylece, üzeri çizgili büyüklükler rijit konumdaki büyüklükler, üzerinde ' ' simgesi olan ya da küçük harflerle gösterilenler ise aynı büyüklüğün cismin sonsuz küçük şekil değiştirmesinden dolayı oluşan kısmı ise

$$\left. \begin{aligned} H_k &= \bar{H}_\alpha \delta_{\alpha k} + h_k ; \quad M_k = \bar{M}_\alpha \delta_{\alpha k} + m_k, \\ \theta &= \bar{\theta} + \theta' ; \quad t_{kl} = \bar{t}_{\alpha\beta} \delta_{\alpha k} \delta_{\beta l} + t'_{kl}, \quad \text{v. b.} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

yazılabilir. O halde [21,23]'dekine benzer biçimde aşağıdaki varsayımları yapabiliriz:

1. Cismin (5.2)'deki hareketinde cismin şekil değiştirmesi çok küçük olsun. Diğer bir deyişle,

$$\text{norm} \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_\alpha} \right) \ll 1 \quad (5.4)$$

dir.

2. Şekil değiştirmenin zamana göre değişimi de çok küçük olsun. Diğer bir deyişle, C_0 cismin içerisinde ilerliyen tipik bir dalganın hızı olmak üzere

$$\frac{1}{C_0} \text{norm} (\partial_t u_k) \ll 1 \quad (5.5)$$

dir.

¹¹ Doğrusal olmayan denklemlerin bu tür ayrıştırılmaları ilk kez Hutter ve Pao [21] tarafından kullanılmıştır.

3. Sonsuz küçük şekil değiştirmeye oluşan tüm büyüklükler rijit konumdaki aynı büyüklüklerle karşılaştırıldığında çok küçük olsunlar. Diğer bir deyişle,

$$\left. \begin{aligned} \text{norm} \left(\frac{h_k}{H_\alpha} \right) &\ll 1, \quad \text{norm} \left(\frac{m_k}{M_\alpha} \right) \ll 1 \\ \text{norm} \left(\frac{\theta'}{\theta} \right) &= \text{norm} \left(\frac{\theta - \bar{\theta}}{\theta} \right) \ll 1, \quad \text{v.b.} \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

dır. (5.4-6)'da norm

$$\left\{ \text{norm}(u_{k\alpha}) \right\}^2 = \lim_{\tau \rightarrow t} \sup u_{k\alpha}(\tau) \cdot u_{k\alpha}(\tau) \quad (5.7)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Böylece, cismin sonsuz küçük şekil değiştirmesinden oluşan iki büyüklüğün çarpımı diğer büyüklüklerle karşılaştırıldığında daha da küçük olacağından diğer terimlerin yanında yapılacak ayrıştırma hesaplarında ihmal edilecektir.

Cismin şimdiki konumuna göre olan tüm türevleri (5.2)'den yararlanarak aynı cismin rijit konumuna göre olan türevler cinsinden yazmak mümkündür. (.) türevi alınabilir herhangi bir büyüklük ise

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_k} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_\alpha} = (\delta_{k\alpha} - u_{\alpha,k}) \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_\alpha} \quad (5.8)$$

dır. Örneğin, eğer (.) = u_α ise (5.4) ve (5.8)'den yararlanarak, $u_{\alpha,k}$ 'nin ikinci ve daha yüksek mertebeden gradyenleri gözönüne alınmadığında

$$u_{\alpha,k} = \delta_{k\beta} \frac{u_{\alpha,\beta}}{1 + u_{\alpha,\gamma}} \cong \delta_{k\beta} u_{\alpha,\beta} \quad (5.9)$$

elde edilir. Böylece, (2.2) ve (5.2) bağıntılardan ve varsayımlardan

$$\dot{X}_\alpha = \partial_t X_\alpha \quad (5.10)$$

olmak üzere hız ve ivme için

$$\left. \begin{aligned} V_k &= \dot{X}_\alpha \delta_{\alpha k} + \partial_t u_k + u_{k\alpha} \dot{X}_\alpha \\ a_k &= \partial_t^2 u_k + 2\dot{X}_\alpha \partial_t u_{k\alpha} + \dot{X}_\alpha \dot{X}_\beta u_{k\alpha\beta} + (u_{k\alpha} + \delta_{k\alpha}) \ddot{X}_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

elde edilir.

$$P = \bar{P} (1 - \mu_{\alpha,\alpha}) \quad (5.12)$$

dur. Eger, (5.12), (2.11)'de yerine konur ve (5.8) kullanılırsa

$$P a_\alpha = t_{\beta\alpha,\beta} + P f_\alpha^{(m)} - t_{\beta\alpha,\gamma} \mu_{\beta,\gamma} \quad (5.13)$$

elde edilir. (5.13)'de $f_\alpha^{(m)} = 0$ alınmış olup, ayrıca bünye yasalarının ayrılığı belli olmadığından yalnız $t_{\alpha\beta}$ kullanılmıştır. Aynı varsayımlar (2.19) ve (2.13)'de kullanılarak manyetik kuvvet ve enerji için

$$P \bar{f}_\alpha^{(m)} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{J}_\beta \mu_0 \bar{H}_\gamma + \mu_0 \bar{M}_\beta \bar{H}_{\alpha,\beta}$$

ve

$$P f_\alpha^{(m)} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (j_\beta \mu_0 \bar{H}_\gamma + \bar{J}_\beta \mu_0 h_{\gamma}) + \mu_0 m_{\beta\gamma} \bar{H}_{\alpha,\beta} + \mu_0 h_{\alpha,\beta} \bar{M}_\beta - \mu_{\beta\gamma} \bar{M}_\gamma \bar{H}_{\alpha,\beta} \quad (5.14)$$

olmak üzere

$$f_\alpha^{(m)} = \bar{f}_\alpha^{(m)} + f_\alpha^{\prime(m)} \quad (5.15)$$

dır.

Benzer biçimde tüm denklemleri rijit cisim konumunda ve pertürbasyon konumunda olmak üzere iki gruba ayırtırmak mümkündür. Bu gruplardaki denklemler sıra ile aşağıdadır.

1. CİSMİN RİJİT KONUMUNDAKİ DENKLEMLER

Bölüm II ve IV'deki denklemlerden ve (5.4-6)'deki varsayımlardan bazı hesaplamalardan sonra aşağıdaki denklemler elde edilir.

a) Maxwell denklemleri :

(2.14)'deki Maxwell denklemlerinde (5.2-6)'daki varsayımlar kullanılırsa

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}^{(m)} &= -\mu_0 \bar{M}_{\alpha,\alpha} \\ \bar{J}_\alpha^{(m)} &= \partial_t \mu_0 \bar{M}_\alpha - \mu_0 (\bar{M}_{\alpha,\beta} \dot{X}_\beta + \bar{P}^{(m)} \dot{X}_\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

olmak üzere, yan duruk manyetik alanlar için Maxwell denklemleri

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{E}_{\gamma\beta} + \mu_0 \partial_t \bar{H}_\alpha &= -\dot{\bar{J}}_\alpha^{(m)} \\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{H}_{\gamma\beta} &= \bar{J}_\alpha & ; \mu_0 \bar{H}_{\alpha\alpha} &= \bar{P}^{(m)} \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

dır. Diğer taraftan, $T_{\alpha\beta}$ 'nin boşluktaki ve maddesel kısımları (2.18)'den sıra ile

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_{\alpha\beta}^{(v)} &= -\frac{1}{2} \mu_0 \bar{H}_\gamma \bar{H}_\gamma \delta_{\alpha\beta} + \mu_0 \bar{H}_\alpha \bar{H}_\beta \\ \bar{T}_{\alpha\beta}^{(m)} &= \mu_0 \bar{M}_\alpha \bar{H}_\beta \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

olarak, (2.19)₂'den de

$$P \bar{L}_\alpha^{(m)} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mu_0 \bar{M}_\beta \bar{H}_\gamma \quad (5.19)$$

kolaylıkla yazılır. Böylece (5.16-19) yarı duruk manyetik alanlar için rijit cisim hareketi yapan cisimlerdeki Maxwell denklemleri olup, bu cisimlerle ilgili hareket yasalarının da bilinmesi gerekir.

b) Rijit cismin hareket denklemleri :

