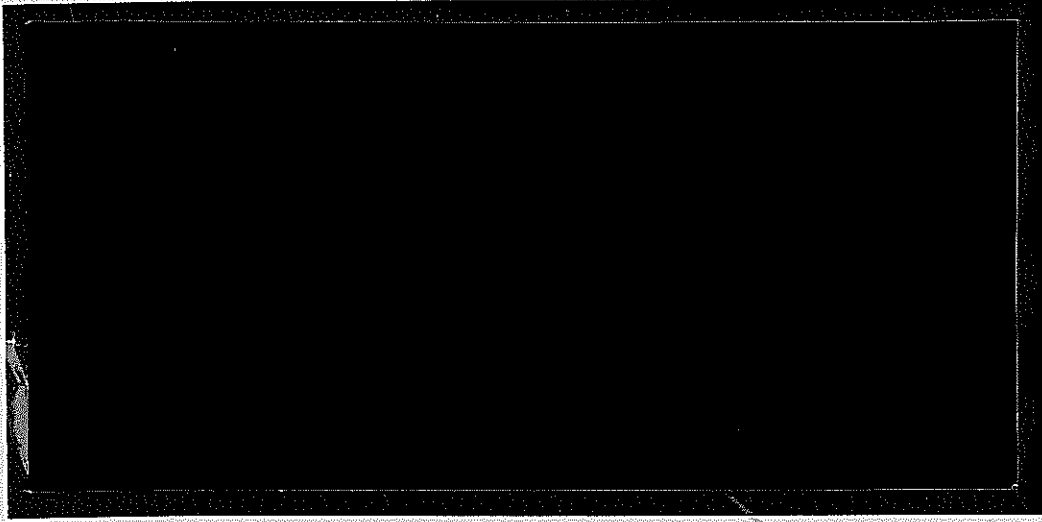




TÜRKİYE BİLİMSEL VE
TEKNİK ARAŞTIRMA KURUMU

THE SCIENTIFIC AND TECHNICAL
RESEARCH COUNCIL OF TURKEY

D4P
1997-1401



Makina, Kimyasal Teknolojiler, Malzeme ve İmalat Sistemleri
Araştırma Grubu

Mechanical Engineering, Chemical Technologies, Material
Sciences and Manufacturing Systems Research Grant
Committee

MİSAG
Sekreterliği
Sayı :

**TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNİK ARAŞTIRMA KURUMU
MAKİNA, KİMYASAL TEKNOLOJİLER
MALZEME VE İMALAT SİSTEMLERİ ARAŞTIRMA GRUBU
PROJE NO: 53**

**C++ DERLEYİCİSİ KULLANILARAK İKİ BOYUTLU
SIKIŞTIRILABİLEN AKIŞLAR İÇİN BİR EULER ÇÖZÜCÜSÜNÜN
GELİŞTİRİLMESİ**

MİSAG 53

Proje Yürütücüsü: Prof. Dr. M. Haluk AKSEL

Aralık 1995, ANKARA

**TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNİK ARAŞTIRMA KURUMU
MAKİNA, KİMYASAL TEKNOLOJİLER MALZEME VE İMALAT
SİSTEMLERİ ARAŞTIRMA GRUBU
PROJE NO: 53**

**C++ DERLEYİCİSİ KULLANILARAK İKİ BOYUTLU
SIKIŞTIRILABİLEN AKIŞLAR İÇİN BİR EULER ÇÖZÜCÜSÜNÜN
GELİŞTİRİLMESİ**

**Proje Yürütücüsü: Prof. Dr. M. Haluk AKSEL
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Makina Mühendisliği Bölümü**

**Bu proje Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumunun Desteği ile Orta
Doğu Teknik Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makina Mühendisliği
Bölümünde yapılmıştır.**

**Aralık 1995
ANKARA**

ÖNSÖZ

Ülkemizde savunma sanayi ve uygulamaları gün geçtikçe gelişmektedir. Özellikle, roket ve uçakların uçuş sırasında üzerlerinde oluşan kuvvetlerin bulunması gün geçtikçe önem kazanmaktadır. Roket ve uçakların tasarımları ve elde mevcut olan tasarımlardaki değişiklikler ancak bu kuvvetlerin bilinmesi ile mümkün olmaktadır. Güdüksüz ve güdümlü roketlerin uçuş simülasyonları, yine uçaklar üzerine takılabilecek çeşitli aygıtların uçuşu ne şekilde etkileyeceği bu kuvvetlerin çeşitli uçuş şartlarında hesaplanabilmesi ile gerçekleşmektedir. Bu nedenle uçan bir cisim üzerinde oluşan kuvvetlerin hesaplaması son derece önemlidir. Bu proje çerçevesinde, sıkıştırılabilen bir akışkan içerisinde ses altı, ses etrafı ve ses üstü hızlarda uçan iki boyutlu bir cisim etrafındaki akış Euler denklemleri kullanılarak bulunmuştur. Geliştirilen yazılım C++ bilgisayar derleme dili kullanılarak etkileşimli olarak hazırlandığı için kullanıcıların yazılımın detaylarını öğrenmeden hesaplama yapmaları mümkün olmaktadır. Araştırmacılar, projeye destek sağlayarak gerçekleşmesine yardımcı olan Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu, Makina, Kimyasal Teknolojiler Malzeme ve İmalat Sistemleri Araştırma Grubuna teşekkür ederler.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ	ii
ABSTRAKT	v
ABSTRACT	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
SEMBOL LİSTESİ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1 Sayısal Akışkanlar Dinamiği	1
1.2 Literatür Araştırması	3
1.2.1 Sonlu Fark Yöntemi ile Yapılan Çalışmalar	3
1.2.2 Sonlu Eleman Yöntemi ile Yapılan Çalışmalar	5
1.2.3 Sonlu Hacim Yöntemi ile Yapılan Çalışmalar	7
2. TEMEL DENKLEMLER	11
2.1 Giriş	11
2.2 Temel Akış Denklemleri	11
2.3 Egrisellineer Koordinatlardaki Akış Denklemleri	12
3. SAYISAL ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ	16
3.1 Giriş	16
3.2 Sonlu Fark Yöntemi	16
3.3 Sonlu Eleman Yöntemi	24
3.4 Sonlu Hacim Yöntemi	28
4. SINIR ŞARTLARI	33
4.1 Duvar Sınır Şartı	33
4.2.1 Hız ve Yoğunluk Hesaplamaları	33
4.2.2 Basınç Hesaplaması	35
4.3 Karakteristik Sınır Şartı	39
5. SONUÇ	45
5.1 Giriş	45
5.2 Boru İçindeki Zamana Bağlı Akış	45
5.3 Bir Gazın Tüpten Ani Olarak Salınması	49
5.4 Bir Kanal İçerisindeki Ni-Tümseği Üzerinde Sesaltı Akış	53
5.5 Bir Kanal İçerisindeki Ni-Tümseği Üzerinde Transonik Akış	58
5.6 Bir Kanal İçerisindeki Ni-Tümseği Üzerinde Sesüstü Akış	59

6. DEĞERLENDİRME	70
6.1 Genel	70
6.2 Gelecekte Yapılabilecek Çalışmalar	72
KAYNAKÇA	73

ABSTRAKT

Ses altı, ses etrafi ve ses üstü hızlardaki iki boyutlu sıkıştırılabilen akışkanlar için C++ bilgisayar dilinde etkileşimli bir Euler çözücüsü geliştirilmiştir. Bu yazılım daha önceden hesaplama ağı oluşturulmuş bir problem için çeşitli sınır şartlarının etkileşimli olarak uygulanabilmesine imkan tanımıştır. Çözüm yöntemleri olarak, sonlu fark, sonlu eleman ve sonlu hacim yöntemleri kullanılmış ve bunların ekrandan etkileşimli olarak seçimi mümkün olmuştur. Yinelemeler sırasında çözümün gelişmesinin ekrandan izlenebilmesi için olanak sağlanmıştır. Geliştirilen yazılım bir boyutta, bir tüpteki gazın aniden serbest bırakılması probleminde ve bir tüp içerisindeki zamana bağlı akış probleminde denenmiştir. İki boyutlu akışlar için ise yazılım ses altı, ses etrafi ve ses üstü hızlarda, çözümü literatürde mevcut olan bir kanal içerisindeki Ni tümseği kullanılarak denenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Euler Çözücüsü, Sonlu Eleman Yöntemi, Sonlu Fark Yöntemi, Sonlu Hacim Yöntemi

ABSTRACT

An interactive Euler solver is developed for two-dimensional subsonic, transonic and supersonic compressible flows by using a C++ compiler. This computer code will allow the interactive application of different boundary conditions for problems with a known computational mesh. Finite difference, finite element and finite volume methods are used and an interactive selection from the monitor is provided. The development of the solution during the iterations can be followed directly from the monitor. The one dimensional version of the developed computer code is tested by using the problems of sudden release of a gas from a tube and unsteady flow in pipes. The two-dimensional version is verified by using the subsonic, transonic and supersonic flows over a Ni bump in a channel, whose solution are available in the literature.

Key Words: Euler Solver, Finite Element Method, Finite Difference Method, Finite Volume Method

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1 İki boyutlu problemler için kontrol hacimleri	30
Şekil 4.1 Sayısal uzaydaki hesaplama ağı	33
Şekil 4.2 Homotropik olmayan açık sınır şartları için hesaplama ağı	40
Şekil 5.1 Bir boru içerisinde zamana bağlı akış problemi için başlangıç şartlar	45
Şekil 5.2 Sonlu fark yöntemi ile bir boru içerisindeki akışın (a) girişte, (b) orta noktada ve (c) çıkışta zamana göre değişimi [Yardımcı ve Telçeker (1992), Amer (1995)]	46
Şekil 5.3 Sonlu eleman yöntemi ile bir boru içerisindeki akışın (a) girişte (b) orta noktada ve (c) çıkışta zamana göre değişimi [Lüle (1995)]	47
Şekil 5.4 Sonlu hacim yöntemi ile bir boru içerisindeki akışın (a) girişte (b) orta noktada ve (c) çıkışta zamana göre değişimi [Telçeker ve Yardımcı (1992)]	48
Şekil 5.5 Bir gazın tüpten ani olarak salıverilmesi	49
Şekil 5.6 15 ağ noktası ve CFL = 0.1 için tüpün (a) kapalı ucundaki (b) ortasındaki ve (c) açık ucundaki boyutsuz basınç ve hızın zamana göre değişimi [Telçeker ve Yardımcı (1992)]	50
Şekil 5.7 15 ağ noktası ve CFL = 1.0 için tüpün (a) kapalı ucundaki (b) ortasındaki ve (c) açık ucundaki boyutsuz basınç ve hızın zaman göre değişimi [Telçeker ve Yardımcı (1992)]	51
Şekil 5.8 75 ağ noktası ve CFL = 1.0 için tüpün (a) kapalı ucundaki (b) ortasındaki ve (c) açık ucundaki boyutsuz basınç ve hızın zamana göre değişimi [Telçeker ve Yardımcı (1992)]	52
Şekil 5.9 Ni tümseği için hesaplama ağı	53
Şekil 5.10 Sonlu hacim yöntemi ile 0.5 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında (a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Ni (1982)]	54
Şekil 5.11 Sonlu fark yöntemi ile 0.5 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında (a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Amer (1995)]	55
Şekil 5.12 Sonlu eleman yöntemi ile 0.5 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında (a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Lüle (1995)]	56
Şekil 5.13 Sonlu hacim yöntemi ile 0.5 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında (a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Yardımcı (1994)]	57

Şekil 5.14	Sonlu hacim yöntemi ile 0.675 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında(a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Ni (1982)]	60
Şekil 5.15	Sonlu hacim yöntemi ile 0.675 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında(a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Yardımcı(1994)]	61
Şekil 5.16	Sonlu hacim yöntemi ile 0.9 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında(a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Lüle (1995)]	62
Şekil 5.17	Sonlu eleman yöntemi ile 0.9 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında(a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Lüle (1995)]	63
Şekil 5.18	Sonlu fark yöntemi ile 0.9 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında(a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Amer (1995)]	64
Şekil 5.19	Sonlu hacim yöntemi ile 1.4 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında(a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Ni (1982)]	66
Şekil 5.20	Sonlu fark yöntemi ile 1.4 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında(a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Amer (1995)]	67
Şekil 5.21	Sonlu eleman yöntemi ile 1.4 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında(a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Lüle (1995)]	68
Şekil 5.22	Sonlu hacim yöntemi ile 1.4 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında(a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Yardımcı (1994)]	69

SEMBOLLER

a	ses hızı
A	$\partial f/\partial q$ matrisi
B	$\partial g/\partial q$ matrisi
C-	+ yöndeki karakteristik
C+	- yöndeki karakteristik
D	difüzyon operatörü
e	birim kütledeki toplam enerji
f	hesaplama alanındaki akı vektörü
F	akı vektörü
g	hesaplama alanındaki akı vektörü
G	akı vektörü
h_0	birim kütledeki toplam entalpi
i	ξ yönündeki ağ noktası indisi
j	η yönündeki ağ noktası indisi
J	Jakobi matrisi
K	katsayı matrisi
m	kütle debisi
M	kütle matrisi
n	normal yön
\bar{n}	normal vektör
N	içdeğerbiçim fonksiyonu
p	basınç
P_e	elemanlar için içdeğerbiçim fonksiyonu
q	hesaplama alanındaki korunan değişkenler vektörü
Q	korunan değişkenler vektörü
R	gaz sabiti
t	zaman
T	sıcaklık
u	x yönündeki hız bileşkesi
U	ξ yönündeki karşıdeğişken hız bileşkesi
v	y yönündeki hız bileşkesi
V	η yönündeki karşıdeğişken hız bileşkesi
\vec{V}	hız vektörü
∇	hacim
x	x koordinatı

X_A	A matrisine ait gizdeğer vektörü
X_B	B matrisine ait gizdeğer vektörü
y	y kordinatı
δ	değişiklik
Δ	fark
Δ_e	e elemanının alanı
γ	özgül sıcaklık oranı
Γ	çözüm alanını çevreleyen eğri
λ	disipasyon katsayısı
λ_+	C+ karakteristiğinin eğimi
λ_-	C- karakteristiğinin eğimi
λ_o	yol çizgisinin eğimi
λ_η	B matrisinin gizdeğerleri
λ_ξ	A matrisinin gizdeğerleri
η	hesaplama alanının kordinatı
ρ	yoğunluk
ξ	hesaplama alanının koordinatı

İndisler

$()_+$	C+ karakteristiği yönünde
$()_-$	C- karakteristiği yönünde
$()^n$	n zaman adımında
$()_{i,j}$	hesaplama ağı üzerindeki (i,j) düğüm noktası üzerinde
(\wedge)	yaklaşık değer

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 SAYISAL AKIŞKANLAR DİNAMİĞİ

Akışkanlar dinamiği problemlerinin çözümünde kullanılan metodlar analitik, deneysel ve sayısal olarak üç gruba ayrılabilir.

Analitik metodlarda, problemler benzerlik kuralları temel alınarak çözülür ve elde edilen çözümler kapalı formdadır. Ancak, çok sayıda basitleştirme varsayımının yapılmak zorunda olması, basit konfigürasyonların çözülebilmesi ve sınırlı aerodinamik karakteristiklerin ele alınabilmesi dezavantajlar olarak görülmektedir.

Deneysel yöntemler ise örnek bir konfigürasyon kullanımının mümkün olabildiği durumlarda kullanılır ve seçilen örnek konfigürasyon için aerodinamik veriler elde edilir. Burada, en büyük avantaj yeni akış alanlarının gözlenebilmesidir. Ancak deneysel çalışmalar pahalı modeller ve çok masraflı olan rüzgar tüneli gerektirdiğinden sadece sınırlı sayıda veri alınabilmektedir. Bunun yanında rüzgar tünelinin karakteristiklerinden doğan sapmalar elde edilen verilerin istenilen hassasiyette olamamasına sebep olabilmektedir.

Sayısal metodlar, sınırlayıcı varsayımların en azda olması ve işlemlerin kolay uygulanabilmesi nedeniyle tercih edilirler. Bu yöntemde akış alanı tümüyle tanımlanabilir ve karmaşık konfigürasyonlar ele alınabilir. Metodun diğer avantajları ise Mach ve Reynolds sayılarında kısıtlamaların olmaması ve düşük maliyet gerektirmesidir. Problemlerin çözümünde kullanılan bilgisayarın hızı ve kapasitesi bazen kısıtlayıcı olabilmektedir.

Sayısal metodlar, matematiksel modellemeden başlayarak, elde edilecek çözüme kadar birçok basamaktan oluşur. Bunlardan birincisi istenen doğruluk derecesine ve sayısal çözüm gücüne bağlı olarak yaklaşımın seviyesinin fiziksel probleme uygun bir şekilde belirlenmesidir. İkinci basamak ise matematiksel formülasyonun ayrıştırma yönteminin seçilmesidir. Ayrıştırma yöntemlerinin bölge ayrıştırması ve denklem ayrıştırması olmak üzere iki değişik bileşeni bulunmaktadır.

Bölge ayrıştırması, çözümağının ya da süreklilik bölgesinin, değişkenlerin sayısal değerlerinin hesaplanacağı belirli sayıda noktalar

olarak ifade edilmesidir. Netice olarak, sayısal yaklaşımın doğruluğu, çözümü büyüklüğü ile doğrudan ilgilidir ve sayısal yaklaşımın başarısı sürekliliğin uzaydaki ayrıştırımına bağlıdır. Karmaşık geometriler etrafındaki akışların incelenmesinde çözüm ağının yapısı önem kazanmaktadır. Üç boyutlu problemlerde, ağın oluşturulması başlı başına bir sorun olup, çözümün sonucunu doğrudan etkileyecek bir parametredir.

Ağ yapısı oluşturulduktan sonra, diferansiyel veya integral denklemlerin ayrışık cebirsel işlemlere dönüştürülmesi ile ağ noktalarındaki bilinmeyenleri de kapsayan bir denklem ayrıştırması tanımlanır. Bu ayrıştırma sonlu fark, sonlu eleman veya sonlu hacim yöntemlerinin birisiyle gerçekleştirilir. Bütün bu sayısal yöntemlerde, fiziksel denklemler doğrusal ya da doğrusal olmayan denklemlere dönüştürülür.

Sayısal çözümlerin analizi, bu çözümlerin kararlılık, doğruluk ve hata dağılımı kriterlerini inceleyebilmek için gereklidir.

Zamana bağlı problemlerde, zamana bağlı matematiksel modeller kullanılır ve sayısal çözümün zaman boyutundaki doğruluğu önem kazanır.

Zamanla değişmeyen problemlerde ise zamanla değişmeyen bir matematiksel model kullanılabileceği gibi; zamanda ilerleme veya sanki zamanla değişen olarak adlandırılan zamanla değişen bir model seçilerek sayısal çözümün zaman içerisinde sürekli rejime ulaşması da hedeflenebilir.

Çözüm yöntemleri bir başka bakış açısından ise açık ve kapalı olarak sınıflandırılabilir.

Açık yöntemlerde, her zaman basamağındaki bilinmeyen değişkenlerin oluşturduğu matris dayagonal bir matristir ve denklem sisteminin sağ tarafı sadece daha önceki zaman basamaklarındaki akış değişkenlerine bağlıdır. Bu durumda, matrisin tersi kolayca elde edilebilir ve her zaman basamağında gerekli olan aritmetik işlem sayısı en azdır. Fakat sayısal çözümün kararlılığı ve yakınsaması açısından seçilecek en büyük zaman aralığı sınırlıdır.

Kapalı yöntemlerde ise her zaman basamağında birden çok bilinmeyen değişken grubunun bulunması sebebiyle tersi elde edilecek matris dayagonal değildir. Genelde blok ikili dayagonal, blok üçlü dayagonal veya blok beşli dayagonal matrisler elde edilmektedir ve bunların tersinin elde edilmesi dayagonal matrislere göre daha zor olup ve daha çok aritmetik işlem gerektirmektedir. Fakat, kapalı yöntemlerde zaman aralığı sınırlaması yoktur ve sürekli rejime ulaşılması için gerekli iterasyon sayısı daha azdır.

1.2 LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Euler denklemlerinin çözümünde kullanılan yöntemler sonlu fark, sonlu eleman ve sonlu hacim yöntemleri olmak üzere üç grupta toplanabilir. Sonlu fark ve sonlu hacim yöntemleri çözüm tekniği açısından benzerlik göstermesine karşılık sonlu eleman yöntemi değişik bir yaklaşım göstermektedir. Her üç yöntemde, birçok araştırmacı tarafından kullanılmaktadır.

1.2.1 Sonlu Fark Yöntemi ile Yapılan Çalışmalar

Bu yöntemde, diferansiyel denklemlerdeki türevler Taylor açılımıyla ifade edilmektedir. Özellikle tekdüze çözümağı kullanılan durumlarda çok kolay uygulanabilecek bir yöntemdir ve hesap ağında yüksek derecede düzenlilik gerektirmektedir.

Sonlu fark formülleri, birinci ve daha yüksek dereceli türevler için, tekdüze çözümağı ürerinde genel şekliyle tanımlanır ve iki boyutta genişletilerek tekdüze olmayan çözüm ağıları üzerinde de uygulanabilir.

Türev ve fark yaklaşımları arasında ilişki kurabilmek için yer değiştirme, ileri fark, geri fark, merkezi fark, ortalama ve diferansiyel operatörler gibi operatör teknikleri kullanılarak ikinci dereceden veya daha yüksek dereceli türevler için sınırsız sayıda sonlu fark formülleri elde edilebilir.

Steger (1978), kapalı sonlu fark metodunu iki boyutlu geometriler etrafındaki akışların Euler denklemleri ile çözümünde kullanmıştır. Bu çalışmada kapalı algoritma kullanılarak, açık şemaların izin vermediği büyük zaman adımlarına imkan sağlanmıştır. Zaman adımlarının kısıtlanmaması için çözümağı noktaları muntazam dağılımlı olarak alınmıştır. Sayısal verimlilik ve vektörize edilmiş bilgisayar işlemcilerine uygunluk için yaklaşık faktörizasyon teknikleri kullanılmıştır.

Kapalı sonlu fark metodu Atkins ve Hassan (1983)'in yaptıkları çalışmada kanat profili etrafındaki ses civarı hızlardaki akışların Euler denklemleri ile çözümünde kullanılmıştır. Bu çalışmada, Euler denklemleri zamana bağı olmayan basit değışkenlerle ifade edilmiştir.

Bilindiğı gibi, iki boyutlu Euler denklemlerini çözen pek çok bilgisayar yazılımı bulunmasına rağmen, birçoğıu belirgin bir problem grubu için kısıtlanmış durumdadır. Bu kısıtlamalar, problemin fiziğinden oluşabileceğı gibi çözümağı noktalarının dağılımından da

kaynaklanabilmektedir. Hindman, Kutler ve Anderson (1981) tarafından gerçekleştirilen bir çalışmada, modülsele yaklaşım ile kısıtlamaların en azından bir kısmının elenmesinin sağlandığı genelleştirilmiş iki boyutlu bir Euler çözücüsü geliştirilmiştir. Çözümde, geometri işlemleri ve sonlu fark şemaları, MacCormack'ın standart dağıtılmamış tahmin-düzeltilme şemalarına göre birleştirilmiştir ve bu sayede akış denklemleri ve geometrik korunum kanunları zamanda integre edilebilmektedir.

Kapalı sonlu fark yöntemlerinde, sınır şartlarının da kapalı olarak ifade edilmesine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu sayede durağan duruma daha hızlı ulaşılacağı gibi, daimi olmayan akışların çözümünde zaman aralığının CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) kararlılık kriteriyle kısıtlanması yerine geçicilerin büyüklüğüne bağlı olarak belirlenmesi de mümkün olmaktadır. Böyle bir çalışma, Chakravarthy (1983) tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada, hiperbolik yapıda zamana bağlı Euler denklemleri korunumlu ve korunumsuz formlarda uygulanmıştır. Özel durumlardan sesaltı hızlardaki içeri ve dışarı akışlar, yüzey teğetliği ve şok dalgaları kapsamlı olarak incelenmiştir.

Sınır koşulları işlemleri, zamana bağlı Euler denklemlerinin ait olduğu hiperbolik denklem sistemlerinde karakteristik teori ve açık sonlu fark şemasının uygulanması ile Neef (1978) ile Porter ve Coakley (1972) tarafından ele alınmıştır.

Bu çalışmalarla birlikte, Euler denklemlerinin sayısal çözümlerinde ikinci dereceden doğru ve iteratif olmayan kapalı yöntemlerin verimliliği yükselteceği görülmüştür. Masson (1973), Euler denklemlerini karakteristik formlara dayanan ve iteratif olmayan kapalı tahmin metodlarıyla çözüme hazırlayıp açık metodlarla düzelterek korunumunu sağlamıştır. Bu konudaki çalışmalar, Masson ile başlayarak Yanenko ve Yaushev (1966) ile devam etmiştir. Bu yöntem, koşulsuz kararlı ve ikinci dereceden doğruluğa sahip olmasına karşılık, şok dalgalarının olduğu durumda verimsizdir. Kapalı yöntemlerdeki sayısal disipatiflerin önemini gözönüne alan McGuire ve Morris (1974), skaler denklemler için ikinci dereceden doğruluğa sahip disipatif şemalar elde etmişlerdir. Ancak, bunların hiperbolik sistemlere uygulanmalarının zor olduğu görülmüştür.

Beam ve Warming (1976), korunum kanunları sistemleri için kapalı yöntemlerle bilinmeyenlerin blok-üçlü dayagonal lineer sistemler şeklinde ifade edildiği çözümler elde etmişlerdir. Sayısal disipatif olmayan bu şemalar, daha sonra Chakravarthy (1983) ile Yee, Beam ve Warming (1982) tarafından ele alınarak kapalı-açık yapay viskozite ve kapalı sınır koşulları ile verimli hale getirilmiştir. Ayrıca MacCormack (1982) tarafından geliştirilen merkezi olmayan yöntem, sadece blok-ikili dayagonal lineer sistemlerin çözümünü gerektirmektedir. Yukarıda belirtilen iki

metodu kullanarak, kanat profili üzerindeki ses civarı akışların Euler denklemleriyle çözümünü veren çalışmalar vardır.

