Fuzzy Ekstra Boyutlu Uzaylarda Kuantum Alan Teorileri

Sonuç Raporu

Proje No: 110T738

Doç.Dr. Seçkin Kürkcüoğlu
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
Fizik Bölümü

KASIM 2013
ANKARA

Önsöz

Bu proje kapsamında, fuzzy ekstra boyutlu Yang-Mills ayar teorilerinin fiziksel yapıları derinlemesine araştırılmıştır. Fuzzy kürelerin çarpımı yada doğrudan toplamı yapısında ekstra boyutların dinamik bir mekanizma ile üretildiği ayar teorisi modelleri ele alınmıştır. Bu modellerin simetrilerine göre, içerdikleri alanların simetrik parametrizasyonları bulunmuş ve boyutsal indirgeme yapılarak düşük enerjili efektif eylemleri elde edilmiş ve yapıları ortaya konulmuştur. Çalışmalarımızda prototip olma karakterine sahip modeller üzerinde yoğunlaşılarak simetrik parametrizasyon ve boyutsal indirgeme yönteminin fuzzy uzaylar üzerine uygulanması konusunda kapsamlı sonuçlar elde edilmiştir. Araştırma projemiz 1.4.2011-1.10.2013 tarihleri arasında TÜBİTAK tarafından 110T738 kodlu bilimsel araştırma projesi olarak desteklenmiştir.

Özet

Bu projede fuzzy ekstra boyutlu Yang-Mills ayar teorilerinin fiziksel yapıları derinlemesine araştırılmıştır. Yakın zamanda yapılan araştırmalarla fuzzy uzayların $SU(N)$ Yang-Mills ayar alanları ve bu grubunun eşlek (adjoint) temsilinde skaler alanlar içeren ve bir M uzayı üzerine kurulu modellerde spontane simetri kırılması yoluyla ekstra boyutlar olarak üretilebilecekleri sonucuna varılmış ve bu biçimde ortaya çıkan modellerin de, M uzayı ve fuzzy uzayların çarpımı olan uzayda kurulu Yang-Mills ayar teorileri olarak betimlenebileceği ortaya konulmuştur. Projemiz çerçevesinde, iki fuzzy kürenin çarpımı ve, $SU(N)$ grubunun temel temsili altında dönüşen skaler alanlarında eklenmesiyle de, fuzzy kürelerin doğrudan toplamı yapısında ekstra boyutlar üreten $SU(N)$ ayar teorileri geliştirilmiştir. Bu modellerin fuzzy uzaylarının simetrileri altında skaler, spinör vektör alanlarının simetrik parametrizasyonları elde edilmiştir. Yaptığımız araştırmalar sonucu, fuzzy küre üzerinde monopol sarım sayısı ± 1 olan sektörleri ve bu sektörlerin üzerindeki simetrik alanlar bulunmuş ve sarım sayısı $\pm m$ $(m \in \mathbb{Z}_+)$ sektörlere olan genelleştirmeler de tespit edilmiştir. Söz konusu modellerde bu bulgular kullanılarak fuzzy küre yapıları üzerinde simetrik boyutsal indirgemeleri yapılmış ve düşük enerjili efektif eylemler hesaplanmıştır. Bazı modellerde bu hesaplar son aşamalarda olup halihazırda devam etmektedir. Şu ana kadar elde edilen düşük enerjili efektif eylemler incelenmiş ve içerdikleri vorteks tipi alan teorisi çözümleri bulunmuş ve bu çözümlerin bazı özellikleri irdelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy Uzaylar, Yüksek ve Düşük Boyutlu Uzaylarda Ayar Teorileri, Simetrik Boyutsal İndirgeme, Vorteksler.

Abstract

In this project, physical structure of Yang-Mills gauge theories with fuzzy extra dimensions are investigated throughly. Research pursued in the recent past has shown that, in models over a manifold M with $SU(N)$ Yang-Mills gauge fields coupled with scalar fields in the adjoint representation of this group, fuzzy extra dimensions are produced via a spontaneous symmetry breaking mechanism, and it was demonstrated that models emerging in this manner may be interpreted as gauge theories living on the product space of M with the fuzzy extra dimensions. Within the framework of our project, $SU(N)$ gauge theories producing extra dimensions such as the product of two fuzzy spheres and, with the addition of scalar fields transforming under the fundamental representation of $SU(N)$, as the direct sum of several fuzzy spheres are developed. The equivariant parameterizations of scalar, spinor and vector fields under the symmetry groups of fuzzy extra dimensions are constructed. Winding number ± 1 monopole sectors over the fuzzy sphere and the equivariant fields over these sectors are determined and their generalizations to winding number $\pm m$ $(m \in \mathbb{Z}_+)$ are obtained. Employing these results, we have performed dimensional reduction over fuzzy spheres and calculated the emerging low energy effective actions. In some models these calculations are at their final stages and continue at present. Low energy effective actions obtained so far are analyzed to reveal the vortex type solutions they possess and some of the properties of the latter are determined.

Keywords: Fuzzy Spaces, Gauge Theories in Higher and Lower Dimensions, Equivariant Dimensional Reduction and Vortices.

İçindekiler

Önsöz ii
Özet iii
Abstract iv
İçindekiler v
1. GİRİŞ 1
2. LİTERATÜR ÖZETİ 3
3. GEREÇ VE YÖNTEM 6
4. BULGULAR 8
5. TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER 13
REFERANSLAR 16

1. GİRİŞ

Fuzzy uzaylar, bir takım özellikler taşıyan kompakt manifoldların, simetrileri korunularak, kuantize edilmeleri, bir başka değişle ayrıklaştırılmaları yolu ile elde edilirler. Yaygın olarak bilinen örnekler fuzzy küre ve fuzzy kompleks projektif uzaylardır. Fuzzy uzaylar üzerinde kuantum alan teorileri, sonlu-boyutlu matris modelleri olarak kurgulanmışlardır. Fuzzy uzayların simetrileri korumaktaki başarısı, örneğin fuzzy kürenin tam bir küresel simetriye sahip oluşu, alan teorilerinin topolojik olarak aşikar-olmayan (non-trivial) sektörlerinin de, ayrıklaştırılmış teoriler olarak çalışılmasını sağlamaktadır. Tüm bu özellikler, fuzzy uzaylar üzerinde kuantum alan teorilerinin formülasyonunu, latis kuantum alan teorilerine önemli bir alternatif olarak öne çıkarmaktadır.

Fuzzy uzayların, belirli ayar simetrisine sahip Yang-Mills ayar alanları ve bunlara bağlı uygun formdaki skaler alanların olduğu bir grup modelde, spontane simetri kırılması yoluyla üretilebileceği gösterilmiştir (Aschieri vd. 2006). Örneğin, Minkowski uzayı M^4 üzerinde kurgulanmış $SU(N)$ simetrisine sahip bir ayar teorisinde, ayar alanlarına bağlı skalerlerin oluşturduğu potansiyelin $SU(N)$ simetrisinin spontane olarak kırılmasıyla, skaler alanların vakum değerleri fuzzy küreyi oluştururken, bu vakum etrafındaki salınımların ise fuzzy küre üzerindeki ayar alanları olarak anlaşıldığı ve böylece $M^4 \times S_F^2$ üzerinde $SU(N)$'den daha küçük ayar simetrilerine sahip teorilerin ortaya çıktığı bilinmektedir (Aschieri vd. 2006). Bu sonuçların, fuzzy ekstra boyutlar söz konusu olduğunda, hem boyut kavramına dinamik bir anlam kattığı, hem de daha genel olarak Kaluza-Klein programına yeni bir perspektif sunduğu söylenebilir. Aynı model çerçevesinde fermion alanlarının içeriği de literatürde çalışılmıştır. Örneğin altı boyutta uygun bir fermion kümesinin $M^4 \times S_F^2$ üzerinde Dirac fermionlarının efektif olarak betimlenmesine olanak tanıdığı ve bu betimlemenin üzerinde Kaluza-Klein modları açılımı ile uyumlu olduğu bilinmektedir (Steinacker ve Zoupanos, 2007).

Projemizin temel hedeflerini, yukarıdaki paragrafta bahis edilen bir takım özelliklere sahip Yang-Mills teorilerinin, fuzzy uzaylar üzerinde simetrik boyutsal indirgenmesinin çalışılması oluşturmuştur. Bu konuyu daha derinlemesine açmak için simetrik boyutsal indirgeme yöntemleri ve alan teorilerine uygulamaları gereç ve yöntemler kısmında etraflıca tartışılmıştır. Simetrik boyutsal indirgeme yöntemleri ile fuzzy ekstra boyutların ele alınması yakın zamanda incelenmeye başlanmıştır ve konunun pek çok bilinmeyen yönü bulunmaktadır. 2009 yılında D. Harland ile yayınladığımız bir makalede bazı ilginç sonuçlar elde edilmiştir (Harland ve Kurkcuoglu, 2009). Geçmişte yapılan bu çalışmamızda kullanılan metotlar ile proje çerçevesinde çalıştığımız konuların ele alınma yöntemleri belli ölçülerde paralellik göstermekte olduklarından bahsi geçen ilgili yöntemler raporun 3. kısmında irdelenmiştir.

Projemiz çerçevesinde yaptığımız çalışmalarla somut olarak ele alıp çözdüğümüz problemler bu raporun bulgular kısmında detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Burada vardığımız sonuçları ana hatlarıyla belirtmek uygun olacaktır. Proje kapsamında çalıştığımız ilk konu M uzayında $SU(N)$ ayar teorisine bağlanan altı adet skaler alanın bulunduğu $SU(2) \times SU(2)$ global simetrisine sahip ve spontane simetri kırılması ile $S_F^2 \times S_F^2$ geometrisinde ekstra boyutların var olduğu bir $U(4)$ teorisinin skaler ve ayar alanlarının $SU(2) \times SU(2)$ simetrik parametrizasyonlarının elde edilmesi olmuştur. Bu sonuca binaen $S_F^2 \times S_F^2$ üzerinde boyutsal indirgeme hesapları yapılarak $U(1) \times U(1) \times U(1)$ simetrisinde abelian Higgs tipi düşük enerjili bir efektif eylem hesaplanmıştır. Bu modelin içerdiğini öngördüğümüz vorteks tipi çözümler elde edilmiş ve yapıları incelenmiştir. Bu sonuçlar Physical Review D dergisinde Mayıs 2012 tarihinde yayınlamıştır (Kurkcuoglu, 2012b).

