OTOMORFİZMA GRUBU OLARAK FROBENİUS BENZERİ GRUPLAR

Program Kodu: 1001

Proje No: 114F223

Proje Yürütücüsü:

Prof. Dr. Gülin Ercan

Araştırmacı:

Prof. Dr. İsmail Ş. Güloğlu

KASIM 2017

ANKARA

ÖNSÖZ

G grubu, H grubunun bir altgrubu ise $A=N_H(G)/C_H(G)$ bölüm grubu, G'nin otomorfizma grubunun bir altgrubuna ile eşyapılıdır. Dolayısıyla bir grubun yapısını, altgruplarının analiziyle açığa çıkarma problemi; bir A grubunun bir G grubu üzerinde otomorfizmalarla etki etmesi bilgisinden hareketle, G hakkında yapısal bilgiler edinme problemi ile çok yakından ilgilidir.

Bu projede, A=FH Frobenius-benzeri bir grup olduğunda, A nın G üzerindeki etkisinden gelen bilgiler aracılığıyla, G nin yapısı araştırılmıştır. Gülin Ercan ve İsmail Ş. Güloğlu tarafından 2014 yılında [1] makalesiyle literatüre kazandırılmış olan Frobenius-benzeri grup kavramı çok yeni ve benzer çalışmalarla kıyaslandığında ciddi bir uygulama imkanı getiren ve aktif bir araştırma sahasına katkıda bulunan önemli bir kavramdır. Bu projede Frobenius-benzeri grubun etkileri yoğun olarak çalışılmış ve çözülebilir olduğu olduğu çeşitli durumlarda G nin Fitting uzunluğuna sınırlar bulunmuştur. Bu çalışmalar literatürde A nın Frobenius grup olması halinde bilinen sonuçları genellemektedir.

Ayrıca bu proje çerçevesindeki diğer çalışmalar A nın sabit noktaları alt grubunun ayrık eşlenikli olması durumu incelenerek sabit noktasız etki sanısına katkıda bulunulmuştur, öyle ki Thompson'un meşhur bir teoremini genellemeyi mümkün kılmıştır.

Bu proje çerçevesinde düzenlenen ve bu konuda dünya çapındaki bazı araştırmacıların katılımıyla gerçekleşen iki uluslararası çalıştay ile gruplar teorisi dalında çalışan araştırmacıların ve özellikle bu dalda doktora yapmayı planlayan lisansüstü öğrencilerin birikimine katkı sağlanmıştır. Öte yandan proje süresince yürütücü ve araştırmacı bir çok konferansa katılmış ve sunumlarıyla ülkemizi en iyi şekilde temsil etme imkanı bulmuşlardır.

TÜBİTAK-1001 Araştırma Projelerini Destekleme Programının 114F223 No'lu bursuyla desteklenen projemizle ilgilenen uzmanlara ve sırasıyla proje ekibinde yer alan Yrd. Doç. Dr. Meltem Özgül, Cansu Aktepe, Eren Ertürk ve Dr. Şükran Gül'e değerli katkılarından dolayı teşekkür ederiz.

TÜBİTAK

ÖZET

A sonlu grubu, sonlu bir G grubu üzerinde otomorfizmalarla etki etmekte olsun. A=FH nin, çekirdeği F ve tümleyeni H olan bir Frobenius grubu olması durumu Khukhro, Makarenko ve Shumyatsky tarafından [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14] de çalışılmıştır. Gülin Ercan ve İsmail Ş. Güloğlu, [6]'da olduğu gibi, bu çalışmalardaki şartları zayıflatmayı amaçlarken, Frobenius-benzeri grup kavramını ortaya atmışlar; ve bu kapsamda [1], [2] makalelerinde sunulan sonuçları ve Khukhro ile birlikte de [3], [4], [5]'de sunulan sonuçları elde etmişlerdir.

Bu projenin ana hedefi Frobenius-benzeri grupların etkileri üzerine yapılmış olan çalışmalardaki bazı kısıtlayıcı şartları kaldırmak ve aynı sonuçların geçerli olduğu en zayıf koşulları bulmaktır. Bütün bu çalışmalarda F nin sabit noktasız etkisi kabul edilmektedir. Bu projede, özellikle FH nin Frobenius-benzeri olması veya F nin sabit noktasız etki etmesi koşullarının zayıflatılabilirliği sorusuna da cevap aradık. Elde ettiğimiz sonuçlar, uzun ifadesi nedeniyle yer veremediğimiz biri dışında, aşağıdaki gibidir:

Theorem *G tek mertebeli Fitting uzunluğu n olan çözülebilir bir grup, FH ise G üzerinde* $[F',H]=1$ *ve* $C_G(F)=1$ *olacak şekilde aralarında asal etki eden tek mertebeli bir Frobenius-benzeri grup olsun. F' asal kuvvetli mertebeye sahip bir maksimal altgruba sahipse ve* $G/F_{n-1}(G)$ *üzerindeki etkisi Frobenius ise* $n=f(C_G(H))$ *olur. Öte yandan* $C_G(H)$ *in nilpotent olması durumunda F(G) nin G deki indeksi* $|C_G(F)|$ *ve* $|F|$ *cinsinden sınırlıdır.*

Teorem *FH grubu tümleyeninin mertebesi asal olan ve G üzerinde* $C_G(F)=1$ *olacak şekilde etki eden Frobenius-benzeri bir grup olsun.* $C_F(H)$ *asal mertebeye sahipse*

(i) $f(G) \leq f(C_G(H))+1$ *dir,*

(ii) her pozitif tamsayı i için, $F_i(C_G(H))$ *altgrubu,* $F_i(G)$ *ile* $C_G(H)$ *nin kesişimidir.*

Teorem $D=\langle\alpha,\beta\rangle$ *grubu, α ve β involüsyonları tarafından üretilen dihedral grup ve* $F=\langle\alpha\beta\rangle$ *olsun. (Burada D=FH ve* $H=\langle\alpha\rangle$ *olur) D grubu bir G grubu üzerinde* $C_D(F)=1$ *olacak şekilde etki etsin.* $C_G(\alpha)$ *ve* $C_G(\beta)$ *nilpotent iseler, G de nilpotenttir.*

Teorem *A grubu G grubu üzerinde etki ediyor olsun ve* $(|G|,|A|)=1$ *koşulu sağlansın.* $C_G(A)$ *çözülebilir bir TNI-altgrup ise G de çözülebilirdir. A abelyen ve* $C_G(A)$ *bir TNI-altgrup ise* $f(G)\ | \leq f(C_G(A))+\ell(A)$ *dir.*

Teorem *Frobenius bir FH grubu bir G çözülebilir grubu üzerinde aralarında asal etki ve sabit noktasız ediyor olsun.* $C_G(F)$ *normal olmayan bir TNI-alt grup ise* $f([G,F]) = f(C_{[G,F]}(H))$ *ve* $f(G) \leq f(C_G(H))+1$ *olur.*

Bu sonuçlar genellikle indüksiyon metodu kullanılarak ispatlanmıştır; şöyle ki, bir minimal ters örnek alınıp, yapısı mümkün olduğunca iyi analiz edilerek bir çelişki üretmeye çalışılmıştır. Bu amaçla kullanılan argümanlar; Hall-Higman tipi argümanlar, mertebeleri aralarında asal olan iki grubun, birinin diğeri üzerinde etki etmesi halinde, arasındaki ilişkiye dair bilinen sonuçlar ve Clifford teoremidir. İspatları mümkün kılan en önemli yöntem ise Dade tarafından tanımlanan ve Turull tarafından geliştirilen, terimleri A-değişmez özel bir alt gruplar dizisinin varlığı bilgisidir.

Yukarıda sıraladığımız sonuçlar 7 ayrı makale halinde yazılmış olup, 3 ü SCI-çekirdek, 1 i SCI-genişletilmiş kategorisinde yeralan dergilerde basıma kabul almıştır. Diğer 1 makale henüz hakem değerlendirmesinde olup, 2 makale ise sonuçlarını genişletebilme ümidiyle bekletilmektedir. Bu makalelerin içerdiği sonuçlar 8 i uluslarası toplantılarda (ki bunlardan 2 si proje çerçevesinde organize edildi) olmak üzere toplam 17 sunum yapılmıştır. Ayrıca proje sürecinde henüz savunması gerçekleşmeyen bir doktora tezi tamamlanmış ve bir master öğrencisinin tez süreci başlamıştır.

Anahtar kelimeler: Frobenius-benzeri grup, Fitting (nilpotent) uzunluk, sabit noktasız etki, TNI-altgrup.

ABSTRACT

Let A be a finite group acting on a finite group G by automorphisms. The case where A=FH is Frobenius with kernel F and complement H was realized by Khukhro, Makarenko and Shumyatsky, the main relevant papers being [7], [8], [9],[10], [11], [12], [13], [14]. Gülin Ercan and İsmail Ş. Güloğlu, in an attempt to weaken the conditions in the previous work, like [6], introduced the concept of a Frobenius-like group, and obtained the results presented in [1] and [2]; and together with Khukhro the results in [3], [4], and [5].