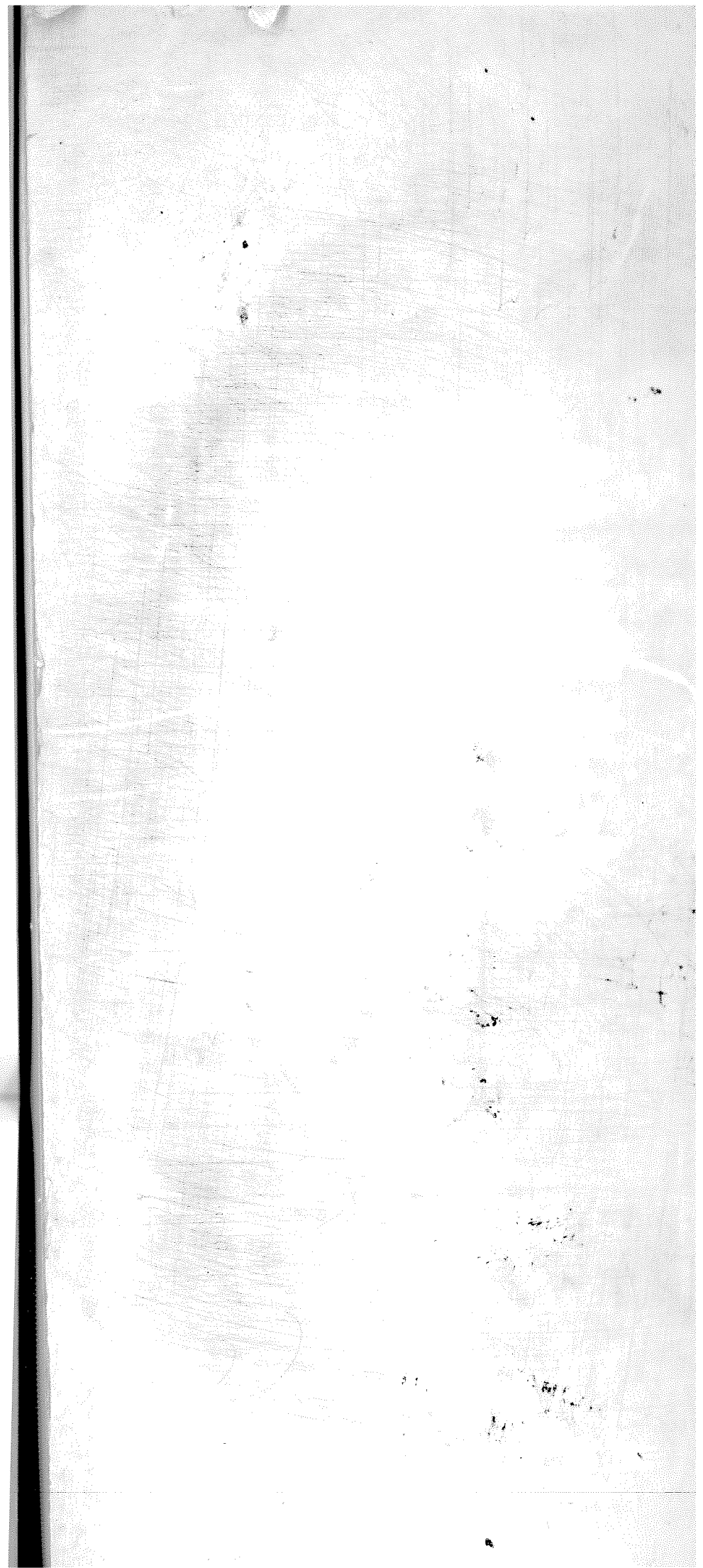
Hız ve ivmesi (5.11)'de verilen ve hareket denklemleri (5.13) olan şekil değiştiren cisimle ilgili denklemler yerine, rijit cisim için doğrusal momentum ve açısal momentumun denge kuralları tümlev biçiminde yeniden yazılarak elektromanyetik ve ısı alanları içindeki rijit cisimle ilgili hareket yasalarını elde etmek mümkündür. Varsayalım ki incelenen rijit cismin ağırlık merkezi \bar{X}_α hızı ile öteleme hareketi yapar ve Ω_α açısal hız ile dönerse, bu cismin herhangi bir noktasının hızı

$$\dot{X}_\alpha = \dot{\bar{X}}_\alpha + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \Omega_\beta (X_\gamma - \bar{X}_\gamma) \quad (5.20)$$

toplam kütle

$$M = \int_V \bar{P} dv$$

ve eylemsizlik momenti ise



$$I_{\alpha\beta} = \int_{V-\Sigma} \bar{p} [(x - \bar{x})^2 \delta_{\alpha\beta} - (x_\alpha - \bar{x}_\alpha)(x_\beta - \bar{x}_\beta)] dv \quad (5.22)$$

dir. Bu durumda rijit cismin öteleme ve dönme hareketiyle ilgili Euler denklemleri

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_\alpha &= \oint_{\partial V-\Sigma} \bar{T}_{\beta\alpha}^{(v)} N_\beta da \\ \bar{L}_\alpha &= \oint_{\partial V-\Sigma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\beta \bar{T}_{\gamma\alpha}^{(v)} N_\gamma da \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

olmak üzere

$$m \ddot{\bar{x}}_\alpha = \bar{F}_\alpha^y ; \quad (\overline{I_{\alpha\beta}} \dot{\Omega}_\beta) = \bar{L}_\alpha^y \quad (5.24)$$

dır. Buraya kadar yapılan işlemler özetlenirse, rijit hareket eden cismin (5.24)'ü sağlayan \bar{x}_α ve Ω_α hızlarının bulunabilmesi için, aynı cismin dış yüzeyinde (5.23) yardımı ile hesaplanan ve (5.18)'i sağlayan büyüklüklerin bilinmesi gerekir. Oysaki bu büyüklükler (5.17)'deki Maxwell denklemlerini sağlamaktadır. Bu nedenle (5.17) ve (5.24)'ün ortak çözülmesi zorunludur.

c) Enerji denklemi :

(2.13)'den elektrik ve ısıyı ileten rijit cisimle ilgili enerji denklemi

olarak

$$\bar{p} \bar{\theta} \dot{\eta} = \bar{J}_\alpha \bar{E}_\alpha - \bar{Q}_{\alpha,\alpha} \quad (5.25)$$

elde edilir.

d) Sınır koşulları :

Şekil değiştiren cismin şimdiki konumundaki yüzeyi açıkça bilinmediğinden bu yüzeyin normali \bar{n} ve yüzeye teğet birim vektörü \bar{k} 'da tam belirgin biçimde bilinmemektedir. Eğer cisim sonsuz küçük şekil değiştiriyorsa \bar{n} ve \bar{k} 'yı yaklaşık olarak rijit konumdaki normal vektör N_α , teğet vektör K_α ve u_α 'nın gradyanları cinsinden yazmak mümkündür, Ek-C.

(C.6) ve (C.13) sıra ile (2.16) ve (2.17)'de yerlerine konursa

$$\bar{E}_\alpha = \bar{E}_\alpha + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \dot{X}_\beta \mu_0 \bar{H}_\gamma \quad (5.26)$$

olmak üzere

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}_\alpha + \bar{M}_\alpha \bar{J} N_\alpha = 0 ; \quad \bar{E}_{\alpha\beta}^{(T)} \bar{J} N_\beta = 0 , \\ \bar{E}_{\alpha\beta}^{(T)} \dot{X}_\beta - \bar{Q}_\alpha \bar{J} N_\alpha = 0 ; \quad \bar{E}_{\alpha\beta}^{(T)} \bar{J} N_\alpha = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

ve

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}_\alpha \bar{J} K_\alpha = 0 , \\ \bar{E}_\alpha \bar{J} K_\alpha = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

elde edilir.

e) Bünye yasaları :

(5.2-6)'daki varsayımlar kullanılarak (4.9)'daki bünye yasalarından sıra

ile

$$\left. \begin{aligned} \bar{\eta} &= \sum^{(l)} \bar{\theta} + \sum_\alpha^{(m)} \bar{H}_\alpha , \\ \bar{M}_\alpha &= \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\sum_\alpha^{(m)} \bar{\theta} + \sum_{\alpha\beta}^{(m)} \bar{H}_\beta \right) , \\ \bar{E}_{\alpha\beta} &= \bar{\rho} \sum_{\alpha\beta\gamma}^{(E_m)} \bar{H}_\gamma + \pi_{\alpha\beta}^{(dc)} \bar{E}_\gamma + \pi_{\alpha\beta\gamma}^{(dg)} \bar{g}_\gamma + \bar{\rho} \sum_{\alpha\beta}^{(E)} \bar{\theta} , \\ \bar{J}_\alpha &= \pi_{\alpha\beta}^{(e)} \bar{E}_\beta + \pi_{\alpha\beta}^{(eg)} \bar{g}_\beta , \\ \bar{Q}_\alpha &= \pi_{\alpha\beta}^{(g)} \bar{g}_\beta + \pi_{\alpha\beta}^{(g')} \bar{E}_\beta \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

elde edilir. Böylece, (5.29)'daki denklemler elektrigi ve ısıyı ileten manyetik simetrik manyeto-termal anizotrop rijit katının doğrusal bünye yasalarıdır. (5.29)'daki 4. ve 5. denklemler ise rijit anizotrop katı ile ilgili Ohm ve Fourier yasalarının genelleştirilmiş biçimidir.

2. PERTURBASYON KONUSUNDAKİ DENKLEMLER

İlk gruptakine benzer biçimde bazı hesaplamalardan sonra etkileşmeyle ilgili hareket, Maxwell ve enerji denklemlerini, sınır koşullarını ve bünye yasalarını elde etmek mümkündür. Bu kesimdeki denklemler (a) grubundakilere göre daha karmaşık olup, (a)'daki büyüklükler bilindiğinde bu kesimler ancak doğrusaldır. Bu nedenle, uygulamada ilk önce (a)'daki denklem çözümlü, sonra bu büyüklükler (b)'de yerine konulduktan sonra (b)'dekiler ortak çözümlüdür.

a) Hareket denklemleri :

$$(5.14)'de \quad \rho f_{\alpha}^{(m)} \quad \text{'nin degeri (5.13)'de yerine konularak hareket}$$

denklemleri

$$\rho \partial_t^2 u_{\alpha} = \tau_{\beta\alpha,\beta} + \rho f_{\alpha}^{(m)} \quad (5.30)$$

biçiminde yazılır. (5.30)'da bünye yasaları belli olmadığından $\tau_{\alpha\beta}$ ve $f_{\alpha}^{(m)}$ 'nin ayrıştırılmış biçimi yazılmamıştır.

b) Maxwell denklemleri :