Casier, Deconinck ve Hirsch (1984), bu çalışmalardan birini gerçekleştirerek ikili-diagonal çözüm teknikleri ile kapalı sınır şartlarını ele almışlardır. Bu çalışmada, bir boyutlu, korunumlu Euler denklemleri ele alınmış ve karakteristik değişkenler için tahmin-düzeltilme yaklaşımı uygulanmıştır. İkinci dereceden doğru, ikili-diagonal, kapalı ve yarı açık şemaların aslında çözümlü oldukları ve lineer kararlılık için yapay viskozite gerektirmedikleri ispatlanmıştır.

Lerat (1985) tarafından gerçekleştirilen bir çalışmada, hiperbolik sistemler için iteratif olmayan kapalı metodlar ele alınmıştır. Bu çalışmada, uzay merkezli iki zaman seviyesini kapsayan yöntemler kullanılmış ve çözümlülük, kararlılık, dağılımlılık ve verimlilik kriterleri üzerine analizler yapılmıştır.

Sayısal tekniklerle Euler denklemlerinin çözümü, doğal disipatif terimlere sahip fark yöntemleriyle ya da disipatif özelliği olmayan çözüm şemalarına disipatif terimlerin eklenmesi ile mümkün olabilmektedir. Buna neden olarak, Euler denklemlerinin Navier-Stokes denklemlerinde viskozite gibi doğal olarak bulunan ve şoklardan kaynaklanan gayrilineeriteler sonucunda ortaya çıkan yüksek frekansların elenmesini sağlayacak doğal bir disipatif mekanizmaya sahip olmamalarıdır. Yaygın olarak kullanılan Mac Cormack (1969)'in açık şeması, Beam ve Warming (1976)'in açık algoritmaları, Jameson, Smith ve Turkel (1981) ile Rizzi ve Eriksson (1983)'un kullandıkları Runge-Kutta açık şemaları, yapay disipatif terimlere ihtiyaç duymaktadır. Bu arada, Steger ve Warming (1981), Roe (1980), Van Leer (1983), Osher ve Chakravarty (1983) ile den Harten (1983)'in yöntemleri, bazı disipatif formlarını da kapsayan merkezi fark şemaları olarak geniş kullanım alanlarına sahiptir.

Pulliam (1986) tarafından gerçekleştirilen çalışmada, Euler denklemleri için oluşturulan disipatif modeller merkezi farklar için kullanıma sunulmuştur.

1.2.2 Sonlu Eleman Yöntemi ile Yapılan Çalışmalar

Bu metodun en önemli avantajı olarak, akış problemlerindeki karmaşık geometriler için düzensiz hesaplama ağının oluşturulmasındaki pratiklik ve modifiye etmeye uygunluk söylenebilir. Başka bir deyişle, bu metod ile hesaplama ağındaki bölgesel iyileştirmeler hesaplama ağının bütününe etkilenmesine gerek kalmadan yapılabilir.

Sonlu eleman metodu ile akış analizi hakkında Hughes, Tezduyar ve Brooks (1982)'un yaptıkları bir çalışmada, adveksiyon-difüzyon, Navier-Stokes ve birinci dereceden hiperbolik denklemler için upwind akım fonksiyonu formülasyonlarının ayrıntıları yer almaktadır. Burada, konveksiyon baskınlı akışlar için bir sonlu eleman formülasyonu geliştirilmiştir. Bu formülasyon, uygun Petrov-Galerkin ağırlıklı artık yöntemlerle tamamlanırsa yapay difüzyona gereklilik ortadan kalkmaktadır. Uygulanan algoritma açık veya kapalı formlarda kullanılarak, birinci ve ikinci dereceden hiperbolik sistemler için zamanla değişen veya değişmeyen olaylarda geçerlilik göstermiştir.

Karmaşık geometriler için hesap ağının oluşturulmasında üçgen elemanların kullanılması esneklik ve güvenilirlik açısından avantajlıdır. Bu konudaki açık formda üçgen sonlu eleman şemaları Angrand ve Dervieux (1984) tarafından Euler denklemleri için incelenmiştir.

Ecer ve Akay (1983), zamana bağlı olmayan sescivari akışlarda Euler denklemleri için sonlu eleman formülasyonlarını ilgili denklem setinin türetilmesinde kullanmışlardır. Bu çalışmada, hızlar Clebsch tipi taşımaya yeni bir değişken setine atanmıştır. Bu formülasyon, Euler denklemlerinin ikinci dereceden ifade edilmesini sağlayarak birinci dereceden denklemlerin çözümünde karşılaşılan zorlukları ortadan kaldırmıştır.

Ecer ve Akay (1982) tarafından gerçekleştirilen bir diğer çalışmada, zamana bağlı olmayan Euler denklemleri sescivari hızlardaki akışlar için çözülmüştür. Bu çalışmada, düzenli olmayan sayısal çözüm ağı ve genel sınır koşulları için ayrıştırılmış denklemlerin elde edilmesinde Ritz veya Galerkin tipi işlemlerin uygulanmasına elverişli bir sonlu eleman metodu kullanılmıştır.

Ecer, Akay ve Şenel (1986) gerçekleştirdikleri bir başka çalışmada, Euler denklemlerini kavışli bir kanaldaki rotasyonel bir akışa uygulamışlardır. Bu çalışmada, üç boyutlu zamana bağlı olmayan, eşenerjili akışların formülasyonu ele alınmıştır. Stanitz, Osborn ve Mizisin (1953)'ün ele aldığı kavışli kanaldaki akışın deneysel inceleme sonuçları ve Moore ve Moore (1983) un yazdıkları Navier-Stokes koduyla elde edilmiş sonuçlar, çözüm şemasının doğruluk ve uygulanabilirliğine uygunluğu açısından karşılaştırılmıştır.

Ecer ve Akay (1984), bu çalışmalarında Euler denklemlerini Bateman değişmeli prensibinden türetilen sonlu elemanlar yöntemi ile çözmüştür. Bu formülasyon ile hem rotasyonel hem de rotasyonel olmayan akışların çözümü mümkündür. Bu metodun kaldırma kuvvetlerinin elde edildiği akış tiplerinde uygulanabilirliği ve Kutta durumunun keskin firar

kenarında kullanılmasının gerçekleştirilmesi Ecer, Akay ve Whillhite (1985) tarafından yapılan bir çalışma ile sunulmuştur. Bu çalışmada, izantropik potansiyel veya izantropik olmayan potansiyel akışların özel durumlar olarak ele alındığı profil etrafındaki sescivari akışlar için Euler denklemleri Clebsch formülasyonu yardımıyla sonlu eleman metodu ile çözülmüştür.

Euler denklemlerinin sonlu eleman yöntemi ile çözümlerini dış akışlar için sunan bir çalışma Baruzzi, Habashi ve Hafız (1981) tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada zamana bağlı olmayan sesaltı ve sescivari çözümleri basit değişkenler şeklinde sunulmaktadır. Şema, yapay vizkozitenin ilgili denklemlere açık şekilde yerleştirilmesi ile sayısal kararlılık için gerekli olan disipatif formların elde edilmesi temeline dayanmaktadır.

1.2.3 Sonlu Hacim Yöntemi ile Yapılan Çalışmalar

Sayısal akışkanlar dinamiğinde, ilk defa McDonald (1971) ile Mac Cormack ve Paullay (1972) tarafından iki boyutlu Euler denklemlerinin çözümünde kullanılmıştır. Daha sonra bu yöntem Rizzi ve Inouye (1973) tarafından üç boyutlu akışlara uygulanmıştır. Bir başka deyişle, sonlu hacim yöntemi sonlu fark yönteminin ayrıştırılmış formda bile kütle, momentum ve enerji korunumunu sağlayan ve gelişmiş güzel koordinatlara uygulanabilen bir türü olarak görülmektedir.

Sonlu hacim yönteminde iki değişik strateji ile problem çözümü mümkündür. Bunlardan ilki sayısal çözümağındaki akış değerlerinin hücre merkezindeki değerlerle ifade edildiği hücre merkezi şemasıdır. Jameson, Smith ve Turkel (1981) tarafından gerçekleştirilen bir çalışmada, iki boyutlu akış alanları hücre merkezi yaklaşımı kullanılarak Euler denklemleri ile incelenmiştir. Jameson ve Baker (1984), bu yaklaşımı üç boyutlu problemlere uygulamışlardır. Üç boyutlu viskoz olmayan akışlara ise Rizzi (1982) tarafından uygulanmıştır. Basit yapısından dolayı hücre merkezi yaklaşımını kullanan şemalar, sayısal akışkanlar dinamiğinde çok yaygındır.

İkinci yaklaşımda ise sayısal çözümağındaki akış değerleri hücre uç noktalarındaki değerlerle ifade edilir ve bu yaklaşım hücre köşesi yaklaşımı olarak adlandırılır. İki boyutlu viskoz olmayan akışların hesaplanmasında bu yaklaşım ilk olarak, Ni (1982) tarafından kullanılmıştır. Bu yaklaşım daha sonralarıda üç boyutlu problemlere uygulanmıştır. Daha sonra yapılan araştırmalar hücre köşesi yaklaşımının daha iyi sonuçlar verdiğini fakat hücre merkezi yaklaşımı kadar kolay uygulanabilir olmadığını göstermiştir.

Jameson, Schmidt ve Turkel (1981), potansiyel çözüme alternatif olarak zamanla değişmeyen akışlarda Euler denklemlerinin çözümü için ekonomik bir yöntem geliştirmeye çalışmışlardır. Metodun karmaşık geometrilere uygulanabilirliği keyfi çözümağı kullanmaya imkan veren sonlu hacim yönteminin kullanılması ile sağlanmıştır.

Çalışmaların üç boyutlu geometriler üzerinde yoğunlaşması ile birlikte şemaların hızlandırılmaları kaçınılmaz olmuştur. Jameson'da geliştirdiği şemayı üç boyutlu geometriler üzerine uygularken, şemayı hızlandırma yolunu izlemiştir. Şemanın hızlandırılmasında ise Ni (1982)'nin çoklu çözümağı metodu ile Jameson (1983) un sunduğu teknik kullanılmıştır. Jameson ve Baker (1984) yaptıkları ortak çalışmada, iki ve üç boyutlu geometriler için Euler denklemlerini sescivarı akışlarda çözerek, kullandıkları çoklu çözümağı algoritmasının sürekli rejime yakınsamayı hızlandırdığını göstermişlerdir.

Çoklu çözümağı yönteminin türbin baladlarındaki akışa uygulanması, tasarım amacı ile hızlı bir Euler ve Navier-Stokes baladı akış analizi yazılımı geliştirmek isteyen Chima (1985) in bir çalışmasında yer almaktadır. Bu amaçla, Chima oldukça geniş kullanımı olan fakat geç yakınsayabilen Lax-Wendroff şeması sınıfından açık MacCormack algoritmasını kullanmıştır. Bu şema, vektörizasyon, değişken zaman adımı kullanımı ve Ni (1982) tarafından geliştirilen çoklu çözümağı yöntemi ile verimli hale getirilmiştir. Türbülansı benzeştirmek için Baldwin ve Lomax tarafından geliştirilen model kullanılmıştır. Bundan başka, konfigürasyonların kanat, flap vb. gibi özel elemanlarının daha iyi bir şekilde ele alınmasında kullanılan çoklu blok çözümağı tekniğinin çoklu çözümağı tekniği ile birleştirilmesi de kullanılan yaklaşımlardandır.

Arthur, Blaylock ve Anderson (1989), blok tekniğini çoklu çözümağı tekniği ile başarılı bir şekilde birleştirerek Euler denklemlerini hücre köşesi şeması ile çözmüşlerdir.

Baker, Jameson ve Vevmerand (1985) ağ yapısını zenginleştirme tekniğini kanat/gövde/kuyruk kombinasyonları için kullanmışlardır. Geometri üzerine ağ yapısı uydurma yaklaşımı da oldukça kullanılan yaklaşımlardandır. Moitra (1985) gerçekleştirdiği çalışmada, yüzeye uydurulmuş koordinat sistemini kullanıp herhangi bir yüzeydeki ortalama akışı, iki komşu hücrenin merkez akış değerlerinin ortalamasını alarak hesaplamıştır. Yüzeye uydurulmuş çözümağı yapısının ve bu tip yumuşak kanat-gövde geçişi olan geometrilerinin analitik olarak elde edilesi Barger (1982) tarafından geliştirilen yöntem kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Moitra (1985) nin kullandığı yüzeye çözümağı uydurulması yöntemi her noktada metriklerin hesaplanmasını gerektirdiğinden uygulanması oldukça güç bir yöntemdir. Clarke, Hassan ve Salas (1985), Moitra'nın kullandığı

şemaya benzer bir şema kullanarak çok elemanlı kanat profilleri üzerinde Kartezyen çözümağı ile bir çalışma yapmışlardır.

Yakınsamanın hızlandırılmasında olduğu gibi karmaşık geometrilerin ele alınmasında da etkin olduğu bilinen yerel olarak çözümağının sıklaştırılması veya melez çözümağlarının kullanılması çok etkilidir. Karmaşıklığın artması ile doğruluğun azalmaması için gövde üzerindeki çözümağlarının değişiminin yavaşça olması, yarı süreksizliklere meydan vermemesi ve yeterince sık olması gerekmektedir. Bu koşulların yaygınlaştırılmasında özellikle üçgen çözümağları kullanılmıştır. Jameson ve Mavriplis (1986) böyle bir yapıyı kullanarak NACA 0012 ve KORN kanat profilleri etrafındaki iki boyutlu akışı inceleyip dörtgen çözümağı ile karşılaştırmışlardır.

Günümüzde, düzensiz yapıda üçgen, dörtgen ya da keyfi olabildiği gibi, hareket eden ağlar şeklinde de olabilen çok farklı tipte çözümağı, Euler çözümlerinde kullanılmaktadır. Düzensiz yapıda çözümağı kullanımı özellikle karmaşık geometrilerin ele alınmasında faydalı olmaktadır. Hareketli çözümağları ise hareketli katı sınırlar, konfigürasyonların deformasyona uğradığı ve şok gibi hareketli akış özelliklerinin olduğu durumda kullanılmaktadır. Giles (1987) iç akışlarda zamanla değişen sescivarı ve sesüstü akış hesaplamalarında tercih edilen zamanda eğilmiş yapı kullanmıştır. Hücre tiplerinin farklılıklarını Ni (1982)'nin Lax-Wendroff algoritmasını ve Van Leer (1981) in flux splitting yöntemini kullanarak incelemiştir. Diğer metodlara uygulanabilir olduğu belirtilerek Jameson, Schmidt ve Turkel (1981) in dört adım Runge Kutta yöntemi ile Beam ve Warming (1978) yöntemine değinilmiştir.

Çoklu çözümağı yönteminin kapalı şemalara uygulanması ile CFL sayısı sınırlaması ortadan kalktığından oldukça hızlı yakınsayan şemalar elde edilmiştir. Bu doğrultuda, Jameson ve Yoon (1986), çoklu çözümağını kapalı şemaya uygulayarak Euler denklemlerinin sürekli rejim hesaplamaları için kullanılan ve hızlıca yakınsayan bir algoritma elde etmişlerdir.

Wornom ve Hafez (1986), upwind yaklaşımını kullanarak bir boyutlu lüle akışını sesaltı, sescivarı ve sesüstü hızlarda incelemiştir. Kapalı olan bu algoritmada CFL sınırlaması bulunmamaktadır ve büyük zaman adımı gerektiren hesaplamalara oldukça yatkındır.

Anderson, Thomas ve Van Leer (1981) yaptıkları çalışmada, korunumlu denklemlere uygulanabilen akış vektörü ayırma yöntemi üzerinde durarak genel koordinat sisteminde, kanat profili üzerinde iki boyutlu akışı, Van Leer (1981) ile Steger ve Warming (1981) akış ayırma

Van Leer (1981) ile Steger ve Warming (1981) akış ayırma yöntemleri ile inceleyerek iki akış vektörü ayırma yöntemini karşılaştırmışlardır.

Zamanla değişen Euler denklemlerinin incelenmesinde de doğru dalga yayılımı özelliği gösteren ve akış hesaplamaları için doğru bağımlılık bölgesi kullanan akış vektörü ayırma yönteminin tercih sebebi de çözümağı sistemine daha kolay aktarılabilmesidir. Allmaras ve Giles (1987) keyfi olarak seçilmiş çözümağları üzerinde iki boyutlu akışlar için, zamanla değişen Euler denklemlerini sonlu hacim formülasyonu ve ikinci dereceden akış ayırma şemasını kullanarak sescivarı kanal ve difüzör akışı için çözmüşlerdir.

Son yıllarda zamanla değişen aerodinamik analizlerin kapalı akış ayırma yöntemi ile hareketli ve düzensiz çözümağları üzerinde yapılması mümkün olmuştur. Batina (1989), aeroelastik analizinde hareketli düzensiz çözümağı kullanmıştır.

BÖLÜM 2

TEMEL DENKLEMLER

2.1. GİRİŞ

Navier-Stokes denklemlerinde tüm kayma gerilmeleri ve ısı iletimi terimlerinin ihmal edilmesi ile, viskozitesiz ve ısı iletimi olmayan akış konfigürasyonlarının en genel gösterimi olan Euler denklemleri elde edilir. Bu şekilde, viskoz olmayan birinci dereceden denklem sistemine geçilmiş olur.

Viskozitenin sadece sınır tabaka içinde etkili olduğu bilinmektedir. Sınır tabaka duvar ile serbest akış bölgesi arasındaki çok ince bir tabakadır. Sınır tabakanın kalınlığı Reynolds sayısına bağlıdır. Reynolds sayısı arttıkça sınır tabakanın kalınlığı azalmaktadır. Viskoz etkiler sadece sınır tabaka içerisinde kuvvetli olduğundan sınır tabaka dışarısındaki akışı çözmek için Euler denklemlerini kullanmak uygun olacaktır. Sınır tabaka dışarısında Euler ve Navier-Stokes denklemlerinin aynı sonucu vereceği çok açıktır. Eğer sınır tabaka içerisindeki akışın çözümü de istenirse, bu durumda sınır tabakadaki akış Navier Stokes denklemleri, sınır tabaka dışındaki akış ise Euler denklemleri kullanılarak etkileşimli olarak çözülebilir.

2.2 TEMEL AKIŞ DENKLEMLERİ

Zamanla değişen sıkıştırılabilir akışlar için viskoz olmayan korunumlu haldeki süreklilik, momentum ve enerji denklemleri sırasıyla

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho uv)}{\partial y} = 0 \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho vu)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v^2 + p)}{\partial y} = 0 \quad (2.2b)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u h_0)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v h_0)}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

şeklinde verilebilir. Bu denklemlerde ρ yoğunluğu, p basıncı, e birim hacimdeki toplam enerjisi, h_0 toplam entalpiyi ve t zamanı göstermektedir. x

ve y yönlerindeki hız bileşikleri ise u ve v ile ifade edilmişlerdir. Yukarıdaki denklemler vektörel olarak ifade edildiğinde

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

şeklini alır. Burada geçen korunum değişkenleri Q ve akış bileşenleri F ile G

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uh_o \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vh_o \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

şeklinde verilir. İdeal bir gaz için

$$h_o = \frac{e + p}{\rho} \quad (2.6)$$

$$p = (\gamma - 1) \left[e - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right] \quad (2.7)$$

bağlantıları yazılabilir.

2.3 EGRİSELLİNEER KOORDİNATLARDAKİ AKIŞ DENKLEMLERİ

Denklem (2.4) ile ifade edilen Kartezyen koordinatlardaki akış denklem sistemi fiziksel alandan, çözümüğü noktalarının düzgün dağıldığı ve bölgenin dikdörtgen olduğu sayısal alana dönüştürülebilir. Bu amaçla, aşağıda verilen genel dönüşüm tarif edilebilir.

$$(x, y) \rightarrow (\xi, \eta) \quad (2.8)$$

Burada

$$\xi = \xi(x, y) \quad (2.9a)$$

$$\eta = \eta(x, y) \quad (2.9b)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda x ve y yönündeki türevler

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \quad (2.10a)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \quad (2.10b)$$

ifade edilir. Yukarıdaki denklemler matris olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Yukarıdaki denklemde

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

dönüşümün Jakobisini göstermektedir. Eğer dönüşümün Jakobisinin determinanı sıfır değilse

$$|J| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0$$

bu durumda dönüşümün tersi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Yukarıdaki denklemde $[J]^{-1}$ dönüşümün Jakobisinin tersidir ve

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

olarak ifade edilir. Bu durumda $(\xi, \eta) \rightarrow (x, y)$ şeklindeki ters dönüşüm için ise

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy \quad (2.15a)$$

$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy \quad (2.15b)$$

eşitlikleri yazılabilir ve bunlar matris şeklinde aşağıdaki gibi ifade edilirler.

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Bu durumda (2.15) ve (2.16) numaralı denklemlerin eşitliğinden dönüşümün metrikleri aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (2.17a)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{|J|} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (2.17b)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{|J|} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (2.17c)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{|J|} \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (2.17d)$$

Kartezyen koordinatlardaki kısmi türevler zincir kuralı kullanılarak dönüştürülmüş koordinatlarda aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2.18a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2.18b)$$

Denklem (2.17) yardımı ile

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \quad (2.19a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{|J|} \left[-\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \quad (2.19b)$$

Yukarıdaki denklemler, denklem (2.4)'e uygulanırsa dönüştürülmüş koordinatlardaki akış denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial g}{\partial \eta} = 0 \quad (2.20)$$

Burada

$$q = |J| Q \quad (2.21)$$

$$f = \frac{\partial y}{\partial \eta} F - \frac{\partial x}{\partial \eta} G \quad (2.22)$$

$$g = \frac{\partial x}{\partial \xi} G - \frac{\partial y}{\partial \xi} F \quad (2.23)$$

şeklinde verilir.

BÖLÜM 3

SAYISAL ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

3.1 GİRİŞ

Bu çalışmada, Euler denklemlerinin sayısal çözümü için üç değişik yöntem kullanılmıştır. Bu yöntemler

- (i) sonlu fark,
- (ii) sonlu eleman ve
- (iii) sonlu hacim

yöntemleridir.

3.2 SONLU FARK YÖNTEMİ

Egrisel lineer koordinat sistemindeki akış denklemi (2.20), birinci dereceden geri farklar kullanılarak

$$\frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t} - \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^{n+1} + \left(\frac{\partial g}{\partial \eta} \right)^{n+1} = 0 \quad (3.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada diğer terimler $n+1$ zaman adımında hesaplanmıştır. Denklem (3.1) lineer olmadığından, aşağıdaki yaklaşımlar kullanılarak lineer hale getirilebilir.

$$f^{n+1} = f^n + \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right) \Delta q - \theta (\Delta t)^2 \quad (3.2a)$$

$$g^{n+1} = g^n + \left(\frac{\partial g}{\partial q} \right) \Delta q - \theta (\Delta t)^2 \quad (3.2b)$$

Yukarıdaki denklemlerde $A = \partial f / \partial q$ ve $B = \partial g / \partial q$ akı Jakobi matrisleri olup, bunlar aşağıdaki şekilde tanımlanabilir. [Hoffman (1989)]

$$A = \frac{\partial f}{\partial q} = \begin{bmatrix} 0 & \xi_u & \xi_v & 0 \\ -u(\xi_u u + \xi_v v) + \xi_u \left[\frac{1}{2}(\gamma-1)(u^2 + v^2) \right] & \xi_u(2-\gamma)u + \xi_u u + \xi_v v & -(\gamma-1)\xi_u v + \xi_u u & (\gamma-1)\xi_u \\ -v(\xi_u u + \xi_v v) + \xi_v \left[\frac{1}{2}(\gamma-1)(u^2 + v^2) \right] & -(\gamma-1)\xi_u u + \xi_v v & \xi_v(2-\gamma)v + \xi_v u + \xi_v v & (\gamma-1)\xi_v \\ (\xi_u u + \xi_v v) + \xi_u \left[-\frac{1}{2}(\gamma-1)(u^2 + v^2) \right] & \xi_u \left[-\frac{1}{2}(\gamma-1)(u^2 + v^2) \right] & \xi_v \left[-\frac{1}{2}(\gamma-1)(u^2 + v^2) \right] & \gamma(\xi_u u + \xi_v v) \\ \gamma(\gamma-1)(u^2 + v^2) & -(\gamma-1)(\xi_u u + \xi_v v)u & -(\gamma-1)(\xi_u u + \xi_v v)v & \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$B = \frac{\partial g}{\partial q} = \begin{bmatrix} 0 & \eta_u & \eta_v & 0 \\ -u\eta_u u + \eta_u v + \eta_u \left[\frac{1}{2}(\gamma-1)(u^2 + v^2) \right] & \eta_u(2-\gamma)u + \eta_u u + \eta_v v & -(\gamma-1)\eta_u v + \eta_u u & (\gamma-1)\eta_u \\ -v\eta_u u + \eta_u v + \eta_v \left[\frac{1}{2}(\gamma-1)(u^2 + v^2) \right] & -(\gamma-1)\eta_u u + \eta_v v & \eta_v(2-\gamma)v + \eta_u u + \eta_v v & (\gamma-1)\eta_v \\ \eta_u u + \eta_v v + \eta_u \left[-\frac{1}{2}(\gamma-1)(u^2 + v^2) \right] & \eta_u \left[-\frac{1}{2}(\gamma-1)(u^2 + v^2) \right] & \eta_v \left[-\frac{1}{2}(\gamma-1)(u^2 + v^2) \right] & \gamma(\eta_u u + \eta_v v) \\ \gamma(\gamma-1)(u^2 + v^2) & -(\gamma-1)\eta_u u + \eta_v v u & -(\gamma-1)\eta_u u + \eta_v v v & \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Eğer denklem (3.2a) ve (3.2b), denklem (3.1) ile birleştirilirse aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\Delta q + \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (I^n + A^n \Delta q) - \frac{\partial}{\partial \eta} (g^n + B^n \Delta q) \right] \quad (3.5)$$

veya

$$\left[I - \Delta t \left(\frac{\partial A^n}{\partial \xi} + \frac{\partial B^n}{\partial \eta} \right) \right] \Delta q = - \Delta t \left[\frac{\partial I^n}{\partial \xi} + \frac{\partial g^n}{\partial \eta} \right] \quad (3.6)$$

Daimi olmayan iki boyutlu denklemler skaler olarak incelendiğinde iki sonuca varılabilir. Bunlar

(i) Açık tipte formülasyon kullanılması kararlılık nedeniyle çok sınırlıdır ve bu nedenle kapalı metodlar tercih edilir.