The main goal of this project is to find possible ways of weakening some additional conditions assumed in the study of the action of a Frobenius-like group in the literature, and find the weakest hypotheses under which the same conclusions are also valid. It should be noted that all results consider the case where F is fixed point free on the group G. In this project we especially look for ways of weakening the condtions that FH is Frobenius-like or F is fixed point free on G. The results we obtained, except one which is not mentioned here due to its long statement, are as follows:

Theorem *Let G be a finite group of odd order and having Fitting length n on which a Frobenius group FH acts coprimely. Suppose that* $[F',H]=1$ *and* $C_G(F)=1$*. If F' has a maximal subgroup of prime power order and the action of F' on* $G/F_{n-1}(G)$ *is frobenius üzerindeki etkisi Frobenius then* $n=f(C_G(H))$ *olur. Furthermore if under the same hypothesis except the condition that* $C_G(F)=1$*, if* $C_G(H)$ *is nilpotent then the index of F(G) in G is bounded in terms of* $|C_G(F)|$ *and* $|F|$*.*

Theorem *Let FH be a Frobenius-like grup with comlement H of prime order. Suppose that FH acts coprimely on a finite group G in such a way that* $C_G(F)=1$*. If* $C_F(H)$ *has prime order then*

i) $f(G) \leq f(C_G(H))+1$*,*

(ii) for each i, $F_i(C_G(H)) = F_i(G) \cap C_G(H)$*.*

Theorem *Let* $D=\langle\alpha,\beta\rangle$ *be the dihedral group generated by involutions α and β,and set* $F=\langle\alpha\beta\rangle$*. (Here D=FH and* $H=\langle\alpha\rangle$ *) Let D act on the finite group G in such a way that* $C_D(F)=1$*. If* $C_G(\alpha)$ *and* $C_G(\beta)$*are nilpotent, then so is G.*

Theorem *Let a finite group A act on the finite group G where* $(|G|,|A|)=1$ *. If* $C_G(A)$ *is a solvable TNI-subgrup then G is solvable. If A is abelian and ve* $C_G(A)$ *is a TNI-subgrup then* $f(G) \leq f(C_G(A))+\ell(A)$*.*

Theorem *Let FH be a Frobenius group acting on the finite solvable group G coprimely and fixed point freely. If* $C_G(F)$ *is a nonnormal TNI-subgrup, then* $f([G,F]) = f(C_{[G,F]}(H))$ *and* $f(G) \leq f(C_G(H))+1$.

In proving the above results we usually proceed by induction; that is, we take a minimal counterexample, reduce its structure until getting a contradiction. This kind of study usually use Hall-Higman type arguments, some nice relations which are valid only under coprime actions and also Clifford theorem. One of the most useful fact is the existence of a special sequence of A-invariant subgroups which was firstly introduced by Dade and then developed by Turull.

These results are written as 7 articles, 4 of which are published in respectful international journals. Another one is still under review and the other two are not submitted with the hope of improving their results. We presented our results in 17 meetings two of which are the international workshops organized as a part of this project. Additionally, a Ph. D. Thesis completed and a master thesis started.

Key words: Frobenius-like group, Fitting (nilpotent) length, fixed point free action, TNI-subgroup.

1. GİRİŞ

A sonlu grubu, sonlu bir G grubu üzerinde otomorfizmalarla etki etmekte olsun. Bu etki A ve G gruplarının yapıları üzerinde bazı sınırlamalar gerektirir. Örneğin, A nın birim elemandan farklı her elemanının G üzerinde sabit noktasız etki etmesi durumunda, GA yarıdirekt çarpımı bir Frobenius grup olur. Bu ise A nın bütün Sylow altgruplarının devirli veya genellenmiş kuaterniyon grup olmalarını ve G nin nilpotentliğini gerektirir. Bu proje kapsamında A nın G de sabit bıraktığı elemanların oluşturduğu altgrubu $C_G(A)$ ile göstereceğiz.

A nın G üzerindeki etkisi hakkındaki bilgileri kullanarak G ve A nın yapılarını belirlemek üzerine literatürde çok sayıda çalışma yer almaktadır Bu proje de aynı kategoriye dahil bir araştırmadır ve öncelikle A nın Frobenius-benzeri bir grup olması durumu ele alınacaktır. “Frobenius-benzeri” grup kavramı çok yeni olup, Gülin Ercan ve İsmail Ş. Güloğlu tarafından [1] makalesinde tanımlanmıştır. Bu tip bir grubun biçimsel tanımı aşağıdaki gibidir:

“ Sonlu bir G grubunun, bir nilpotent normal öz F altgrubu içermesi, F nin G içinde bir öz tümleyeni H olması, ve $[F,h]=F$ şartının her $1\neq h \in H$ için sağlanması durumunda, G ye **Frobenius-benzeri grup** denir. Bu durumda F, G nin çekirdeği H ise Fnin G içinde bir tümleyeni olarak adlandırılır.”