(5.16) ve (5.17)'deki denklemler elde edilirken

$$\left. \begin{aligned} \rho^{(m)} &= -\mu_0 m_{\alpha,\alpha} + u_{\alpha,\beta} \mu_0 \bar{M}_{\alpha,\beta} , \\ j_{\alpha}^{(m)} &= \partial_t \mu_0 m_{\alpha} + \mu_0 (m_{\alpha,\beta} \dot{x}_{\beta} - m_{\beta,\alpha} \dot{x}_{\alpha}) + \mu_0 (\bar{M}_{\alpha} \partial_t u_{\beta} \\ &\quad - \bar{M}_{\beta} \partial_t u_{\alpha})_{,\beta} + u_{\beta,\alpha} \mu_0 (\bar{M}_{\beta,\alpha} \dot{x}_{\alpha} - \bar{M}_{\alpha,\beta} \dot{x}_{\beta}) \end{aligned} \right\} (5.31)$$

olmak üzere, yarı duruk manyetik alanlar için Maxwell denklemleri olarak da

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta r} e_{r,\beta} + \mu_0 \partial_t h_{\alpha} &= -j_{\alpha}^{(m)} + u_{\beta,r} \epsilon_{\alpha r r} \bar{E}_{\sigma,\beta} , \\ \epsilon_{\alpha\beta r} h_{r,\beta} &= j_{\alpha} + u_{\beta,r} \epsilon_{\alpha r r} \bar{H}_{\sigma,\beta} , \\ \mu_0 h_{\alpha,\alpha} &= \rho^{(m)} + u_{\alpha,\beta} \mu_0 \bar{H}_{\beta,\alpha} \end{aligned} \right\} (5.32)$$

elde edilir.

c) Enerji denklemleri :

(2.13)'den (5.25) elde edilirken ayrıca

$$\bar{p}[(\theta' - \theta) u_{\alpha\alpha}] \dot{\eta} + \bar{\theta} \dot{\eta}' = \bar{J}'_{\alpha} \bar{E}'_{\alpha} + \bar{J}'_{\alpha} \bar{E}'_{\alpha} - \bar{J}'_{\alpha, \alpha} - u_{\alpha\beta} \bar{J}'_{\alpha, \beta} \quad (5.33)$$

da elde edilir.

d) Sınır koşulları :

Sonsuz küçük şekil değiştirme,

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha, \beta} + u_{\beta, \alpha}) \quad (5.34)$$

olmak üzere sınır koşulları

$$\left. \begin{aligned} & \bar{I} h_{\alpha} + m_{\alpha} + (\bar{H}_{\alpha} + \bar{M}_{\alpha}) e_{\beta\gamma} N_{\beta} N_{\gamma} - (\bar{H}_{\beta} + \bar{M}_{\beta}) u_{\alpha\beta} N_{\alpha} = 0, \\ & \bar{I} t'_{\alpha\beta} + \bar{t}'_{\alpha\beta} e_{\beta\gamma} N_{\gamma} N_{\sigma} - \bar{t}'_{\gamma\alpha} u_{\beta\gamma} N_{\sigma} = 0, \\ & \bar{I} \frac{1}{\theta} \left\{ \bar{J}_{\alpha} \left(1 - \frac{\theta'}{\theta}\right) + \bar{J}'_{\alpha} \right\} N_{\beta} N_{\gamma} e_{\beta\gamma} - \left(1 - \frac{\theta'}{\theta}\right) \bar{J}_{\beta} u_{\alpha\beta} N_{\alpha} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

ve

$$\left. \begin{aligned} & \bar{I} \bar{E}'_{\alpha} - \bar{E}_{\alpha} e_{\beta\gamma} K_{\beta} K_{\gamma} + \bar{E}_{\beta} u_{\beta, \alpha} N_{\alpha} = 0, \\ & \bar{I} h_{\alpha} - \bar{H}_{\alpha} e_{\beta\gamma} K_{\beta} K_{\gamma} + H_{\beta} u_{\beta, \alpha} N_{\alpha} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

dir. (5.35) ve (5.36)'de

$$\bar{E}'_{\alpha} = e_{\alpha} + \mu_{\alpha} e_{\alpha\beta\gamma} (\dot{\chi}_{\beta} h_{\gamma} + \partial_{\xi} u_{\beta} \bar{H}_{\gamma}) \quad (5.37)$$

ve

$$T'_{\alpha\beta} = -\mu_0 \bar{H}_\gamma h_{\gamma\alpha} \delta_{\alpha\beta} + \mu_0 (\bar{H}_\alpha + \bar{M}_\alpha) h_\beta + \mu_0 (h'_\alpha + m_\alpha) \bar{H}_\beta \quad (5.38)$$

olmak üzere

$$t'_{\alpha\beta} = t'_{\alpha\beta} + T'_{\alpha\beta} \quad (5.39)$$

dir. Son denklemdaki $t'_{\alpha\beta}$ ise (5.40)'deki bünye yasalarında tanımlanmıştır. (5.35) ve (5.36)'da sıra $e_{\alpha\beta} N_\alpha N_\beta$ ve $e_{\alpha\beta} K_\alpha K_\beta$ 'li terimlerin çarpanı olarak rijit konumdaki elektromanyetik büyüklükler olduğundan ihmal edilmemiştir.

e) Bünye yasaları :

Gerekli hesaplamadan sonra aşağıdaki bünye yasaları elde edilir.

$$\eta' = \sum^{(0)} \theta' + \sum_{\alpha}^{(m\theta)} (h'_\alpha + \mu_{\beta\alpha} \bar{H}_\beta) - \sum_{\alpha\beta}^{(E\theta)} e_{\alpha\beta} ,$$

$$m_\alpha = \sum_{\alpha\beta}^{(m)} h'_{\beta} + \frac{1}{\rho} \left[\sum_{\alpha}^{(m\theta)} \theta' + \left(\sum_{\beta}^{(m\theta)} \delta_{r\alpha} \bar{\theta} + \bar{\rho} \sum_{\beta\sigma}^{(m)} \bar{H}_\sigma \delta_{r\alpha} - \sum_{r\beta\alpha}^{(Em)} \right) \mu_{r,\beta} \right] ,$$

$$t'_{\alpha\beta} = \left(\sum_{\alpha\beta\gamma\sigma}^{(E)} + \Pi_{\alpha\beta\gamma\sigma}^{(d)} \right) \mu_{\gamma\sigma} + \sum_{\alpha\gamma} \mu_{\beta,\gamma} + \sum_{\beta\gamma} \mu_{\alpha,\sigma} - \sum_{\alpha\beta} \mu_{\sigma\sigma} + \left(\rho \sum_{\alpha\beta\gamma}^{(Em)} \bar{H}_\sigma + \Pi_{\alpha\beta\gamma}^{(de)} \bar{E}_\sigma + \Pi_{\alpha\beta\gamma}^{(dg)} \bar{g}_\sigma \right) \mu_{\sigma,\gamma} + \rho \sum_{\alpha\beta\gamma}^{(Em)} h'_{\gamma} + \Pi_{\alpha\beta\gamma}^{(de)} \bar{E}'_\gamma + \Pi_{\alpha\beta\gamma}^{(dg)} \bar{g}'_\gamma + \rho \sum_{\alpha\beta}^{(E\theta)} \theta' + \mu_0 (h'_\alpha \bar{M}_\beta + \bar{H}_\alpha m_\beta) , \quad (5.40)$$

$$j_\alpha = \Pi_{\alpha\beta}^{(e)} \bar{E}'_\beta + \Pi_{\alpha\beta}^{(eg)} \bar{g}'_\beta + \left[\Pi_{\alpha\beta}^{(ed)} \partial_\beta + \left(\Pi_{\beta\sigma}^{(e)} \bar{E}_\sigma + \Pi_{\beta\sigma}^{(eg)} \bar{g}_\sigma \right) \delta_{r\sigma} + \Pi_{\alpha\beta}^{(e)} \bar{E}'_\gamma + \Pi_{\alpha\beta}^{(eg)} \bar{g}'_\gamma - \left(\Pi_{\alpha\sigma}^{(e)} \bar{E}_\sigma + \Pi_{\alpha\sigma}^{(eg)} \bar{g}_\sigma \right) \delta_{r\beta} \right] \mu_{r,\beta} ,$$

$$q'_\alpha = \pi_{\alpha\beta}^{(g')} g'_\beta + \pi_{\alpha\beta}^{(g'')} \varepsilon'_\beta + \left[\pi_{\alpha\gamma\beta}^{(g')} \varrho'_\beta + (\pi_{\beta\sigma}^{(g'')} \varepsilon'_\sigma + \pi_{\beta\sigma}^{(g''')} \bar{g}_\sigma) \delta r_\alpha \right. \\ \left. + \pi_{\alpha\beta}^{(g''')} \varepsilon_\beta + \pi_{\alpha\beta}^{(g''')} \bar{g}_\beta - (\pi_{\alpha\sigma}^{(g''')} \varepsilon'_\sigma + \pi_{\alpha\sigma}^{(g''')} \bar{g}_\sigma) \delta r_\beta \right] u_{r,\beta}$$

dir. (5.40)₃'de

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Sigma}_{\alpha\beta} &= \rho_0 \left(\sum_{\alpha\gamma\sigma}^{(Em)} \bar{H}_\sigma + \sum_{\alpha\gamma}^{(E\theta)} \bar{\theta} \right) + \pi_{\alpha r\sigma}^{(de)} \varepsilon'_\sigma + \pi_{\alpha r\sigma}^{(de)} \bar{g}_\sigma \\ \bar{\Sigma}_{r\beta} &= \rho_0 \left(\sum_{r\beta\sigma}^{(Em)} \bar{H}_\sigma + \sum_{r\beta}^{(E\theta)} \bar{\theta} \right) + \pi_{r\beta\sigma}^{(de)} \varepsilon'_\sigma + \pi_{r\beta\sigma}^{(de)} \bar{g}_\sigma \\ \bar{\Sigma}_{\alpha\beta} &= \rho_0 \left(\sum_{\alpha\beta r}^{(Em)} \bar{H}_r + \sum_{\alpha\beta}^{(E\theta)} \bar{\theta} \right) + \pi_{\alpha\beta r}^{(de)} \varepsilon'_r + \pi_{\alpha\beta r}^{(de)} \bar{g}_r \end{aligned} \right\} (5.41)$$

dir. Yukardaki bünye yasalarında görüldüğü gibi $u_{\alpha,\beta}$ ve $\partial_t u_{\alpha,\beta}$ büyüklükleri η , m_α , j_α ve q'_α 'yı etkilemektedir. Bu ise cismin şekil değiştirme sinin ve de şekil değiştirmenin zamana göre değişiminin bünye yasalarına etkisini göstermektedir.