Projemiz çerçevesinde yapılan ikinci çalışma ile, $SU(N)$ ayar teorisi modeline, $SU(2)$ global simetrisinin spin $\frac{1}{2}$, yada daha genel olarak spin $\frac{m}{2}$ temsilleri altında dönüşen iki komponentli yada $m+1$ komponentli ve her komponenti $SU(N)$ grubunun temel temsili ile dönüşen alanların eklenmesi ile spontane simetri kırılması sonucu vakum yapısının değişik mertebelerden dört yada daha fazla fuzzy kürenin oluşturduğu sonucu bulunmuştur. Bu bulgunun incelenmesinin ardından, uygun projeksiyon operatörlerinin kullanımı ile vakum yapılarının S_F^2 üzerinde sarım sayısı $\pm m$ $(m \in \mathbb{Z}_+)$ olan monopol sektörlerinin oluşturulması başarılmıştır. Sarım sayısı ± 1 olan sektörler üzerine odaklanarak, bu sektörde $SU(2)$ altında simetrik skaler, spinör ve vektör alanlarının parametrizasyonlarını net bir şekilde ortaya koyduk. Bu parametrizasyonların kullanımı ile bilgisayar ortamında Mathematica programının yardımı ile düşük enerjili efektif eylemin hesaplanması aşamasının ivedilikle tamamlamak için çalışmalarımıza devam etmekte ve sonuçların alınmasının hemen sonrasında yayına gönderilmesi planlanan makalenin yazımına da devam edilmektedir. Bu konudaki bulgularımızın geniş anlatımı, bilimsel önemi ve bahsi geçen vakum yapılarının süpersimetrik uzaylar ile olan ilgileri 4. ve 5. kısımlarda sunulmuştur.

Yarı zamanlı proje bursiyerleri doktora öğrencisi Gönül Ünal ve yüksek lisans öğrencisi Fatih Ballı, proje bursiyeri oldukları süre zarfında proje konularına temel oluşturan klasik ve kuantum alan teorilerinde bilgi ve becerilerini geliştirmiş ve proje yürütücüsü ile bilimsel toplantılar, tartışmalar yaparak ve yakından ilgili olan literatürdeki makaleleri okuyarak proje konuları hakkında kendilerini geliştirmişlerdir. Projemizde çalışılan konuların matematiksel yaklaşımlarını kavrayabilmeleri sağlamak için var olan bilgi düzeylerine daha uygun bir problem olarak Grassmann manifoldları $Gr(N, 2)$ üzerinde kuantum Hall etkisinin formülasyonu problemini lisans öğrencisi olan Alireza Behtash'ın da katılımıyla ele alınmış ve çözülmüştür. Bu konunun fuzzy uzaylar üzerinde kuantum fiziği ile olan ilginç yakınlığı ve detaylı bulgularımız 4. kısımda açıklanmıştır.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Burada öncelikle komutatif-olmayan uzayların ana hatlarını kısaca ortaya koymak uygun olur. Matematiksel bir perspektif ile bakıldığında, Gel'fand ve Naimark tarafından ispatlanmış bir teorem (Fell ve Doran, 1988; Balachandran, Bimonte, vd. 1995), bir M manifoldu üzerindeki fonksiyon cebiri $\mathcal{A}$'nın indirgenemez bir temsili verildiğinde, M manifoldunun, sadece bu bilgi kullanılarak tekrar inşa edilebileceğini belirtmektedir. Bu sonuçtan esinlenerek, komutatif-olmayan bir manifoldu, komutatif bir M manifoldunun fonksiyon cebiri A'yı, komutatif-olmayan fakat komutatif limitte $\mathcal{A}$'ya yakınsayan bir fonksiyon cebiri $\mathcal{A}^*$ ile değiştirerek oluşturabileceğimizi düşünebiliriz ve bu bağlamda, komutatif-olmayan manifoldun, komutatif manifoldun kuantizasyonunu sağladığını söyleyebiliriz (Connes, 1994; Madore, 1995; Landi, 1997; Gracia-Bondia, Varilly, ve Figueroa, 2000).

Bir fizikçinin bakış açısı ile, buradaki ana fikir, uygun bir kuantizasyonla, uzayı komutatif-olmayan hale getirmek olarak ifade edilebilir. Bu düşüncenin yaptığı çağrışım ve bazı durumlardaki işleyeşi ise, tamamen aşina olduğumuz faz uzayının koordinatlarının uygun bir Hilbert uzayına etkiyen operatörlerin bir cebiri ile değiştirilerek kuantize edilmesine, yakından ilintilidir.

Yaygın olarak bilinen ve etraflıca çalışılmış bir örnek, $2d$-boyutlu Groenewald-Moyal (GM) uzayıdır (Groenewold, 1946; Moyal, 1949). Bu uzay-zaman $[X_\mu\,, X_\nu] = i\theta_{\mu\nu}$ komütasyon braketini sağlayan X_μ operatörlerinin cebiri olarak tanımlanabilir. $\theta_{\mu\nu}$ ise bileşenleri sabit olan anti-simetrik bir tensör olarak tanımlıdır; bileşenleri ise komutatif-olmama parametreleri olarak tanımlanırlar. Bu uzay aynı zamanda, elemanları komutatif-olmayan bir çarpımla, daha doğrusu yıldız çarpımı ($\star$-çarpımı) ile, çarpılan bir fonksiyon cebiri olarak da tasvir edilebilir. Bu anlatımda GM uzayı, $[X_\mu\,, X_\nu]_\star = X_\mu \star X_\nu - X_\nu \star X_\mu = i\theta_{\mu\nu}$ komutasyon braketine sahip, X_μ koordinatları tarafından üretilen, $\star$-çarpımının da çift-diferansiyel bir operatör olduğu bir yapı olarak tanımlanır. $\theta_{\mu\nu}$'nün bileşenleri sıfıra yakınsarken komutatif-olmayan cebir $\mathcal{A}_\theta(R^{2d})$, $\mathcal{A}_0(R^{2d})$ cebirine yakınsar ve böylece R^{2d} uzayı elde edilir. Bu tanımlar $2d$-boyutlu bir Minkowski uzay-zamanı M^{2d}'ye de uyarlanabilir (Balachandran, Kurkcuoglu, ve Vaidya, 2007).

GM uzaylarında skaler, spinör ve ayar alanlarının klasik ve kuantum alan teorileri tanımlanmış ve incelenmiştir (Douglas ve Nekrasov, 2001; Szabo, 2003). Skaler ve ayar alanlarının hem BPS hem de BPS-olmayan soliton, fluxon ve instanton çözümleri bulunmuş ve bu çözümlerin klasik ve kuantum özellikleri çeşitli metotlarla etraflıca çalışılmıştır. Genel olarak solitonların vektör demetleri dilindeki anlatımına eşdeğer bir şekilde betimlenmesini sağlayan projektif modüllerin kullanımı, komutatif-olmayan solitonların betimlemesinde merkezi bir önem kazandığı değerlendirilmiştir. Bu konuların geniş kapsamlı tekrarları için referanslar (Douglas ve Nekrasov, 2001; Harvey, 2001) görülebilir. Kuantum ölçeğinde ise, komutatif-olmayan teoriler, ilk öngörülerin aksine, kuantum alan teorilerindeki mor ötesi sonsuzları ayarlamak yerine, morötesi-kızılötesi (UV-IR) modların karışımına yol açan yeni kuantum özellikleri de sergilemektedirler (Minwalla, Van Raamsdonk, ve Seiberg, 2000).

Özel bir sınıf komutatif-olmayan uzaylar, komutatif-olmayan fonksiyon cebiri $\mathcal{A}^*$'ın, hem sınırlı-boyutlu indirgenemez temsillerinin olması, hem de bunların hep artan boyutlu ve sonsuz boyut limitinde de komutatif fonksiyon cebiri $\mathcal{A}$'ya yakınsayan bir dizininin olması halinde elde edilebilir. Bu tip uzaylar fuzzy uzaylar olarak tanımlanırlar (Madore, 1995; Balachandran, Kurkcuoglu, ve Vaidya, 2007). Bu uzayların yaygın olarak bilinen örneği de fuzzy küre S_F^2'dir. Diğer fuzzy uzaylar içerisinde önemli örnekler olarak, fuzzy kompleks projektif ve fuzzy kompleks Grassmann uzayları CP_F^N, $Gr(N,2)_F$ ve süpersimetrik fuzzy süperküreler $S_F^{2,2}$ sayılabilir (Balachandran, Kurkcuoglu, ve Vaidya, 2007).

Fuzzy küreyi $(2\ell+1) \times (2\ell+1)$ boyutlu, $SU(2)$'nin spin ℓ ile sınıflandırılmış indirgenemez temsillerini taşıyan T_{jm}^{ℓ} $(j = 0, 1, 2, \cdots 2\ell)$ matrisleri olarak tasarlamak mümkündür. Literatürde küresel polarizasyon tensörleri olarak adlandırılan (Balachandran, Kurkcuoglu, ve Vaidya, 2007) T_{jm}^{ℓ}'lerin, ℓ sonsuza ilerlediğinde, uygun bir gönderim (mapping) aracılığı ile iki-küre S^2 üzerinde fonksiyon cebiri küresel harmoniklere yakınsadığı gösterilebilir. Böylece, T_{jm}^{ℓ}'yi, S^2'nin küresel simetrilerini koruyan sonlu-boyutlu bir matris ayrıklaştırması olarak görmek mümkündür. Fuzzy uzaylar üzerinde klasik ve kuantum alan teorilerin yapıları derinlemesine incelenmiş, skaler, spinör ve ayar alanlarının teorileri sonlu-boyutu matris modelleri olarak kurgulanmışlardır. Buna ek olarak fuzzy uzaylarda, topolojik olarak aşikar-olmayan alan teorileri de (monopoller ve lineer-olmayan sigma modelleri vb.), komutatif olmayan geometrilerde bu sektörlerin uygun bir biçimde ele alınmasını sağlayan projektif modüller dilinde formüle edilerek, sonlu-boyutu matris modelleri olarak yapılandırılmışlardır. Konunun temel içerikleri ve önemli sonuçları, A.P. Balachandran ve S. Vaidya ile birlikte yazdığım kitapta irdelenmiştir (Balachandran, Kurkcuoglu, ve Vaidya, 2007).