(ii) Kapalı tipteki formülasyonlarda ise beşli diyagonal katsayı matrisleri elde edilir. Bu matrislerin çözümü çok zaman almaktadır. Bunu ortadan kaldırmak için yaklaşık bir faktörizasyon yöntemi uygulanabilir. Bu yöntem ile orjinal sonlu fark denklemlerinin katsayı matrisleri üçlü diyagonal olan bir seri denklem haline getirilebilir.

Bu yaklaşık faktörizasyon yöntemi denklem (3.6) ya uygulanırsa

$$\left[I - \Delta \frac{\partial A^n}{\partial \xi} \right] \left[I + \Delta \frac{\partial B^n}{\partial \eta} \right] \Delta q = -\Delta \left[\frac{\partial f^n}{\partial \xi} + \frac{\partial g^n}{\partial \eta} \right] \quad (3.7)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin sağ tarafındaki terimler bilinen zaman seviyesi olan n 'de hesaplanabilir. Burada Δq bilinmeyen vektördür. I ise birim matrisi göstermektedir.

Akı vektörü ayrıştırma yönteminin uygulanabilmesi için A ve B akı Jakobi matrislerinin gizdeğerlerinin bulunması gerekir. Bu nedenle, bu matrislerin elemanlarında bulunan birim hacimdeki toplam enerji e' nin ses hızı a ile hız bileşikleri u ve v cinsinden ifadeleri gerekir. Denklem (2.7) yardımı ile

$$e' = \frac{a^2}{\gamma(\gamma-1)} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \quad (3.8)$$

denklemi yazılabilir ve A ile B akı Jakobi matrisleri aşağıdaki hale dönüşür. [Hoffman (1989)]

$$A = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & \xi_x & \xi_y & 0 \\ -u(\eta_x + v\xi_y) & \xi_x + \xi(3-\gamma)u & -(\gamma-1)\xi_y v & (\gamma-1)\xi_x \\ +\xi_x \left[\frac{1}{2}(\gamma-1)(u^2 + v^2) \right] & +\xi_y v & +\xi_y u & \\ -v(u\xi_x + v\xi_y) & \xi_x v - (\gamma-1)\xi_y u & \xi_x u & (\gamma-1)\xi_y \\ +\xi_y \left[\frac{1}{2}(\gamma-1)(u^2 + v^2) \right] & & +\xi_y(3-\gamma)v & \\ (\xi_x u + \xi_y v) & \xi_x \left[\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right] & \xi_y \left[\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right] & \gamma \xi_x u + \xi_y v \\ \left[\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2}(\gamma-1)(u^2 + v^2) \right] & -(\gamma-1)(\xi_x u + \xi_y v)u & -(\gamma-1)(\xi_x u + \xi_y v)v & \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$B = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & \eta_x & \eta_y & 0 \\ -u(\eta_x + v\eta_y) & \eta_x(3-\gamma)u + \eta_y v & -(\gamma-1)\eta_x v + \eta_y u & (\gamma-1)\eta_x \\ +\eta_x \left[\frac{1}{2}(\gamma-1)(u^2 + v^2) \right] & & & \\ -v(\eta_x u + \eta_y v) & \eta_x v - (\gamma-1)\eta_y u & \eta_x u + \eta_y(3-\gamma)v & (\gamma-1)\eta_y \\ +\eta_y \left[\frac{1}{2}(\gamma-1)(u^2 + v^2) \right] & & & \\ (u\eta_x + v\eta_y) & \eta_x \left[\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right] & \eta_y \left[\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right] & \gamma(\eta_x u + \eta_y v) \\ \left[\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2}(\gamma-1)(u^2 + v^2) \right] & -(\gamma-1)(\eta_x u + \eta_y v)u & -(\gamma-1)(\eta_x u + \eta_y v)v & \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

A dizeyinin gizdeğerleri aşağıdaki gibi bulunabilir. [Hoffman (1989)]

$$\lambda_{\eta_1} = \xi_x u - \xi_y v \quad (3.11a)$$

$$\lambda_{\eta_2} = \xi_x u - \xi_y v \quad (3.11b)$$

$$\lambda_{\eta_3} = \xi_x u + \xi_y v + a \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \quad (3.11c)$$

$$\lambda_{zj} = \xi_x u + \xi_y v - a \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \quad (3.11d)$$

Gizvektör matrisi ile bu matrisin tersi sırasıyla

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{v}{a} & \frac{u\xi_x + v\xi_y}{a} & u + \frac{a\xi_x}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} & u - \frac{a\xi_x}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} \\ 1 & 0 & v - \frac{a\xi_y}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} & v - \frac{a\xi_y}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} \\ \frac{v\xi_x + u\xi_y}{a} & \frac{2uv\xi_x + (u^2 - v^2)\xi_y}{2a} & \frac{u^2 - v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} & \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} \\ \frac{a(u\xi_x + v\xi_y)}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} & \frac{a(u\xi_x + v\xi_y)}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} & \frac{a(u\xi_x + v\xi_y)}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} & \frac{a(u\xi_x + v\xi_y)}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$X_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(1 - \gamma v)(u^2 - v^2)}{2a^2} & \frac{(\gamma - 1)uv}{a^2} & \frac{(\gamma - 1)v^2}{a^2} & \frac{(\gamma - 1)v}{a^2} \\ -\frac{v}{a} \frac{(u\xi_x + v\xi_y)}{\xi_x^2 + \xi_y^2} & -\frac{v}{a} \frac{a}{\xi_x^2 + \xi_y^2} & +\frac{v}{a} \frac{a}{\xi_x^2 + \xi_y^2} & \\ 1 - \frac{(1 - \gamma)(u^2 + v^2)}{2a^2} & \frac{(\gamma - 1)u}{a^2} & \frac{(\gamma - 1)v}{a^2} & \frac{\gamma - 1}{a^2} \\ \frac{(\gamma - 1)(u^2 + v^2)}{4a^2} & \frac{(1 - \gamma)u}{2a^2} \frac{v}{2a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} & \frac{(1 - \gamma)v}{2a^2} \frac{v}{2a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} & \frac{\gamma - 1}{2a^2} \\ \frac{(\gamma - 1)(u^2 - v^2)}{4a^2} & \frac{(1 - \gamma)u}{2a^2} \frac{v}{2a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} & \frac{(1 - \gamma)v}{2a^2} \frac{v}{2a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} & \frac{\gamma - 1}{2a^2} \\ \frac{u\xi_x + v\xi_y}{2a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} & \frac{v}{2a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} & \frac{v}{2a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} & \frac{v}{2a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

şeklinde verilir. B matrisin gizdeğerleri ise

$$\lambda_{\alpha 1} = \eta_x u + \eta_y v \quad (3.14a)$$

$$\lambda_{\alpha 2} = \eta_x u - \eta_y v \quad (3.14b)$$

$$\lambda_{\alpha 3} = \eta_x u + \eta_y v + a \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \quad (3.14c)$$

$$\lambda_{\alpha 4} = \eta_x u + \eta_y v - a \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \quad (3.14d)$$

şeklinde bulunur. Yine bu matrise ait gizvektör matrisi ile bu matrisin tersi

$$X_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{\eta_x}{\eta_t} & \frac{u\eta_x + v\eta_t}{\eta_t} & u + \frac{a\eta_x}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}} & u - \frac{a\eta_x}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}} \\ 1 & 0 & v + \frac{a\eta_t}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}} & v - \frac{a\eta_t}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}} \\ \frac{v\eta_x - u\eta_t}{\eta_t} & \frac{2uv\eta_x + (u^2 - v^2)\eta_t}{2\eta_t} & \frac{u^2 - v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} & \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} \\ & & \frac{a(u\eta_x + v\eta_t)}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}} & \frac{a(u\eta_x + v\eta_t)}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{cccc}
\frac{(1-\gamma w)(u^2+v^2)}{2a^2} & \frac{(\gamma-1)uv}{a^2} & \frac{(\gamma-1)v^2}{a^2} & \frac{(\gamma-1)v^2}{a^2} \\
\frac{\eta_u(\eta_u+v\eta_v)}{\eta_u^2+\eta_v^2} & \frac{\eta_u\eta_v}{\eta_u^2+\eta_v^2} & \frac{\eta_v^2}{\eta_u^2+\eta_v^2} & \\
1+\frac{(1-\gamma)(u^2+v^2)}{2a^2} & \frac{(\gamma-1)u}{a^2} & \frac{(\gamma-1)v}{a^2} & \frac{\gamma-1}{a^2} \\
\end{array} \\
N_B^{-1} = & \begin{array}{cccc}
\frac{(\gamma-1)(u^2+v^2)}{4a^2} & \frac{(1-\gamma)u}{2a^2} + \frac{\eta_u}{2a\sqrt{\eta_u^2+\eta_v^2}} & \frac{(1-\gamma)v}{2a^2} + \frac{\eta_v}{2a\sqrt{\eta_u^2+\eta_v^2}} & \frac{\gamma-1}{2a^2} \\
\frac{u\eta_u-v\eta_v}{2a\sqrt{\eta_u^2+\eta_v^2}} & & & \\
\frac{(\gamma-1)(u^2+v^2)}{4a^2} & \frac{(1-\gamma)u}{2a^2} & \frac{(1-\gamma)v}{2a^2} + \frac{\eta_v}{2a\sqrt{\eta_u^2+\eta_v^2}} & \frac{\gamma-1}{2a^2} \\
\frac{u\eta_u+v\eta_v}{2a\sqrt{\eta_u^2+\eta_v^2}} & \frac{\eta_u}{2a\sqrt{\eta_u^2+\eta_v^2}} & &
\end{array} \quad (3.16)
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

A ve B Jakobi akı matrislerinin gizdeğerleri belirlenince, bu matrislerin aşağıdaki gibi ayrıştırılması mümkün olur.

$$A = A^+ + A^- \quad (3.17)$$

$$B = B^+ + B^- \quad (3.18)$$

Burada

$$A^+ = X_A D_A^+ X_A^{-1} \quad (3.19a)$$

$$A^- = X_A D_A^- X_A^{-1} \quad (3.19b)$$

$$B^+ = X_B D_B^+ X_B^{-1} \quad (3.20a)$$

ve

$$B^- = X_B D_B^- X_B^{-1} \quad (3.20b)$$

şeklinde ifade edilir. D_A^- ve D_B^- matrisleri sırasıyla elemanları pozitif gizdeğerler olan köşegenel matrisleri. D_A^+ ve D_B^+ matrisleri sırasıyla elemanları negatif gizdeğerler olan köşegenel matrisleri göstermektedir.

Aynı şekilde f ve g vektörleri de aşağıdaki şekilde ayrıştırılır.

$$f = f^+ + f^- \quad (3.21)$$

$$g = g^+ + g^- \quad (3.22)$$

Burada

$$f^+ = A^+ q \quad (3.23a)$$

$$f^- = A^- q \quad (3.23b)$$

$$g^+ = B^+ q \quad (3.24a)$$

$$g^- = B^- q \quad (3.24b)$$

Böylece, ayrıştırma yöntemi kullanılarak, denklem (3.7) aşağıdaki şekle dönüştürülür.

$$\begin{aligned} & \left\{ I + \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (A^+ + A^-) \right] \right\} \left\{ I + \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (B^+ + B^-) \right] \Delta q \right. \\ & = -\Delta t \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (f^+ + f^-) + \frac{\partial}{\partial \eta} (g^+ + g^-) \right\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Pozitif terimler için birinci dereceden geriye doğru sonlu farklar, negatif terimler içinse birinci dereceden ileriye doğru sonlu farklar kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left[I + \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (A_{i,j}^+ - A_{i,j-1}^+ - A_{i,j}^- + A_{i,j}^-) \right] \\ & \times \left[I + \frac{\Delta t}{\Delta \eta} (B_{i,j}^+ - B_{i,j-1}^+ + B_{i,j+1}^- - B_{i,j}^-) \right] \Delta q \\ & = -\Delta t \left[\frac{1}{\Delta \xi} (f_{i,j}^+ - f_{i,j-1}^+ + f_{i,j+1}^- - f_{i,j}^-) + \frac{1}{\Delta \eta} (g_{i,j}^+ - g_{i,j-1}^+ + g_{i,j+1}^- - g_{i,j}^-) \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

Denklem (3.26) aşağıda verildiği gibi iki kadamede çözülebilir.

$$\begin{aligned} & \left[I + \frac{\Delta t}{\Delta x} (A_{i,j}^+ - A_{i,j}^- - A_{i-1,j}^+ - A_{i,j}^-) \right] \Delta q^+ \\ & = -\Delta t \left[\frac{1}{\Delta x} (f_{i,j}^+ - f_{i,j}^- - f_{i-1,j}^+ - f_{i,j}^-) - \frac{1}{\Delta y} (g_{i,j}^+ - g_{i,j}^- + g_{i,j-1}^+ - g_{i,j}^-) \right] \end{aligned} \quad (3.27a)$$

ve

$$\left[I + \frac{\Delta t}{\Delta y} (B_{i,j}^+ - B_{i,j}^- - B_{i,j+1}^+ - B_{i,j}^-) \right] \Delta q^- = \Delta q^+ \quad (3.27b)$$

Bu denklemlerin herbiri üçlü blok diyagonal şeklindedir. [Amer (1995)]

3.3 SONLU ELEMAN YÖNTEMİ

Sonlu eleman formülasyonu Taylor-Galerkin yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Bu yöntemde, Q korunum değişkenleri vektörü zaman boyutunda Taylor serisi ile açılıp Galerkin'in sonlu eleman ayrıştırması ile birlikte uygulanır. Ortaya çıkan Taylor-Galerkin yöntemi oldukça basit olup klasik Galerkin yönteminin dezavantajlarını ortadan kaldırmaktadır. Bu çalışmada iki basamak Taylor-Galerkin yöntemi kullanılmıştır.

(i) İlk basamak:

Denklem (2.4) teki Q korunum değişkenleri vektörü zaman boyutunda Taylor serisi ile açılırsa

$$Q^{n+1/2} = Q^n - \frac{\Delta t}{2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^n + \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)^n \right] \quad (3.28)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde $Q^{n+1/2}$ parçasal sabit olarak, Q^n , F^n ve G^n ise doğrusal içdeğer biçimle ifade edilir. Denklem (3.28) ağırlıklı artık şeklinde ifade edilirse

$$\int_{\Omega_e} \hat{Q}^{n+1/2} d\Omega = \int_{\Omega_e} \hat{Q}^n d\Omega - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{G}}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.29)$$

Burada e elemanı ile ilgili parçasal sabit içdeğer biçim fonksiyonlarının değeri bir olarak alınmıştır. Korunan değişkenler ve akılar doğrusal sonlu elemanlar yaklaşımı ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\hat{Q}^n = \sum_j Q_j^n N_j \quad (3.30a)$$

$$\hat{F}_n = \sum_j F_j^n N_j \quad (3.30b)$$

$$\hat{G}_n = \sum_j G_j^n N_j \quad (3.30c)$$

$$\hat{Q}^n = \sum_j Q_j^n N_j \quad (3.30d)$$

$$\hat{Q}^{n+1/2} = \sum_e Q_e^{n+1/2} P_e \quad (3.30e)$$

$$\frac{\partial \hat{F}^n}{\partial x} = \sum_j F_j^n \frac{\partial N_j}{\partial x} \quad (3.30f)$$

$$\frac{\partial \hat{G}^n}{\partial y} = \sum_j G_j^n \frac{\partial N_j}{\partial y} \quad (3.30g)$$

Burada P_e : e elemanına ait parçasal sabit içdeğerbiçim fonksiyonunu göstermektedir ve

$$P_e = \begin{cases} 1 & e \text{ elemanı için} \\ 0 & \text{diğer elemanlar için} \end{cases} \quad (3.31)$$

şeklinde verilir. Bu tanım kullanılarak, denklem (3.29) aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \Delta_e \hat{Q}^{n+1/2} &= \sum_j \left(\int_{\Omega_e} N_j d\Omega \right) Q_j^n - \frac{\Delta t}{2} \left[\sum_j \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \right) F_j^n \right. \\ &\left. + \sum_j \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega \right) G_j^n \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

Yukarıdaki denklemde Δ_e e elemanın alanını göstermektedir. Böylece ara zaman seviyesi olan $t^{n+1/2}$ deki çözüm vektörü her eleman için elde edilmiş olur. Bu denklemin sağ tarafı sadece e elemanı üzerinde tümlemeyi ihtiva etmektedir. Bu yöntem her eleman için Q'da sabit bir değişimin bulunması şeklinde de izah edilebilir. Başka bir deyişle, her eleman için Q'daki sabit değişim aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\delta \hat{Q}_e = -\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial y} \right)_e \quad (3.33)$$

Burada \hat{F} ve \hat{G} akıları doğrusal içdeğerbiçim yöntemiyle bulunur. Böylece $\hat{Q}_e^{n+1/2}$ değerine sürekli olmayan parçasal doğrusal yaklaşım $\delta \hat{Q}$ nun hesaplanan değeri ile \hat{Q}^n nin doğrusal dağılımı kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$(\hat{Q}_j)_e^{n+1/2} = (\hat{Q}_j)_e^n + \delta \hat{Q}_e \quad (3.34)$$

(ii) İkinci basamak:

Bu adımda, $Q^{n+1/2}$ değerleri kullanılarak $F^{n+1/2}$ ve $G^{n+1/2}$ değerleri elde edilir. Q korunum değişken vektörü tekrar Taylor serisi ile açılırsa

$$Q^{n+1} = Q^n + \Delta t \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)^{n+1/2} \quad (3.35)$$

elde edilir. Akılar kullanılarak

$$Q^{n+1} = Q^n - \Delta t \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y} \right)^{n+1/2} \quad (3.36)$$

denklemi elde edilir. Kullanılacak sonlu eleman yaklaşımları

$$\hat{Q}^{n+1} = \sum_j Q_j^{n+1} N_j \quad (3.37a)$$

$$\hat{F}^{n+1/2} = \sum_i F_i^{n+1/2} P_i \quad (3.37b)$$

$$\hat{G}^{n+1/2} = \sum_j G_j^{n+1/2} P_j \quad (3.37c)$$

tarif edilirse, ağ noktalarındaki Q_j^{n+1} değerleri, denklem (3.36)'nın içdeğerbiçim fonksiyonları N_j ile çarpılıp Ω üzerinde tümlenmesiyle elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \sum_i \left(\int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \right) \delta Q_j &= \Delta t \sum_e \left(\int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} P_e d\Omega \right) (F_e + G_e)^{n+1/2} \\ &- \Delta t \sum_e \left(\int_{\Omega} n N_i P_e d\Gamma \right) (F_e + G_e)^{n+1/2} \end{aligned} \quad (3.38)$$

denklemi elde edilir. Burada

$$\delta Q_j = Q_j^{n+1} - Q_j^n \quad (3.39)$$

şeklinde tarif edilir. Eğer sınırlardaki ağ noktalarında Q değerleri biliniyorsa, denklem (3.38) deki Γ sınırları etrafındaki tümlemenin hesaplanması gerekmez. Denklem (3.38) matris şeklinde ifade edilirse

$$[M] [\delta Q] = [K] \quad (3.40)$$

şeklini alır. Burada $[M]$ standard sonlu eleman kütle matrisini göstermektedir ve

$$M_{ij} = \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \quad (3.41)$$

şeklinde ifade edilir. $[K]$ vektörü ise denklem (3.34)'ün sağ tarafı kullanılarak j ağ noktasına elemanların katkıları toplanarak bulunur. Daha sonra, denklem (3.40) çözülerek δQ_j vektörü elde edilir ve yeni zaman adımıdaki çözüm

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n + \delta Q_j \quad (3.42)$$

şeklinde elde edilir. [Lüle(1995)]

Viskoz olmayan çözümlerde en önemli zorluk, şok dalgaları gibi sürekli olmayan özelliklerin ifade edilmesidir. Bu nedenle, sunni viskozite kullanılarak süreksizliğin birkaç hesaplama elemanı üzerine yayılması sağlanmıştır. Bu yöntem şoktan uzaklaşıldıkça etkisini kaybetmektedir ve gerçek akışkanların özellikleri göz önünde bulundurularak elde edilmiştir. Burada her zaman adımı sonucunda elde edilen çözüm Q^{n+1} aşağıdaki şekilde düzgünleştirilir.

$$Q_j^{n+1} = Q^{n+1} + D(Q^{n+1}) \quad (3.43)$$

Bu denklemde, Q_j^{n+1} $n+1$ zamanındaki düzgünleştirilmiş çözümü ve $D(Q)$ ise difüzyon operatörünü göstermektedir. Bu operatör kullanılacak sunni viskozite modeline bağlıdır. Lapidus (1982) tarafından kullanılan operatör ikinci dereceden olup hız gradyanlarını kullanmaktadır ve aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$D(Q) = \lambda \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \right) \quad (3.44)$$

Yukarıdaki denklem ayrıştırılırsa

$$\int_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.45)$$

denklemini elde edilir. Burada λ katsayısı hangi bölgelere ne miktarda dissipasyon ilave edileceğini göstermektedir. Böylece denklem (3.40) tan elde edilen değerler düzeltilmiş olan Q_j^{n+1} değerleri ile aşağıdaki şekilde bulunur.

$$M_{ij}(Q_j^{n+1} - Q_j^{n+1}) = \Delta t \int_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.46)$$

3.4 SONLU HACİM YÖNTEMİ

Bu çözüm yöntemi, Ni (1982) tarafından geliştirilen yöntem kullanılarak elde edilmiştir. Bu çözüm yönteminde, zamanda tümleme tek adımlı Lax-Wendroff yöntemi, uzayda tümleme ise hücre köşesi sonlu hacim yöntemi ile gerçekleştirilmiştir.

Korunmuş değişkenlerin zamana bağlı türevleri ikinci dereceden Taylor serisi kullanılarak açılırsa

$$Q_i^{n+1} \cong Q_i^n - \Delta t \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)_i^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \right)_i^n \quad (3.47)$$

denklemini elde edilir. Burada i indisi ağ noktalarını, n indisi ise zaman seviyesini göstermektedir. Denklem (3.47) deki $(\partial Q/\partial t)^n$ terimi Euler denklemleri kullanılarak $-(\partial F/\partial x + \partial G/\partial y)^n$ terimi ile ifade edilebilir. Eğer

$\delta Q = Q^{n+1} - Q^n$ şeklinde tarif edilirse, denklem (3.47)

$$\delta Q = - \Delta t \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y} \right)^n + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y} \right)^n \quad (3.48)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Akı bileşenlerinin zamana bağlı olarak değişmesi quasi lineer olarak

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right)^n &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^n + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial t} \right)^n \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} \right)^n + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} \right)^n\end{aligned}\quad (3.49)$$

şeklinde ifade edilip, denklem (3.48) ile birleştirilirse

$$\delta Q = -\Delta t \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right)^n - \frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} \right)^n + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} \right)^n \right]\quad (3.50)$$

denklemi elde edilir. Bu durumda aşağıdaki tarifler yapılırsa

$$\Delta Q_i^n = -\Delta t \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right)^n$$

$$\Delta F^n = \left(\frac{\partial F}{\partial Q} \right) \Delta Q_i^n$$

$$\Delta G^n = \left(\frac{\partial G}{\partial Q} \right) \Delta Q_i^n$$

denklem (3.50)

$$\delta Q = -\Delta t \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right)^n - \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\Delta F)^n + \frac{\partial}{\partial y} (\Delta G)^n \right]\quad (3.51)$$

şeklini veya

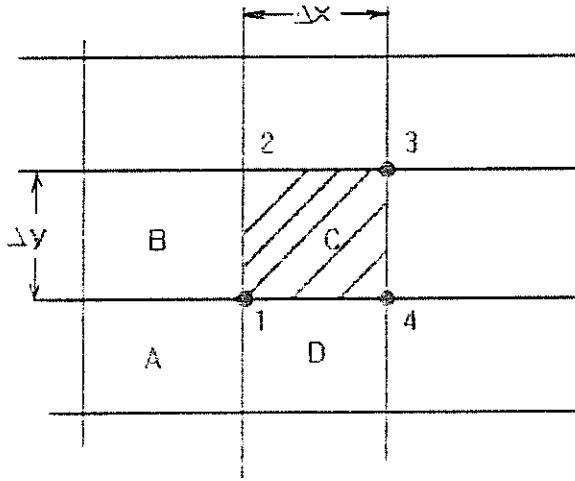
$$\delta Q = \Delta Q_i^n - \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\Delta F)^n + \frac{\partial}{\partial y} (\Delta G)^n \right]\quad (3.52)$$

şeklini alır. Burada ΔQ_i^n korunmuş değişkenlerdeki birinci dereceden değişmeyi göstermektedir.

Sonlu hacim yaklaşımı, denklem (2.1) ile ifade edilen Euler denkleminde uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\Delta Q_c = \frac{\Delta t}{\Delta \nabla_c} & \left[\frac{F_1 + F_2}{2} (y_2 - y_1) - \frac{G_1 + G_2}{2} (x_2 - x_1) \right. \\
& + \frac{F_2 + F_3}{2} (y_3 - y_2) - \frac{G_2 + G_3}{2} (x_3 - x_2) \\
& + \frac{F_3 + F_4}{2} (y_4 - y_3) - \frac{G_3 + G_4}{2} (x_4 - x_3) \\
& \left. + \frac{F_4 + F_1}{2} (y_1 - y_4) - \frac{G_4 + G_1}{2} (x_1 - x_4) \right] \quad (3.53)
\end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Burada $\Delta \nabla_c$, Şekil 3.1 de görülen ve 1, 2, 3 ve 4 numaralı ağ noktaları ile tarif edilen C kontrol hacminin hacmini göstermektedir. Bu hacim, C hücresinin iki köşegen vektörünün vektörel çarpımıyla elde edilebilir. Eğer bu hücreye ait köşegen vektörler



Şekil 3.1 İki boyutlu problemler için kontrol hacimleri

$$\vec{e} = [(x_3 - x_1)\vec{i} + (y_3 - y_1)\vec{j}]$$

$$\vec{f} = [(x_4 - x_2)\vec{i} + (y_4 - y_2)\vec{j}]$$

şeklinde ifade edilirse, bu hücrenin hacmi

$$\Delta \nabla_c = \frac{1}{2} (\vec{f} \times \vec{e}) = \frac{1}{2} [(x_4 - x_2)(y_3 - y_1) - (y_4 - y_2)(x_3 - x_1)] \quad (3.54)$$

şeklinde bulunur. C hücresinden ağ noktalarına uygulanacak düzeltmeler aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$(\delta Q_1)_c = \frac{1}{4} [\Delta Q_A + \Delta f_A + \Delta g_A] \quad (3.55a)$$

$$(\delta Q_2)_c = \frac{1}{4} [\Delta Q_A + \Delta f_A - \Delta g_A] \quad (3.55b)$$

$$(\delta Q_3)_c = \frac{1}{4} [\Delta Q_A - \Delta f_A - \Delta g_A] \quad (3.55c)$$

$$(\delta Q_4)_c = \frac{1}{4} [\Delta Q_A - \Delta f_A + \Delta g_A] \quad (3.55d)$$

Burada

$$\Delta f_A = \frac{\Delta f}{\Delta \nabla_c} [\Delta f_x \Delta f_y - \Delta G_A \Delta f_x]$$

$$\Delta g_A = \frac{\Delta g}{\Delta \nabla_c} [\Delta G_A \Delta g_x - \Delta f_A \Delta g_y]$$

şeklinde ifade edilir ve

$$\Delta f_x = 0.5 [x_2 + x_3 - x_1 - x_4]$$

$$\Delta f_y = 0.5 [y_2 + y_3 - y_1 - y_4]$$

$$\Delta g_x = 0.5 [x_1 + x_4 - x_3 - x_2]$$

$$\Delta g_y = 0.5 [y_1 + y_4 - y_3 - y_2]$$

halinde verilir.