VI. ÖZEL DURUMLAR, BAZI DOŞUNCE VE ÖNERİLER

1. ÖZEL DURUMLAR

Önceki bölümlerdeki elde edilen denklemlerin karmaşık olmasının asıl nedeni ele alınan fiziksel olayda birçok etkileşmenin birarada olmasındandır. Bunun yanısıra, zamana ve konuma bağlı alanlar olduğu gibi en genel anizotropluğu olan cisim, hem öteleme hem de dönme hareketi yapmaktadır. Böylece, incelenen fiziksel olayı yönlüten denklemlerden daha önce yapılmış olan araştırmalardaki eşdeğer denklemleri elde etmek mümkündür [12-14, 21, 26, 27]. Uygulamada, tüm bu genellikteki denklemleri kullanmak gerekmez. Böylece, önceki kesimdeki denklemlerden cismin özel durumu ile, örneğin özel simetrisi olan cisimler ve/ya da bazı alanların olmaması gibi, ilgili alanları elde etmek mümkündür. Bu özel durumlar şunlar olabilir.

a) Cismin simetrisi :

(4.8)'deki varsayma ek olarak cismin simetrisi ile ilgili diğer varsayımlar yapmak mümkündür. (i) Cismin manyetik simetrisinin olmaması, (ii) Cismin bir merkeze göre simetrik olması, (iii) Cismin belirli simetrisinin olması, (iv) Cismin izotrop olması gibi.

i) Manyetik simetrisiz cisim:

Eğer cisim 90 tane olan manyetik kristal gruplardan $\{M\}$ 32'si olan $\{S\}$ 'ye ait ise (4.4)'deki

$$\sum_{\alpha\beta\gamma}^{(Em)} = \sum_{\alpha}^{(m\theta)} = 0 \quad (6.1)$$

dır. ¹² (6.1)'deki büyüklüklerin sıfır olmayan bileşenleri ferromanyetik, ferrimanyetik ve antiferromanyetik cisimlerdir [47, 56].

Böylece eğer cismin simetri öğeleri $\{M\}$ 'ye ait değilse (6.1) gerçekleşir ve (5.40)'daki bünye yasaları basitleşir. Sonuçta ise bazı fiziksel etkileşimler olan piezo-manyetik ve payro-manyetik olaylar kaybolur.

ii) Bir merkeze göre simetrik cisimler:

Eğer cismin simetri öğeleri içerisinde bir merkeze göre simetri öğesi de var ise bu kez mertebesi tek olan tüm katsayı tansörleri sıfırdır.

Diğer bir deyişle (5.40)'daki

$$\sum_{\alpha}^{(m\theta)} = \sum_{\alpha\beta\gamma}^{(Em)} = \prod_{\alpha\beta\gamma}^{(dg)} = \prod_{\alpha\beta\gamma}^{(cd)} = \prod_{\alpha\beta\gamma}^{(g^d)} = 0 \quad (6.2)$$

¹² Eğer $S^i \in \{S\}$ olmak üzere \mathcal{R} ile kombinasyonu var ise $\mathcal{R}S^i = S^i \in \{M\}$

dir. Eger (6.2) sağlanıyorsa, etkileşim olayında bazı fiziksel olayları gözlemek mümkün değildir. Bu nedenle (6.2)'deki varsayım geçerli olduğunda cismin genel anizotrop- luğu gözönüne alınmamış demektir. Genellikle bu tür cisimler doyumsuz ve yumuşak ferro- manyetik cisimlerin bazıları ve paramanyetik cisimlerdir.

iii) Cismin belirli simetrisinin olması :

Eğer cismin hegzogonal, trigonal, tetragonal, kubik v.b. türünden simet- rileri belli ise katsayı tansörlerinin sıfır olmayan öğeleri klâsik ya da grup teorik yöntemler kullanılarak hesaplanırlar [77, 78].

iv) İzotrop cisimler :

Eğer incelenen cisim izotrop varsayılırsa mertebesi tek olan katsayı tan- sörleri sıfır olduğu gibi mertebesi çift olanları da Kronecker deltalar cinsinden yaz- mak mümkündür [79]. Bu durumda, payro-manyetik, piezo-manyetik v.b. etkileşimler kaybo- lurken bünye yasaları da oldukça basitleşirler. Fakat cismin şekil değiştirmesinden ve hareketli olmasından dolayı bünye yasalarında yine de bir anizotropluk olduğu gözlen- mektedir.

b) Bazı Alanların Olmaması :

i) Eğer şekil değiştiren cismin rijit hareketi önlenemiyorsa, elde edilen denklemlerde $\dot{\chi} = Q$ konarak ilgili denklemler elde edilir. Bu denklemler önceki durumlara göre daha basittirler.

ii) Eğer cisim elektrik ve ısıyı iletmiyorsa, enerjinin dissipatif olması cismin yalnız vizkoz özelliğinden ileri gelecektir. Bu durumda ilgili denklemlerde $\nabla = \underline{Q} = Q$ konarak gerekli denklemler elde edilir. Bu durumda ister cismin elekt- rik ve ısıyı iletmesin ya da iletmesin diğer değişkenlerle ilgili bünye yasalarında bir değişiklik olmamaktadır.

iii) Eğer elde edilen denklem takımlarında $\dot{E}_{KL} = 0$ ya da $E_{KL} = 0$ konacak olursa, yarıduruk manyetik alanlarla ilgili manyeto-termoelastik ya da manyeto- termovizkoz katılarla ilgili denklemler kolaylıkla elde edilir. Örneğin, eğer $E_{KL} = 0$ ilgili denklemlerde yerine konur ve ayrıca cisim de izotrop varsayılırsa manyetohidro- dinamik ile ilgili denklemler elde edilebilmektedir.

iv) Daha sonra, eğer $H = Q$ ve böylece $M = \nabla = Q$ önceki denklemlerde yerlerine konursa sıf termovizkoelastik katılarla ilgili bağıntı- lar bulunur. Elde edilen denklemlerin yayınlarla uyumlu olduğu görülmektedir [59, chp.9].

Bazı alanların yokluğu ile ilgili diğer özel durumlarda benzer biçimde yapılabilir.

c) Diğer özel durumlar :

i) Kesim V.b'deki denklemlere bakıldığında iki tür terimler gözükmektedir. Bu terimler $\bar{H}_\alpha, U_{\alpha,\beta}, \bar{M}_\alpha, U_{\alpha,\beta}, \bar{\theta}, U_{\alpha,\alpha}$ v.b. ile $k_\alpha, m_\alpha, \theta'$ v.b. gibidir. Bu iki gruptaki büyüklüklerin mertebeleri v.b.

varsayılarak ilgili denklemlerin hepsinde yazılmışlardır. Eger daha önceden bu büyüklüklerden bir gruptaki olanlar diğerlerine göre çok küçük ise o zaman bu büyüklükleri ihmal etmek mümkündür. Örneğin, eğer şekil değiştirme çok küçük ve etkin alanlarda pertürbasyon alanlarının yanında çok büyük değilse $\vec{H}_\alpha \ll h_\alpha$, $\vec{M}_\alpha \ll M_\alpha$ v.b. varsayımları yapabiliriz. Bu durumda ilgili denklemler önceki duruma göre daha da basitleşecek ve şekil değiştirmenin getirdiği anizotropluk ortadan kalktığı gibi, (V.a) ve (V.b)'deki denklem takımları arasındaki benzerlikler de artacaktır. Cismin sonsuz küçük şekil değiştirmesinin daha etkin olduğu benzer durumu $\vec{H}_\alpha \gg h_\alpha$ v.b. içinde düşünmek mümkündür.

ii) Kesim V'in başında değişik türlerde elde edilen denklemlerin doğrusallaştırılmasının mümkün olduğu belirtilmişti. Bu türlerden 4 üncüsü bu araştırmada uygulanıp ilgili denklemler elde edilmiştir. Benzer biçimde diğer üç türde de ayırıştırma yapmak mümkündür. Özellikle, etkin alanların uniform olduğu varsayılırsa rijit konumdaki denklemler için bir çözüm yapmaya gereksinme olmayıp, pertürbasyon konumundaki denklemlerde oldukça basitleşmektedir. Eger ayrıca cismin özel simetrisi de (özellikle izotrop cisimler) gözönüne alınırsa denklemler analitik ve sayısal olarak gözülebilecek düzeyde basitleşmektedir.