Koset uzayları üzerinde simetrik boyutsal indirgeme yöntemleri ve uygulamaları hakkındaki geniş literatürü kısaca özetlemek gereklidir. Bu yöntem sistematik bir biçimde ilk defa Manton ve Forgacs tarafından geliştirilmiştir (Forgacs ve Manton, 1980). Buradaki temel fikir gereç ve yöntemler kısımında irdelenmiştir. Bu yöntemin, koset ekstra boyutlara sahip Yang-Mills-Dirac teorisinden başlayarak ve boyutsal indirgeme yaparak, Minkowski uzayında standart modeli elde etmek amacıyla geçmişte yaygın şekilde kullanılmış olduğunu belirtebiliriz; bu konu hakkında etraflı bir inceleme için (Kapetanakis ve Zoupanos, 1992) referansına başvurulabilir. Koset uzaylarında boyutsal indirgemenin prototip örneği, genel teori Manton ve Forgacs tarafından geliştirilmeden önce, Witten tarafından çalışılmış olan $\mathbb{R}^4$ üzerindeki Yang-Mills teorisinin $SU(2)$-simetrik olması talep edilerek, S^2 üzerinde indirgenip, H^2 hiperbolik uzayı üzerinde bir abelian-Higgs modeline indirgenmesidir (Witten, 1977); böylece topolojik yükü 1'den büyük olan instanton çözümlerinin inşa edilmesi de sağlanmıştır. Bu örnekte, koset uzayı S^2dir ve H^2 hiperbolik uzayı, Yang-Mills teorisinin $\mathbb{R}^4$'de konformal değişmezliği sebebiyle doğal olarak ortaya çıkmaktadır.

Bu yöntem, $\mathbb{R}^{2d}_\theta \times S^2$ üzerindeki Yang-Mills teorilerine yakın geçmişte uygulanmıştır. Bu çerçevede, $U(2k)$ ayar simetrisine sahip Yang-Mills teorisinden ortaya çıkan Donaldson, Uhlenbeck, Yau (DUY) denklemlerinin S^2 üzerinde boyutsal indirgemeden sonra $\mathbb{R}^{2d}_\theta$ üzerinde, çözümleri komutatif-olmayan BPS vorteksleri olarak verilen denklemlere düştüğü bulunmuştur (Lechtenfeld, Popov, ve Szabo, 2003). 2010 yılında yayınladığımız bir makalede (Kurkcuoglu, 2010) $\mathbb{R}^{2d}_\theta \times S^2$ ile $\mathbb{R}^{2d}_\theta \times S^2_F$ uzaylarında boyutsal indirgemenin sonuçları arasındaki ilişkiler ortaya konulmuştur.

Simetrik boyutsal indirgeme için, vektör demetleri ve sadaklar (quiver) dilini kullanan bir başka yaklaşım da literatürde bulunmaktadır (Lechtenfeld, Popov, ve Szabo, 2006). Yakın zamanlarda bu yaklaşım $\mathbb{R}^{2d}_\theta \times S^2$, $\mathbb{R}^{2d}_\theta \times S^2 \times S^2$ uzaylarında instantonlara denk düşen, $\mathbb{R}^{2d}_\theta$ üzerinde abelian-olmayan vortekslerin sadak ayar teorileri olarak formülasyonu (Lechtenfeld, Popov, ve Szabo, 2006; Lechtenfeld, Popov, ve Szabo, 2007; Lechtenfeld, Popov, ve Szabo, 2008); Riemann yüzeylerinde uygun parametre seçimleri ile integrable hale gelen vortekslerin kurulması (Popov, 2009) ve $\mathbb{R}^{1,1} \times S^2$ uzayında abelian-olmayan monopollerin elde edilmesi (Popov, 2008) de dahil olmak üzere geniş bir yelpazedeki problemlere uygulanmıştır. Bir başka makalede (Dolan ve Szabo, 2009) $M \times S^2$ uzayında Yang-Mills-Dirac teorisinin indirgenmesi ve monopol arka planının indirgenmiş teorideki parçacık spekturumunun üzerindeki etkilerini özellikle göz önüne alınarak çalışılmıştır. Kuantum küreleri üzerinde boyutsal indirgeme çalışılarak sadak ayar teorilerinin ve abelian-olmayan vortekslerin q-deformasyonları da formüle edilmiştir (Landi ve Szabo, 2011).

Fuzzy uzayların ekstra boyutlar olarak düşünülmesi son bir kaç yıl içerisinde aktif olarak çalışılmaya başlanmıştır. Burada öncelikle, Kaluza-Klein programının özünde yüksek boyutlu bir uzayda bir alan teorisi kurarak, dört temel kuvveti birleştirmeyi amaçlayan bir program olduğunu anımsamak yararlı olacaktır. Ekstra boyutları, 4-boyutlu teoriye varmak için kullanabileceğimiz veriler olarak düşünmek de uygun olur. Yakın zamanda yapılan bir araştırmaya göre (Aschieri vd. 2006), Minkowski uzayı $\mathbb{M}^4$ üzerinde $SU(N)$ ayar alanları ve buna bağlanmış uygun formdaki skaler alanların yer aldığı bir teoriden fuzzy kürenin spontane simetri kırılması yoluyla üretilebileceği gösterilmiştir. Biraz daha net belirtmek gerekirse, teorideki potansiyelin $SU(N)$ simetrisinin spontane olarak kırılmasıyla, skaler alanların vakum değerleri fuzzy küreyi oluştururken, bu vakum etrafındaki salınımların ise fuzzy küre üzerindeki ayar alanları olarak anlaşıldığı ve böylece $\mathbb{M}^4 \times S^2$ üzerinde $SU(N)$'den daha küçük ayar simetrilerine sahip ayar teorilerinin ortaya çıktığı, yukarıda söz edilen referansta gösterilmiş ve bu sonucun teorideki ayar alanlarının üzerinde Kaluza-Klein modları açılımı ile bağdaştığı da bulunmuştur (Aschieri vd. 2006; Steinacker, 2004) . Bu modele fermionların eklenmesi de incelenmiş (Steinacker ve Zoupanos, 2007) ve altı boyutta uygun bir fermion kümesinin $\mathbb{M}^4 \times S^2$ üzerinde Dirac fermionlarının efektif olarak betimlenmesine olanak tanıdığı bulunmuş ve bu betimleme Kaluza-Klein modları açılımı ile de doğrulanmıştır. Aynı çalışmada fermionlar üzerinde kiralite (chirality) kısıtlamalarının, her kiral fermion için ters işaretli kiralite ve kuantum sayıları taşıyan bir partnerin bulunduğu, “ayna fermionları” yapısına yol açtığı da ortaya konmuştur. Daha yakın zamanda yapılan bir araştırmada (Chatzistavrakidis, Steinacker, ve Zoupanos, 2010a), $\mathbb{M}^4 \times S_F^2 \times S_F^2$ üzerinde ayar teorisinin kurgulanması ve içeriği incelenmiştir. Bu makalede $\mathbb{M}^4$ üzerinde $N = 4$ süpersimetrik Yang-Mills teorisi ile aynı alan içeriğine sahip fakat $N = 4$ süpersimetrisini kıran bir potansiyel terim de içeren bir $SU(N)$ alan teorisi kullanılarak, yukarıda açıklanan teoriye analojik olarak, skaler alanların vakum değerleri $S_F^2 \times S_F^2$ ile eşleştirilebilmiş, bu vakum etrafındaki salınımların da $S_F^2 \times S_F^2$ üzerindeki ayar alanları (Behr, Meyer, ve Steinacker, 2005) olarak ortaya çıktığı gösterilmiş ve bu uzayda da fermionların formülasyonu ele alınmıştır.

Simetrik boyutsal indirgeme tekniklerinin, fuzzy ekstra boyutlar taşıyan ve yukarıda belirtilen tipte ve benzeri modellere uygulanması bu projeden önce yaptığımız çalışmalar ile başlatılmış (Harland ve Kurkcuoglu, 2009; Kurkcuoglu, 2010) ve projemiz çerçevesinde bulgular kısmında açıklanan sonuçlarla önemli ölçüde ilerletilmesi ve literatüre yerinde bir katkı yapılması sağlanmıştır.

3. GEREÇ VE YÖNTEM

Koset manifoldlar üzerinde simetrik boyutsal indirgeme yöntemindeki temel fikir $M \times G/H$ üzerinde, M'nin herhangi bir manifoldu temsil ettiği, bir ayar teorisinden başlanarak açıklanabilir. G grubunun, G/H koset uzayına doğal bir etkisi, bir başka değişle G'nin G/H coset uzayının simetri grubu olduğu göz önüne alınarak ve teorideki vektör alanlarının ve teoriye bağlanmış diğer skaler, spinör vb. alanların G simetri grubunun etkisi altında bir ayar dönüşümüne kadar değişir olması talep edilerek, G/H koseti üzerinde boyutsal indirgeme sağlanıp, M manifoldu üzerinde bir teori elde edilir (Forgacs ve Manton, 1980; Kapetanakis ve Zoupanos, 1992). Simetrik boyutsal indirgeme tekniklerin geniş bir yelpazede bulunan problemlere uygulanmış olduğuna literatür özeti kısmında etraflıca değinilmişti.