Ana denklemlere sonlu hacim yaklaşımı uygulandığında korunmuş değişken vektörü ile akı vektörlerinde değişimler oluşmaktadır. Bunlar

$$\Delta Q = \begin{bmatrix} (\Delta \rho) \\ (\Delta \rho u) \\ (\Delta \rho v) \\ (\Delta p) \end{bmatrix} \quad \Delta F = \begin{bmatrix} \Delta \rho u \\ u(\Delta \rho u) - u(\rho \Delta u) - \Delta p \\ v(\Delta \rho u) - u(\rho \Delta v) \\ h_c(\Delta \rho u) - u(\rho \Delta h_c) \end{bmatrix} \quad \Delta F = \begin{bmatrix} \Delta \rho v \\ v(\Delta \rho v) - v(\rho \Delta v) \\ u(\Delta \rho v) - v(\rho \Delta u) - \Delta p \\ h_c(\Delta \rho v) - v(\rho \Delta h_c) \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifadelerde

$$(\rho\Delta u) = (\Delta\rho u) - u(\Delta\rho)$$

$$(\rho\Delta v) = (\Delta\rho v) - v(\Delta\rho)$$

$$(\rho\Delta h_o) = (\Delta e) + (\Delta p) - h_o(\Delta\rho)$$

$$(\Delta p) = (\gamma - 1) \left\{ (\Delta e) - \frac{1}{2} [u(\Delta\rho u) + v(\Delta\rho v) + u(\rho\Delta u) + v(\rho\Delta v)] \right\}$$

olarak verilir.

BÖLÜM 4

SINIR ŞARTLARI

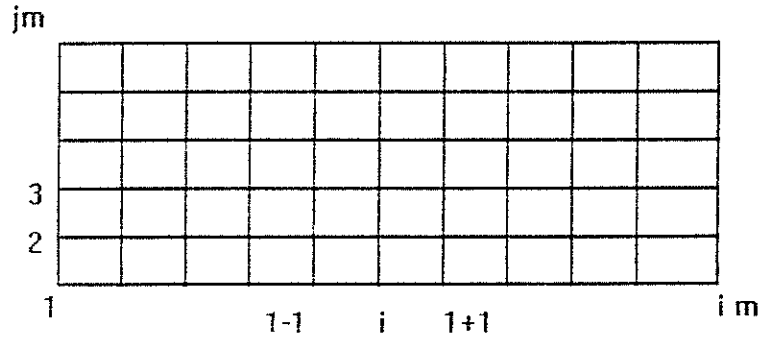
4.1 GİRİŞ

Genelde, Euler denklemlerinin sınırsız sayıda çözümü vardır. Tek bir çözüm elde edebilmek için başlangıç ve sınır şartlarının doğru olarak belirlenmesi gerekir. Günümüzde sınır şartları ve bu sınır şartlarının çözümün kararlılık ve hassasiyetine etkisi yoğun bir şekilde araştırılmaktadır.

4.2 DUVAR SINIR ŞARTI

4.2.1 Hız ve Yoğunluk Hesaplamaları

Duvar üzerindeki basıncın duvara dik yöndeki momentum denkleminde hesaplanabilmesi için öncelikle yeni zaman seviyesindeki yoğunluk ve hız bileşenlerinin bulunması gerekir. Bu işlem ise ikinci dereceden dışdeğerbiçim yöntemleri ile gerçekleştirilir.



Şekil 4.1 Sayısal uzaydaki hesaplama ağı

Şekil 4.1 kullanılarak, yoğunluk için ikinci dereceden dışdeğerbiçim aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$\rho_{i,3} = 2\rho_{i,2} - \rho_{i,1} \quad i = 2,3, \dots, i_m - 1 \quad (4.1)$$

Hız dışdeğerbiçiminde ise karşıdeğişkin hızların tanımı kullanılır. Bunlar

$$U = u\xi_x + v\xi_y$$

$$V = u\eta_x - v\eta_y$$

şeklinde ifade edilir. Matris şeklinde yazıldığında

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

veya

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \eta_y & -\xi_y \\ -\eta_x & \xi_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$$

şeklinde verilir. Denklem (4.2) kullanılarak

$$u_{i,2} = \frac{(\xi_x)_{i,2}(\rho u)_{i,2} + (\xi_y)_{i,2}(\rho v)_{i,2}}{\rho_{i,2}}$$

$$u_{i,3} = \frac{(\xi_x)_{i,3}(\rho u)_{i,3} - (\xi_y)_{i,3}(\rho v)_{i,3}}{\rho_{i,3}}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda, duvar üzerindeki karşıdeğişken hızlar

$$U_{i,a} = 2U_{i,2} - U_{i,3}$$

$$V_{i,a} = 0$$

halini alacaktır. Böylece duvar üzerindeki korunmuş değişkenler

$$(\rho u)_{i,a} = \rho_{i,a} \left[\frac{(\eta_y)_{i,a}}{J_{i,a}} U_{i,a} + \frac{(-\xi_y)_{i,a}}{J_{i,a}} V_{i,a} \right] \quad (4.4a)$$

$$(\rho v)_{i,a} = \rho_{i,a} \left[\frac{(-\eta_x)_{i,a}}{J_{i,a}} U_{i,a} + \frac{(\xi_x)_{i,a}}{J_{i,a}} V_{i,a} \right] \quad (4.4b)$$

şeklinde bulunur.

4.2.2 Basınç Hesaplaması

Momentum denkleminin x ve y yönündeki bileşikleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) = 0 \quad (4.5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + p) = 0 \quad (4.5b)$$

Duvar üzerinde kütle akısı sıfır olacağından

$$\frac{\dot{m}}{A} = \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) = 0 \quad (4.6)$$

Burada hız vektörü $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$, birim normal vektör ise $\vec{n} = \vec{\nabla}\eta / |\nabla\eta|$ şeklinde verilebilir. Eğer

$$\vec{\nabla}\eta = \eta_x\vec{i} + \eta_y\vec{j} = J(-y_x\vec{i} + x_x\vec{j})$$

şeklinde ifade edilirse, denklem (4.6)

$$\xi vx_x - \rho uy_x = 0 \quad (4.7)$$

halini alır. Bu denklemin zamana göre türevi alınır ve hesaplama ağının zamana göre değişmediği göz önünde bulundurulursa

$$x_x \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) - y_x \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) = 0 \quad (4.8)$$

Eğer denklem (4.5a) y_x ile çarpılıp, x_x ile çarpılan denklem (4.5b) den çıkartılırsa

$$y_x \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) - y_x \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) - x_x \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv) + x_x \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + p) = 0 \quad (4.9)$$

denklemi elde edilir. Denklem (4.7) yardımı ile

$$y_x (\rho u \frac{\partial u}{\partial x} - \rho v \frac{\partial u}{\partial y}) - x_x (\rho u \frac{\partial v}{\partial x} - \rho v \frac{\partial v}{\partial y}) = -y_x \frac{\partial p}{\partial x} - x_x \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.10)$$

eşitliği bulunur. Eğer

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (4.11a)$$

ile

$$\frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (4.11b)$$

ifadeleri tarif edilirse, denklem (4.10)

$$\begin{aligned} & y_z \left[\rho u (\xi_x u_z + \eta_x u_n) + \rho v (\xi_y u_z + \eta_y u_n) \right] \\ & - x_z \left[\rho u (\xi_x v_z + \eta_x v_n) + \rho v (\xi_y v_z + \eta_y v_n) \right] \\ & = -y_z (\xi_x p_z + \eta_x p_n) - x_z (\xi_y p_z + \eta_y p_n) \end{aligned} \quad (4.12)$$

şeklini alır. Metrikler arasındaki ilişkiler yukarıdaki denkleme konursa, bu denklem sırasıyla

$$\begin{aligned} & J\rho \left[(-u_z y_z + x_z v_z) (x_z v - u y_z) \right] = \\ & (-\xi_x y_z + x_z \xi_y) p_z - (-y_z \eta_x + x_z \eta_y) p_n \end{aligned} \quad (4.13)$$

ve

$$\begin{aligned} & J\rho \left[-u_z \left(-\frac{\eta_x}{J} \right) + v_z \left(\frac{\eta_y}{J} \right) \right] \left[\left(-\frac{\xi_y}{J} \right) v - \left(\frac{\xi_x}{J} \right) u \right] \\ & = \left[-\xi_x \left(-\frac{\eta_x}{J} \right) + \xi_y \left(\frac{\eta_y}{J} \right) \right] p_z - \left[-\left(-\frac{\eta_x}{J} \right) \eta_x + \left(\frac{\eta_y}{J} \right) \eta_y \right] p_n \end{aligned} \quad (4.14)$$

şeklini alır. Sadeleştirilirse

$$\frac{-\rho}{J} (u \xi_x + v \xi_y) (u_z \eta_x + v_z \eta_y) = \frac{1}{J} (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) p_z - \frac{1}{J} (\eta_x^2 + \eta_y^2) p_n \quad (4.15)$$

denklemini elde edilir. Karşılıklı hızlar

$$U = u \xi_x + v \xi_y \quad (4.16a)$$

$$V = u \eta_x + v \eta_y \quad (4.16b)$$

şeklinde tarif edilebilir. Bu durumda, denklem (4.9) un korunmuş haline değeri sıfır olan terimler eklenirse aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} & \eta_x \left(\frac{\rho u U}{J} \right)_{\xi} + \eta_y \left(\frac{\rho v U}{J} \right)_{\xi} + \eta_x \left(\frac{\rho v V}{J} \right)_{\eta} + \eta_y \left(\frac{\rho v V}{J} \right)_{\eta} \\ & + \eta_x \left(\frac{\xi_x p}{J} \right)_{\xi} + \eta_x \left(\frac{\eta_x p}{J} \right)_{\eta} + \eta_y \left(\frac{\xi_y p}{J} \right)_{\xi} + \eta_y \left(\frac{\eta_y p}{J} \right)_{\eta} = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Yukarıdaki denklem, ξ yönünde ikinci dereceden merkezi sonlu farklar, η yönünde ise ikinci dereceden tek yönlü sonlu farklar kullanılarak açılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{(\eta_x)_{i,1}}{2\Delta\xi} \left[\left(\frac{\rho u U}{J} \right)_{i+1,1} - \left(\frac{\rho u U}{J} \right)_{i-1,1} \right] - \frac{(\eta_y)_{i,1}}{2\Delta\xi} \left[\left(\frac{\rho u U}{J} \right)_{i+1,1} - \left(\frac{\rho u U}{J} \right)_{i-1,1} \right] \\ & + \frac{(\eta_x)_{i,1}}{2\Delta\eta} \left[-3 \left(\frac{\rho u V}{J} \right)_{i,1} + 4 \left(\frac{\rho u V}{J} \right)_{i,2} - \left(\frac{\rho u V}{J} \right)_{i,3} \right] \\ & + \frac{(\eta_y)_{i,1}}{2\Delta\eta} \left[-3 \left(\frac{\rho v V}{J} \right)_{i,1} + 4 \left(\frac{\rho v V}{J} \right)_{i,2} - \left(\frac{\rho v V}{J} \right)_{i,3} \right] \\ & + \frac{(\eta_x)_{i,1}}{2\Delta\xi} \left[\left(\frac{\xi_x p}{J} \right)_{i+1,1} - \left(\frac{\xi_x p}{J} \right)_{i-1,1} \right] - \frac{(\eta_x)_{i,1}}{2\Delta\eta} \left[-3 \left(\frac{\eta_x p}{J} \right)_{i,1} + 4 \left(\frac{\eta_x p}{J} \right)_{i,2} - \left(\frac{\eta_x p}{J} \right)_{i,3} \right] \\ & + \frac{(\eta_y)_{i,1}}{2\Delta\xi} \left[\left(\frac{\xi_y p}{J} \right)_{i+1,1} - \left(\frac{\xi_y p}{J} \right)_{i-1,1} \right] \\ & + \frac{(\eta_y)_{i,1}}{2\Delta\eta} \left[-3 \left(\frac{\eta_y p}{J} \right)_{i,1} + 4 \left(\frac{\eta_y p}{J} \right)_{i,2} - \left(\frac{\eta_y p}{J} \right)_{i,3} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem düzenlenerek, duvar üzerinde V'nın sıfır olduğu göz önünde bulundurulursa, üçlü-diagonal bir sistem elde edilir. Bu üçlü diyalagonal sistem

$$A_i p_{i-1} + B_i p_{i,1} + C_i p_{i+1} = D_i \quad (4.19)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

4.3 KARAKTERİSTİK SINIR ŞARTI

Bilindiği gibi karakteristikler yöntemi hiperbolik tipteki kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan en önemli ve hassas yöntemlerden biridir. Karakteristik fiziksel bir rahatsızlığın takip ettiği yol olarak tarif edilebilir. Matematiksel olarak ise kısmi bir diferansiyel denklemin adi bir diferansiyel denkleme dönüştüğü yol olarak tarif edilir.

Çözüm sadece iç noktalardan etkilenmeyip aynı zamanda dışarıdan çözüm alanına giren dalgalardan da etkilenmektedir. Dışarıya doğru giden dalgalar karakteristik denklemlerle ifade edilmekte, içeriye doğru gelenler ise dışarıdaki termodinamik özellikler cinsinden verilmektedir. Sınırlarda doğru çözümü elde edebilmek için iki Mach çizgisi karakteristiği ile yol çizgisi karakteristiği kullanılmıştır.

Sınırlarda hesaplama yöntemi olarak ters ilerleme tekniği ile Euler'ın tahmin-düzeltilme yöntemi kullanılmıştır.

Karakteristik sınır şartları süreklilik, momentum ve enerji denklemleri kullanılarak bulunmaktadır. Burada, bu karakteristik şartların iki boyutlu problemlere uygulamaları tartışılacaktır.

Sağa doğru giden ve eğimi

$$\lambda_1 = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{u-a} \quad (4.20)$$

olan C+ karakteristiği üzerinde bağdaşıklık şartı

$$dp - Qdu = dp - \rho a du = 0 \quad (4.21)$$

şeklinde verilir. Buna karşılık sola doğru giden ve eğimi

$$\lambda_2 = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{u+a} \quad (4.22)$$

olan C- karakteristiği üzerinde bağdaşıklık şartı

$$dp - Qdu = dp - \rho a du = 0 \quad (4.23)$$

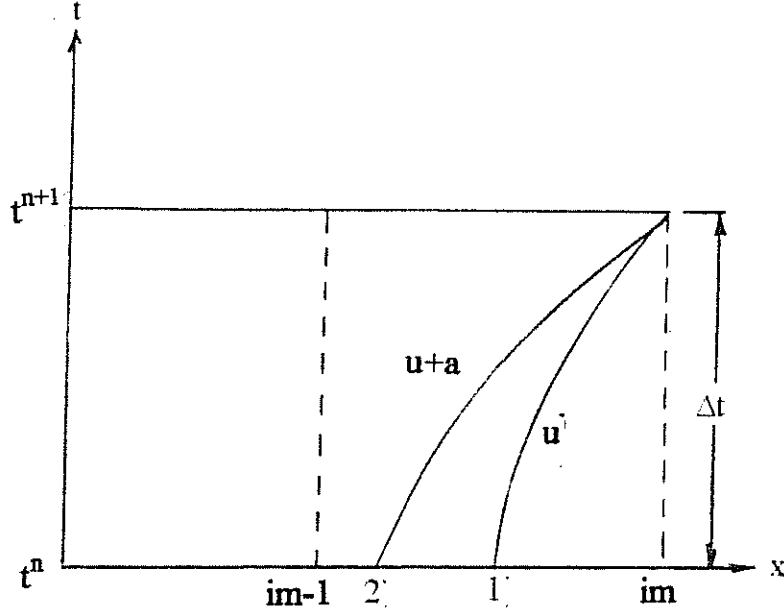
şeklinde ifade edilir. Son olarak eğimi

$$\lambda_0 = \frac{dt}{dx} \quad (4.24)$$

olan yol çizgisi üzerindeki bağdaşıklık şartı

$$dp - a^2 dp = 0 \quad (4.25)$$

şeklinde verilir.



Şekil 4.2 Homentropik olmayan açık sınır şartları için hesaplama ağı

Açık sınır şartlarında karakteristik denklemler Euler'in tahmin-düzeltilme yöntemi ile çözülerek 4 numaralı noktada termodinamik özellikler bulunabilir. Böylece 4 numaralı noktadaki durum dışarıdan gelen bir takım karakteristiklere bağlıdır. Bu nedenle dışarı giden ses altı akımlar için dışarıdaki statik basıncın, dışarıdan gelen ses altı akımlar için ise çıkıştaki durgun basınç ve sıcaklığın verilmesi gereklidir.

Denklem (4.20) ve (4.24) ile verilen sırasıyla C⁻ ve yol çizgisi karakteristiklerinin eğimlerinden

$$\lambda_1 = \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\Delta t}{x_1 - x_2} = x_2 = x_1 - \frac{\Delta t}{\lambda_1} \quad (4.26)$$

$$\lambda_0 = \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\Delta t}{x_1 - x_1} = x_1 = x_1 - \frac{\Delta t}{\lambda_0} \quad (4.27)$$

Eulerin tahmin yöntemi için eğimlerin ilk değerleri

$$\lambda_i = \frac{1}{u_{n-1} + a_{n-1}} \quad (4.28)$$

ve

$$\lambda_0 = \frac{1}{u_n} \quad (4.29)$$

şeklinde hesaplanır. Bundan sonra (4.26) ve (4.27) numaralı denklemler kullanılarak x_1 ve x_2 bulunabilir. Bu noktalardaki hız, basınç ve yoğunluk değerlerinin $n-1$ ve n noktalarındaki değerlerden doğrusal içdeğerbiçimle bulunmaları mümkündür. Bu işleme x_1 ve x_2 değerlerinde yeterli hassasiyet elde edilene kadar devam edilir.

C+ Mach çizgisi üzerindeki bağdaşıklık şartı 2 ve 4 noktaları arasında sonlu fark yöntemi kullanılarak

$$p_4 + Q_+ u_4 = T_+ \quad (4.30)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$T_+ = p_2 + Q_+ u_2 \quad (4.31)$$

olarak ifade edilir. Eulerin tahmin yöntemi için $Q_+ = \rho_2 a_2$ olarak hesaplanabilir. Verilen bir dış statik basınç için denklem (4.30) çözülerek u_4 bulunabilir. Eğer

$$u_4 \geq 0 \quad (4.32)$$

4 noktasındaki akış dışarıya doğrudur. Bu durumda yol çizgisi üzerindeki bağdaşıklık şartı 1 ve 4 noktaları arasında sonlu fark yöntemi ile

$$p_4 - A_0 \rho_4 = T_0 \quad (4.33)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$T_0 = p_1 - A_0 \rho_1 \quad (4.34)$$

olarak verilmektedir. Euler'in tahmin yöntemi için

$$A_0 = a_1^2 \quad (4.35)$$

olarak hesaplanır. Bu durumda ρ_+ denklem (4.33) yardımı ile hesaplanırsa, bu noktadaki bütün termodinamik özellikler bulunmuş olur. Eulerin düzeltme yöntemi için ise hız, basınç ve yoğunluğun karakteristikler üzerindeki ortalama değeri alınır. Böylece

$$\lambda_0 = \frac{1}{u_0} \quad (4.36)$$

ve

$$\lambda_- = \frac{1}{u_+ + a_+} \quad (4.37)$$

halini alır ve burada

$$u_0 = \frac{u_1 + u_2}{2} \quad (4.38)$$

ve

$$u_+ = \frac{u_2 + u_1}{2} \quad (4.39)$$

şeklinde ifade edilir. Eşentropik ilişki olan $a^2 = (\partial p / \partial \rho) = dp / d\rho$ eşitliğinden $a_+ = a(p_+, \rho_+)$ şeklinde verilir. Burada

$$p_+ = \frac{p_3 + p_4}{2}$$

ve

$$\rho_+ = \frac{\rho_3 + \rho_4}{2}$$

Q_+ , T_+ , A_0 ve T_0 katsayılarının da aynı yöntemle hesaplanması mümkündür.

Eğer denklem (4.32) sağlanmazsa, sesaltı akış içeri doğrudur. Bu durumda akış daimi ve isentropic kabul edilir ve çıkışta iki özellik olan durgun sıcaklık ve basınç olan p_{0e} ve T_{0e} verilir. Daimi adiabatik enerji denklemi olan

$$T_{0e} = T_1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma R} u_1^2$$

ile isentropik ilişki

$$T_1 = T_{0e} \left(\frac{p_1}{p_{0e}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

birleştirilirse

$$\left(\frac{p_4}{p_{0e}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{\gamma-1}{2\gamma RT_{0e}} u_4^2 = 1 \quad (4.40)$$

eşitliği elde edilir. ρ_4 'ü bulmak için isentropik ilişki

$$\rho_4 = \left(\frac{p_4}{p_{0e}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{p_{0e}}{RT_{0e}} \left(\frac{p_4}{p_{0e}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (4.41)$$

şeklinde yazılırsa, denklem (4.33), (4.40) ve (4.41), ρ_4 , p_4 ve u_4 bilinmeyenleri için tam bir denklem seti oluşturur. Denklem (4.33) den u_4 aşağıdaki gibi çözülür.

$$u_4 = \frac{T_+ - p_4}{Q_+} = \frac{T_+}{Q_+} - \frac{p_{0e}}{Q_+} \left(\frac{p_4}{p_{0e}}\right) \quad (4.42)$$

Eğer $A = T_+/Q_+$, $B = p_{0e}/Q_+$ ve $\Phi = p_4/p_{0e}$ şeklinde tarif edilirse, denklem (4.42)

$$u_4^2 = (A - B\Phi)^2 = A^2 - 2AB\Phi + B^2\Phi^2$$

şeklini alır. Bu denklem, denklem (4.39) ile birleştirilirse

$$\Phi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{\gamma-1}{2\gamma RT_{0e}} (A^2 - 2AB\Phi + B^2\Phi^2)$$

halini alır ve $C = (\gamma-1)/(2\gamma RT_{0e})$ şeklinde tarif edilirse

$$\Phi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - B^2C\Phi^2 - 2ABC\Phi - A^2C - 1 = 0 \quad (4.43)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem, bilinmeyen basınç oranı Φ için Newton-Raphson yöntemi kullanılarak çözülür. Bu denklemde A, B ve C bilinen özelliklerle, diğer tahmini özellikleri kapsamaktadır. Φ için çözüm elde edildikten sonra

$$p_4 = p_{0e} \Phi \quad (4.44)$$

$$\rho_4 = \frac{p_{0e}}{RT_{0e}} \Phi^{\frac{1}{\gamma}} \quad (4.45)$$

ve

$$u_4 = A - B\Phi \quad (4.46)$$

şeklinde bulunur. Daha sonra sesaltı dışarı akışta olduğu gibi Euler'in düzeltme yöntemi uygulanarak özelliklerin daha hassas değerleri elde edilir.

BÖLÜM 5 SONUÇLAR

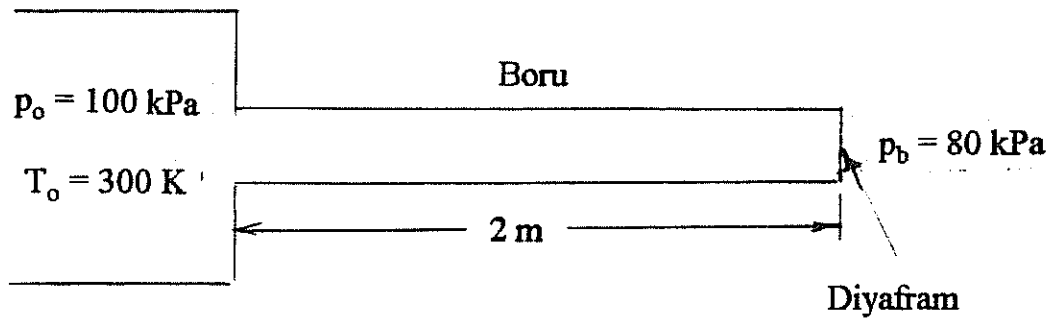
5.1 GİRİŞ

Geliştirilen yazılım önce bir boyutlu problemlerde, daha sonra da iki boyutlu problemlerde denenmiştir. Yazılım bir boyutlu tipi ile yüksek basınçtaki bir gazın bir tüpten ani olarak salıverilmesi problemi ile bir borudaki zamana bağlı gaz akışı probleminde denenmiştir. Daha sonra aynı yazılım ses altı, ses civarı ve ses üstü hızlarda iki boyutlu Ni tümseği kullanılarak denenmiştir.