2. BAZI DÜŞÜNCE VE ÖNERİLER

i) Elektromanyetik büyüklüklerden manyetik alan, manyetik indüksiyon (manyetik akı yoğunluğu vektörü) ve manyetizasyon bünye yasalarında yer alıyorsa cismin simetrisinde manyetik simetri gözönüne alınmalıdır.

ii) Doğrusal bünye yasaları olan (4.1) ve (4.4)'den türetilen yasalar yerine daha yüksek mertebeden etkileşmeleri de kapsıyan (ikinci mertebeden anizotropluk, piezo-payro-manyetik olay v.b.) bünye yasalarını da bu çalışmadaki bağlantılardan elde etmek mümkündür.

iii) Bünye yasaları elde edilirken genellikle enerjinin ilgili bağımsız değişkenlere göre seri açılımı (polinom yaklaşımı) gözönüne alınmaktadır. Daha sonra kat sayı tansörlerinin sıfır olmayan bileşenleri cismin simetri öğelerinden yararlanarak hesaplanmaktadır. Sıfırdan farklı katsayılar belirli fiziksel etkileşim olayının o cisimde var olduğunu belirlemektedir. Bu yöntem daha yüksek mertebeden etkileşimlerle ilgili bünye yasalarını da vermekte ise de, problem kapalı bir biçimde tam çözülememektedir. Bu nedenle, değişmezlik (invariantlık) kuralının uygulanması sözü edilen sınırlamayı ortadan kaldırmaktadır.

iv) Böylece, cismin manyetik yapısı gözönüne alınarak tüm simetri öğeleri için skaler potansiyeli değişmez bırakan potansiyel ilkönce bulunup, daha sonra da (3.11) ve (3.16)'dan bünye yasalarının elde edilmesi daha rasyonel bir yöntemdir. Manyetik simetrik kristallerin skaler değişmezlerinin klâsik kristallerin tamlik bazlarından (integrity basis) nasıl elde edilebileceği [77]'de gösterilmiştir.

v) Manyeto-termovizkoelastik cismin manyetik doyumluluğu, manyetik histerisis, manyetik değişebilen olay v.b. olayları da içeren bünye yasalarını da elde etmek mümkün olup ayrı bir araştırmada incelenebilir.

vi) Chu formülasyonunda da Maxwell denklemlerini skaler ve vektör potansiyeller cinsinden yazmak mümkündür. Bu durum yarıduruğ manyetik alanlar için yapıldığında sayıca az, biğimsel olarak biraz daha farklı denklemlerin elde edilmesine yararmaktadır.

vii) Bu araştırmanın özel durumlar bölümünde belirtildiği gibi, eğer cismin belirli simetrisi varsa ve de etkin elektromanyetik ve ısı alanları üniform ise elde edilen denklemleri çözmek, daha da kolaylaşmaktadır. Bu nedenle, elektrik ve ısıyı ileten, üniform manyetik ve ısı alanlarının etkisindeki izotrop manyeto-termo vizkoelastik ortamlarda yayılan düzlem elektromanyeto-termo-mekanik dalgalar ayrı bir araştırma konusu olarak incelenebilir. Ayrıca, etkin üniform manyetik alan içerisinde elektrigi ileten piezomanyetik elastik (ya da vizkoelastik) ortamda yayılan elektromanyeto-mekanik dalgalar, titreşen plak v.b. ayrı ayrı araştırma konuları olup, bu yönde değişik araştırmalar yapmak mümkündür.

ÖZET

Elektromanyetik alanların şekil değiştiren cisimlerle olan etkileşimleri hakkındaki araştırmalar son 20 yılda dielektrik ya da manyetik cisimlerle ilgili duruk, yarı duruk kuramlar ve dinamik elektromanyetik kuramlar biçiminde değişik evrimlerden geçmektedir. Bu çok sayıda araştırmalarda cismin manyetik simetrisini gözönüne alındığı gibi, birçoğunda da cismin elektrigi ve ısıyı iletmesinin dışındaki enerji yitirmesi düşünülmemiştir. Fakat, piezomanyetizma ve payromanyetizma gibi bazı fiziksel olayların açıklanmasında manyetik simetrisinin düşünülmesi gerektiğinden kuramsal ve deneysel deliller vardır. Böylece, bu araştırmada yarı duruk manyetik alan, ısı ve vizkoelastik (Kelvin-Voigt türünde) alanların manyetik simetrisini anizotrop katılardaki relativistik olmayan makroskopik etkileşimleri içeren, kuramın geliştirilmesi temel konudur. Kuramda, cismin elektrik ve ısıyı iletmediği de ayrıca varsayılmaktadır.

Temel kurallardan elde edilen denklemler sayıca bilinmeyenlerin belirlenmesinde yeterli olmadıktan sonra, manyeto-termovizkoelastik anizotrop cismin kendine özgü özelliklerini tanımlayan bünve denklemleri sürekli ortam mekanizmasının aksiyomları kullanılarak çıkarılmıştır. Entropi, manyetizasyon ve gerilme tansörünün sönümsüz kısmının bir potansiyelden çıkarılabileceği, ve diğer değişkenlerin de artık eşitsizliği sağladığı gösterilmiştir. Bu eşitsizliğin minimum değerinden, gerilme tansörünün sönümlü kısmının, elektrik akım ve ısı akış vektörlerinin bünve denklemleri çıkarılmıştır. Böylece, elektrik iletimiyle ilgili genelleştirilmiş Ohm yasası ve ısı iletimiyle ilgili genelleştirilmiş Fourier yasası elde edilmiştir.

Herne kadar cismin doğrusal davranışını düşünmüş ise de, etkileşen sürekli ortamı yöneltten denklemler doğrusal değildir ve karmaşıktır. Bu nedenle, etkin manyetik alanla manyetize olan, elektrik akımı ve diğer kaynaklarla ısıtılan cismin, rijit hareketi üzerine bindirilen (superimpose) sonsuz küçük dinamik şekil değiştirme vasıtasıyla sonuçtaki tüm denklemler iki gruba ayrıştırılmıştır. Doğrusallaştırılmada, cismin varsa rijit hareketi manyetik ve termal olanlar üzerindeki etkinliğinin belirgin bünve yüklerde olduğu varsayılmıştır. Bu ayrıştırmanın yararı, pertürbasyon konumundaki olayı yöneltten denklemler rijit cisimdeki değişkenler bilindiğinde doğrusaldır. Daha sonra, cisim yarı duruk manyetik alan içerisinde olduğunda Euler'in rijit cisim hareketiyle ilgili denklemleri elde edilmiştir. Sonra, cismin özel simetrisindeki durumlar ve bazı alanların olmasının etkileri tartışılmıştır. Bazı özel simetrisinde etkileşimle ilgili olayların yok olduğu ve başlangıçta izotrop olan cismin sonsuz küçük şekil değiştirilmesinin cismin anizotropluğuna sebep olduğu gözlenmiştir.

SUMMARY

The investigations about the interaction of electromagnetic fields with deformable continua have undergone several stages of evaluation such as static, quasistatic theories of dielectric or magnetic materials, and dynamic theories of electromagnetic continua during the last 20 years. This myriad of investigations does not take into account the magnetic symmetry of the materials, and several of them do not consider the dissipation of the material other than electrical and thermal conduction. However, there are theoretical and experimental evidences that the magnetic symmetry must be considered to explain certain physical phenomena, such as piezomagnetism and pyromagnetism. Thus, in the present investigation, the development of a macroscopic nonrelativistic theory which embodies the interaction of a quasistatic magnetic, thermal and viscoelastic (Kelvin-Voigt type) fields in anisotropic solids having magnetic symmetry is of primary concern. In the theory, it is also assumed that the material under study conducts electricity and heat.

Since the equations obtained from the pertinent principles are, in number, inadequate for the determination of the unknowns the constitutive equations, characterizing the properties of magneto-thermoviscoelastic anisotropic materials, are derived by means of the axioms of continuum mechanics. It is shown that entropy, magnetization and the nondissipative part of stress tensor is derivable from a potential and the other variables satisfy the residual inequality. From the minimum value of this inequality, the constitutive equations for the dissipative part of stress tensor, electric current and heat flux vectors are derived. Thus, the generalized Ohm law of electrical conduction and Fourier heat conduction law are obtained.

Even if the linear behavior of the material is considered, the governing equations of the interacting continua, however, are nonlinear and complicated. Therefore, all the resulting equations are decomposed into two groups by superimposing infinitesimal dynamic deformations on a rigid body motion where the body is magnetized by the primary magnetic field and heated by the electrical current and other sources. In the linearization, the rigid body motion, if any, is assumed to have a dominant effect on the magnitude of the magnetic and thermal fields. The advantage of the decomposition is that the governing equations in the perturbation state are linear provided that the rigid body variables are known. Further, the Euler equations for rigid body motions are obtained when the body is immersed in a quasistatic magnetic field. Later, the special cases of the material symmetry and the effects of vanishing certain variables are discussed. It is observed that some of the interacting phenomena disappear due to the special symmetries of the material and the infinitesimal deformation causes anisotropy even though the material is initially isotropic.

KAYNAKLAR

- [1] Toupin, R.A., J. Rational Mech. and Analy. 5, 849 (1956).
 [2] Eringen, A.C., Int.J.Engng. Sci. 1, 127 (1963).
 [3] Grindlay, J., Phys.Rev. 149, 637 (1966).
 [4] Toupin, R.A., Int. J. Engng. Sci. 1, 101 (1963).
 [5] Midlin, R.D., Int.J.Solids Structure 4, 637 (1968).
 [6] Şuhubi, E., Int.J.Engng.Sci. 7, 993 (1969).
 [7] Romano, A., Ricerche di Matematica 22, 282 (1973).
 [8] Wong, H.C. and Grindlay, J., Adv.Phys. 23, 261 (1974).
 [9] Maugin, G.A., Letters in Appl.and Engng.Sci. 2, 293 (1974).
 [10] Maugin, G.A., Arch.Mech. 28, 679 (1976).
 [11] Maugin, G.A., Arch.Mech. 29, 143 (1977).
 [12] Tiersten, H.F., J.Math.Phys. 5, 1298 (1964).
 [13] Tiersten, H.F., J.Math.Phys. 6, 779 (1965).
 [14] Brown, W.F. Jr., Magnetoelastic Interactions, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
 [15] Parkus, H., Magneto-Thermo-Elasticity (CISM Lecture Notes) Springer-Verlag, Berlin, 1972.
 [16] Maugin, G.A. and Eringen, A.C., J.Math.Phys. 4, 143, 1334 (1972).
 [17] Romano, A., Ricerche di Matematica 23, 255 (1974).
 [18] Alblas, J.B., Electro-Magneto-Elasticity, Topics in Appl. Continuum Mechanics (ed. J.L. Zeman and F. Ziegler) Springer-Verlag, Berlin, 1975.
 [19] Maugin, G.A., J.Math.Phys. 17, 1727 (1976).
 [20] Walker, J.B., Accad.Nazio.dei Lincei 38, 647 (1965).
 [21] Hutter, K. and Pao, Y.H., J. Elasticity, 4 89 (1974).
 [22] Borghessai, R. and More, A., Meccanica 9, 63 (1974).
 [23] Ersoy, Y., METU J. Pure and Appl.Sci. 9, 145 (1976).
 [24] Jordan, N.F. and Eringen, A.C., Int. J. Engng. Sci. 2, 59 (1964).
 [25] Tiersten, H.F., Int. J. Engng. Sci. 9, 587 (1971).
 [26] Tiersten, H.F. and Tsai, C.F., J.Math.Phys. 13, 361 (1971).
 [27] Pao, Y.H. and Yeh, C., Int.J.Engng. Sci. 11, 415 (1973).
 [28] Hutter, K., Arch.Rational Mech. and Analys 58, 339 (1975).
 [29] Maugin, G.A., Letters in Appl. and Engng. Sci. 4, 3 (1976).
 [30] Ersoy, Y., Zeitschrift für an Angewante Mathematik und Physik (1978'de yayınlanacak).