F ve H sonlu ve aşikar olmayan iki grup olsun. Her $1\neq h \in H$ için $C_F(h)=1$ olması durumunda, FH grubunun; çekirdeği F ve tümleyeni H olan bir Frobenius grubu olarak adlandırıldığını hatırlayalım. Her Frobenius grubun bir Frobenius-benzeri grup olduğu açıktır. Buna karşın, eğer FH, çekirdeği F ve tümleyeni H olan Frobenius-benzeri bir grup ise, $FH/[F,F]$, çekirdeği $F/[F,F]$ ve tümleyeni H ile eşyapılı $H[F,F]/[F,F]$ olan bir Frobenius grubudur.

Sonlu gruplar içinde bu tip gruplarla her zaman karşılaşılabilir. Örneğin, her ne zaman asal q mertebeli bir h elemanı, q’dan farklı bir p asal sayısı için, bir p-altgrubunu normaller fakat merkezlemezse, $[P,h]\langle h\rangle$ yarıdirekt çarpımı bir Frobenius-benzeri gruptur. Bu bize “Frobenius-benzeri grupların bolca mevcut olduklarını” gösterir ve sonlu gruplar kuramında bazı problemlerin çalışılmasında, bu tip grupların etkisinin ve yapısının iyi bilinmesinin çok önemli olduğunu ortaya koyar.

A=FH nin, çekirdeği F ve tümleyeni H olan bir Frobenius grubu olması durumunun bir araştırma konusu yapılması Mazurov' un [15]'de sorduğu Problem 17.72 ile başlamış; ve Khukhro, Makarenko ve Shumyatsky tarafından, esas ilgili makaleler [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14] olmak üzere, gerçeklenmiştir. Gülin Ercan ve İsmail Ş. Güloğlu, [6]'da olduğu gibi, önceki çalışmalardaki şartları zayıflatmayı amaçlarken, Frobenius-benzeri grup kavramını ortaya atmışlar; ve bu kapsamda [1], [2] makalelerinde sunulan sonuçları ve Khukhro ile birlikte de [3], [4], [5]'de sunulan sonuçları elde etmişlerdir. **LİTERATÜR ÖZETİ** bölümünde bu çalışmaları detaylarıyla sunacağız.

Frobenius-benzeri gruplarla uygulamada karşılaşılması çok daha olası olduğundan; A=FH grubunun Frobenius grup olma koşulunun, A nın bir Frobenius-benzeri bir grup olması koşulu ile değiştirilerek zayıflatılması, çok önemli bir genelleştirme olarak görünmektedir. Bu nedenle proje çerçevesinde cevap aradığımız sorular başvuru formunda yer alan halleriyle şunlardır:

I. [2]'de yer alan Theorem A sonucunu [F,F]'nin asal mertebeli olması hipotezini düşürerek genelleştirmek mümkün müdür?

II. [10]' daki Theorem 2.1 sonucunu, FH'nin Frobenius grup olması koşulunu, FH'nin Frobenius-benzeri grup olma koşulu ile değiştirerek genişletmek mümkün müdür?

III. [6]'nun esas sonucunu, $C_G(F)H$' nin Frobenius olması şartını $C_G(FH)=1$ şartıyla değiştirerek genişletmek mümkün müdür?

IV. Bir FH Frobenius-benzeri grubu otomorfizma grubu olarak kabul eden sonlu çözülebilir bir G grubunun yapısını, $C_G(F)$' nin bir aşikar kesişim kümesi olması, başka bir deyişle, $C_G(F)$ ve öz eşleniklerinin aşikar şekilde kesişmesi durumunda incelemek.

V. [1] makalesindeki Theorem A' da "(|G|,|H|)=1" şeklindeki aralarında asallık şartını kaldırmak mümkün müdür?

VI. Bazı özel durumlarda, sabit noktasız etki eden , nilpotent ve aralarında asallık koşulu olmayan bir otomorfizmalar grubunu kabul eden çözülebilir bir grubun Fitting uzunluğunu belirlemek için bir Frobenius-benzeri grubun etkisi üzerine elde ettiğimiz sonuçlarımızı uygulamak.

VII. G çözülebilir bir grup olsun ve $C_G(H)$' nin Fitting uzunluğunun en fazla n olduğunu varsayalım. Bu durumda G'nin n'inci Fitting altgrubunun G'deki endeksi, sadece |F| and |$C_G(F)$| ile belirlenen bir sayı ile sınırlı mıdır?