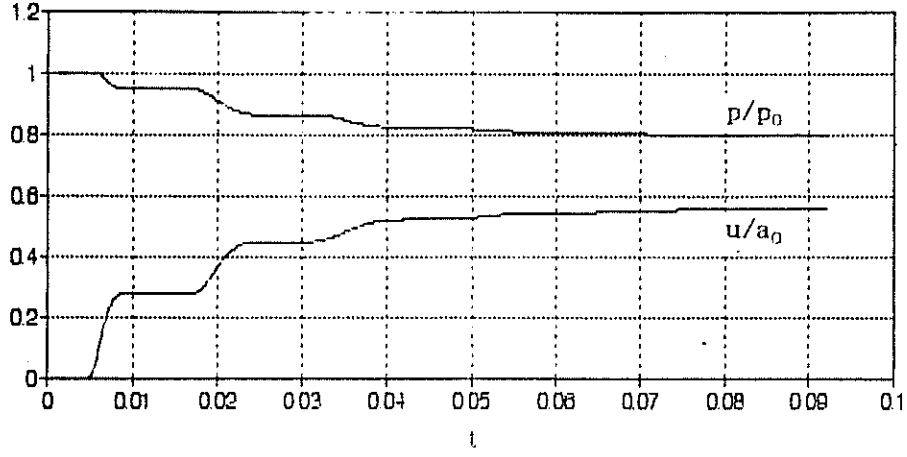
5.2 BORU İÇİNDEKİ ZAMANA BAĞLI AKIŞ

Şekil 5.1'de görüldüğü gibi sol ucu büyük bir tanka bağlı olan sabit alanlı bir borunun içerisindeki zamana bağlı akış incelenmiştir. Başlangıçta, bu borunun sağ ucu bir diyaframla kapatılmıştır. Tank içerisindeki havanın toplam sıcaklık ve basıncı sırasıyla 300 K ve 100 kPa olarak alınmıştır. Boyu 2m olan borunun dışarısındaki basınç ise 80 kPa olarak alınmıştır. Çevre basıncının tank basıncından daha düşük olduğu durumda diyafram açılırsa genişleme dalgaları tanka doğru ilerlemeye başlayacaktır. Bu dalgalar sol sınırdan genişleme dalgaları olarak yansıyor sağa doğru ilerleyecek ve buradan da ters yönde yansacaktır. Bu genişleme ve sıkışma boru içerisinde zamana bağlı olmayan bir akış oluşana kadar devam edecektir. Çözüm zamana bağlı olmayan akış elde edilene kadar sürdürülmüştür. Her üç yöntemde de çözüm bölgesinde 181 düğüm noktası kullanılmıştır.

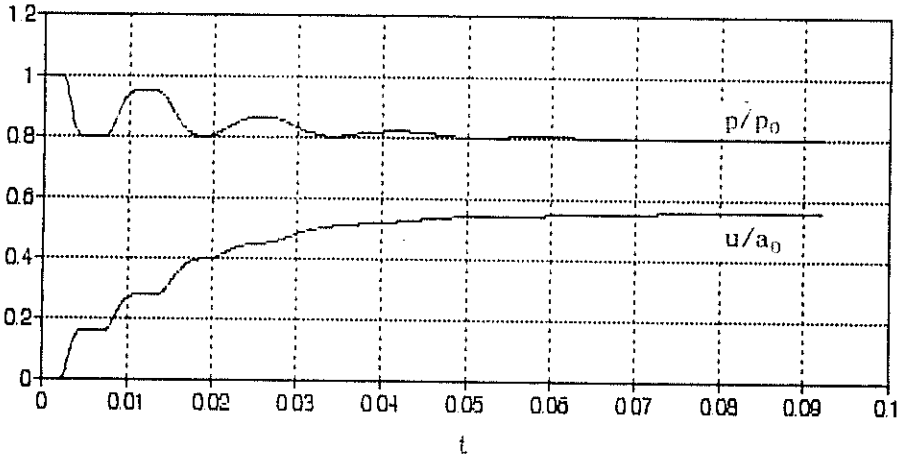
Yardımcı ve Telçeker (1992) ile Amer (1995) tarafından sonlu fark yöntemi ile elde edilen sonuçlarda CFL sayısı 0.16 olarak alınmış ve sunni viskozite kullanılmasına gerek kalmamıştır. Daimi çözümün elde edilebilmesi için 18000 yinelenmeye gerek duyulmuştur. Borunun girişindeki, orta noktasındaki ve çıkışındaki boyutsuz basınç ve sıcaklık dağılımı Şekil 5.2'de verilmiştir.



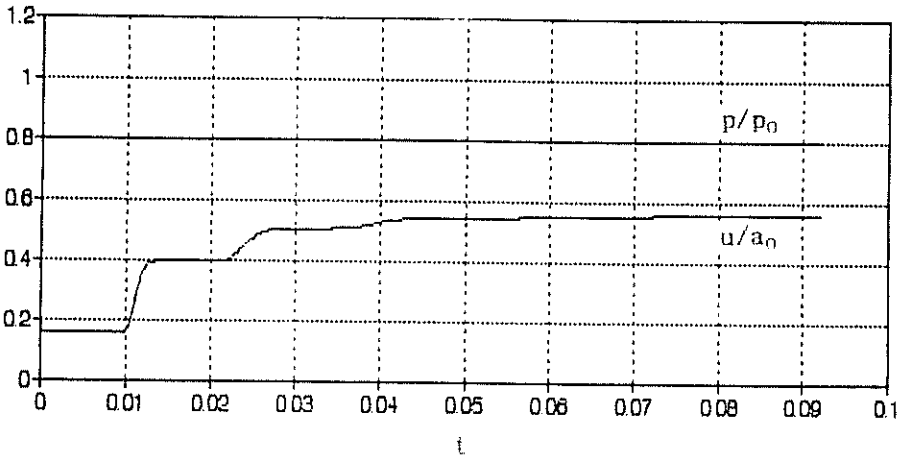
Şekil 5.1 Bir boru içerisindeki zamana bağlı akış problemi için başlangıç şartları



(a)

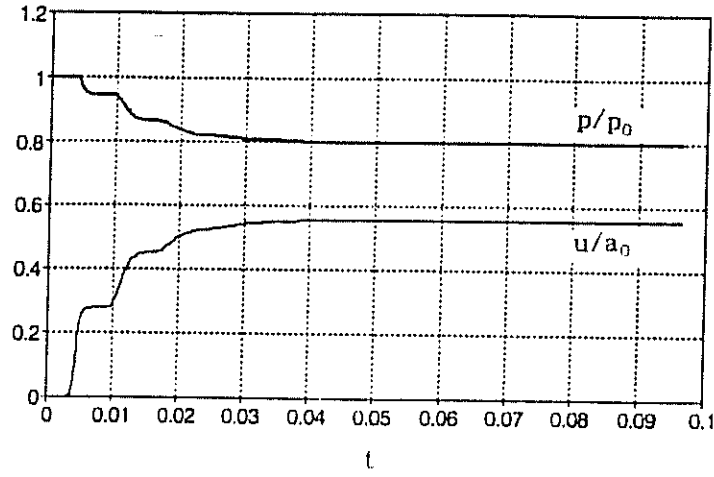


(b)

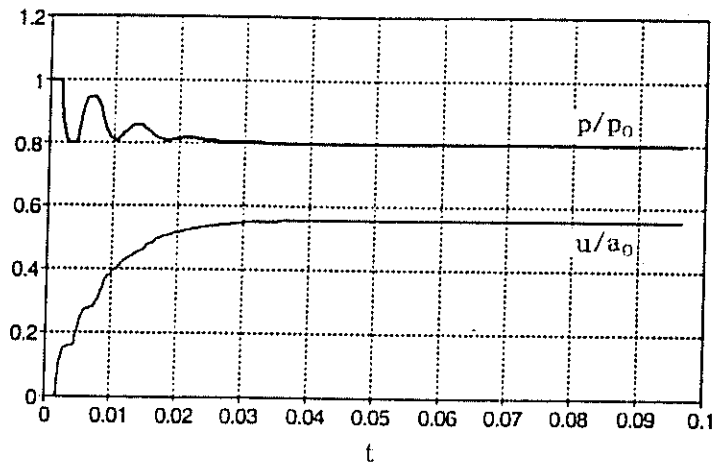


(c)

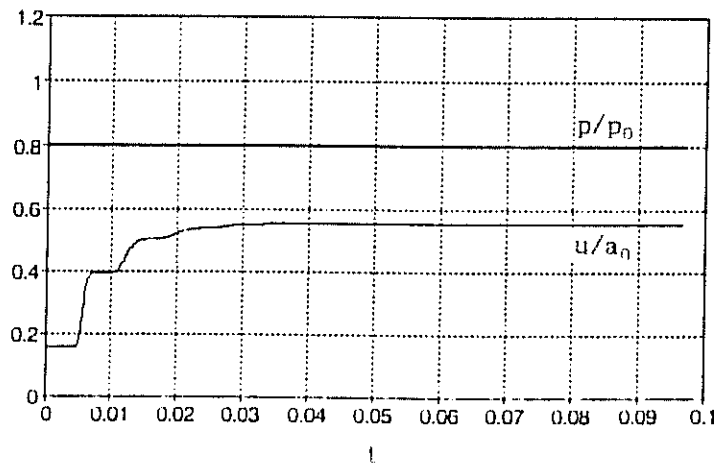
Şekil 5.2 Sonlu fark yöntemi ile bir boru içerisindeki akışın (a) girişte, (b) orta noktada ve (c) çıkışta zamana göre değişimi [Yardımcı ve Teiçeker (1992). Amer (1995)]



(a)

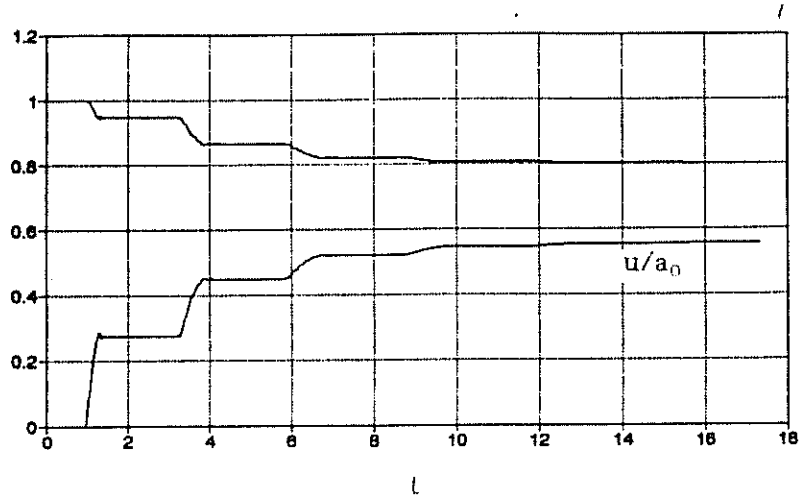


(b)

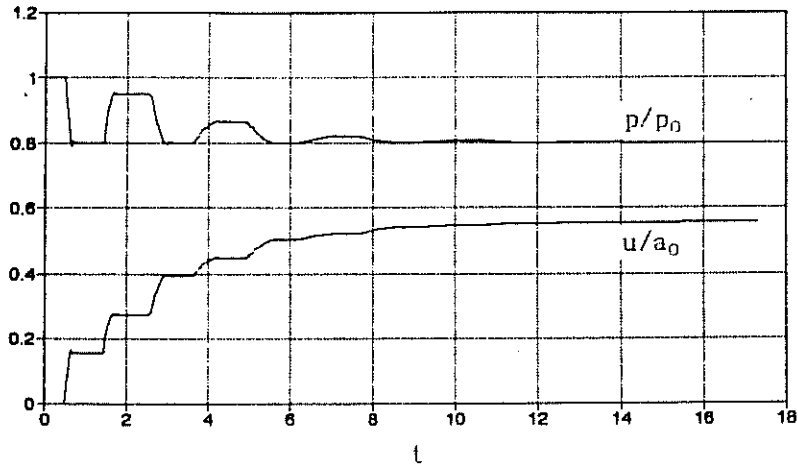


(c)

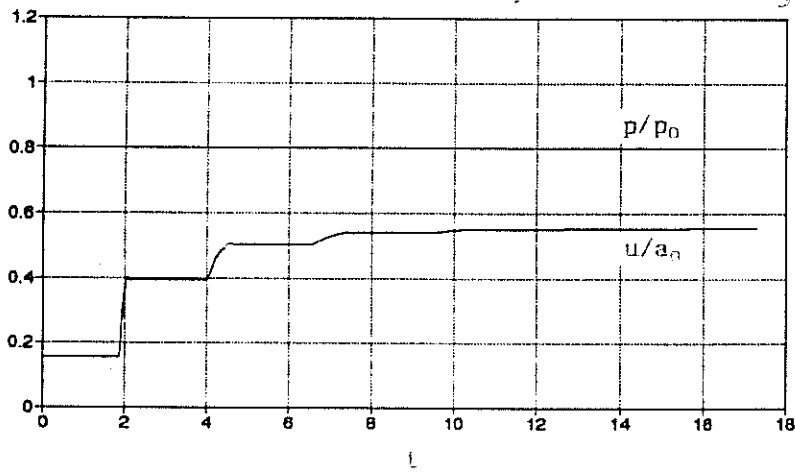
Şekil 5.3 Sonlu eleman yöntemi ile bir boru içerisindeki akışın (a) girişte (b) orta noktada ve (c) çıkışta zamana göre değişimi [Lüle1995)]



(a)



(b)



(c)

Şekil 5.4 Sonlu hacim yöntemi ile bir boru içerisindeki akışın (a) girişte, (b) orta noktada ve (c) çıkışta zamana göre değişimi.

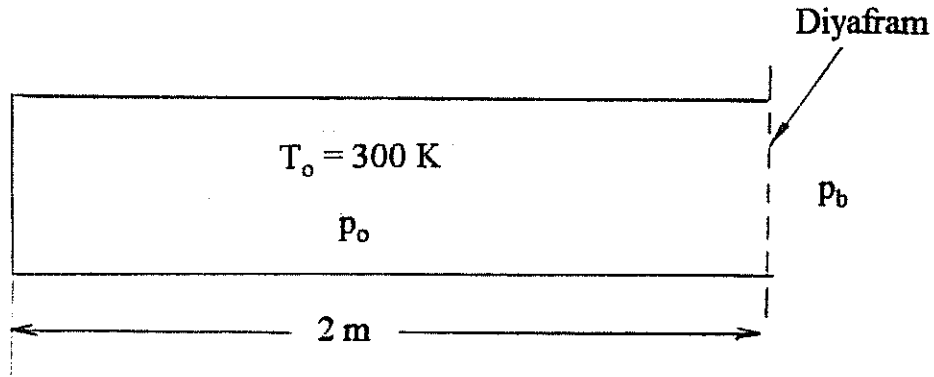
[Telçeker ve Yardımcı (1992)]

Lüle (1995) tarafından sonlu eleman yöntemi ile elde edilen çözümlerde CFL sayısı 0.5 olarak alınmıştır. Daimi rejimdeki dalgalanmaları önlemek için sunni viskozite kullanılmıştır. Boyutsuz basınç ve sıcaklık dağılımı Şekil 5.3'te tüp girişinde, ortasında ve çıkışında verilmiştir.

Aynı problemin sonlu hacim yöntemi kullanılarak Telçeker ve Yardımcı (1992) tarafından gerçekleştirilen çözümünde CFL sayısı 1.0 olarak alınmıştır. Tüp girişindeki, ortasındaki ve çıkışındaki boyutsuz basınç ve sıcaklığının zamana göre değişimi Şekil 5.4'te gösterilmiştir.

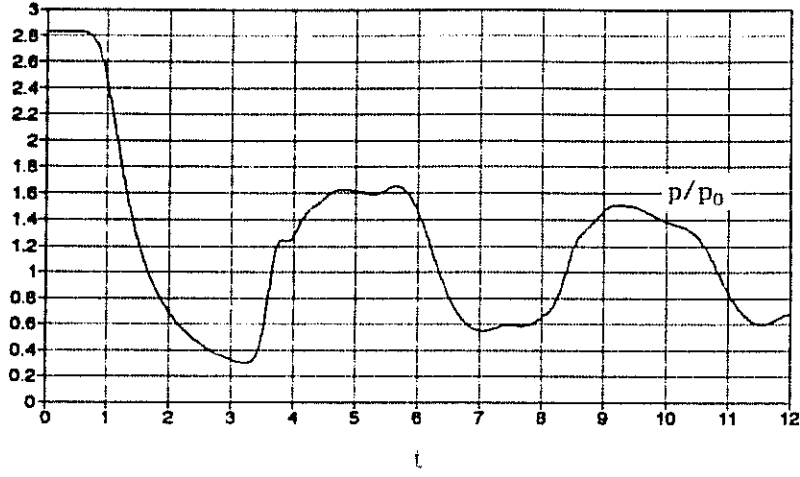
5. 3 BİR GAZIN TÜPTEN ANI OLARAK SALIVERİLMESİ

Bu problemde, Şekil 5.5 'teki bir tüpün ucunun aniden açılıvermesiyle yüksek basınç ve sıcaklıkta bulunan gaz içerisinde genişleme dalgaları meydana gelmekte ve bunlar tüpün kapalı ucuna doğru hareket etmektedir. Bu genişleme dalgaları tüpün kapalı ucundan daha kuvvetli genişleme dalgaları şeklinde yasımaktadır. Daha sonra, bu genişleme dalgaları tüpün açık ucundan daha zayıf sıkışma dalgaları olarak yansımakta ve bu dalgalar kuvvetlenerek tüp içerisinde bir şok dalgası meydana getirmektedir. Zamanla bu dalgalanmalar zayıflayarak tekrarlanmakta ve sonunda tüp içerisinde sabit basınç oluşmaktadır. Bu amaçla 2 metre uzunluğa sahip bir tüpteki akış incelenmiştir. Başlangıçta, tüp içerisindeki toplam basıncın tüp dışındaki statik basınca oranı 2.83, tüp içerisindeki gazın toplam sıcaklığı ise 300 K olarak alınmıştır.

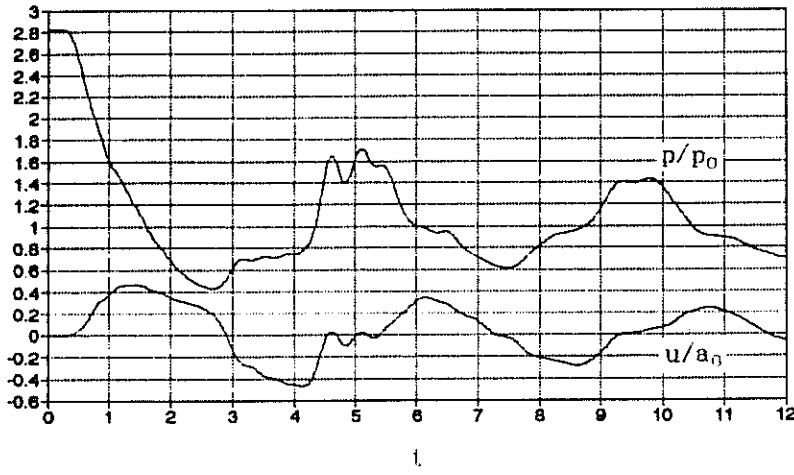


Şekil 5.5 Bir gazın tüpten anı olarak salıverilmesi

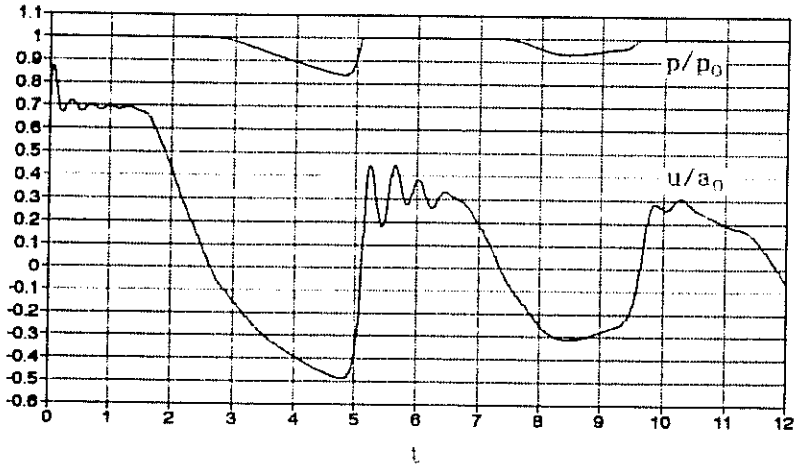
Her üç yöntemlede yapılan çözümler birbirine çok yakın sonuçlar vermiştir. Ağ noktası sayısı ile CFL sayısının çözümün hassasiyetine etkileri incelenmiştir. 15 ağ noktası ve $CFL = 0.1$, 15 ağ noktası ve $CFL = 1.0$ ile 181 ağ noktası ve $CFL = 1.0$ için tüpün kapalı ucundaki, ortasındaki ve açık ucundaki boyutsuz basınç ve hızın zamana göre,



(a)

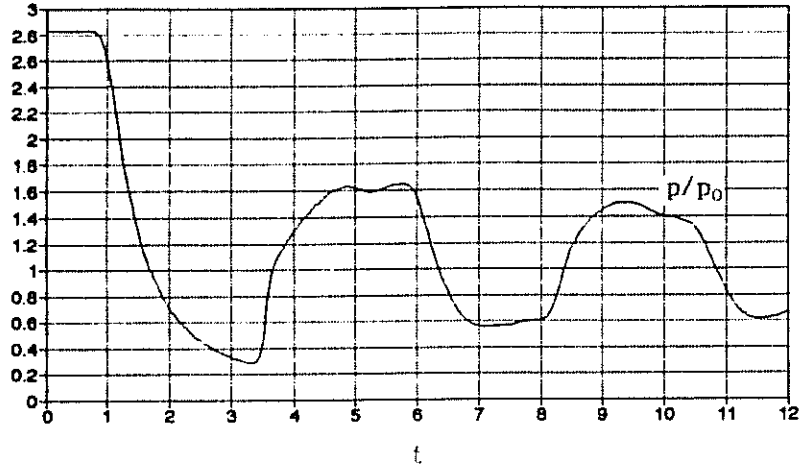


(b)

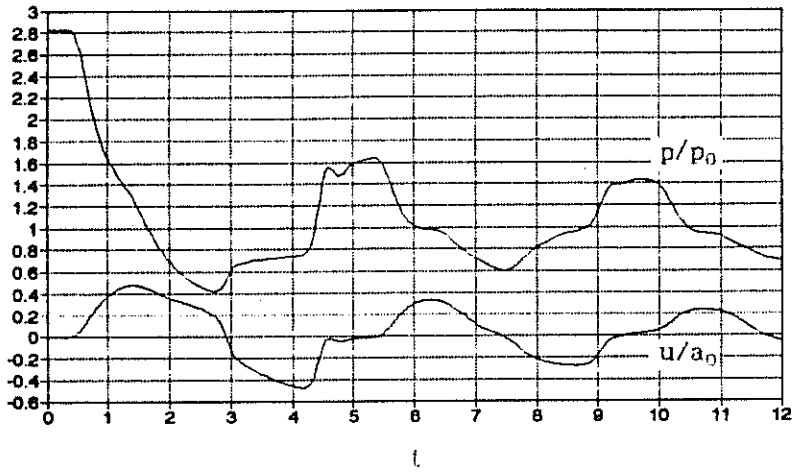


(c)

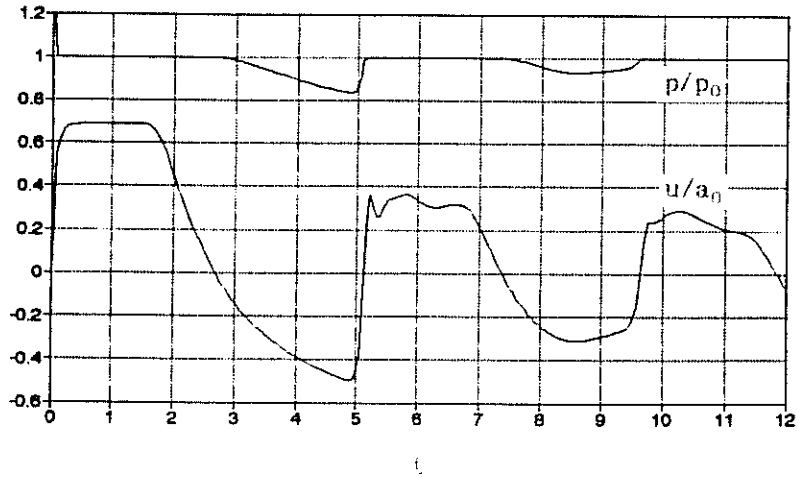
Şekil 5.6 15 ağ noktası ve CFL = 0.1 için tüpün (a) kapalı ucundaki (b) ortasındaki ve (c) açık ucundaki boyutsuz basınç ve hız zamanına göre değişimi. [Telçeker ve Yardımcı (1992)]



(a)

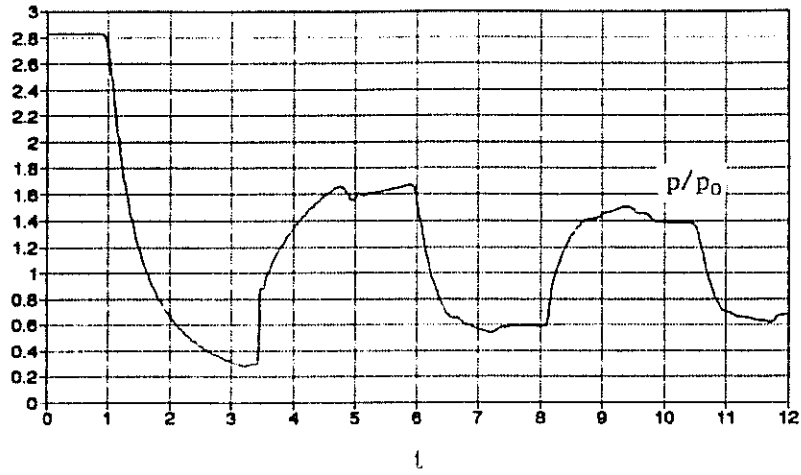


(b)

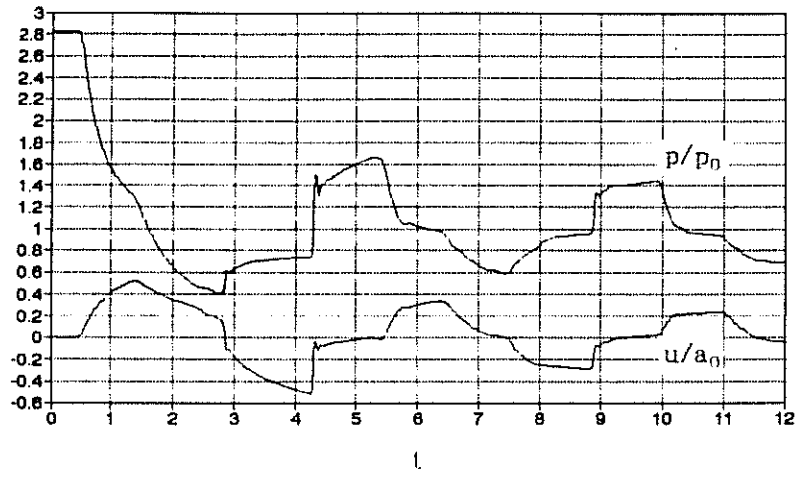


(c)