2009 yılında D. Harland ile beraber yaptığımız çalışmamızda (Harland ve Kurkcuoglu, 2009) $M \times S_F^2$ üzerinde bir $U(2)$ Yang-Mills teorisinden başlayarak ve esas itibarıyla $SU(2)$ temsil teorisini kullanarak, $M \times S_F^2$ üzerinde $SU(2)$-simetrik ayar alanlarının açık bir parametrizasyonu elde edilmiş ve bu bulgu Yang-Mills teorisi içinde kullanılarak, teorinin S_F^2 üzerinde boyutsal indirgenmesi eksiksiz olarak gerçekleştirilmiştir. Burada yapılan simetrik boyutsal indirgeme, S_F^2 üzerinde ya da daha geniş olarak fuzzy uzaylar üzerinde yapılmış koset uzayı boyutsal indirgemesinin, bildiğimiz kadarıyla ilk örneklerinden biri olmuştur. Bu çalışmamız fuzzy uzaylar üzerinde boyutsal indirgemenin bir prototipi olarak da görülebilir. Ayrıca indirgenmiş teorinin, M manifoldu üzerinde abelian-Higgs tipi bir model oluşturduğu da bu çalışmamızda gösterilmiştir.

Bu fikirleri takip eden bir diğer çalışmamızda M uzayı da komutatif-olmayan bir manifold olarak düşünülerek S_F^2 üzerinde simetrik boyutsal indirgeme ele alınmaktadır (Kurkcuoglu, 2010). Bu durumda, $SU(2)$-simetrik ayar alanlarının açık bir parametrizasyonun içinde yer alan M'nin koordinatlarına bağlı terimlerin, komutatif-olmayan bir yapıda olduğunun göz önüne alınması gerekliliği ortaya konmuştur. Çalışmalarım sonucunda, indirgenmiş teorinin, komutatif-olmayan bir $U(1)$ ayar teorisi yapısında olduğu ortaya çıkarılmıştır.

Bu proje çerçevesinde yaptığımız çalışmalarda ortaya çıkan fuzzy ekstra boyutlu modellerde, yukarıda ana hatları açıklanan simetrik boyutsal indirgeme metotları kullanılmıştır. Buradaki temel yaklaşım, seçilen modeldeki skaler spinör ve ayar alanlarının modelde bulunan simetri grupların temsil teorilerinin ve ilgili oldukları Lie cebirlerinin özelliklerinin kullanılarak açık parametrizasyonunun elde edilmesidir. Elde edilen bu parametrizasyonlar, söz konusu modellerde boyutsal indirgeme hesaplarının yapılmasını ve düşük enerjili efektif eylemlerin bulunmasını sağlamaktadır.

Bulgular kısmında geniş bir şekilde açıkandığı üzere, incelediğimiz modellerde S_F^2 vakum yapısının modele eklenen, global $SU(2)$ simetrisi altında spin $\frac{m}{2}$ indirgenemez temsilini oluşturan ve her bir komponenti lokal $SU(N)$ simetrisi altında bir temel skaler olarak dönüşen $(m+1)$-komponentli spinörlerin vasıtasıyla değiştirilebileceği ve değişik mertebelerden çok sayıda fuzzy kürenin doğrudan toplamı olarak oluşabileceğine de ilk defa bizim geliştirdiğimiz bu yeni yaklaşımla varılmıştır. Bu vakum yapılarının uygun projeksiyonların alınması, S_F^2 üzerinde monopol sarım sayısı $\pm m$ ($m \in \mathbb{Z}_+$) olan sektörlerin elde edilmesi ve alanların simetrik parametrizasyonlarını yazılabilmesi için elverişli bir yöntem olarak ortaya konulmuştur.

Hesaplanan düşük enerjili efektif eylemler içeriklerine göre değişik metotlarla incelenebilirler. Örneğin, $M \times S_F^2$ üzerindeki $U(2)$ ayar teorisinde $M = \mathbb{R}^2$ uzayı üzerine odaklanılarak, bu uzay üzerinde oluşan farklı vorteks çözümleri hem analitik hem de nümerik metotlarla incelemiş ve bu vortekslerin BPS olmayıp, teorinin parametrelerine bağlı olarak çekici, ya da itici oldukları da gösterilmiştik (Harland ve Kurkcuoglu, 2009). Bunu takip eden bir çalışmada ise M manifoldu Groenewald-Moyal (GM) düzlemi olarak alındığında indirgenmiş teorinin komutatif-olmayan vorteks ve fluxon çözümleri taşıdığını gözlemlemiş ve bu çözümleri bulmuştuk (Kurkcuoglu, 2010). Bu proje çerçevesinde yaptığımız çalışmalarda da örneğin $S_F^2 \times S_F^2$ üzerinde indirgenme sonrasında oluşan modelin $U(1) \times U(1) \times U(1)$ ayar simetrisinde ve topolojik yapısın bir üç torus (T^3) yapısında olduğu ve vorteks çözümlerinin üç farklı tam sayı ile karakterize edildiğini klasik alan teorisi yöntemleri ve topolojik gereçler kullanarak ortaya çıkardık (Kurkcuoglu, 2012b). Bu bulgularımız bir sonraki kısımda irdelenmiştir.

4. BULGULAR

Proje kapsamında ilk olarak M uzayında $SU(N)$ ayar teorisine bağlanan altı adet skaler alanın bulunduğu $SO(3) \times SO(3)$ global simetrisine sahip ve spontane simetri kırılması ile $S_F^2 \times S_F^2$ geometrisinde ekstra boyutların oluştuğu literatüre 2009 yılında girmiş model (Chatzistavrakidis, Steinacker, ve Zoupanos, 2010b) ele alınmıştır. Bu model $N = 4$ süpersimetrik Yang-Mills teorisiyle aynı alan içeriğine sahiptir, fakat skaler alanların oluşturduğu potansiyel terimi hem süpersimetriyi kırmakta hemde bu teorinin R-simetri $SU(4) \approx SO(6)$'yı $SO(3) \times SO(3)$ simetrisine kırmaktadır. Modelin $SU(N)$ simetrisinin spontane olarak kırılmasından sonra genel olarak bir $U(n)$ ayar teorisine indirgendiği de bilinmektedir. Projedeki plan çerçevesinde $S_F^2 \times S_F^2$ uzayının simetrisi olan $SU(2) \times SU(2)$'ye bir ayar dönüşümüne kadar sahip olan ayar alanlarının açık bir parametrizasyonunun elde edilmesi öncelikle ele alınmıştır. Projemizin ilk altı aylık dönemindeki araştırmamız ışığında $U(4)$ ayar teorisi üzerine odaklanılmış ve $SU(2) \times SU(2)$ altında simetrik olarak dönüşen ayar alanlarının açık parametrizasyonu öngörülerimiz ışığında bulunmuştur. Daha da açık olarak ifade etmek gerekirse ayar alanları A_μ'lerin çözüm uzaylarının dört boyutlu ve diğer ayar alanları A_a^L ve A_a^R'ların çözüm uzaylarının ise sekizer boyutlu olduğu $SU(2) \times SU(2)$ temsil teorisi kullanılarak tespit edilmiştir. Ele alınan teorinin üç tane kare-eş(idempotent) ve bir birim (identity) elemandan oluşan $U(4)$ ayar simetrisine kadar $SU(2) \times SU(2)$ simetrik değişmezleri bulunmuş ve bu değişmezler kullanılarak ayar alanlarının açık parametrizasyonu yazılmıştır. Varılan sonuca göre A_μ alanlarının M koordinatlarına bağlı dört tane $U(1)$ abelian ayar alanı içerdiği, A_a^L ve A_a^R'ların ise M koordinatlarına bağlı sekizer tane reel skaler alan içerdiği bulunmuştur. İki sekizli grupta da dört tane reel alanın ikili olarak uygun şekilde birleşerek ikişer tane kompleks skaler alan oluşturduğu da ortaya çıkarılmıştır.Bu aşamadan sonra $S_F^2 \times S_F^2$ üzerinde boyutsal indirgeme hesapları ele alınmış ve $M = R^2$ uzayında düşük enerjili efektif eylem ikinci altı aylık dönemin başlarında elde edilmiştir.

Bu dönemde, düşük enerjili efektif eylemin $M = R^2$ uzayındaki vorteks çözümleri yönünden detaylı hesaplarla incelenmiştir. Varılan sonuçlara göre indirgenmiş teorinin sınırlayıcı terimlerinin parametreleri olan a^L ve a^R'nin değerlerinin sıfır yada efektif olarak sonsuz olarak alınmasıyla oluşan farklı sektörlerdeki $U(1) \times U(1) \times U(1)$ ayar simetrisine sahip vorteks çözümleri bulunmuştur. Bu vorteks çözümlerinin yapısının anlaşılması için teorinin vakum yapısının üç torus T^3 olduğu sonucuna varılmıştır. Bu sonuçtan yararlanılarak, teorinin topolojik yapısı gereği vorteks çözümlerinin olduğu, $M = R^2$ deki radyal koordinat sonsuza gittiğinde konfigürasyon uzayındaki oluşan $S^1(\infty)$ çemberinin kompleks skaler alanlarca vakum manifoldu T^3'e eşlendiği ve T^3'ün birinci homotopi grubunun $\pi_1(T^3) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ olması dolayısıyla vortekslerin her biri tam sayı olan üç değişik sarım sayısı ile betimlendiği ortaya çıkarılmıştır. Aynı araştırma döneminde bu çözümlerin asimtotik yapısı hareket denklemlerinin doğrusallaştırıldığı yaklaştırımda da incelendik. Bulunan sonuçlara göre, a^L ve a^R'nin değerlerinin sıfır olduğu ve teorinin kuplaj parametrelerinin $g\tilde{g} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sağladığı durumda vortekslerin birbirlerini çeken bir yapıda olduğu ortaya çıkardık. a^L ve a^R'nin değerlerinin efektif olarak sonsuz olduğu durumda ise teorinin sınırlayıcı terimlerinin bazı cebirsel denklemleri sağlaması gerektiği ve bu denklemlerin teorideki reel skaler alanları, kompleks skaler alanların modülüsü cinsinden, ve fuzzy kürelerin düzeyini belirleyen parametreler ℓ_L ve ℓ_R'nin terslerinin katlarında bir açılımla çözülebildiği görülmüştür. Bu açılım kullanılarak reel skaler alanlar ℓ_L ve ℓ_R'nin sayılarının mümkün olan en düşük katlarında kompleks skaler alanların modülüsü cinsinden ifade edilmesi de sağladık. Elde edilen verilerden, ℓ_L ve ℓ_R'nin sonlu değerleri ve kuplaj parametrelerinin $g\tilde{g} = 1$ olduğu durumda vortekslerin birbirlerini iten yapıda olduğu tespit ettik. ℓ_L ve ℓ_R'nin sonsuza gittiği durumda ise kritik kuplajdaki teorinin ($g\tilde{g} = 1$) BPS tipi vorteksler içerdiği ve bu vortekslerin sağladığı BPS denklemleri de yazmayı başardık.