Yukarıdaki 1. ve 2. sorulara bir kısmının en iyi sonuç olarak değerlendirilebileceği oldukça tatmin edici cevaplar verdik. 3. soruya ise bazı ek şartlar altında çözüm üretmekle birlikte orijinal halinin doğru olmayabileceğine işaret eden ters örnek bulundu. 4. soru çerçevesindeki çalışmalarımız ise şimdiye dek hiç çalışılmamış bazı sorulara cevap bulmamızla sonuçlandı ve ünlü bir teoremin genellemesini yapmamızı mümkün kıldı.

5. soru ile ilgili çalışmalarımızda ise tatmin edici bir cevap elde edemedik. 6.sorunun çözümünde kullanışlı olması muhtemel bir yardımcı teorem ürettik. Yukarıdaki sorular arasında yer almayan ve FH grubunun Frobenius olması halinde açık olan ve bazı ek şartlar altında G nin süper çözülebilir olduğu öngörüsünün ise yanlış olduğunu gördük. Bu çalışmaların tüm detayları **BULGULAR** bölümünde sunulacaktır.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

A=FH sonlu bir grup olsun. F normal öz bir altgrup ise ve her 1≠h∊H için $C_F(h)=1$ koşulu sağlanıyorsa A ya Frobenius grup denir. Burada F, A nın çekirdeği; H ise F nin A içindeki tümleyeni olarak adlandırılır.

1.VARSAYIM. FH, çekirdeği F ve tümleyeni H olan bir Frobenius grup olsun ve sonlu bir G grubu üzerinde otomorfizmalarla etki etsin.

1.Varsayım'ın sağlandığı durumda FH nin etkisi G grubunun yapısı üzerinde bazı sınırlamalar gerektirir. G nin parametrelerinin ve özelliklerinin araştırma konusu olması 2010 yılında Mazurov'un "Kourovka Notebook [15]" de sorduğu 17.72 numaralı problem ile başlamıştır. Mazurov bu soruda bir ek koşul olarak, GF yarı direkt çarpımının, çekirdek G ve tümleyen F ile, bir Frobenius grup olduğunu (ki bu durumda GFH'ye 2-Frobenius grup denir) varsayarak şu soruları sormuştur:

(a) G nin nilpotentlik sınıfı, |H| ve $C_G(H)$ nin nilpotentlik sınıfının bir fonksiyonu ile sınırlandırılabilir mi?

(b) G nin kuvveti, |H| ve $C_G(H)$ nin kuvvetinin bir fonksiyonu ile sınırlandırılabilir mi?

Öncelikle (a) sorusu, Makarenko ve Shumyatsky tarafından ele alınarak , Khukhro'nun fikirlerinin de kullanımıyla olumlu yanıtlanmıştır. Ardından G hakkında kesin yapısal sonuçlara varmak için, F nin G üzerinde sabit noktasız etki etmesinin, diğer bir deyişle $C_G(F)=1$ koşulunun aynı sonuca varmak için yeterli olduğu, dolayısıyla yarıdüzenli etkinin gerekmediği gözlenmiştir. Öte yandan Belyaev ve Hartley [16] tarafından elde edilen önemli bir sonuca göre, $C_G(F)=1$ koşulu altında G nin çözülebilir olmasını gerektirir. Nitekim bu koşul altında G nin yapısı; Khukhro, Makarenko ve Shumyatsky tarafından detaylı olarak incelenmiş ve aşağıda THEOREM 1 olarak sunduğumuz sonuçlar bir makale dizisi halinde (bkz. [7], [8],[12]) yayınlanmıştır. Burada $F_i(G)$ Fitting serisindeki terimleri, r(G) ise G' nin "rank" ını göstermektedir. Bir grubun "rank"ı bu grubun bütün altgruplarının üreten kümelerinde bulunan eleman sayılarının minimumudur.

TEOREM 1. 1. Varsayım'ın ve $C_G(F)=1$ koşulunun sağlandığını kabul edelim. Bu durumda G çözülebilirdir ve

1) Her pozitif tamsayı n için, $F_n(C_G(H))$ altgrubu, $F_n(G)$ ile $C_G(H)$ nin kesişimidir,

2) G nin Fitting uzunluğu $C_G(H)$ nin Fitting uzunluğuna eşittir,

3) G nin p-uzunluğu $C_G(H)$ nin p-uzunluğuna eşittir,

4) |G|, |H| ve |C_G(H| cinsinden bir sayı ile sınırlıdır.

5) r(G), |H| ve r(C_G(H)) cinsinden bir sayı ile sınırlıdır.