- [31] Dixon, R.C. and Eringen, A.C., *Int. J. Engng. Sci.* 3, 359 (1965).
- [32] Bressan, A., *Ann. Mat. Pura Appl.* 62, 99 (1963).
- [33] Grot, R.A., and Eringen, A.C., *Int. J. Engng. Sci.* 4, 611 (1966).
- [34] Penfield, P.Jr. and Haus, H.A., Electrodynamics of Moving Media, The M.I.T. Press, Cambridge, 1967.
- [35] Ramirez, G.A. and Lians, G., *Acta Mech.* 6, 326 (1968).
- [36] De Grot, R.S. and Suttorp, L.G., *Physica* 37, 284 (1967).
- [37] De Grot, R.S. and Suttorp, L.G., *Physica* 39, 28, 41, 61, 77 (1968).
- [38] Baulanger, Ph. and Mayne, G., *Bull. Acad. Roy. Sc. Belgium* 57, 872 (1971).
- [39] Baulanger, Ph. and Mayne, G., *Arch. Rational Mech. Anal.* 53, 295 (1974).
- [40] Collet, B. and Maugin, G.A., *C.R. Acad. Sc. Paris* 279 B, 279, 379 (1974).
- [41] Romano, A., *Accad. di Sci. Fisiche e Mate. Soc. Nazio di Sci.* 40, 235 (1973).
- [42] Romano, A., *Meccanica* 9, 244 (1974).
- [43] Toupin, R.A. and Rivlin, R.S., *Arch. Rational Mech. Anal.* 6, 188 (1960).
- [44] Pipkin, A.C. and Rivlin, R.S., *Accad. Nazion dei Lincei* 8, 1 (1966).
- [45] Coleman, B.D. and Dill, E.H., *Arch. Rational Mech. Anal.* 41, 132 (1971).
- [46] Lax, M. and Nelson, D., *Phys. Rev.* B-4, 3694 (1971).
- [47] Birss, R.R., Symmetry and Magnetism, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1964.
- [48] O'Dell, T.H., *Phil. Mag.* 7, 1653 (1962).
- [49] Pao, Y.H., *Letters in Appl. and Engng. Sci.* 4, 75 (1976).
- [50] McCarthy, M.F., *Arch. Rational Mech. and Anal.* 41, 333 (1971).
- [51] Romano, A., *Ricerche di Matematica* 22, 282 (1973).
- [52] Boulanger, Ph. and Mayne, G., *Letters in Appl. and Engng. Sci.* 4, 19 (1976).
- [53] Maugin, G.A., *Physica* 81 A, 454 (1975).
- [54] Müller, I., *Arch. Rational Mech. and Anal.* 26, 118 (1967).
- [55] Hutter, K., Thermodynamic Aspects in Field Matter Interactions, CISM Lecture Notes, Udine 1977.
- [56] Bhagavantam, S., Crystal Symmetry and Physical Properties, Academic Press, New York 1966.
- [57] Fano, R.M. Chu, L.J. and Adler, R.B., Electromagnetic Fields, Energy and Forces, John Wiley and Sons, Inc., New York 1960.
- [58] Tai, C.T., *Radio Sci.* 2, 245 (1967).
- [59] Eringen, A.C., Mechanics of Continua, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1967.
- Ersoy, Y., A Dynamic Theory for Polarizable and Magnetizable Magneto-Electro Thermo-Viscoelastic Anisotropic Solids with Thermal and Electrical Conductions, Ph.D Thesis, M.E.T.U., Ankara 1976.
- [60] Grot, R.A., Continuum Physics Vol. III (ed. A.C. Eringen) Academic Press, New York 1976.

- [61] Grot, R.A., Continuum Physics Vol. III (ed.A.C. Eringen) Academic Press, New York 1976.
- [62] Ersoy, Y., TMMOB Elektrik Müh. Odası Dergisi (yayınlanacak).
- [63] Knopoff, L., J. Geophys. 60, 441 (1955).
- [64] Chadwick, P., Ninth Int. Cong. Appl. Mech. I, 143 (1957).
- [65] Dumkin, J. and Eringen, A.C., Int.J.Engng.Sci. 1, 461 (1963).
- [66] Kaliski, S., Proc. Vibration Prob. 3, 231 (1965).
- [67] Paria, G., Magneto-Elasticity and Magneto-Thermo-Elasticity, Adv.Appl.Mech., Academic Press, New York, 1967.
- [68] Willson, A.J., Proc.Comb.Phil.Soc. 59, 483 (1963).
- [69] Tokuota, T. and Kobaysti, M., Letters in Appl.Engng.Sci. 2, 203 (1974).
- [70] Saito, M. and Tokuato, T., Int.J.Engng.Sci 14, 537 (1976).
- [71] Madan, V.P., Tensor, N.S. 21, 204 (1970).
- [72] Chadrasekharaiyah, D.S., Tensor, N.S., 22 285 (1971).
- [73] Chadrasekharaiyah, D.S., Tensor, N.S. 23, 793 (1972).
- [74] Charasekharaiyah, D.S., Tensor, N.S., 24, 21 (1973).
- [75] Ersoy, Y., Int. Engng.Sci. (1978'de yayınlanacak).
- [76] Şuhubi, E.S., Int. J. Engngn Sci. 2, 441 (1965).
- [77] Mert, M. and Kiral, E., Int. J. Engng.Sci. 15, 281 (1977).
- [78] Kiral, E. and Smith, G.F., Int. J. Engng.Sci. 12, 471 (1974).
- [79] Jefferys, J.F., Cartesian Tensors, Cambridge Press, London 1965.

Ek - A Denge Denklemlerinin Tümler ve Türesel Biçimleri

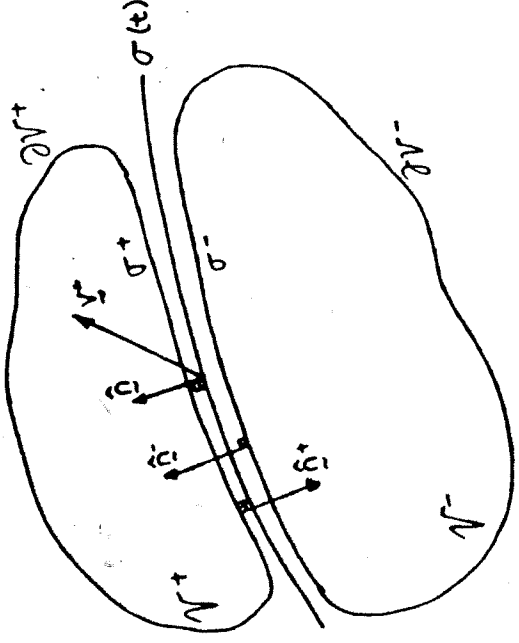
Sürekli ortam mekaniğinin temel kurallarındaki formlerin tümler (integral, global) biçimleri

$$\frac{d}{dt} \int_{V^{\pm}} \Phi dv = \int_{V^{\pm}} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \cdot \hat{n} da + \int_{V^{\pm}} \chi dv \quad (A.1)$$

dir. Elektromanyetik kuramla ilgili temel formlerin (Maxwell denklemlerinin) biçimi (A.1) ve

$$\frac{d}{dt} \int_{V^{\pm}} \mathcal{L} \cdot \hat{n} da = \int_{V^{\pm}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} ds + \int_{V^{\pm}} \mathcal{L} \cdot \hat{n} da \quad (A.2)$$

dir. Diğer taraftan, \mathcal{V} hızı ile hareket eden ∂V yüzeyi ve \mathcal{V}^* hızı ile hareket eden süreksiz yüzey $\sigma(t)$ ile sınırlanan maddesel bir $V = V^+ + V^-$ hacim gözönüne alındığında, Şekil (A.1)



Şekil 3. Süreksiz Yüzey

(A.1)' in sol tarafı

$$\frac{d}{dt} \int_{V^+} \Phi dv = \int_{V^+} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dv + \int_{\partial V^+} \Phi \cdot \hat{n} da - \int_{\sigma(t)} \Phi \cdot \hat{n} da \quad (A.3)$$

dir [59]. (A.3)'de altında tilda bulunan köşeli ayraç [] içerisindeki büyüklüğün süreksizliği gösterilmektedir. Diğer bir deyişle $(\cdot)^+$ ve $(\cdot)^-$ sıra ile $\sigma(t)$ 'nin normal birim vektörü olan \hat{n} 'nin artı ve eksi tarafındaki büyüklükler ise

$$[\tilde{(\cdot)}] \equiv (\cdot)^+ - (\cdot)^- \quad (A.4)$$

dir. Eger Green-Gauss teoremi

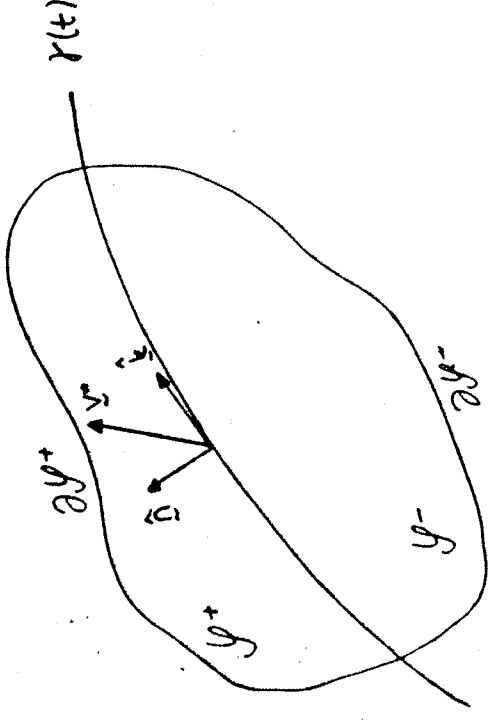
$$\oint_{\mathcal{V}-\sigma} \tilde{\chi} \cdot \hat{n} da = \int_{\mathcal{V}-\sigma} \nabla \cdot \tilde{\chi} dv + \int_{\sigma(t)} [\tilde{\chi}] \cdot \hat{n} da \quad (A.5)$$