Bu bilimsel bulguların sunulduğu ve yazımı da araştırmalara paralel bir şekilde sürdürülen makale, araştırmalarımızın sonuçlarının alınmasının ardından tamamlanmış ve Physical Review D dergisince Mayıs 2012 tarihinde yayınlanmıştır (Kurkcuoglu, 2012b).

Bu sonuçların ardından, proje çalışma konuları kapsamında belirtiğimiz, sarım sayısı m ($m \in \mathbb{Z}_+$) olan sektörlerde ayar alanlarının açık parametrizasyonun bulunması konusu yenilikçi bir yaklaşımla ele alınmış ve çözülmüştür. Bu konudaki bulgularımızı şimdi etraflıca açıklayacağız. Proje çerçevesinde ilgilendiğimiz tip, M manifoldunda $SU(N)$ ayar ve $SU(2)$ global simetrilerine sahip modelde bulunan, $SU(2)$ altında spin 1 indirgenemez temsili oluşturan ve her biri $SU(N)$ altında eşlek (adjoint) skaler alan olarak dönüşen üç skaler alana ek olarak, $SU(2)$ altında spin $\frac{1}{2}$ indirgenemez temsilini oluşturan ve her biri $SU(N)$ altında bir temel (fundamental) skaler olarak dönüşen iki tane skaler alan, bir başka deyişle bir "isospin" tipi alanın, teoriye pek çok yeni fiziksel içerik katacak şekilde dahil edilebileceği düşüncesi olumlu sonuçlar alınarak geliştirilmiştir. Bahsi geçen modelde "isospin" tipi alanın modele uygun bir biçimde bağlanma şekli tespit edilmiş ve bu alanın eklenmesinden önce teorinin belirli koşullar altında bir fuzzy küre S_F^2 olan vakum yapısının, bu alanın eklenmesiyle beraber değişik mertebelerden dört farklı fuzzy kürenin doğrudan toplamı olacak şekilde ($S_F^{2\,Int} := S_F^2(\ell) \oplus S_F^2(\ell) \oplus S_F^2\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \oplus S_F^2\left(\ell - \frac{1}{2}\right)$) içsel bir simetri kazanarak genişlediği sonucuna varılmıştır. Bu sonucun ardından $S_F^{2\,Int}$ vakum yapısın etrafındaki salınımlar incelenmiş ve salınımların $S_F^{2\,Int}$ üzerinde ayar alanlarını oluşturduğu tespit edilmiş ve spontane simetri kırınımından sonra $M \times S_F^{2\,Int}$ uzayında $SU(N)$'den daha küçük bir ayar simetri grubunda bir teorinin ortaya çıktığı da gösterilmiştir. Bir başka değişle spontane simetri kırılması sonucu $S_F^{2\,Int}$ fuzzy ekstra boyutları ve akabinde $M \times S_F^{2\,Int}$ üzerinde bulunan bir ayar teorisi elde edilmiştir.

Yukarıda belirtilen gelişmelerin ardından, $M \times S_F^{2\,Int}$ üzerinde bir $U(2)$ ayar teorisi üzerine odaklanılarak, $SU(2)$ simetrik sınırlandırma koşulları altında skaler, spinör ve vektör olarak dönüşen alanların bağımsız bileşenlerinin tamamı yaptığımız araştırmalar sonucunda bulunmuş ve bu sonuçların grup teorik yaklaşımla elde ettiğimiz birbirinden bağımsız skaler, spinör ve vektör terimlerin sayılarıyla tam uyum gösterdiği tespit edilmiştir. Daha açık olarak ifade edersek, birbirinden bağımsız on tane skaler ve uygun bir projeksiyon ile seçtiğimiz bir alt uzayda kare-eş (idempotent) olan terim, yirmi dört tane birbirinden bağımsız spinör ve yirmi altı adet de birbirinden bağımsız vektör olarak dönüşen terim bulunmuş ve uygun parametrizasyonlar ve operatörler cinsinden ifade edilmiştir. Varılan bu sonuçlar ile $M \times S_F^{2\,Int}$ üzerindeki $U(2)$ ayar teorisinin $SU(2)$ simetrik alanlarının parametrizasyonlarıda yazılmıştır.

Alınan bu sonuçların irdelenmesi ve değerlendirilmesi ile $S_F^{2\,Int}$ yapısının oluşturduğumuz uygun projeksiyon operatörleri kullanılarak $S_F^{2\,\pm 1} := S_F^2(\ell) \oplus S_F^2\left(\ell \pm \frac{1}{2}\right)$ yapısında iki fuzzy küreden oluşan bir vakum yapısına izdüşümü yapılmıştır. Bu izdüşüm sonrası vakum yapısının fuzzy küre üzerinde sarım sayısı ± 1 olan monopol yapıları $S_F^{2\pm}$ ile örtüştüğü literatürdeki formülasyonlardan faydalanarak (Steinacker, 2004) ortaya konulmuştur. Bu sonuç pek çok açıdan son derece değerlidir.

Birinci olarak, bu bulgu kullanılarak $M \times S_F^{2\pm1}$ üzerindeki $U(2)$ ayar teorisinin sarım sayısı ±1 olan monopol sektörlerinde simetrik alanlar tespit edilmiştir. Sonuçlarımıza göre, bu durumda birbirinden bağımsız dört tane skaler, altı tane spinör ve sekiz tane vektör simetrik alan olduğu grup teorik yöntemlerle bulunmuş ve uygun projeksiyon operatörleri yazılarak ve kovariant türevler kullanılarak, bu alanların simetrik parametrizasyonları açık bir şekilde yazılmıştır. Bununla birlikte, simetrik spinörlerden oluşturulan çift-doğrusalların (bilinear) uygun projeksiyonlar altında simetrik vektörleri verdiği de gösterilmiştir. Bu sonuç teorinin tutarlılığının bir sağlaması olarak da değerlidir. Alanların elde edilen simetrik parametrizasyonları kullanılarak fuzzy küreler üzerinde boyutsal indirgeme yöntemiyle düşük enerjili efektif eylemin bulunması için başlatılan hesaplar son aşamalara doğru ilerlemektedir. Bu hesapların geniş hacimli ve uzun olması sebebiyle Mathematica programı ile yapılmasına devam edilmektedir. Yapılan hesapların henüz tamamlanamamış olmasının bir sebebi de araştırmamızın ilk fazlarında $S_F^{2\pm1}$ fuzzy uzayları yerine, $S_F^{2\,Int}$ vakumundan başka bir projeksiyon ile elde ettiğimiz $S_F^2\left(\ell+\frac{1}{2}\right) \oplus S_F^2\left(\ell-\frac{1}{2}\right)$ vakum yapısının kullanılması ve bu yapının $SU(2)$ simetrik alanları için $S_F^{2\pm1}$'kine göre çok daha geniş bir parametrizasyon uzayına sahip olmasından dolayı bilgisayar ortamında yapılan ilk hesapların yaşattığı zaman kaybıdır.

Sarım sayısı ±1 monopol sektörlerinin bulunmasının, modelde yapılacak hangi değişikliklerle sarım sayısı $\pm m$, ($m \in \mathbb{Z}_+$) olan sektörlere genelleştirilebileceğinin son dönemde yaptığımız çalışmalar ile ortaya çıkarmamızı ve oluşturmamızı sağlayan motivasyonu sağlamış olması belirtilmesi gereken bir diğer önemli noktadır. $SU(N)$ ayar ve $SU(2)$ global simetrilerine sahip olan modelde iki komponentli spinörler yerine $SU(2)$ altında spin $\frac{m}{2}$ indirgenemez temsilini oluşturan ve her bir komponenti $SU(N)$ altında bir temel skaler olarak dönüşen $(m+1)$-komponentli spinörlerin konulması ve teorinin vakum yapısın bu koşullar altında incelenmesiyle, uygun projeksiyonların yapılmasının ardından fuzzy küre üzerinde sarım sayısı $\pm m$ olan monopol sektörleri $S_F^{2\pm m} := S_F^2(\ell) \oplus S_F^2\left(\ell \pm \frac{m}{2}\right)$ olan vakum yapıları yaptığımız çalışmalarla elde edilmiştir. Ayrıca, yukarıda bahsi geçen $S_F^2\left(\ell+\frac{1}{2}\right) \oplus S_F^2\left(\ell-\frac{1}{2}\right)$ vakum yapısının da, $S_F^{2\pm2}$'den bir bakıma farklı fakat monopol sarım sayısı ±2 olan bir monopol sektörü olarak düşünülebileceği de değerlendirilmektedir. Bu bilimsel bulguları konu alan makalenin yazılmasıan devam edilmektedir ve yukarıda belirtilen hesapların bitirilmesinin hemen akabinde tamamlanarak yayına gönderilecektir.