Yukarıdaki teoremin ispatının en temel unsuru, çekirdek F nin sabit noktasız etki ettiği her V kFH-modülünün serbest olması gerektiğini olduğunu gösteren Clifford'a ait bir teoremdir. Bu kapsamdaki diğer bir sonuç (bkz.[10]) ise şöyledir:

TEOREM 2. 1. Varsayım'ın ve $C_G(F)=1$ koşulunun sağlandığını kabul edelim. Eğer FH grubu metadevirsel ve $C_G(H)$ nilpotent ise, G nilpotent bir gruptur ve G nin nilpotentlik sınıfı, |H| ve $C_G(H)$ nin nilpotentlik sınıfı cinsinden sınırlıdır.

Mazurov'un sorusunun (b) şıkkı ise şimdiye dek sadece kısmi olarak aşağıdaki gibi yanıtlandırılabilmiştir.

TEOREM 3. 1. Varsayım'ın ve $C_G(F)=1$ koşulunun sağlandığını kabul edelim. Eğer FH grubu metadevirsel ise,

G nin eksponenti, |F| ve $C_G(H)$ nin eksponenti cinsinden sınırlıdır.

TEOREM 1 3-5 ve TEOREM 2, her ikisi de Lie halkaları kapsamında problemlere indirgenerek ve bu halkalara karşılık gelen parametrelerin hassas analizi yapılarak ispatlanmıştır. TEOREM 1, her ne kadar G ve $C_G(H)$ nin bütün parametrelerinin aynı olduğu beklentisine yol açıyorsa da, da, örneklerle gösterilebildiği üzere, bu durum nilpotentlik sınıfı ve eksponent için doğru değildir. Öyle ki, TEOREM 2 de, FH nin metadevirsel olması ek koşulu elzemdir. Bu şartın TEOREM 3 de düşürülebileceğine dair bir sanı olsa da, şimdiye kadar böyle bir sonuç sadece |FH|=12 için Shumyatsky [14] tarafından ispatlanmıştır. Öte yandan TEOREM 3 de |F| ye bağlılığın, |H| ye bağlılıkla değiştirilebileceğine dair bir sanı da bulunmaktadır.

Frobenius FH grubunun etkisi atındaki bir G grubunun yapısı hakkında bu kapsamda sorulacak en doğal soru, kuşkusuz, $C_G(F)=1$ varsayımı olmadan ne söylenebilir olduğudur. Bu doğrultuda bir cevap, [9] makalesinde yer alan ve G grubunun bazı parametreleri için |H| ve $C_G(H)$ nin parametreleri cinsinden üst sınırlar veren aşağıdaki sonuçtur:

TEOREM 4. 1.Varsayım'ın ve $(|G|,|FH|)=1$ koşulunun sağlandığını kabul edelim. Bu durumda

1) $|G| \leq |C_G(F)|\ f(|H|,|C_G(H)|)$ ve

2) $r(G) \leq r(C\ (F))+g(|H|,r(C_G(H))$,

olacak şekilde f ve g fonksiyonları vardır.

Bu olumlu sonuçların ötesinde THEOREM 1 deki (1) ve (2) bölümlerini daha zayıf bir koşul olan $[G,F]=G$ altında ispatlamanın mümkün olmadığı gözlenmiştir. Bu bakımdan aşağıdaki sonuç (bkz. [6]) oldukça ilginçtir.

TEOREM 5. 1.Varsayımla birlikte $(|G|,|FH|)=1$ ve $[G,F]=G$ koşullarının sağlandığını kabul edelim. Eğer $C_G(F)H$, çekirdek $C_G(F)$ ve tümleyen H ile, bir Frobenius grubu olursa, G nin Fitting uzunluğu, $C_G(H)$ nin Fitting uzunluğuna eşittir.

Burada $C_G(F)H$ grubunun Frobenius grup olması koşulu, kuşkusuz, F nin olmasa dahi FH nin G üzerinde sabit noktasız etki etmesini gerektirir. Bu bakımdan, FH nin G üzerinde sabit noktasız etki etmesi varsayımı altında aynı sonucun doğru olup olmadığı ve $(|G|,|FH|)=1$ koşulunun düşürülüp düşürülemeyeceği sorulabilir.

Sabit noktasız çekirdeği olsun olmasın bir Frobenius grubun etkisini kabul eden grupların yapısı hakkındaki diğer yeni sonuçlar Khukhro ve Makarenko ([10],[11]) nun aşağıdaki teoremleridir.

TEOREM 6. 1.Varsayım'ın ve $(|G|,|FH|)=1$ koşullarının sağlandığını kabul edelim. $C_G(H)$ nin nilpotentlik sınıfı c ise

(a) G nin içinde, endeksi $|C_G(F)|$ ve $|F|$ tarafından sınırlanan nilpotent ve karakteristik bir altgrup vardır.