(A.3)'nin sağ tarafındaki ikinci terime uygulanırsa (A.3)'den

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}-\sigma} \Phi dv = \int_{\mathcal{V}-\sigma} [\alpha_t \Phi + \nabla \cdot (\Phi \underline{v})] dv + \int_{\sigma(t)} [\Phi(\underline{v} - \underline{v}^*)] \cdot \hat{n} da \quad (A.6)$$

elde edilir.

Benzer yaklaşım Şekil A.2'de görülen \underline{v} hızı ile hareket eden $\partial \mathcal{V}$ çizgisi ve \underline{v}^* hızı ile hareket eden süreksiz $\chi(t)$ çizgisi ile oluşturulan \mathcal{V} kapalı yüzeyi içinde yazılabilir.



Şekil 4. Süreksizlik Çizgisi

şöyle ki : \mathcal{V} gibi bir alan için

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}-\gamma} \underline{v} \cdot \hat{n} da = \int_{\mathcal{V}-\gamma} (\alpha_t \underline{v} + \nabla \cdot \underline{v} \underline{v}) \cdot \hat{n} da + \oint_{\partial \mathcal{V}-\gamma} \underline{v} \cdot \underline{k} ds \quad (A.7)$$

dir. Eger (A.7)'in sağ tarafındaki ikinci terimi için Stokes teoremi

$$\oint_{\partial \mathcal{V}-\gamma} \underline{v} \cdot \underline{k} ds = \int_{\mathcal{V}-\gamma} (\nabla \wedge \underline{v}) \cdot \hat{n} da + \int_{\gamma(t)} [\tilde{\chi}] \cdot \underline{k} ds \quad (A.8)$$

kullanılırsa, (A.7)'den

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \tilde{y} \cdot \tilde{n} \, da = \int_{\mathcal{V}(t)} [\partial_t \tilde{y} + \tilde{\nabla} \wedge (\tilde{y} \wedge \tilde{v}) + \tilde{v} \cdot \tilde{\nabla} \cdot \tilde{y}] \cdot \tilde{n} \, da + \int_{\mathcal{V}(t)} [\tilde{y} \wedge (\tilde{v} - \tilde{v}^*)] \cdot \tilde{k} \, ds \quad (\text{A.9})$$

elde edilir.

Daha sonra, (A.6), (A.1)'le (A.9)'da (A.2)'le birleştirilirse sıra ile

$$\int_{\mathcal{V}-\sigma} [\partial_t \tilde{\Phi} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\Phi} \tilde{v} - \tilde{\Xi}) - \tilde{\chi}] \, dv + \int_{\sigma(t)} [\tilde{\Phi} (\tilde{v} - \tilde{v}^*) - \tilde{\Xi}] \cdot \tilde{n} \, da = 0 \quad (\text{A.10})$$

ve

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\mathcal{V}(t)} [\partial_t \tilde{y} + \tilde{\nabla} \wedge (\tilde{y} \wedge \tilde{v} - \tilde{\xi}) - \tilde{\chi}] \cdot \tilde{n} \, da \\ & + \int_{\mathcal{V}(t)} [\tilde{y} \wedge (\tilde{v} - \tilde{v}^*) - \tilde{\xi}] \cdot \tilde{k} \, ds = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.11})$$

elde edilir. Eğer (A.10) ve (A.11) her hacim, alan ve çizgisel eleman için doğru ise, temel formüllerin türevsel biçimi

$$\left. \begin{aligned} \partial_t \tilde{\Phi} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\Phi} \tilde{v} - \tilde{\Xi}) - \tilde{\chi} &= 0 \in \mathcal{V} - \sigma \\ \partial_t \tilde{y} + \tilde{\nabla} \wedge (\tilde{y} \wedge \tilde{v} - \tilde{\xi}) - \tilde{\chi} &= 0 \in \mathcal{y} - \mathcal{r} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.12})$$

olup, ilgili sınır koşulları ise

$$\left. \begin{aligned} [\tilde{\Phi} (\tilde{v} - \tilde{v}^*) - \tilde{\Xi}] \cdot \tilde{n} &= 0 \in \sigma(t) \\ [\tilde{y} \wedge (\tilde{v} - \tilde{v}^*) - \tilde{\xi}] \cdot \tilde{k} &= 0 \in \mathcal{r}(t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.13})$$

dir.

EK - B CHU FORMÜLASYONU VE ELEKTROMANYETİK ALANLARIN DÖNÜŞÜMÜ

Elektromanyetik kuramın temel yasaları olan Maxwell denklemlerinin görünüş biçimleri, kullanılan simgeler ve bunların anlamlarının birbirlerinden farklı olduğu birçok formülasyon var olup etkileşim olaylarında bu farklılığın bilinmesi zorunludur [34,49,60]. Son yıllarda kullanılma kolaylığı sağlayan ve bazı fiziksel olayların açıklanmasını kolaylaştıran Chu formülasyonuna göre bir cismin elektromanyetik özellikleri aşağıdaki büyüklükler yardımı ile tam olarak tanımlanır:

- i) Hacimsel ve yüzeysel serbest yük yoğunlukları,
 - ii) Hacimsel ve yüzeysel serbest akım yoğunluk vektörleri,
 - iii) Elektrik dipol yoğunluğu vasıtası ile tanımlanan polarizasyon
- ve
- iv) Mıknatıslanma (manyetizasyon) dipol yoğunluğu vasıtası ile tanımlanan mıknatıslanmadır [57]. Bu durumda, hareketli ortamlar için Maxwell denklemleri

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_0 \nabla \cdot \underline{E} &= \rho^{(e)} + \rho^{(m)} ; \mu_0 \nabla \cdot \underline{H} = \rho^{(m)} , \\ \nabla \wedge \underline{E} + \mu_0 \partial_t \underline{H} &= -\underline{J}^{(m)} ; \nabla \wedge \underline{H} - \epsilon_0 \partial_t \underline{E} = \underline{J} + \underline{J}^{(e)} \end{aligned} \right\} \quad (B.1)$$

ve ilgili sınır koşulları da

$$\left. \begin{aligned} [\epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}] \cdot \underline{\hat{n}} &= \omega^{(e)} ; [\underline{H} + \underline{M}] \cdot \underline{\hat{n}} = 0 , \\ [\underline{E} - \mu_0 \underline{H} \wedge \underline{v}] \cdot \underline{\hat{k}} &= 0 ; [\underline{H} + \epsilon_0 \underline{E} \wedge \underline{v} - \underline{K}^{(e)}] \cdot \underline{\hat{k}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (B.2)$$

dır. (B.1)'de yük ve akım yoğunlukları

$$\left. \begin{aligned} \rho^{(e)} &= -\nabla \cdot \underline{P} ; \rho^{(m)} = -\nabla \cdot \mu_0 \underline{M} , \\ \underline{J}^{(e)} &= \partial_t \underline{P} + \nabla \wedge (\underline{P} \wedge \underline{v}) ; \underline{J}^{(m)} = \partial_t \mu_0 \underline{M} + \nabla \wedge (\mu_0 \underline{M} \wedge \underline{v}) \end{aligned} \right\} \quad (B.3)$$

biçiminde tanımlanmış olup, kullanılan \underline{E} , \underline{H} , \underline{P} ve \underline{M} simgelerinin anlamı diğer formülasyonlardakilerden (örneğin, Minkowski, Ampere ve Boffi) farklıdır [34].

Diğer formülasyonlarda olduğu gibi Maxwell denklemlerini Chu formülasyonunda dört-boyutlu uzayda yazmak mümkündür [57]. Bu gösterim yapıldığında alanların Lorentz dönüşümündeki biçimlerini yazmak daha kolaylaşır. Birbirlerine göre \underline{v} hızı ile uniform hareket eden iki çerçeveye (frame) göre Chu alanlarının dönüşümü, // ve \perp sıra ile ilgili alanın paralel ve dik bileşenleri olmak üzere

$$\left. \begin{aligned}
 \vec{E}' &= \vec{E}_{\parallel} + \gamma (\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \wedge \mu_0 \vec{H}) \\
 \vec{H}' &= \vec{H}_{\parallel} + \gamma (\vec{H}_{\perp} - \vec{v} \wedge \epsilon_0 \vec{E}) \\
 \vec{P}' &= \vec{P}_{\parallel} + \gamma \vec{P}_{\perp} - \gamma \frac{\vec{v} \wedge (\vec{P} \wedge \vec{v})}{c^2} \\
 \vec{M}' &= \vec{M}_{\parallel} + \gamma \vec{M}_{\perp} - \gamma \frac{\vec{v} \wedge (\vec{M} \wedge \vec{v})}{c^2} \\
 \vec{J}' &= \vec{J} - \gamma \vec{v} \rho^{(H)} + (\gamma - 1) \frac{\vec{J} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \\
 \rho'^{(H)} &= \gamma (\rho^{(H)} - \frac{1}{c^2} \vec{J} \cdot \vec{v})
 \end{aligned} \right\} \quad (B.4)$$

dir. (B.4)'de $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ olup, $(v/c)^2$ 'li terimler diğerlerine göre ihmal edilirse (relativistik olmayan kuramlarda mümkündür), (B.4) yerine

$$\left. \begin{aligned}
 \vec{E}' &\cong \vec{E} + \vec{v} \wedge \mu_0 \vec{H} \\
 \vec{H}' &\cong \vec{H} - \vec{v} \wedge \epsilon_0 \vec{E} \\
 \vec{P}' &\cong \vec{P} \quad ; \quad \vec{M}' \cong \vec{M} \\
 \vec{J}' &\cong \vec{J} - \vec{v} \rho^{(H)} \quad ; \quad \rho'^{(H)} \cong \rho^{(H)} - \frac{1}{c^2} \vec{J} \cdot \vec{v}
 \end{aligned} \right\} \quad (B.5)$$

alınabilir. Böylece, (B.5)'den görüldüğü gibi birbirlerine göre küçük hızlarda hareket eden çerçevelerde \vec{P} ve \vec{M} aynı kalmalarına rağmen diğer elektromanyetik alanlar değişmektedirler.