Orta Doğu Teknik Üniversitesinde doktora öğrencim olan Gönül Ünal, 1.10.2012-30.9.2013 tarihleri arasında yarı zamanlı bursiyer olarak, yüksek lisans öğrencim Fatih Ballı'da 21.9.2011-

18.4.2012 tarihleri arasında tam zamanlı ve 20.4.2012-30.9.2013 tarihleri arasında da yarı zamanlı bursiyer olarak projede görev almışlardır. Her iki öğrencide proje konularına temel oluşturan klasik ve kuantum alan teorilerinde bilgi ve becerilerini geliştirmeye devam etmekte ve proje konularıyla yakından ilgili olan literatürdeki yayınları anlamak için verimli bir şekilde çalışmaya devam etmektedirler. Bu sebeplerden ötürü ve projemizde çalışılan konuların matematiksel tekniklerini kavrayabilmeleri açısından var olan bilgi düzeylerine daha uygun bir problem üzerinde çalışmalar yapmaları sağlanmıştır.

Fatih Ballı, Gönül Ünal ve lisans öğrencisi olan Alireza Behtash ile beraber kuantum Hall etkisinin kompleks projektif uzaylar gibi kompakt uzaylarda formülasyonunu (Zhang ve Hu, 2001; Karabali ve Nair, 2002) detaylı bir şekilde anlamak ve bu formülasyonun diğer kompleks manifoldlara genelleştirilmesini sağlamak amacıyla çalışmalar başlatılmış ve bu çalışmalar son aşamalara kadar getirilmiştir. Bu konunun fuzzy uzaylar ve fuzzy uzaylar üzerinde kuantum fiziğinin çalışılmasından çok da uzak olmadığının, hatta çarpıcı bir yakınlığının olduğunun da altını çizmek isteriz. Literatürde bulunan çalışmalara göre $Gr(N,1)$'e denk düşen kompleks projektif manifoldlar (CPN) üzerinde kuantum Hall etkisinin formülasyonları yapılmış ve en alt Landau seviyelerinin aslında fuzzy CP^N_F uzayları olarak anlaşılabileceği de ortaya konulmuştur (Karabali ve Nair, 2006).

Yaptığımız araştırmada kompleks bir Grassmann manifoldu olan $Gr(4,2)$'de ve bunu takiben tüm $Gr(N,2)$'lerde kuantum Hall probleminin formülasyonunu geliştirilmiştir. Araştırmamızın ilk aşamada Landau problemi bu manifoldlar üzerinde grup teori tekniklerini kullanılarak oluşturulmuş ve çözülmüştür. Böylelikle, $Gr(4,2)$ üzerinde abelian $U(1)$ ve/veya non-abelian $SU(2)$ monopolleri arka-plan(lar)ı etkisi altında bulunan elektronlar için enerji spektrumunu ve $SU(N)$ grubunun Wigner-$\mathcal{D}$ fonksiyonları cinsinden enerji dalga fonksiyonları elde edilmiştir. Bu sonuçlardan, farklı monopol arka-planlarına göre, en alt Landau seviyelerini tespit edilip, bu seviyelerdeki eş enerjili kuantum durumlarının sayılarının $SU(N)$ grubunun ilgili indirgenemez temsillerinin boyutları cinsiden ifade edilmesi sağlanmıştır. Problemin $Gr(4,2)$ manifoldu üzerinde formülasyonuna odaklanarak, hem $U(1)$ monopol alanının hem de tek ve çok parçacıklı dalga fonksiyonlarının, Plücker koordinatları ve oluşturduğumuz uygun projektörler cinsinden ifade edilmesini de yaptığımız çalışmalar sonucunda bulduk. Bu bulgular kullanılarak en alt Landau seviyelerinin fuzzy Grassmann manifoldları olan $Gr(N,2)_F$ uzayları olarak anlaşılabileceği sonucuna varılması için çalışmalarımız yapılmaktadır. Sonuçlarımızı içeren makalemizde şu anda yayına hazırlanma aşamasındadır.

Sunulan gelişme raporlarında belirtildiği üzere, proje konumuzla doğrudan olmasa da dolaylı ilgisi bulunan, Lorentz simetrisinin spontane kırılması ile vorteksler için köşe operatörleri arasındaki ilişkilerin ortaya konulduğu bir çalışma yurt dışından araştırmacılarla yaptığım işbirliği ile çözülmüş ve yayınlanmıştır (Balachandran, Kurkcuoglu, ve Queiroz, 2013). Bu araştırma probleminde cebirsel kuantum alan teorisi kapsamında daha önceden bilinen (Frohlich, Morchio, ve Strocchi, 1979a; Frohlich, Morchio, ve Strocchi, 1979b), infra-parçacıklar ve kütlesiz ayar alanlarının varlığında Lorentz simetrisinin spontane olarak kırılması bulgusunu süper-seçim metotları kullanılarak yeniden formüle edilmesini sağladık. Bu bulgularla bağlantılı olarak ve elektrik yükünün kuantize olduğu varsayımıyla beraber, açısal momentumu olan Abelian vorteks modellerinde vorteks yaratan köşe (vertex) operatörleri olduğu tespit ettik. Ayrıca bu tip vortekslerin açısal momentumlarının, bu köşe operatörlerinin etkimesi altında vorteks sarım sayısına orantılı bir şekilde değiştiği de gösterdik. Elektrik yüklü parçacık ve vorteks kompozitlerin de açısal momentumlarının da köşe operatörlerinin etkimesi altında vortex sarım sayısına orantılı bir şekilde değiştiği ortaya çıkardık, ve modeldeki parametrelere bağlı olarak köşe operatörlerinin etkimesi altında kompozitlerin istatistiklerinin fermionlardan bozonlara yada tersi olarak değişebileceği de gösterdik. Farklı yönleriyle olsa da bu çalışmamızda da proje kapsamında karşılaştığımıza benzer tipte vorteks yapıların özelliklerinin incelemiş olması sebebiyle burada kısaca değinmenin faydalı olacağı değerlendirilmiştir.

5. TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Projemiz çerçevesinde ilk olarak $S_F^2 \times S_F^2$ geometrisinde ekstra boyutlar türeten ayar teorileri çalışılmıştır. Bu modelin $SU(2) \times SU(2)$ simetrisi altında skaler ve vektör alanlarının parametrizasyonları bulunmuş ve bu sonuç kullanılarak $S_F^2 \times S_F^2$ üzerinde boyutsal indirgeme yapılmıştır. Bu şekilde elde edilen düşük enerjili efektif eylemin yapısı incelenmiş ve barındırdığı $U(1) \times U(1) \times U(1)$ ayar simetrisinde ve üç değişik sarım sayısı ile betimlenen vorteks çözümleri bulunmuştur.

S_F^2 üzerinde sarım sayısı m ($m \in \mathbb{Z}_+$) olan sektörler ilk defa bizim geliştirdiğimiz ve alanların simetrik parametrizasyonun yapılabilmesi için son derece elverişli yeni bir yaklaşımla oluşturulmuştur. Bulgular kısmında derinlemesine açıklandığı üzere, vakum yapısının modele eklenen, global $SU(2)$ simetrisi altında spin $\frac{m}{2}$ indirgenemez temsilini oluşturan ve her komponenti lokal $SU(N)$ simetrisi altında temel skaler olarak dönüşen $(m+1)$-komponentli spinörlerin vasıtasıyla değişik mertebelerden fuzzy kürelerin doğrudan toplamı olarak oluşabileceğine, geliştirdiğimiz bu yeni yaklaşımla varılmıştır. Bu tip vakum yapılarının uygun projeksiyonlarının yapılması ile, monopol sarım sayısı $\pm m$ ($m \in \mathbb{Z}_+$) olan $S_F^{2\pm m}$ sektörleri elde edilmiştir.

$M \times S_F^{2\pm 1}$ üzerindeki $U(2)$ ayar teorisinin simetrik skaler, spinör ve vektör alanların grup teorisi teknikleri vasıtasıyla ve uygun projeksiyonlar ve kovariant türevler kullanılarak tespit edildiği de daha önce belirtilmişti. Halihazırda, bu modelin düşük enerjili efektif eyleminin yazılabilmesi için $S_F^{2\pm1}$ üzerinde boyutsal indirgeme hesaplarına Mathematica bilgisayar programı desteğinde devam edilmektedir. Bu hesapların geniş hacimli ve uzun olması sebebiyle henüz tamamlanmamıştır, fakat hesapların tamamlanması için son aşamalara doğru ilerlenmektedir.

Son dönemde yaptığımız çalışmalarda yukarıda tartışılan $S_F^{2\,Int}$ vakum yapısınının $OSp(2,2)$ süpergrubunun temsil teorisi ile örtüştüğü gözlemlenmiş, $S_F^2(\ell)\oplus S_F^2(\ell)\oplus S_F^2\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\oplus S_F^2\left(\ell-\frac{1}{2}\right)$ doğrudan toplamının, $N=2$ süpersimetri taşıyan fuzzy süperkürenin bozonik kısmını meydan getirdiği sonucuna son dönemde yaptığımız çalışmalar neticesinde varılmıştır. $S_F^{2\,Int}$ yapısının belirli bir izdüşümünden elde ettiğimiz $S_F^{2\pm1}$ vakumunun da $OSp(2,1)$ süpergrubunun temsil teorisi ile örtüştüğü görülmüş, dolayısıyla bu yapının $N=1$ süpersimetri taşıyan fuzzy süperkürenin bozonik kısmı olduğu sonucu da ortaya çıkarılmıştır. Bunlara ek olarak $OSp(2,2)$ ve $OSp(2,1)$ gruplarının süperspin $\frac{1}{2}$ temsilindeki üreteçleri (generators) modelimizin içinde bulunan operatörler cinsinden elde edilmiştir. Bütün bu sonuçlar, teorinin süpersimetrik genellemelerinin de elde edilebileceği yönünde atılan son derece önemli adımlar olarak değerlendirilmektedir ve ileride daha detaylı olarak araştırılması planlanmaktadır.