(b) ek koşul olarak eğer F devirsel ise; bu altgrup, endeksi sadece c, $|C_G(F)|$ ve $|F|$ cinsinden; ve nilpotetlik sınıfı sadece c ve $|H|$ cinsinden sınırlanacak şekilde seçilebilir.

Örnekler gösteriyor ki, F nin devirsel olması ek koşulu (b) şıkkında, sabit noktasız çekirdek durumunda dahi, düşürülemez.

TEOREM 7. P sonlu bir p-grubu olsun ve FH Frobenius grubu P üzerinde otomorfizmalarla etki etsin. Çekirdek F nin mertebesi p^k olan devirsel grup olduğunu varsayalım. $C_P(H)$ nin nilpotentlik sınıfı c ise

(a) P nin içinde, endeksi sadece c, |F|, ve $|C_P(F)|$ cinsinden; ve nilpotentlik sınıfı sadece c ve |H| cinsinden sınırlanabilen bir karakteristik altgrup vardır.

(b) P nin içinde, endeksi sadece |F| ve $|C_P(F)|$ cinsinden sınırlanabilen bir karakteristik altgrup Q vardır, öyle ki

$|Q| \leq |C_P(H)|^{|H|}$, $r(Q) \leq |H| r(C_P(H))$; ve eğer C (H) nin kuvveti p^e ise, Q nun kuvveti en fazla p^{2e} dir.

Açıkca görülüyor ki; Frobenius FH otomorfizma grubunun etkisi hakkındaki sonuçları daha genel durumlara genişletme iki şekilde yapılabilir:

● çekirdek F nin etkisi üzerindeki kuvvetli koşulları esnetmek,

● FH grubunun kendi yapısının üzerindeki koşulları esnetmek.

Yukarıda sunduğumuz teoremler genellikle birinci tarz sonuçlara örnek oluşturmaktaydı. Literatür taramamızı ikinci tarz örnekleri sunarak sürdüreceğiz: Özet bölümünde açıklandığı üzere Gülin Ercan ve İsmail Ş. Güloğlu, Frobenius-benzeri grup kavramını, FH grubu üzerindeki varsayımlarla yukarıda sunulan sonuçlar arasındaki esas ilişkiyi anlama çabası içindeyken tanımladılar. Frobenius-benzeri gruplarla uygulamada çok daha sık karşılaşılır olduğundan, FH nin Frobenius olması koşulu zayıflatılarak, sadece Frobenius-benzeri grup olduğu varsayımını kullanmak, önemli ve anlamlı bir genelleştirmedir. Frobenius-benzeri bir grubun genel nitelikleri tümüyle kullanılamasa dahi, F nin bir “special” grup hatta bir “ekstraspecial” grup olması durumu iyi anlaşılırsa, bu tarz bir otomorfizma grubuna sahip sonlu çözülebilir grupların yapısı hakkında önemli ölçüde bilgi ve hatta bu yapının incelenmesinde kullanılacak metodlar kazanılacağı açıktır. Aslında, minimal ters örneklerin yapısının çalışılmasında kullandığımız indirgeme argümanları, bizi sıklıkla, üzerinde H nin Z(F) yi merkezlediği ve F nin Frattini faktör grubunda yarı düzenli etki ettiği “ekstraspecial” bir F grubuna götürür ki, FH Frobenius-benzeri bir grup oluşturmaktadır.

FH in bir Frobenius grubu olmasından vazgeçtiğimizde karşılaştığımız ilk zorluk, F nin sabit noktasız etki ettiği bir kFH-modülü V nin artık serbest bir kH-modülü olması gerekmediğidir. Bununla birlikte Ercan ve Güloğlu’nun [1] çalışmasında sunulan Teorem A da, en azından belli Frobenius-benzeri gruplar için V nin , bir regüler kH-modülü içerdiği ispatlanmaktadır. Bu bilgi $C_V(H)$ nin aşikar olmadığını garanti ederken, V nin serbestlikten çok uzak olmadığını da gösterir. Teorem A bir minimal ters örneği çok sınırlı bir yapıya indirgenip, bir normal "ekstraspecial" altgruba sahip bazı belirli grupların temsilleri hakkındaki, bağımsız olarak da ilginç olan aşağıdaki sonuç (bkz. [1, Teorem B]) kullanılarak ispatlanmıştır.