EK - C NORMAL VE TEĞET VEKTÖRLERİN AYRIŞTIRILMASI

Varsayalım ki $S(X_\alpha, t) = 0$ ve $S(x_k, t) = 0$ aynı cismin B_R ve B_t konumundaki yüzeyleri olsunlar, ve ayrıca S ve $s \in C^1$ olsun. Normal vektörlerin tanımından

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= S_{,\alpha} (S_{,\beta} S_{,\beta})^{-1/2} \\ N_k &= S_{,k} (S_{,l} S_{,l})^{-1/2} \end{aligned} \right\} \quad (C.1)$$

kolaylıkla yazılır. Diğer taraftan

$$S(x_k, t) = s[x_k(X_\alpha, t), t] = S(X_\alpha, t) \quad (C.2)$$

olduğundan, (C.1)₂ den

$$N_k = S_{,\alpha} X_{\alpha,k} (S_{,\beta} S_{,\beta} X_{\rho,l} X_{\rho,l})^{-1/2} \quad (C.3)$$

biçiminde yazılabilir. Eger $X_{\alpha,k}$ yerine yerleştirme vektörünün gradyeni cinsinden eşitliği olan $X_{\alpha,l} = \delta_{\alpha k} - u_{\alpha,k}$ (C.3)'de yerine konursa

$$N_k = (\delta_{\alpha k} - u_{\alpha,k}) S_{,\alpha} [(\delta_{\beta l} - u_{\beta,l})(\delta_{\rho l} - u_{\rho,l}) S_{,\beta} S_{,\rho}]^{-1/2} \quad (C.4)$$

elde edilir. Böylece, (C.4)'de yerdeğiştirme vektörünün gradyenlerine göre doğrusal terimlerin dışındakiler ihmal edilir ve (C.1)'deki N_α 'nın tanımı (C.1) kullanılırsa

$$C_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \quad (C.5)$$

sonsuz küçük şekil değiştirme tansörü olmak üzere

$$N_k \cong [(1 + N_\gamma N_\beta C_{\gamma\beta}) \delta_{k\alpha} - u_{\alpha,\beta} \delta_{\beta k}] N_\alpha \quad (C.6)$$

elde edilir. Böylece, cismin sonsuz küçük şekil değiştirmesinde N_k , N_α ve $u_{\alpha,\beta}$ bilindiğinde hesaplanabilir.

Birim teğet vektörlerin dönüşümünü bulmak için varsayalım ki uzay eğrisini belirliyen parametre λ ve zaman t olsun. Bu durumda B_R ve B_t konumun-

$$X_\alpha = \hat{X}_\alpha(\lambda, t) \quad ; \quad x_k = \hat{x}_k(\lambda, t) \quad (C.7)$$

dir. Oysa ki,

$$x_k = \hat{x}_k(X_\alpha, t) = \hat{x}_k(X_\alpha(\lambda, t), t) = \hat{x}_k(\lambda, t) \quad (C.8)$$

tasvirinden, iki konumdaki eğrinin gösterimi aynıdır. Diğer taraftan, teget vektörlerin tanımından

$$K_\alpha = \frac{\partial X_\alpha / \partial \lambda}{(\partial X_\rho / \partial \lambda \cdot \partial X_\rho / \partial \lambda)^{1/2}}, \quad k_i = \frac{\partial x_i / \partial \lambda}{(\partial x_\ell / \partial \lambda \cdot \partial x_\ell / \partial \lambda)^{1/2}} \quad (C.9)$$

dir. Zincirleme türev kuralı kullanılırsa (C.9)₂ yerine

$$k_i = x_{i,\alpha} \frac{\partial X_\alpha}{\partial \lambda} / (x_{\ell,\beta} x_{\ell,\gamma} \partial X_\beta / \partial \lambda \cdot \partial X_\gamma / \partial \lambda)^{1/2} \quad (C.10)$$

elde edilir. λ parametresi ile belirlenen eğri boyunca x_i yer değiştirme vektörü cinsinden

$$x_i = u_i(\lambda) + X_\alpha \delta_{\alpha i} \quad (C.11)$$

olup, (C.10) yerine konursa

$$k_i = (u_{i,\alpha} + \delta_{i\alpha}) \partial X_\alpha / \partial \lambda / [(\delta_{\beta\gamma} + u_{\beta,\gamma} + u_{\gamma,\beta} + u_{\ell,\beta} u_{\ell,\gamma}) \partial X_\beta / \partial \lambda \cdot \partial X_\gamma / \partial \lambda]^{1/2} \\ \cong \frac{\partial X_\alpha / \partial \lambda}{(\partial X_\beta / \partial \lambda \cdot \partial X_\gamma / \partial \lambda)^{1/2}} \left\{ 1 + \left[\frac{\partial X_\sigma}{\partial \lambda} (u_{\sigma,\gamma} + u_{\gamma,\sigma}) \right] / \left(\frac{\partial X_\tau}{\partial \lambda} \frac{\partial X_\tau}{\partial \lambda} \right)^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (C.12)$$

elde edilir. Eğer yer değiştirme vektörünün gradyenlerine göre yalnız doğrusal terimler gözönüne alınırsa ve (C.9)'daki K_α 'nın tanımı kullanılırsa

$$k_i \cong [(1 - K_\beta K_\gamma \epsilon_{\beta\gamma}) \delta_{i\alpha} + u_{\beta,\alpha} \delta_{i\beta}] K_\alpha \quad (C.13)$$

elde edilir. Böylece k_i , K_α ve $u_{\alpha,\beta}$ cinsinden yazılabilmektedir.

$$X_\alpha = \hat{X}_\alpha(\lambda, t) ; \quad x_k = \hat{x}_k(\lambda, t) \quad (C.7)$$

dir. Oysa ki,

$$x_k = \hat{x}_k(X_\alpha, t) = \hat{x}_k(X_\alpha(\lambda, t), t) = \hat{x}_k(\lambda, t) \quad (C.8)$$

tasvirinden, iki konumdaki eğrinin gösterimi aynıdır. Diğer taraftan, teğet vektörlerin tanımından

$$\left. \begin{aligned} K_\alpha &= \frac{\partial X_\alpha / \partial \lambda}{(\partial X_\rho / \partial \lambda \cdot \partial X_\rho / \partial \lambda)^{1/2}} , \\ k_i &= \frac{\partial x_i / \partial \lambda}{(\partial x_\ell / \partial \lambda \cdot \partial x_\ell / \partial \lambda)^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (C.9)$$

dir. Zincirleme türev kuralı kullanılırsa (C.9)₂ yerine

$$k_i = x_{i,\alpha} \frac{\partial X_\alpha}{\partial \lambda} / (x_{L,\rho} x_{L,\rho} \partial X_\rho / \partial \lambda \cdot \partial X_\rho / \partial \lambda)^{1/2} \quad (C.10)$$

elde edilir. λ parametresi ile belirlenen eğri boyunca x_i yer değiştirme vektörü cinsinden

$$x_i = u_i(\lambda) + X_\alpha \delta_{\alpha i} \quad (C.11)$$

olup, (C.10) yerine konursa

$$\begin{aligned} k_i &= (u_{i,\alpha} + \delta_{i\alpha}) \partial X_\alpha / \partial \lambda / [(\delta_{\beta\gamma} + u_{\beta,\gamma} + u_{\gamma,\beta} + u_{\gamma,\beta} u_{\gamma,\beta}) \partial X_\beta / \partial \lambda \cdot \partial X_\gamma / \partial \lambda]^{1/2} \\ &\cong \frac{\partial X_\alpha / \partial \lambda}{(\partial X_\beta / \partial \lambda \cdot \partial X_\beta / \partial \lambda)^{1/2}} \left\{ 1 + \left[\frac{\partial X_\sigma}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial X_\tau}{\partial \lambda} (u_{\sigma,\tau} + u_{\tau,\sigma}) \right] / \left(\frac{\partial X_\eta}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial X_\eta}{\partial \lambda} \right)^{1/2} \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (C.12)$$

elde edilir. Eger yerdeğiştirme vektörünün gradyenlerine göre yalnız doğrusal terimler gözönüne alınırsa ve (C.9)'daki K_α 'nın tanımı kullanılırsa

$$k_i \cong [(1 - K_\beta K_\gamma \epsilon_{\beta\gamma}) \delta_{i\alpha} + u_{\beta,\alpha} \delta_{i\beta}] K_\alpha \quad (C.13)$$

elde edilir. Böylece k_i , K_α ve $u_{\alpha,\beta}$ cinsinden yazılabilmektedir.