Niteliklerini daha önce açıkladığımız $SU(N)$ Yang-Mills modelinde, global $SU(2)$ simetrisi altında $\frac{1}{2}$ temsilinde 2-komponentli spinörlerin yada spin $\frac{m}{2}$ temsilinde $(m+1)$-komponentli spinörlerin eklemesinin, M manifoldunun komutatif olmadığı ayar teorilerinde de, fuzzy küreler yoluyla spontane simetri kırılmalarının incelenmesi açısından yaralı bir yaklaşım olabileceği düşüncesi son dönemde yaptığımız çalışmalarla geliştirilmeye başlanmıştır. Burada cevaplanılmasına çalışılan bir nokta, modellerimizde ortaya çıkan fuzzy kürelerin doğrudan toplamı biçimdeki ekstra boyutların, BFSS (Banks vd. 1997) ve IKKT (Ishibashi vd. 1997) matris modellerinin bazı uzantılarında (Hoppe ve Lee, 2008) bulunan fuzzy kürelerin doğrudan toplamı yapılarına benzemesi sebebiyle var olabilecek bir ilişkinin anlaşılmasına yöneliktir. Elde ettiğimiz bu sonuçların, Grosse, Lizzi, ve Steinacker (2010) tarafından çalışılan $SU(7)$ ayar simetrisinin fuzzy küreler yoluyla $SU(3)\times SU(2)\times U(1)\times U(1)\times U(1)$'e kırıldığı standart modelin uzantısı olarak görülebilecek fakat komutatif olmayan modelle olası benzerlik ve parelelliklerini de ileride araştırmayı planlamaktayız.

Proje çerçevesinde incelenen teorilerin irdelenmesi ile yeni ve heyecan verici bir araştırma probleminin oluşturulmasına başlanmıştır. Bu yeni modelde öncelikle S_F^2 üzerinde $U(3)$ Yang-Mills teorisinin ele alınması ve $SU(2)$, $SU(3)$ gruplarının temsil teorilerinin kullanılarak S_F^2 üzerinde $SU(2)$-simetrik ayar alanlarının açık bir parametrizasyonun elde edilmesi öngörülmektedir. Buradaki önemli bir nokta, aynı uzay üzerinde birim (identity) değişmeze ek olarak tek bir $SU(2)$ değişmezi içeren $U(2)$ ayar teorisine kıyasla, simetrik ayar alanının yazımında sırasıyla spin 1 ve spin 2 temsilleri taşıyan bir $SU(2)$ vektörü ve bir $SU(2)$ tensörü ve fuzzy küre koordinatlarından elde edilen iki $SU(2)$ değişmezinin hesaba katılacak olmasıdır. Dolayısıyla $SU(2)$ simetrik $U(3)$ ayar teorisinin alanlarının parametrizasyonunda, $SU(2)$ altında üç tane skalerin (identity eleman dahil olmak üzere) ve yedi tane de vektörünün kullanılacağı ön sonucu ortaya çıkarılmıştır. Bu konu üzerindeki çalışmalara yakın gelecekte devam edecektir.

Yakın gelecekte öğrencilerimle beraber çalışmayı planladığımız bir başka konuda, $S_F^2 \times S_F^2$ biçiminde ekstra boyutlar içeren modelin, daha önce belirtilen tipte $(m+1)$-komponentli spinörlerin eklenmesiyle geliştirilmesi ve çarpım uzayında yer alan fuzzy kürelerin her birinin, fuzzy kürelerin doğrudan toplamı ile değişeceğinin düşünüldüğü modellerin oluşturulup, içerdiği alanlarının simetrik parametrizasyonlarının elde edilmesi ve ilgili düşük enerjili efektif eylemlerin hesaplanması olarak öngörülmektedir.

Projemizde varılan bulgular ışığında hazırladığımız iki makaleden biri yayınlanmış (Kurkcuoglu, 2012b), bir diğeri de yazım aşamasındadır. Ayrıca elde ettiğimiz sonuçların bir kısmı 2011 yılında Prag'da düzenlenen Quantum Theory and Symmetries 7, (QTS7) başlıklı konferansta bu projenin sağladığı seyahat desteği sayesinde sunulmuş ve sunumumuz konferans kitabında yayınlanmıştır (Kurkcuoglu, 2012a). Bulgular kısmında açıklandığı üzere öğrencilerimle beraber yaptığım, Kuantum Hall etkisinin Grassmann uzayları $Gr(4,2)$'de ve bunu takiben tüm $Gr(N,2)$'de formülasyonunu içeren çalışmanın sonuçlarının sunulduğu makalede şu anda yazım aşamasındadır. Projemiz fuzzy ekstra boyutlu Yang-Mills ayar teorilerinin fiziksel yapılarının pek çok yönden araştırılmasına olanak tanımış ve simetrik parametrizasyon ve boyutsal indirgeme yöntemlerinin fuzzy uzaylar üzerine uygulanması konusunda kapsamlı sonuçlar elde edilmesini sağlamıştır. Çalışmalarımızın sonuçlarının irdelenmesi ile ortaya çıkarılan ve yukarıda ana hatları ile tartışılan yeni araştırma problemleri de, projemizin başarısı açısından bir diğer önemli nokta olarak değerlendirilmektedir.

Referanslar

Aschieri, P., Grammatikopoulos, T., Steinacker, H., ve Zoupanos, G. (2006). “Dynamical generation of fuzzy extra dimensions, dimensional reduction and symmetry breaking”. *JHEP* 0609 (2006), p. 026. DOI: 10.1088/1126-6708/2006/09/026. arXiv: hep-th/0606021 [hep-th].

Balachandran, A.P., Bimonte, G., Ercolessi, E., Landi, G., Lizzi, F., Sparano, G., ve Teotonio-Sobrinho, P. (1995). “Finite quantum physics and noncommutative geometry”. *Nucl.Phys. Proc.Suppl.* 37C (1995), pp. 20–45. arXiv: hep-th/9403067 [hep-th].

Balachandran, A.P., Kurkcuoglu, S., ve Queiroz, A. R. de (2013). “Spontaneous Breaking of Lorentz Symmetry and Vertex Operators for Vortices”. *Mod.Phys.Lett.* A28 (2013), p. 1350028. DOI: 10.1142/S0217732313500284. arXiv: 1208.3175 [hep-th].

Balachandran, A.P., Kurkcuoglu, S., ve Vaidya, S. (2007). *Lectures on Fuzzy and Fuzzy SUSY Physics*. Singapore: World Scientific, 2007.

Banks, T., Fischler, W., Shenker, S.H., ve Susskind, L. (1997). “M theory as a matrix model: A Conjecture”. *Phys.Rev.* D55 (1997), pp. 5112–5128. DOI: 10.1103/PhysRevD.55.5112. arXiv: hep-th/9610043 [hep-th].

Behr, W., Meyer, F., ve Steinacker, H. (2005). “Gauge theory on fuzzy S**2 x S**2 and regularization on noncommutative R**4”. *JHEP* 0507 (2005), p. 040. DOI: 10.1088/1126-6708/2005/07/040. arXiv: hep-th/0503041 [hep-th].

Chatzistavrakidis, A., Steinacker, H., ve Zoupanos, G. (2010a). “On the fermion spectrum of spontaneously generated fuzzy extra dimensions with fluxes”. *Fortsch.Phys.* 58 (2010), pp. 537–552. DOI: 10.1002/prop.201000018. arXiv: 0909.5559 [hep-th].

Chatzistavrakidis, A., Steinacker, H., ve Zoupanos, G. (2010b). “Orbifolds, fuzzy spheres and chiral fermions”. *JHEP* 1005 (2010), p. 100. DOI: 10.1007/JHEP05(2010)100. arXiv: 1002.2606 [hep-th].

Connes, A. (1994). *Non-Commutative Geometry*. San Diego: Academic Press, 1994.

Dolan, B. P. ve Szabo, R. J. (2009). "Dimensional Reduction, Monopoles and Dynamical Symmetry Breaking". *JHEP* 0903 (2009), p. 059. DOI: 10.1088/1126-6708/2009/03/059. arXiv: 0901.2491 [hep-th].

Douglas, M. R. ve Nekrasov, N. A. (2001). "Noncommutative field theory". *Rev.Mod.Phys.* 73 (2001), pp. 977–1029. DOI: 10.1103/RevModPhys.73.977. arXiv: hep-th/0106048 [hep-th].

Fell, J.M.G. ve Doran, R.S. (1988). *Representations of *-Algebras, Locally Compact Groups and Banach *-Algebraic Bundles, Academic Press*. Academic Press, 1988.

Forgacs, P. ve Manton, N.S. (1980). "Space-Time Symmetries in Gauge Theories". *Commun.Math.Phys.* 72 (1980), p. 15. DOI: 10.1007/BF01200108.

Frohlich, J., Morchio, G., ve Strocchi, F. (1979a). "Charged Sectors and Scattering States in Quantum Electrodynamics". *Annals Phys.* 119 (1979), p. 241. DOI: 10.1016/0003-4916(79)90187-8.

Frohlich, J., Morchio, G., ve Strocchi, F. (1979b). "Infrared Problem And Spontaneous Breaking Of The Lorentz Group In QED". *Phys.Lett.* B89 (1979), pp. 61–64. DOI: 10.1016/0370-2693(79)90076-5.

Gracia-Bondia, J.M., Varilly, J.C., ve Figueroa, H. (2000). *Elements of Non-commutative Geometry*. Birkhauser, 2000.

Groenewold, H.J. (1946). "On the Principles of elementary quantum mechanics". *Physica* 12 (1946), pp. 405–460. DOI: 10.1016/S0031-8914(46)80059-4.

Grosse, H., Lizzi, F., ve Steinacker, H. (2010). "Noncommutative gauge theory and symmetry breaking in matrix models". *Phys.Rev.* D81 (2010), p. 085034. DOI: 10.1103/PhysRevD.81.085034. arXiv: 1001.2703 [hep-th].