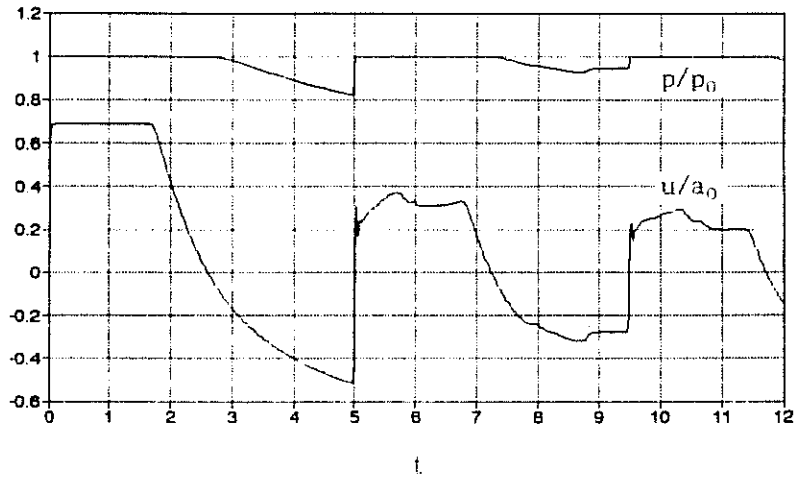
Şekil 5.7 15 ağ noktası ve CFL = 1.0 için tüpün (a) kapalı ucundaki, (b) ortasındaki ve (c) açık ucundaki boyutsuz basınç ve hız zamanına göre değişimi. [Telçeker ve Yardımcı (1992)]



(a)



(b)



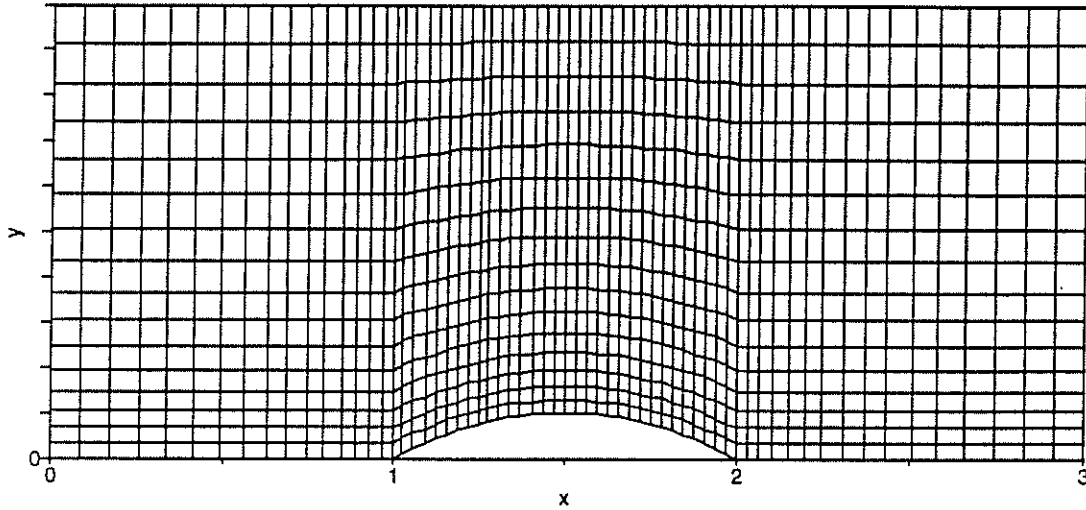
(c)

Şekil 5.8 75 ağ noktası ve CFL = 1.0 için tüpün (a) kapalı ucundaki, (b) ortasındaki ve (c) açık ucundaki boyutsuz basınç ve hız zamana göre değişimi [Telçeker ve Yardımcı (1992)]

değişimi sırasıyla Şekil 5.6, 5.7 ve 5.8'de verilmiştir. Ağ noktası sayısı arttırıldıkça ve yüksek CFL sayısı değerleri için daha hassas çözümler elde edilmektedir

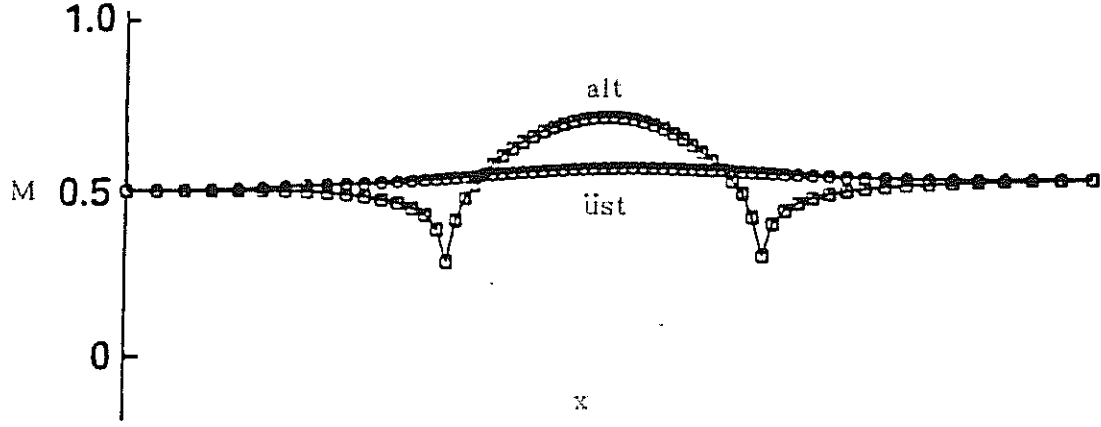
5.4 BİR KANAL İÇERİSİNDEKİ Nİ-TÜMSEĞİ ÜZERİNDE SESALTI AKIŞ

Hesaplama ağı olarak Şekil 5.9'da gösterilen ve cebirsel olarak elde edilen Ni(1982)'nin hesaplama ağı kullanılmıştır. Şekilde gösterilen kanalın eni tümseğin boyuna eşit olarak alınmıştır. Yine bu tümseğin kalınlığı giriş uzunluğunun onda birine eşittir. 65x17 düğüm noktası kullanılan hesaplama ağı kanalın bulunduğu alt duvara doğru ve tümseğin köşe noktalarına doğru sıklaştırılmıştır. Kanal girişinde Mach sayısı, toplam sıcaklık ve toplam basınç verilmiştir. Diğer özellikler ise eşentropik ilişkiler kullanılarak bulunmuştur. Çıkıştaki statik basınç ise girişteki toplam özelliklerden yine eşentropik ilişkiler kullanılarak bulunur. Kanal giriş ve çıkışında karakteristik sınır şartları kullanılmıştır. Duvar sınır şartları ise yoğunluğun ve teğet karşıdeğişken hız bileşkesinin iç noktalardan dışdeğerbiçim ile bulunmasını içermektedir. Duvara dik karşıdeğişken hız bileşkesi sıfır olarak alınmıştır. Duvardaki basınç normal yöndeki momentum denklemi çözülerek elde edilmiştir.

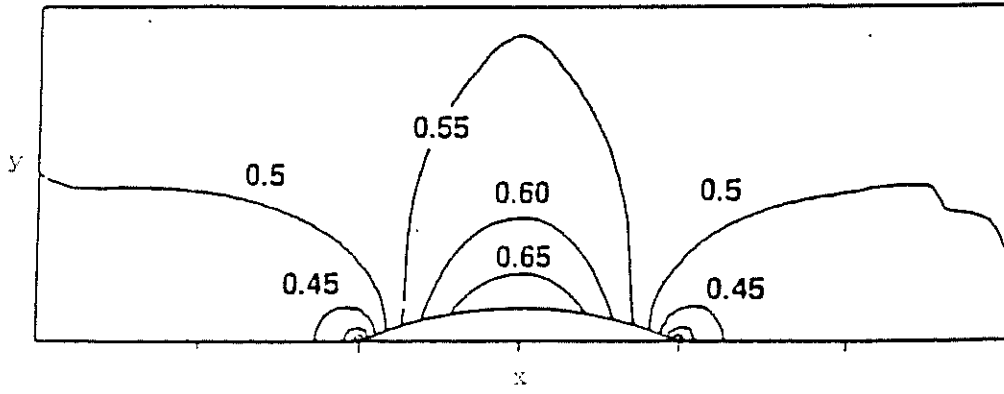


Şekil 5.9 Ni tümseği için hesaplama ağı

Elde edilen sonuçları karşılaştırabilmek için Ni (1982) tarafından sonlu hacim yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlar Şekil 5.10'da verilmiştir. Kanal girişindeki Mach sayısının 0.5 olduğu durum için Mach sayısının alt ve üst duvar üzerindeki değişimi Şekil 5.10a'da, kanal içerisindeki eş Mach sayısı eğrileri ise Şekil 5.10b'de gösterilmiştir.

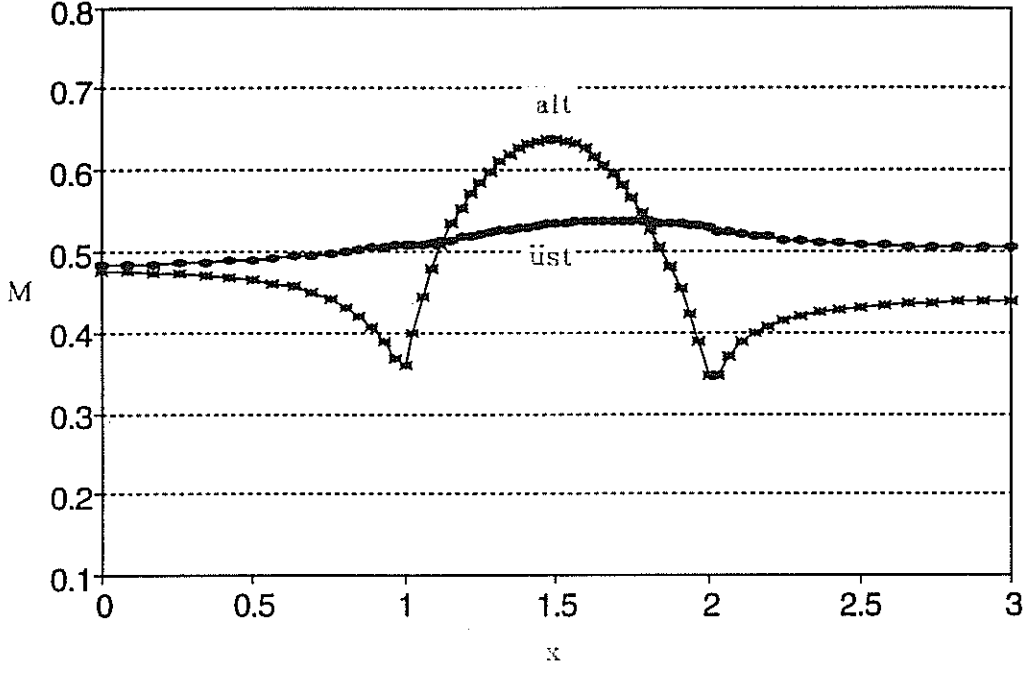


(a)

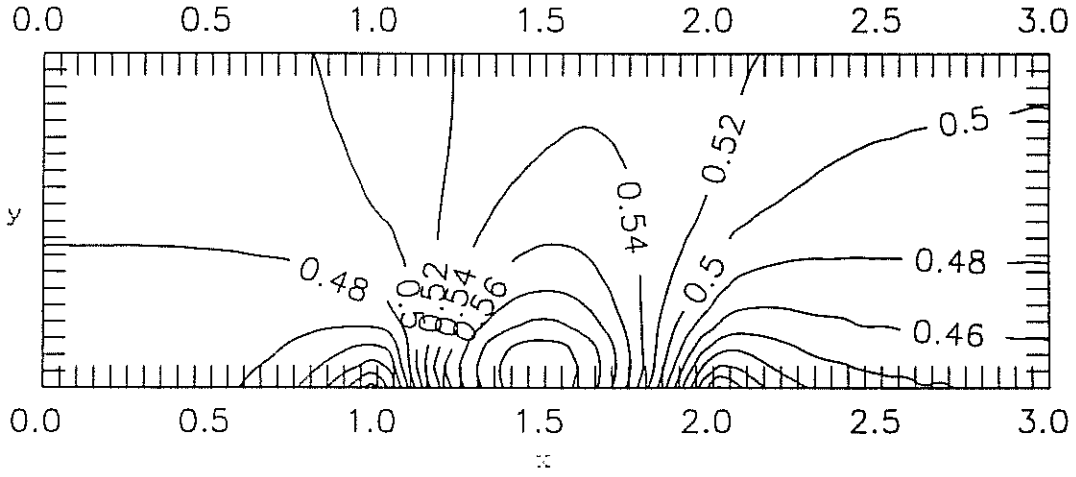


(b)

Şekil 5.10 Sonlu hacim yöntemi ile 0.5 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında (a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Ni (1982)]

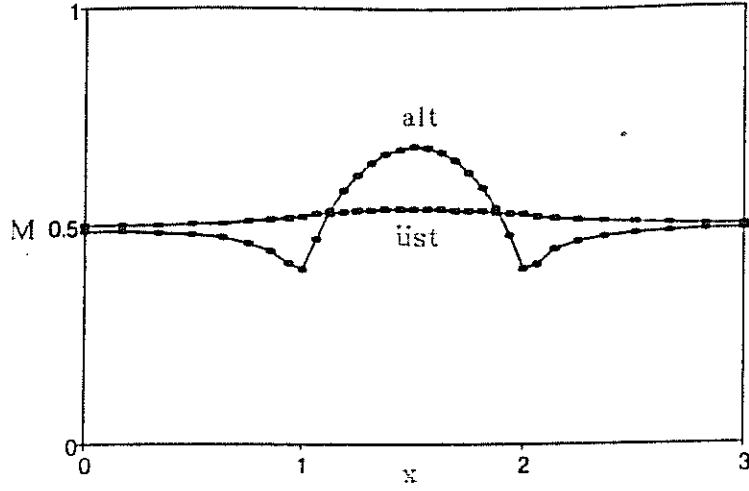


(a)

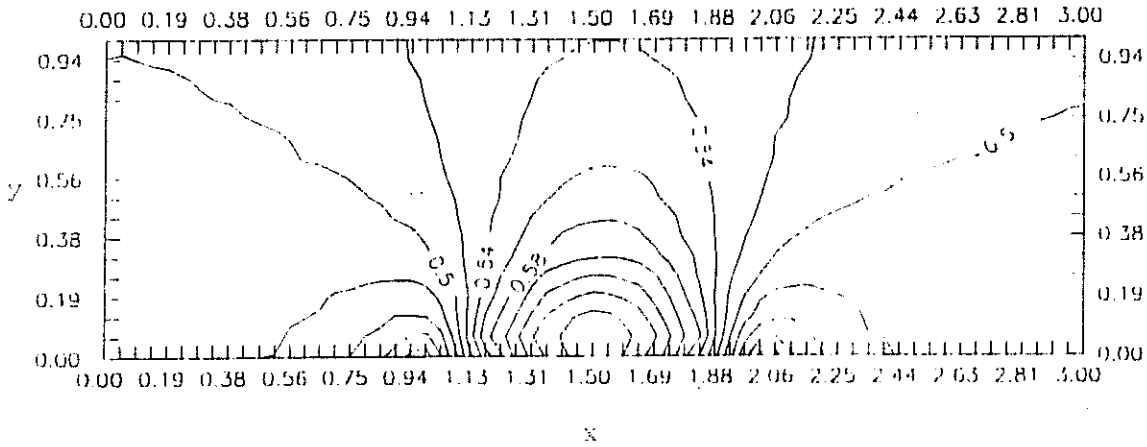


(b)

Şekil 5.11 Sonlu fark yöntemi ile 0.5 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında (a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Amer (1995)]

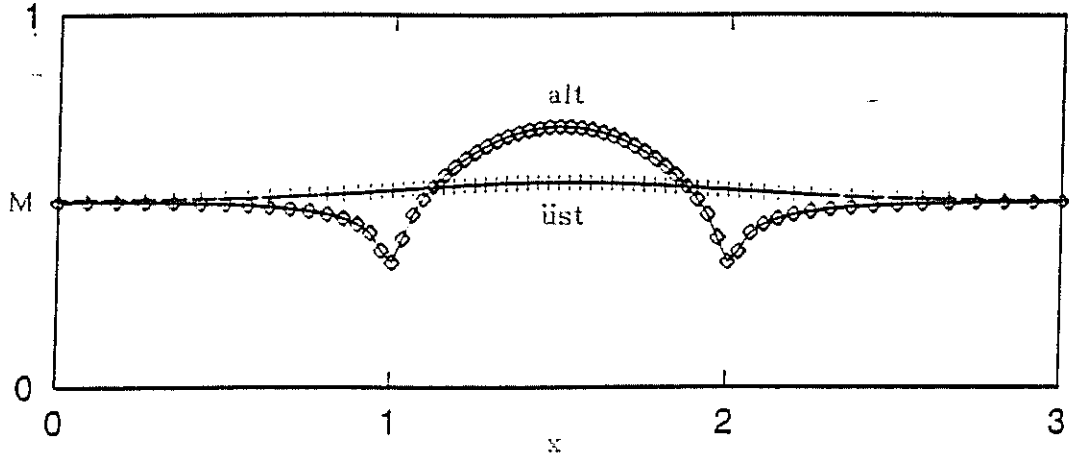


(a)

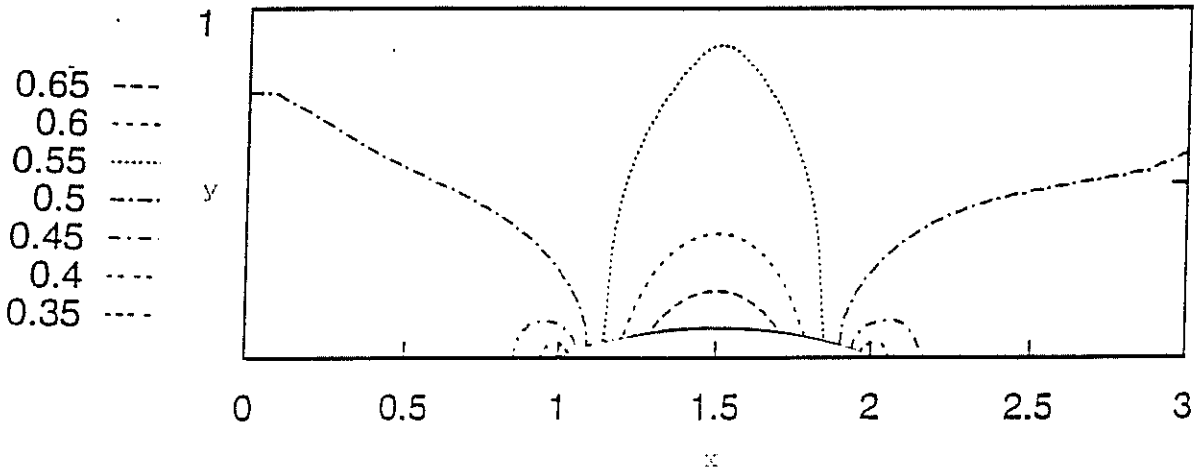


(b)

Şekil 5.12 Sonlu eleman yöntemi ile 0.5 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında (a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Lüle (1995)]



(a)



(b)

Şekil 5.13 Sonlu hacim yöntemi ile 0.5 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında (a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Yardımcı (1994)]

Sonlu fark yöntemi ile Amer (1995) tarafından 0.5 Mach sayısı için elde edilen sonuçlar Şekil 5.11'de gösterilmiştir. Korunan değişkenlerdeki hata 2×10^{-5} değerine indiği zaman çözümün daimi olduğu varsayılmıştır ve bu sonuç 2900 yinleme sonucunda elde edilmiştir. Alt ve üst duvar boyunca Mach sayısının değişimi ile kanal içindeki eş Mach sayısı eğrileri sırasıyla şekil 5.11a ve Şekil 5.11b'de verilmiştir. Elde edilen sonuçların Ni(1982) tarafından elde edilen sonuçlara uygun olduğu gözlenmiştir. Giriş orta noktası etrafında beklenen simetriden biraz sapma olduğu saptanmıştır.

Aynı problem. Lüle (1995) tarafından sonlu eleman yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Şekil 5.12a'da kanalın alt ve üst duvarı boyunca Mach sayısının değişimi, Şekil 5.12b'de ise kanal içerisindeki eş Mach sayısı eğrileri verilmiştir. Bu sonuçlardan akışın tümseğin orta noktası etrafında simetrik olduğu gözlenmiştir. Tümseğin kalınlığının en fazla olduğu orta noktasında ise Mach sayısının azami değerini aldığı gözlenmiştir.

Yardımcı (1994) tarafından sonlu hacim yöntemi ile elde edilen ve Şekil 5.13'de gösterilen sonuçlarda da tümseğin orta noktası etrafında simetriklik gözlenmiştir. Yine, azami Mach sayısı tümsek kalınlığının en fazla olduğu noktada elde edilmiştir. Eş Mach sayısı eğrilerinin alt duvara dik oluşu, kullanılan düzgünleştirme parametresinin sadece dalgalanmaları almaya yeterli olduğu ve beklenen çözümü değiştirmediği gözlenmiştir. Kütle korunumunun sağlanıp sağlanmadığı kanal giriş ve çıkışında kütle debisi hesaplanarak kontrol edilmiştir. Kütle korunumundaki hatanın yüzde 0.01 olduğu belirlenmiştir.

5.5 BİR KANAL İÇERİSİNDEKİ Nİ-TÜMSEĞİ ÜZERİNDE TRANSONİK AKIŞ

Bu problemde, hesaplama ağı olarak sesaltı akışta kullanılan hesaplama ağının aynısı kullanılmıştır. Şok dalgası etrafında hesaplama ağı sıklaştırılmamıştır. Ancak sıklaştırma işlemi, şokun yerini daha belirgin hale getirmektedir. Sınır şartlarının uygulanması ve başlangıç şartlarının verilmesi aynen sesaltı akışta olduğu gibi yapılmış, sadece Mach sayısının değeri değiştirilmiştir.

Sonlu hacim yöntemi ile Yardımcı (1994) tarafından elde edilen sonuçların karşılaştırılabilmesi için Ni (1982) tarafından 0.675 serbest Mach sayısı için elde edilen alt ve üst duvarlar üzerindeki Mach sayısı değişimi Şekil 5.14a, kanal içindeki eş Mach sayısı eğrileri ise Şekil 5.14b'de verilmiştir. Yardımcı (1994) tarafından gerçekleştirilen bu çalışmada yakınsaklık kriteri çok düşük tutularak 10^{-12} olarak alınmıştır. Bunun nedeni şok etrafındaki akışın daha iyi incelenebilmesidir. Bu

çalışmada, ses üstü hızlarda akış oluştuktan sonra, akış tümseğinin yüzde 71'inde bir şok nedeniyle yavaşlamıştır ve şok üç düğüm noktasına yayılmıştır. Ni (1982)'in çalışmasında ise şok akış tümseğinin yüzde 72 'sinde oluşmuş ve yine üç düğüm noktasına yayılmıştır. Bu bilgisayar yazılımıyla elde edilen eş Mach sayısı eğrileri Şekil 5.15b'de görüldüğü gibi Ni(1982) tarafından elde edilenlerle uyumludur. Şoktan sonraki akışın dönme karakteri, eş Mach sayısı eğrilerinin kanalın alt duvarına dik olmamasından anlaşılmaktadır. Alt ve üst duvardaki Mach sayısı dağılımı ise Şekil 5.15a'da gösterilmiştir. Bu çalışmada daha düşük bir hata seviyesi istenmesine rağmen, yakınsaklık 6900 yinelemeden sonra elde edilmiştir. Kütlelinin korunumu yüzde 0.003 lük bir hata ile gerçekleştirilmiştir ve sonuç tatminkardır.

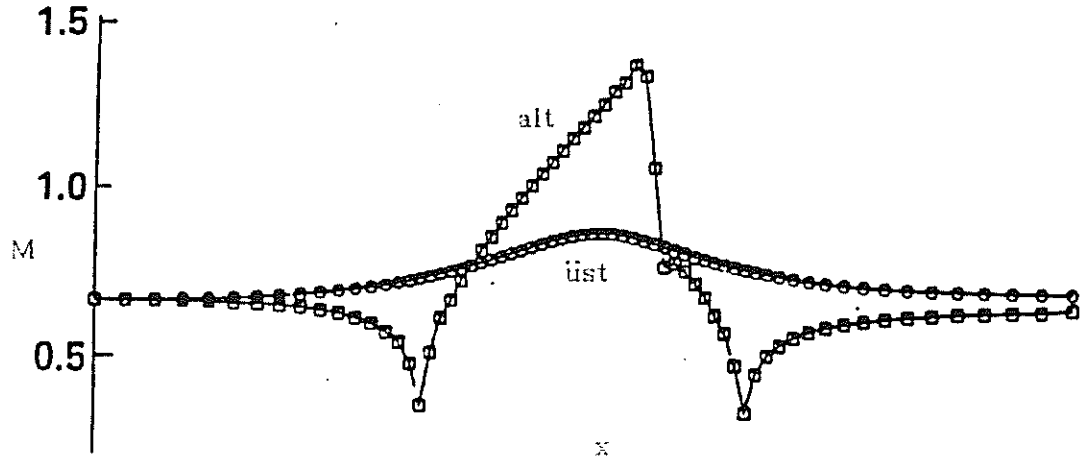
Sonlu eleman ve sonlu fark yöntemleri ile elde edilen sonuçların karşılaştırılabilmesi için Yardımcı (1994) tarafından geliştirilen yazılım Lüle (1995) tarafından 0.9 Mach sayısı için çalıştırılarak alt ve üst duvarlardaki Mach sayısının değişimi Şekil 5.16a'da kanal içerisindeki eş Mach sayısı eğrileri de Şekil 5.16b 'de verilmiştir. Lüle (1995) tarafından sonlu eleman yöntemi ile elde edilen alt ve üst duvarlardaki Mach sayısının değişimi Şekil 5.17a'da kanal içerisindeki eş Mach sayısı eğrileri de Şekil 5.17b'de gösterilmiştir. Şekil 5.16a'da görüldüğü gibi şok tümseğinin yüzde 92 sinde elde edilmiş ve akış şoktan sonra yavaşlamıştır. Şok yine üç hesaplama ağı noktası üzerine yayılmıştır. İyi bir sonuç elde edebilmek için sunni viskozitenin ayarlanması çok önemlidir. Sonlu fark yöntemi kullanılarak Amer (1995) tarafından elde edilen sonuçlar Şekil 5.18'de verilmiştir. Şok dalgası tümseğinin yüzde 86 sında yakalanmıştır ve üç hesaplama ağı noktasına dağılmıştır. Daimi sonuçlar 3300 yinelemeden sonra 5×10^{-5} hata ile elde edilmiştir.