Harland, D. ve Kurkcuoglu, S. (2009). "Equivariant reduction of Yang-Mills theory over the fuzzy sphere and the emergent vortices". *Nucl.Phys.* B821 (2009), pp. 380–398. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2009.06.031. arXiv: 0905.2338 [hep-th].

Harvey, J. A. (2001). "Komaba lectures on noncommutative solitons and D-branes" (2001). arXiv: hep-th/0102076 [hep-th].

Hoppe, J. ve Lee, K.M. (2008). "New BPS configurations of BMN matrix theory". *JHEP* 0806 (2008), p. 041. DOI: 10.1088/1126-6708/2008/06/041. arXiv: 0712.3616 [hep-th].

Ishibashi, N., Kawai, H., Kitazawa, Y., ve Tsuchiya, A. (1997). "A Large N reduced model as superstring". *Nucl.Phys.* B498 (1997), pp. 467–491. DOI: 10.1016/S0550-3213(97)00290-3. arXiv: hep-th/9612115 [hep-th].

Kapetanakis, D. ve Zoupanos, G. (1992). “Coset space dimensional reduction of gauge theories”. *Phys.Rept.* 219 (1992), pp. 4–76. DOI: 10.1016/0370-1573(92)90101-5.

Karabali, D. ve Nair, V.P. (2002). “Quantum Hall effect in higher dimensions”. *Nucl.Phys.* B641 (2002), pp. 533–546. DOI: 10.1016/S0550-3213(02)00634-X. arXiv: hep-th/0203264 [hep-th].

Karabali, D. ve Nair, V.P. (2006). “Quantum Hall effect in higher dimensions, matrix models and fuzzy geometry”. *J.Phys.* A39 (2006), pp. 12735–12764. DOI: 10.1088/0305-4470/39/41/S05. arXiv: hep-th/0606161 [hep-th].

Kurkcuoglu, S. (2010). “Noncommutative Vortices and Flux-Tubes from Yang-Mills Theories with Spontaneously Generated Fuzzy Extra Dimensions”. *Phys.Rev.* D82 (2010), p. 105010. DOI: 10.1103/PhysRevD.82.105010. arXiv: 1009.1880 [hep-th].

Kurkcuoglu, S. (2012a). “Equivariant reduction of gauge theories over fuzzy extra dimensions”. *J.Phys.Conf.Ser.* 343 (2012), p. 012062. DOI: 10.1088/1742-6596/343/1/012062.

Kurkcuoglu, S. (2012b). “Equivariant Reduction of U(4) Gauge Theory over $S_F^2 x S_F^2$ and the Emergent Vortices”. *Phys.Rev.* D85 (2012), p. 105004. DOI: 10.1103/PhysRevD.85.105004. arXiv: 1201.0728 [hep-th].

Landi, G. (1997). *An Introduction to Non-commutative Spaces and their Geometries*. Springer-Verlag, 1997.

Landi, G. ve Szabo, R. J. (2011). “Dimensional Reduction Over the Quantum Sphere and Non-Abelian Q-vortices”. *Commun.Math.Phys.* 308 (2011), pp. 365–413. DOI: 10.1007/s00220-011-1357-z. arXiv: 1003.2100 [hep-th].

Lechtenfeld, O., Popov, A. D., ve Szabo, R. J. (2003). “Noncommutative instantons in higher dimensions, vortices and topological K cycles”. *JHEP* 0312 (2003), p. 022. arXiv: hep-th/0310267 [hep-th].

Lechtenfeld, O., Popov, A. D., ve Szabo, R. J. (2006). “Rank two quiver gauge theory, graded connections and noncommutative vortices”. *JHEP* 0609 (2006), p. 054. DOI: 10.1088/1126-6708/2006/09/054. arXiv: hep-th/0603232 [hep-th].

Lechtenfeld, O., Popov, A. D., ve Szabo, R. J. (2007). “Quiver Gauge Theory and Noncommutative Vortices”. *Prog.Theor.Phys.Suppl.* 171 (2007), pp. 258–268. DOI: 10.1143/PTPS.171.258. arXiv: 0706.0979 [hep-th].

Lechtenfeld, O., Popov, A. D., ve Szabo, R. J. (2008). “SU(3)-Equivariant Quiver Gauge Theories and Nonabelian Vortices”. *JHEP* 0808 (2008), p. 093. DOI: 10.1088/1126-6708/2008/08/093. arXiv: 0806.2791 [hep-th].

Madore, J. (1995). *An Introduction to Non-commutative Differential Geometry and its Physical Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

Minwalla, S., Van Raamsdonk, M., ve Seiberg, N. (2000). “Noncommutative perturbative dynamics”. *JHEP* 0002 (2000), p. 020. DOI: 10.1088/1126-6708/2000/02/020. arXiv: hep-th/9912072 [hep-th].

Moyal, J.E. (1949). “Quantum mechanics as a statistical theory”. *Proc.Cambridge Phil.Soc.* 45 (1949), pp. 99–124. DOI: 10.1017/S0305004100000487.

Popov, A. D. (2008). “Explicit non-Abelian monopoles and instantons in SU(N) pure Yang-Mills theory”. *Phys.Rev.* D77 (2008), p. 125026. DOI: 10.1103/PhysRevD.77.125026. arXiv: 0803.3320 [hep-th].

Popov, A. D. (2009). “Integrability of Vortex Equations on Riemann Surfaces”. *Nucl.Phys.* B821 (2009), pp. 452–466. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2009.05.003. arXiv: 0712.1756 [hep-th].

Steinacker, H. (2004). “Quantized gauge theory on the fuzzy sphere as random matrix model”. *Nucl.Phys.* B679 (2004), pp. 66–98. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2003.12.005. arXiv: hep-th/0307075 [hep-th].

Steinacker, H. ve Zoupanos, G. (2007). “Fermions on spontaneously generated spherical extra dimensions”. *JHEP* 0709 (2007), p. 017. DOI: 10.1088/1126-6708/2007/09/017. arXiv: 0706.0398 [hep-th].

Szabo, R. J. (2003). “Quantum field theory on noncommutative spaces”. *Phys.Rept.* 378 (2003), pp. 207–299. DOI: 10.1016/S0370-1573(03)00059-0. arXiv: hep-th/0109162 [hep-th].

Witten, E. (1977). “Some Exact Multi - Instanton Solutions of Classical Yang-Mills Theory”. *Phys.Rev.Lett.* 38 (1977), p. 121. DOI: 10.1103/PhysRevLett.38.121.

Zhang, S.C. ve Hu, J. (2001). “A Four-dimensional generalization of the quantum Hall effect”. *Science* 294 (2001), p. 823. DOI: 10.1126/science.294.5543.823. arXiv: cond-mat/0110572 [cond-mat].

TÜBİTAK
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU

Proje Yürütücüsü:	Doç. Dr. SEÇKİN KÜRKCÜOĞLU
Proje No:	110T738
Proje Başlığı:	Fuzzy Ekstra Boyutlu Uzaylarda Kuantum Alan Teorileri
Proje Türü:	Araştırma
Proje Süresi:	24
Araştırmacılar:	
Danışmanlar:	
Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi:	ORTA DOĞU TEKNİK Ü. FEN-EDEBİYAT F. FİZİK B.
Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri:	01/04/2011 - 01/10/2013
Onaylanan Bütçe:	94450.0
Harcanan Bütçe:	43121.46
Öz:	Bu projede fuzzy ekstra boyutlu Yang-Mills ayar teorilerinin fiziksel yapıları derinlemesine araştırılmıştır. Yakın zamanda yapılan araştırmalarla fuzzy uzayların SU(N) Yang-Mills ayar alanları ve bu grubunun eşlek (adjoint) temsilinde skaler alanlar içeren ve bir M uzayı üzerine kurulu modellerde spontane simetri kırılması yoluyla ekstra boyutlar olarak üretilebilecekleri sonucuna varılmış ve bu biçimde ortaya çıkan modellerin de, M uzayı ve fuzzy uzayların çarpımı olan uzayda kurulu Yang-Mills ayar teorileri olarak betimlenebileceği ortaya konulmuştur. Projemiz çerçevesinde, iki fuzzy kürenin çarpımı ve, SU(N) grubunun temel temsili altında dönüşen skaler alanlarında eklenmesiyle de, fuzzy kürelerin doğrudan toplamı yapısında ekstra boyutlar üreten SU(N) ayar teorileri geliştirilmiştir. Bu modellerin fuzzy uzaylarının simetrileri altında skaler, spinör vektör alanlarının simetrik parametrizasyonları elde edilmiştir. Yaptığımız araştırmalar sonucu, fuzzy küre üzerinde monopol sarım sayısı ±1 olan sektörleri ve bu sektörlerin üzerindeki simetrik alanlar bulunmuş ve sarım sayısı ±m sektörlere olan genelleştirmeler de tespit edilmiştir. Söz konusu modellerde bu bulgular kullanılarak fuzzy küre yapıları üzerinde simetrik boyutsal indirgemeleri yapılmış ve düşük enerjili efektif eylemler hesaplanmıştır. Bazı modellerde bu hesaplar son aşamalarda olup halihazırda devam etmektedir. Şu ana kadar elde edilen düşük enerjili efektif eylemler incelenmiş ve içerdikleri vorteks tipi alan teorisi çözümleri bulunmuş ve bu çözümlerin bazı özellikleri irdelenmiştir.
Anahtar Kelimeler:	Fuzzy Uzaylar, Yüksek Boyutlu Uzaylarda Ayar Teorileri, Simetrik Boyutsal İndirgeme, Vorteksler
Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu Mu?:	Hayır
Projeden Yapılan Yayınlar:	1- Equivariant reduction of U(4) gauge theory over SF2xSF2 and the Emergent Vortices (Makale/Kitap/Kitapta Bölüm), 2- Equivariant Reduction of Gauge Theories over Fuzzy Extra Dimensions (Makale/Kitap/Kitapta Bölüm), 3- SPONTANEOUS BREAKING OF LORENTZ SYMMETRY AND VERTEX OPERATORS FOR VORTICES (Makale/Kitap/Kitapta Bölüm)