5.6 BİR KANAL İÇERİSİNDEKİ Nİ-TÜMSEĞİ ÜZERİNDE SES-ÜSTÜ AKIŞ

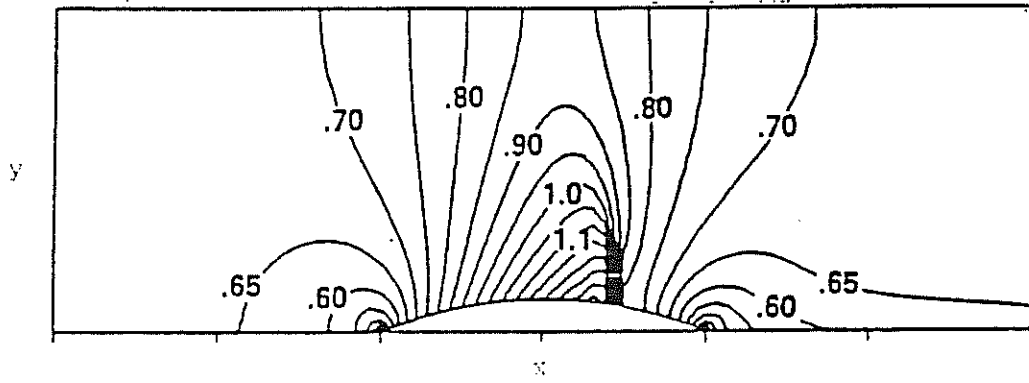
Bu çalışma, yüzde 4 kalınlığa sahip benzer bir dairesel tümsekten oluşan bir kanal içerisinde gerçekleştirilmiştir. Başlangıç şartları daha önceki gibi verilmiş sadece Mach sayısı 1.4 olarak alınmıştır. Akışın sesüstü hızlarda olması nedeniyle, akış değişkenleri dışdeğerbiçim yöntemi ile elde edilmiştir. İkinci dereceden dışdeğerbiçimin oldukça iyi sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Karşılaştırma amacı ile Ni(1982) tarafından 1.4 Mach sayısı için sonlu hacim yöntemi ile elde edilen alt ve üst duvarlar üzerindeki Mach sayısı değişimi Şekil 5.19a'da kanal içerisindeki eş Mach sayısı eğrileri ise Şekil 5.19b'de verilmiştir.

Amer (1995) tarafından sonlu fark yöntemi ile elde edilen sonuçlarda sunni viskozite kullanılmamıştır. Şekil 5.20a'da alt ve üst duvarlar üzerindeki Mach sayısı değişimi. Şekil 5.20b'de ise kanal içerisinde eş

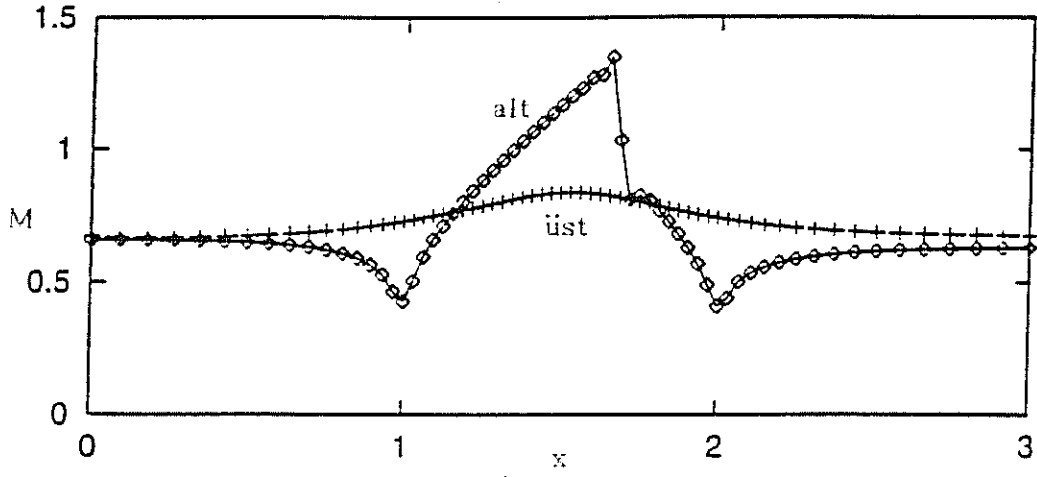


(a)

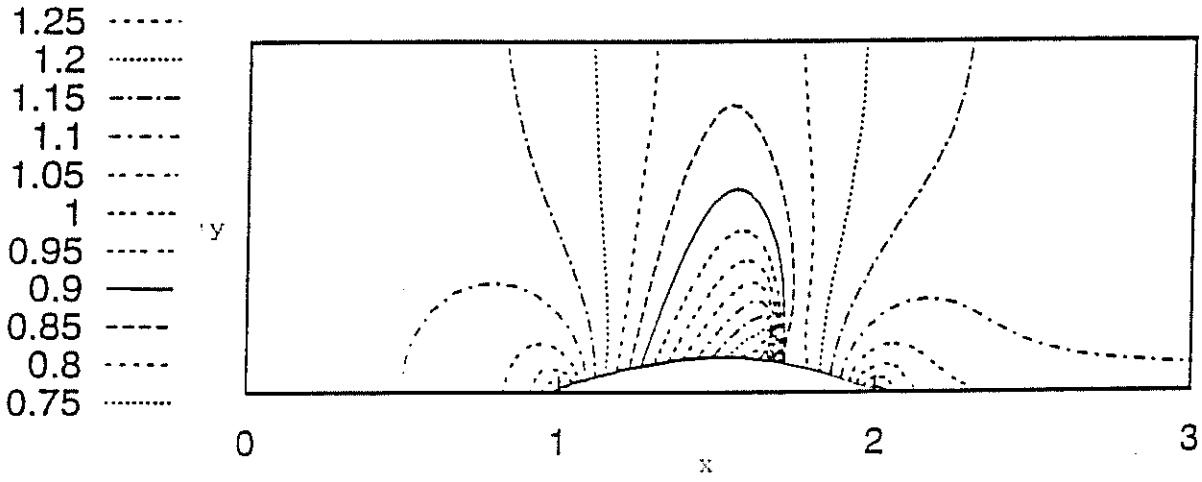


(b)

Şekil 5.14 Sonlu hacim yöntemi ile 0.675 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında (a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Ni(1982)]

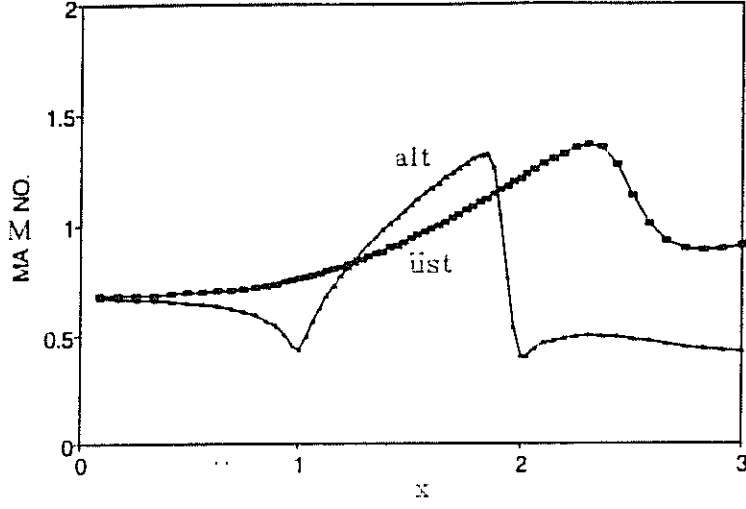


(a)

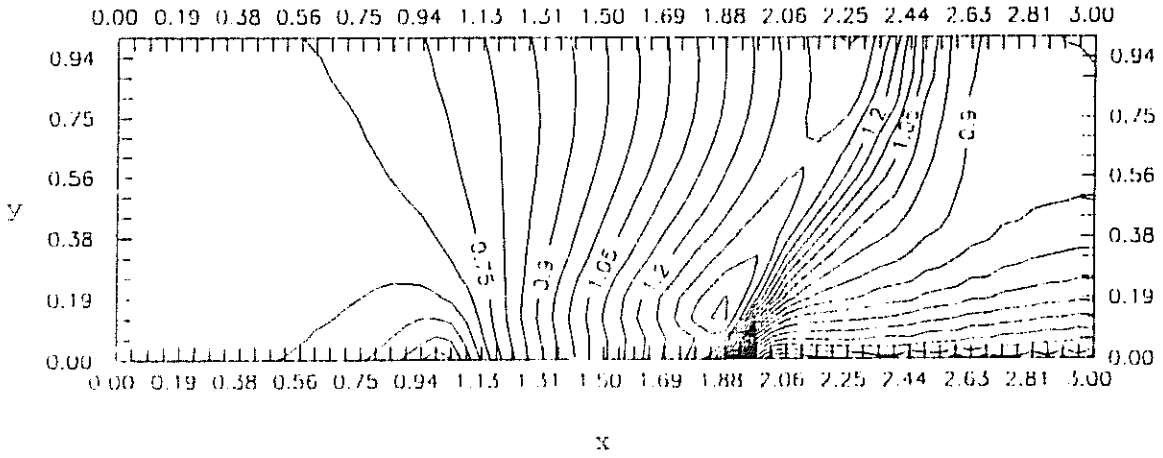


(b)

Şekil 5.15 Sonlu hacim yöntemi ile 0.675 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında (a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Yardımcı (1994)]

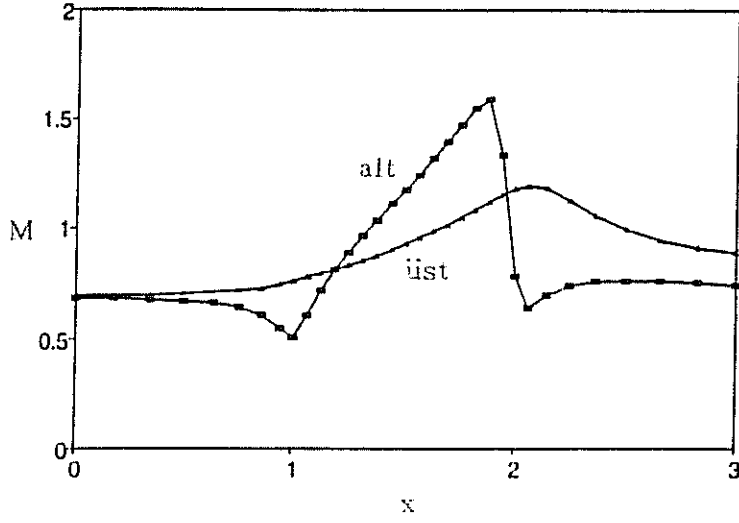


(a)

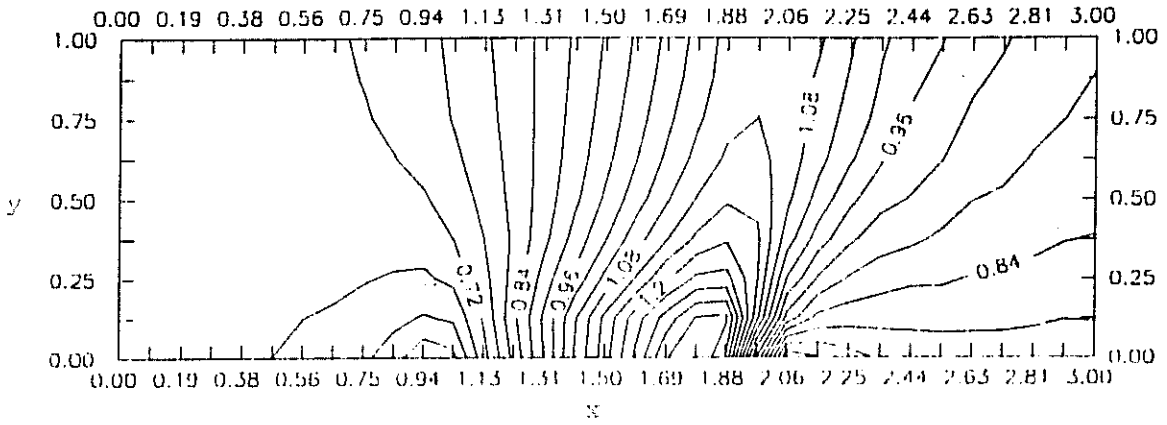


(b)

Şekil 5.16 Sonlu hacim yöntemi ile 0.9 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında (a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Lüle (1995)]

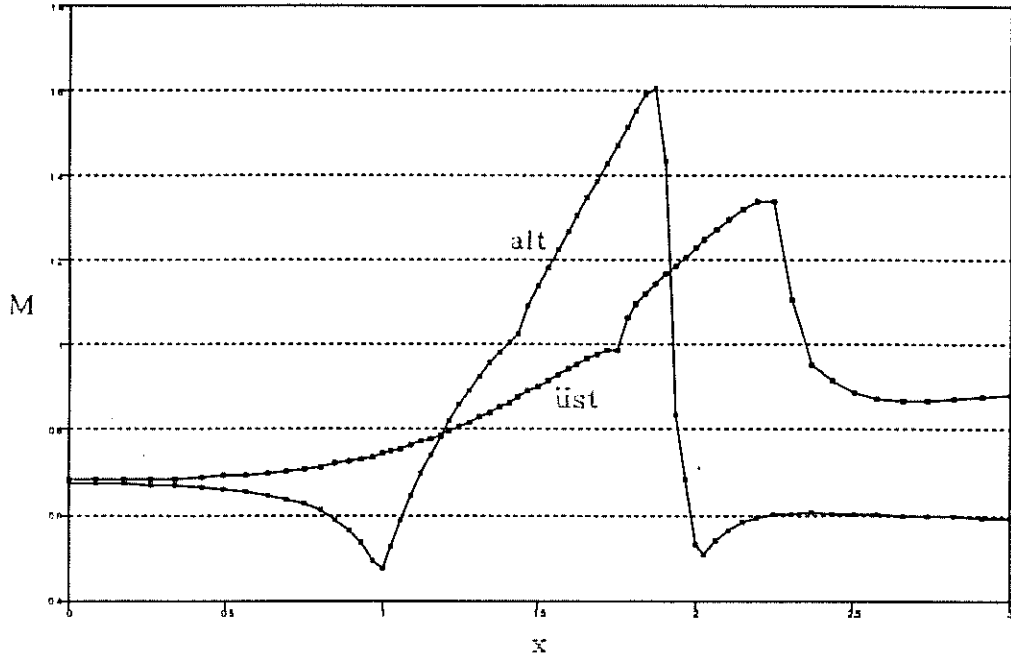


(a)

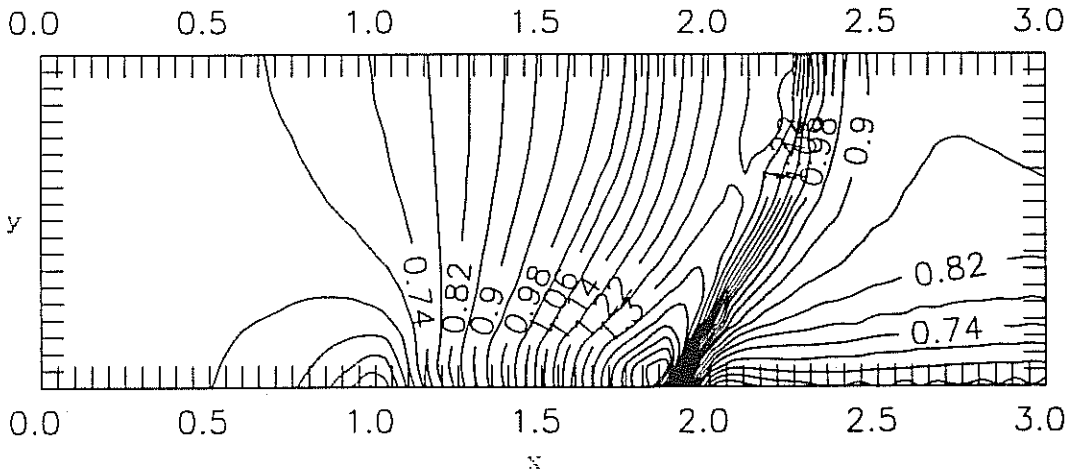


(b)

Şekil 5.17 Sonlu eleman yöntemi ile 0.9 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında (a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Lüle (1995)]



(a)



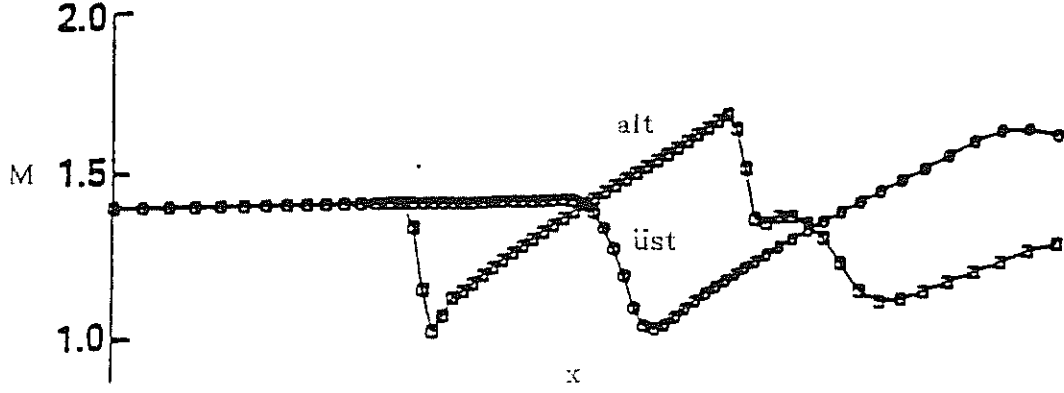
(b)

Şekil 5.18 Sonlu fark yöntemi ile 0.9 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında (a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Amer (1995)]

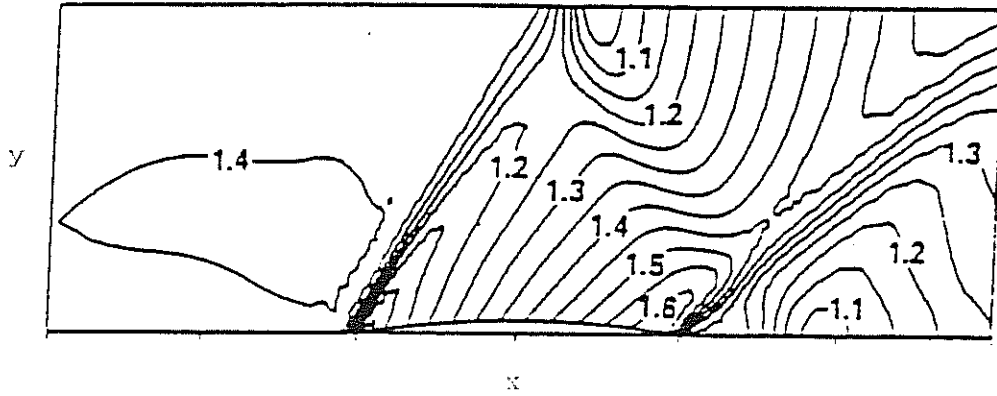
Mach sayısı eğrileri verilmiştir. Bu çalışmada, tümseğin her iki köşesinde de birer şok elde edilmiştir. Daimi sonuçlar 3700 yinelemeden sonra yakınsak hale gelmiştir.

Sonlu eleman yöntemi ile Lüle (1995) tarafından elde edilen kanalın alt ve üst duvarı üzerindeki Mach sayısı dağılımı Şekil 5.21a'da, kanal içerisindeki eş Mach sayısı eğrileri de Şekil 5.21b'de verilmiştir. Bu çalışmada şokların yeri doğru olarak elde edilmesine rağmen, bunların yansımaları Ni (1982) tarafından elde edilenlere göre iyi değildir.

Yardımcı (1994) tarafından sonlu hacim yöntemi ile elde edilen ve Şekil 5.22'de gösterilen sonuçlarda şok yansıması belirgin bir şekilde elde edilmiştir. Şok tümseğin ön ucunda oluşmakta ve kanalın üst duvarından yansımaktadır. Yakınsak sonuçlar, yaklaşık 1700 yinelemeden sonra elde edilmiştir. Kanalın giriş ve çıkışındaki kütle korunumu yüzde 0.1 lik bir hata ile gerçekleştirilmiştir.

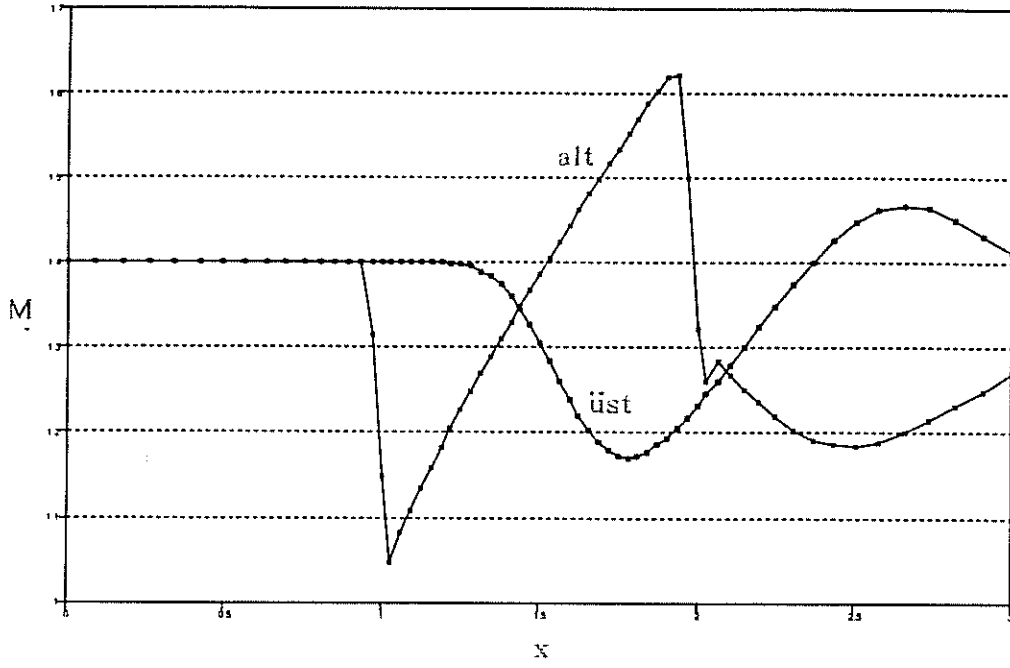


(a)

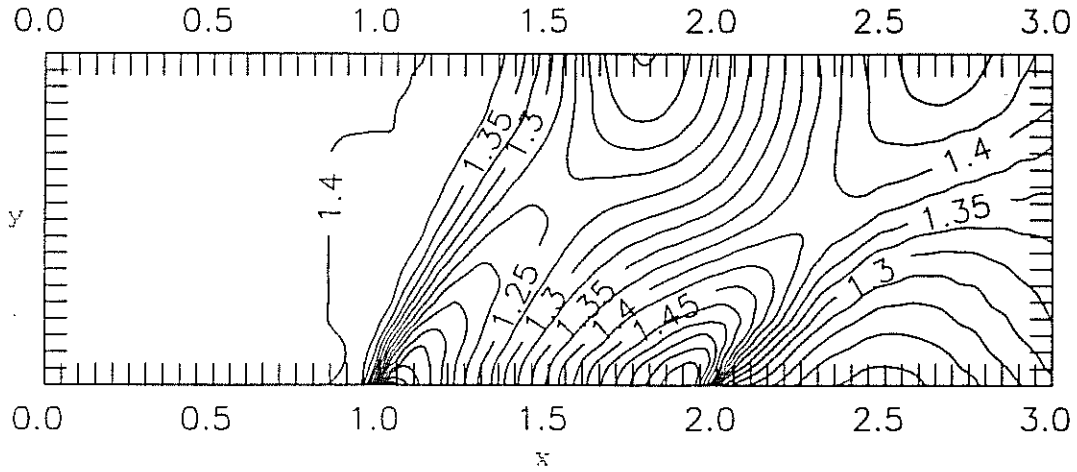


(b)

Şekil 5.19 Sonlu hacim yöntemi ile 1.4 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında (a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Ni (1982)]

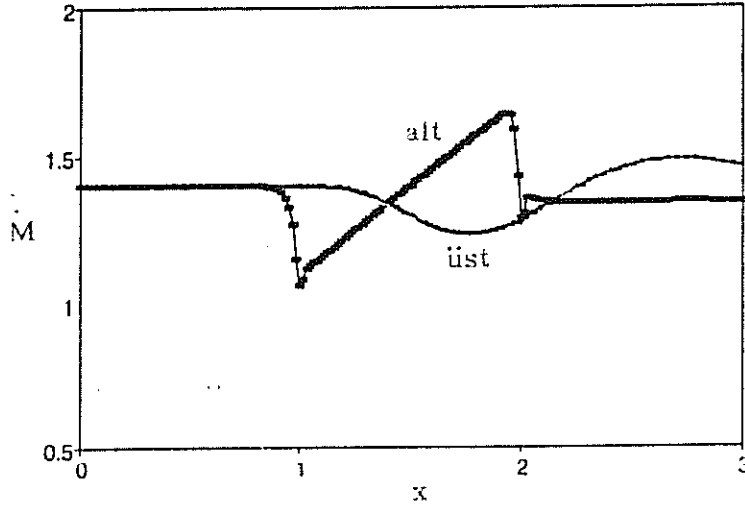


(a)

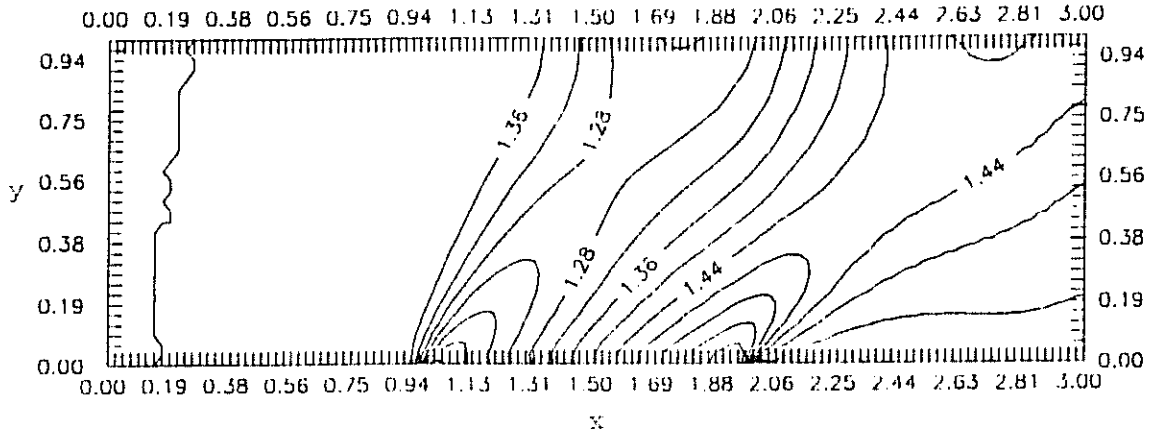


(b)

Şekil 5.20 Sonlu fark yöntemi ile 1.4 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında (a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Amer (1995)]

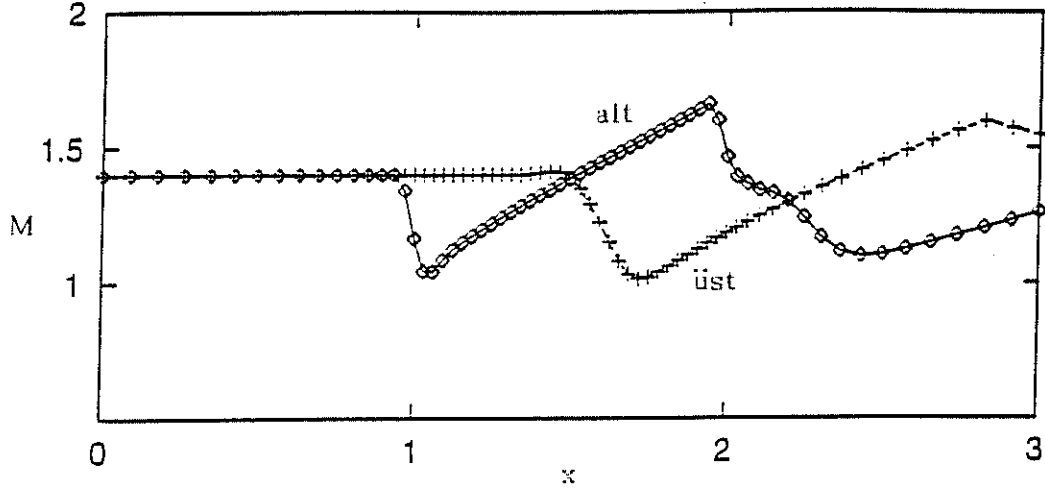


(a)

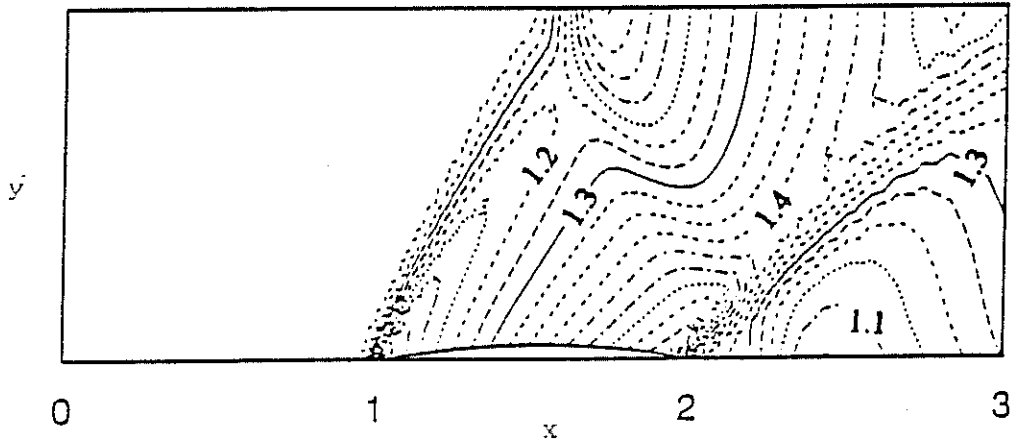


(b)

Şekil 5.21 Sonlu eleman yöntemi ile 1.4 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında (a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Lüle (1995)]



(a)



(b)

Şekil 5.22 Sonlu hacim yöntemi ile 1.4 Mach sayısı için Ni tümseği kanalında (a) alt ve üst duvarlardaki Mach sayısı dağılımı ve (b) eş Mach sayısı eğrileri [Yardımcı (1994)]

BÖLÜM 6

DEĞERLENDİRME

6.1 GENEL

Bu proje çerçevesinde, sonlu fark, sonlu eleman ve sonlu hacim yöntemleri kullanılarak iki boyutlu bir Euler çözücüsü C++ dilinde geliştirilmiştir.

Euler denklemlerinin sonlu hacim yöntemi ile çözümünde zaman ayrıştırması olarak hücre köşesi sonlu hacim tümleme yöntemi kullanılmıştır. Sonlu hacim yönteminin kullanılması hesaplama ağının oluşturulmasında kolaylıklar sağlamaktadır. Bunun nedeni akıların hücre köşelerinde tarif edilmesi, akıların korunumunun düzgün olmayan hücre geometrilerine uygulanabilmesini sağlamıştır. Zamanda tümleme için bir basamaklı ikinci dereceden açık Lax-Wendroff şemasına dayanan Ni'nin yöntemi kullanılmıştır. Zaman boyutunda açık yöntemlerin kullanılması şemayı kolaylaştırmasına karşılık, yakınsamayı yavaşlatmıştır. Bu zorluk yerel zaman adımı seçimi ile giderilmeye çalışılmıştır. Şok dalgaları etrafındaki dalgalanmaların giderilmesi için ve daha hassas sonuçların hızlı elde edilebilmesi için sayısal düzeltme yöntemleri uygulanmıştır. Geliştirilen yazılım, klasik iç akış problemleri kullanılarak test edilmiştir. Bu amaçla, bir kanal içindeki Ni tümseği üzerindeki ses altı, ses civarı ve sesüstü akışlar incelenmiştir. Elde edilen çözümlerin literatürde mevcut çözümlere uygun olduğu gözlenmiştir. Ses altı akış için tümseğin orta noktasına göre simetrik akış elde edilmiştir. Ses civarı akışlarda yakalanan şokun yeri ve kuvveti ile sesüstü akışlardaki şokun yeri ve yansıması doğru olarak bulunmuştur. Bütün akış rejimlerinde sünni düzgünleştirme yöntemleri iyi sonuç vermiş ve şokları otomatik olarak yakalanmıştır.

Sonlu eleman yöntemi ile gerçekleştirilen çözümlerde Euler denklemlerinin zaman ve uzay boyutlarındaki ayrıştırması için bir ve iki basamaklı Taylor-Galerkin yöntemi uygulanmıştır. Gerekli bilgisayar zamanı ve hafızasını azaltabilmek ve sonuçları daha hızlı elde edebilmek için denklemlerin sonlu eleman yöntemi ile ayrıştırılması sonucu elde edilen kütle matrisinin basitleştirilmiş şekli kullanılmıştır. Bir basamaklı Taylor-Galerkin yönteminin iki basamaklıya göre daha hassas olduğu, fakat daha yavaş yakınsak sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Sonlu eleman yöntemi ile çözülen sesaltı, sescivarı ve sesüstü akışlarda oluşan şoklar doğru yer ve

büyükliklerde elde edilmiştir. Bu her iki akış rejimi içinde sünni viskozite kullanımıyla çözümdeki dalgalanmalar önlenmiş ve daimi çözümler daha hızlı elde edilmiştir.

Sonlu fark yönteminin uygulanabilmesi için düzgün bir hesaplama ağı gerektiğinden Kartezyen kordinatlardan eğrisellineer koordinatlara geçiş zorunlu olmuştur. Çözüm tekniği olarak akış ayrıştırma yöntemi kullanılmıştır. Yazılımın bu bölümü yine bir kanal içinde bulunan Ni-tümseği problemi kullanılarak test edilmiştir. Elde edilen sonuçlar literatürde mevcut çözümler ile karşılaştırılmış ve sonuçların tatminkar olduğu gözlenmiştir. Sesaltı akışlar için tümseğin orta noktasına göre simetrik olan sonuçlar elde edilmiştir. Ses civarı ve sesüstü akışlarda sunni viskozite kullanımına gerek duyulmadan şoklar yakalanabilmiştir.

Sonuç olarak aynı problemler sonlu fark, sonlu eleman ve sonlu hacim yöntemleri kullanılarak çözülmüştür. Böylece bu yöntemler arasında bir karşılaştırma yapabileme olanağı ortaya çıkmıştır. Sonlu hacim yönteminin daha iyi sonuç verdiği ve uygulamasının daha fiziksel ve kolay olduğu gözlenmiştir. Bu yöntemde geleneksel olarak özelliklerin dağılımı için sonlu fark yöntemi kullanılmakta ise de, bu proje çerçevesinde aynı işlem sonlu eleman yöntemi ile gerçekleştirilmiştir. Sonuç olarak sonlu hacim yönteminin sonlu eleman yöntemi ile beraber uygulanması çok tatminkar sonuçlar vermiştir.

Bu proje çerçevesinde oluşturulan yazılım C++ bilgisayar dilinde gerçekleştirilmiştir. Ancak bilindiği gibi projenin hemen başlamasından sonra Türk Lirası A.B.D. doları karşısında büyük değer kaybetmiştir. Proje teklifi Türk Lirası olarak verildiği için istenilen büyüklükte bir sabit disk ünitesine ve ana belleğe sahip bir bilgisayar alınabilmesi mümkün olmamıştır. Yine bu nedenlerle son işlemci görevini yapacak TECPLOT gibi bir yazılım alınamamıştır. Bu nedenlerle C++ dilinin etkileşimli bir ortamda yazılım hazırlama esnekliğinden tümüyle yararlanılamamıştır.

6.2 GELECEKTE YAPILABİLECEK ÇALIŞMALAR

Geliştirilen yazılımın mühendislikteki gerçek problemlerin çözümünde kullanılabilmesi için üç boyutlu hale getirilmesi gerekmektedir. Mevcut olan yazılımda akış değişkenleri vektörel olarak kullanıldığından bu yazılım üç boyutlu hale getirilmeye çok uygundur. Bu çalışmanın yapılabilmesi ancak mevcut bilgisayarın ana belleğin artırılması ve hızlandırması; ve ile ilave sabit disk ünitesinin alınabilmesi ile mümkün olabilecektir. Elde edilen sonuçların değerlendirilerek görüntülenmesinde son işlemci görevini

yapabilecek ve dünyanın çeşitli ülkelerinde Sayısal Akışkanlar Mekanği konusundaki araştırcıların yaygın olarak kullandıkları TECPLOT yazılımına gereksinim olacaktır. Yine, mevcut monitörün hassasiyeti çeşitli görüntüleme uygulamalarında yetersiz kalmaktadır ve üç boyutlu yazılımdan elde edilecek sonuçların görüntülemesinde daha hassas bir mönitöre gereksinim vardır.

Euler çözücüsünün üç boyutlu hale getirilmesinden sonra yapılabilecek diğeri bir çalışma, bu çözücüye viskoz terimlerin ilavesi ile bir Navier-Stokes çözücüsünün geliştirilmesidir.

KAYNAKLAR

Amar, A., 1995, "Development of a Two-Dimensional Euler Solver Using Finite Difference Method for Internal Flows, M.Sc. Thesis in Mechanical Engineering, METU, Ankara.

Anderson, W.K., Thomas, J.L. and Van Leer, B., 1986, "Comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equations," AIAA Journal, Vol. 24, pp. 1453-1460.

Angrand, F. and Dervieux, A., 1984, "Some Explicit Triangular Finite Element Schemes for the Euler Equations", International Journal for Num. Methods in Fluids, Vol. 4, pp. 749-764.

Allmaras, S.R. and Giles, M.B., 1987 "A Second Order Flux Split Scheme for the Unsteady 2-D Euler Equations on Arbitrary Meshes", AIAA Paper 87-1119.

Arthur, M., Blaylock, T. and Anderson, J., 1989 "A Cell-Vertex, Multigrid Euler Scheme for Use with Multiblock Grids ", AIAA Paper 89-0472, AIAA 27th Aerospace Sciences Meeting, Nevada.

Atkins, H.L. and Hassan, H.A., 1983, "Transonic Flow Calculations Using the Euler Equations," AIAA Journal, Vol. 21, pp. 842-847.

Baker, T.J., Jameson, A. and Vermeland, R.E., 1985, "Three-Dimensional Euler Solutions With Grid Embedding," AIAA Paper 85-0121, 23rd Aerospace Sciences Meeting, Nevada.

Barger, R.L., 1982, "An Analytical Procedure for Computing Smooth Transition Between Two Specified Cross Sections with Application to Blended Wing-Body Configurations," NASA TP-2012.

Baruzzi, G.S., Habashi W.G. and Hafez M.M., 1991, "Finite Element Solutions of the Euler Equations for Transonic External Flows", AIAA Journal, Vol. 29, pp. 1886-1893.

Batina, J.T., 1989, "Unsteady Euler Algorithm with Unstructured Dynamic Mesh for Complex-Aircraft Aeroelastic Analysis", AIAA Paper 89-1119.

Beam, R. and Warming, R.F., 1976, "An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation Law Form", *Journal of Computational Physics*, Vol. 22, pp. 87-110.

Beam, R. M. and Warming, R.F., 1978, "An Implicit Factorized Scheme for the Compressible N/S Equations" , *AIAA Journal*, Vol. 16, 393-403.

Casier, F., Deconinck, H. and Hirsh, Ch., 1984, "A Class of Bidiagonal Schemes for Solving the Euler Equations," *AIAA Journal*, Vol. 22, pp. 1556-1563.

Chakravarthy, S.R., 1983, "Euler Equations-Implicit Schemes and Boundary Conditions," *AIAA Journal*, Vol. 21, pp. 699-706.

Chima, R. V., 1985, "Inviscid and Viscous Flows in Cascades with an Explicit Multiple-Grid Algorithm", *AIAA Journal*, Vol. 23, pp. 1556-1563.

Clarke, D.K., Hassan, H.A., and Salas, M.D., 1985, "Euler Calculations for Multielement Airfoils Using Cartesian Grids " , *AIAA Paper 85-0291*, *AIAA 23rd Aerospace Sciences Meeting*, Nevada.

Ecer, A. and Akay, H.U., 1982, "Application of a Finite Element Algorithm for the Solution of Steady Transonic Euler Equations," , *AIAA Paper 82-0970*, *AIAA\ASME 3rd Joint Thermophysics, Fluids, Plasma and Heat Transfer Conference*, Missouri.

Ecer, A and Akay, H.U., 1983, "A Finite Element Formulation for Steady Transonic Euler Equations," *AIAA Journal*, Vol.21, pp.343-350.

Ecer, A., Akay, H.U. and Şener, B., 1984, "Solution of Three-Dimensional Inviscid Rotational Flows in a Curved Duct," *AIAA Paper 84-0032*, *AIAA 22nd Aerospace Sciences Meeting*, Nevada.

Ecer, A. and Akay, H.U., 1984, "Applications of Bateman's Variational Principle to Rotational Flows " , *Fifth International Symp. on Finite Elements and Flow Problems*, edited by J.T. Oden (TICOM).

Ecer, A., Akay, H.U. and Willhite, P.G., 1986, "Finite Element Solutions of Euler Equations for Lifting Airfoils," *AIAA Journal*, Vol. 24, pp. 562-569.

Ertürk, E., 1995, " A Numerical Experimentation of the Boundary Conditions for a Two-Dimensional Multigrid Euler Solver Using Finite

Volume Method for Internal Flows", M.Sc Thesis in Mechanical Engineering, METU, Ankara.

Giles, M.B., 1987, "Generalized Conservation Cells for Finite Volume Calculations", AIAA Paper 87-1118.

Harten, A., 1983, "A High Resolution Scheme for the Computation of Weak Solutions of Hyperbolic Conservation Laws", Journal of Computational Physics Vol. 49, pp. 357-393.

Hindman, R.G., Kutler, P. and Anderson, D., 1981, "Two-Dimensional Unsteady Euler Equation Solver for Arbitrary Shaped Flow Regions," AIAA Journal, Vol. 19, pp. 424-431.

Hirsch, C., 1989 Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol. 1 and 2, John Wiley and Sons, Inc. New York.

Hoffmann, K. A., 1989, "Computational Fluid Dynamics for Engineers" Engineering Education System, Austin, Texas.

Hughes, T.J.R., Tezduyar, T.E. and Brooks A.N., 1982, "Streamline Upwind Formulations for Advection-Diffusion, Navier-Stokes and First-Order Hyperbolic Equations", Proceedings of Fourth Int. Symp. on Finite Element Methods in Flow Problems, Tokyo.

Jameson A., Schmidt, W. and Turkel E., 1981, "Numerical Solutions of Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes, AIAA Paper 81-1259.

Jameson, A., 1983, "Solution of the Euler Equations for Two-Dimensional Transonic Flow by a Multigrid Method," Princeton Uni., MAE Report No. 1613.

Jameson, A. and Baker, T.J., 1984, "Multigrid Solutions of the Euler Equations for Aircraft Configurations", AIAA Paper 84-0093, AIAA 22nd Aerospace Sciences Meeting, Nevada.

Jameson, A. and Mavriplis, D., 1986, "Finite Volume Solution of the Two Dimensional Euler Equations on a Regular Triangular Mesh ", AIAA Journal, Vol. 24, pp.611-618.

Jameson A. and Yoo S. 1986, "Multigrid Solution of the Euler Equations using Implicit Schemes", AIAA Journal, Vol, 24, pp 393-403.

Lerat, A., 1985, "Implicit Methods of Second-Order Accuracy for the Euler Equations," *AIAA Journal*, Vol. 23, pp. 33-40.

Lüle, S., 1995, "Development of a Two-Dimensional Euler Solver Using Finite Element Method for Internal Flows",. M. Sc. Thesis in Mechanical Engineering , METU Ankara.

MacCormack, R.W., 1969, "The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering ", *AIAA Paper*, 69-354.

MacCormack, R. W., 1982, "A Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow", *AIAA Journal*, Vol 20, pp. 1275-1281.

Masson, B.S., 1973, "An Implicit Finite-Difference Method for Eulerian Fluid Dynamics ", *Journal of Computational Physics*, Vol. 12, pp. 88-102.

McGuire, G.R. and Morris J.L., 1974, "A Class of Implicit, Second Order Accurate, Dissipative Schemes for Solving Systems of Conservation Laws", *Journal of Computational Physics*, Vol. 14, pp 126-147.

Moitra, A., 1985, "Numerical Solution of the Euler Equations for High Speed, Blended Wing-Body Configurations", *AIAA Paper 85-0123*, AIAA 23rd Aerospace Sciences Meeting, Nevada.

Moore, J., and Moore, J.G., 1983, "Entropy Production Rates From Viscous Flow Calculations Part II - Flow in a Rectangular Elbow", *ASME Paper*, 83-GT-71, ASME 28th International Gas Turbine Conference, Arizona.

Neef, T., 1978, "Treatment of Boundaries in Unsteady Inviscid Flow Computations," *Delft Uni. of Technology*, Netherlands, Department of Aerospace Engineering Report.

Ni, R.H., 1982, "A Multiple-Grid Scheme for Solving the Euler Equations", *AIAA Journal*, pp. 1565-1571.

Okday, E. 1991, A Cell Vertex Method for 3D Inviscid Inviscid Internal Flows PhD. Thesis in Mechanical Engineering METU Ankara, 1972.

Osher, S., and Chakravarthy, S., 1983, "Upwind Schemes and Boundary Conditions with Applications to Euler Equations in General Geometries," *Journal of Computational Physics*, Vol. 50, pp .477-481.

Porter, R.W. and Coakley, J.F., , "Use of Characteristics for Boundaries in Time Dependent Finite Difference Analysis of Multidimensional Gas Dynamics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 5, pp. 91-101.

Pulliam, H.T., 1986, "Artificial Dissipation Models for the Euler Equations", *AIAA Journal*, Vol. 24, pp. 1931-1940

Rizzi, A. 1982, "Damped Euler-Equation Model to Compute Transonic Flow Around Wing-Body Combinations" *AIAA Journal*, Vol 20, pp. 1321-1328.

Rizzi, A. and Eriksson, L., 1983, "Explicit Multistage Finite Volume Procedure to Solve the Euler Equations for Transonic Flow", *Lecture Series on Computational Fluid Dynamics*, von Karman Institute, Belgium.

Roe, P.L., 1980, "The Use of the Riemann Problem in Finite Difference Schemes," *Seventh Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Stanford.

Stanitz, J.D., Osborn, W.M., and Mizisin, J., 1953, "An Experimental Investigation of Secondary Flow in an Accelerating Rectangular Elbow with 90° of Turning," *NACA TN 3015*.

Steger, J.L., 1978, "Implicit Finite Difference Simulation of Flow About Arbitrary Two-Dimensional Geometries," *AIAA Journal*, Vol. 16, pp. 679-686.

Steger, J.L. and Warming, R. F., 1981, "Flux Vector Splitting of the Inviscid Gas Dynamics Equation with Application to Finite Difference Methods", *Journal of Computational Physics*, Vol. 40, pp. 263-293.

Telçeker N. and Yardımcı Ö. M., 1992, "One-Dimensional Flow Analysis by Using the Euler Equations", *TÜBİTAK-SAGE Report DB 92/12.0*, Ankara.

Van Leer B., 1981, "Flux Vector Splitting for the Euler Equations", *Technical Report 81-11*, ICASE.

Van Leer, B., 1983, "Flux Vector Splitting for the Euler Equations," *Eight Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Springer Lecture Notes, No. 170.

Wornom S. F. and Hafez M.M., 1986, "Implicit Conservative Schemes for the Euler Equations", AIAA Journal, Vol 24. pp 215-233

Yanenko, N.N. and Yaushev, I.K., 1966, "An Absolutely Stable Scheme for Integration of Equations of Hydrodynamics," Proceedings of the Steklov Ins., Vol. 14, pp. 126-147.

Yardımcı, Ö. M. and Telçeker, N., 1992, "Quasi-One Dimensional Flow Analysis by Using the Euler Equations" TÜBİTAK-SAGE Report, DB 92/11.0, Ankara.

Yardımcı, Ö.M., 1994, "Development of A Two-Dimensional Euler Solver Using Finite Volume Method for Internal Flows, M.Sc. Thesis in Mechanical Engineering METU, Ankara.

Yee, H.C. Beam, R.M. and Warming, R.F., 1982, "Stable Boundary Approximations for a Class of Implicit Schemes for the One-Dimensional Inviscid Equations of Gas Dynamics," AIAA Journal, Vol. 20. pp. 1203-1211.

Zienkiewicz, O. C, and Taylor, O.C., 1991, The Finite Element Method, Vol. 1 and 2, Mc. Graw Hill Book Co., New York.

BİBLİYOGRAFİK BİLGİ FORMU

1- Proje No: MISAG - 53

2- Rapor Tarihi: 29 Eylül 1995

3- Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri: 1 Eylül 1993 -30 Ağustos 1995

4- Projenin Adı:

C++ Derleyicisi Kullanılarak İki Boyutlu Sıkıştırılabilen Akışlar için Bir Euler Çözücüsünün Geliştirilmesi

5- Proje Yürütücüsü ve Yardımcı Araştırmacılar:

Prof. Dr. M. Haluk AKSEL

6- Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi:

Orta Doğu Teknik Üniversitesi
Makina Mühendisliği Bölümü
06531 ANKARA

7- Destekleyen Kuruluş(ların) Adı ve Adresi:

8- Öz (Abstract):

Ses altı, ses etrafı ve ses üstü hızlardaki iki boyutlu sıkıştırılabilen akışkanlar için C++ bilgisayar dilinde etkileşimli bir Euler çözücüsü geliştirilmiştir. Bu yazılım daha önceden hesaplama ağı oluşturulmuş bir problem için çeşitli sınır şartlarının etkileşimli olarak uygulanabilmesine imkan tanımıştır. Çözüm yöntemleri olarak, sonlu fark sonlu eleman ve sonlu hacim yöntemleri kullanılarak ve bunların ekrandan etkileşimli olarak seçimi mümkün olmuştur. Yinelemeler sırasında çözümün gelişmesinin ekrandan izlenebilmesi için olanak sağlanmıştır. Geliştirilen yazılım bir boyutta, bir tüpteki gazın aniden serbest bırakılması probleminde ve bir tüp içerisindeki zamana bağlı akış probleminde denenmiştir. İki boyutlu akışlar için ise yazılım ses altı, ses etrafı ve ses üstü hızlarda, çözümü literatürde mevcut bir kanal içerisindeki Ni tümseği kullanılarak denenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Euler Çözücüsü, Sonlu Eleman Yöntemi, Sonlu Fark Yöntemi, Sonlu Hacim Yöntemi

9- Proje ile ilgili Yayın/Tebliğlerle ilgili Bilgiler

Henüz yayın yapılmamıştır.

10- Bilim Dalı: TERMODİNAMİK - Akışkanlar Mekaniği

Doçentlik B. Dalı Kodu: 625.04.03

ISIC Kodu:

Uzmanlık Alanı Kodu: 625.04.03

11- Dağıtım (*): Sınırlı Sınırsız

12- Raporun Gizlilik Durumu :

 Gizli Gizli Değil

*) Projenizin Sonuç Raporunun ulaştırılmasını istediğiniz kurum ve kuruluşları ayrıca beliriniz