TEOREM 8. H, her Sylow altgrubu devirsel olan bir grup, ve H/F(H) aşikar olmayan bir 2-grubu olsun. |H| yi bölmeyen bir p asal sayısı için P, mertebesi p^{2m+1} olan "ekstraspecial" bir grup olsun. H nin P üzerinde, Z(P) yi merkezleyerek ve her $1\neq h\in H$ için [P,h]=P olacak şekilde etki ettiğini varsayalım. k, karakteristiği G=PH nin mertebesini bölmeyen bir cebirsel kapalı cisim ve V üzerinde Z(P) nin nontrivial ve P nin indirgenemez etki ettiği bir kG-modülü olsun. V nin sağladığı G-karakteri χ ile gösterelim.

Bu durumda ϱ, H nin regüler karakteri, θ, H nin lineer karakteri ve $\varepsilon\in\{1,-1\}$ olmak üzere |H|, $p^m-\varepsilon$ 'yi böler ve

$\chi_H= ((p^m-\varepsilon)/|H|)\varrho +\varepsilon\theta$ olur.

Bu sonuç aslında [17]'deki Satz V.17.13 klasik sonucunun bir genelleştirilmesi olması bakımından da önemlidir.

TEOREM 8 in doğrudan bir sonucu aşağıdaki gibidir:

SONUÇ: THEOREM 8 in varsayımı ve notasyonu altında V_H, bir regüler kH-altmodülünü direkt toplam terimi olarak içerir ancak ve ancak $|H|\neq p^m+1$. Özellikle, FH grubu tek mertebeli ise V_H, bir regüler kH-altmodülünü içerir.

Aşağıda sunduğumuz karmaşık görünümlü varsayım [2] de tanıtılmış olup Hall-Higman tipi argümanlarda ortaya çıkabilen, özel durumlardan kaçınmak için formüle edilmiştir; ve [1,Theorem A] daki, FH nin tek mertebeli olması varsayımından çok daha geneldir.

2.VARSAYIM. F çekirdek ve H tümleyen olmak üzere, FH bir Frobenius-benzeri gruptur; öyleki H nin bir Sylow 2- altgrubu devirsel ve normaldir; ve ayrıca F nin hiçbir "extraspecial" bölümü yoktur ki, bu bölümün mertebesi p^{2m+1} olsun, öyle ki p asalı için H içinde $p^m+1=|H_1|$ olacak şekilde bir H_1 altgrubu vardır.

Aşağıdaki teorem, [3] de sunulmuş olup [1, Theorem A] sonucunu geneller ve şu anda Frobenius-benzeri sonuçları çalışmak için elimizdeki en faydalı kazanımdır.

TEOREM 9. FH grubu 2. Varsayım'ı sağlasın. V, cebirsel kapalı bir k cismi üzerinde, sıfırdan farklı bir vector uzayı olsun, öyle ki k nın karakteristiği H nin mertebesini bölmesin. FH nin V üzerinde lineer transformasyonlar grubu olarak etki ettiğini varsayalım. Aşağıdaki koşullardan biri sağlanır ise V nin bir H-regüler direkt toplam terimi vardır:

1) $C_V(F)=0$,
2) $[V,F]\neq 0$ ve k nın karakteristiği, F nin mertebesini bölmez.

Dolayısıyla, bir Frobenius-benzeri grubun, sonlu çözülebilir bir G grubu üzerinde 2.Varsayım'ı sağlamasının sonucu şudur:

SONUÇ: 2.Varsayım'ı sağlayan Frobenius-benzeri bir FH grubu sonlu çözülebilir bir G grubu üzerinde $(|G|,|H|)=1$ ve $[G,F]\neq 1$ olacak şekilde etki etsin. Bu durumda, $C_G(H)\neq 1$ olur.

Bu sonuç, aşağıda sunulan ve [2]'nin esas sonucu olan teoremin ispatında kullanılmıştır.

TEOREM 10. Frobenius-benzeri FH grubu, sonlu bir G grubu üzerinde $(|G|,|H|)=1$ ve $C_G(F)=1$ olacak şekilde otomorfizmalarla etki etsin. Ayrıca FH nin 2. Varsayım'ı sağladığını, [F,F] altgrubunun asal mertebeli olduğunu ve $[[F,F],H]=1$ koşulunun sağlandığını varsayalım. Bu durumda,

1) Her pozitif tamsayı n için, $F_n(C_G(H))$ altgrubu, $F_n(G)$ ile $C_G(H)$ nin kesişimidir,
2) G nin Fitting uzunluğu $C_G(H)$ nin Fitting uzunluğuna eşittir.

Ve ayrıca [8]'deki gibi p-serileri hakkında şu teorem elde edilmiştir. Burada bir asallar kümesi π için $O_\pi(G)$, bir G grubunun en büyük normal π-altgrubunu göstermektedir.

TEOREM 11. 2. Varsayım'ı sağlayan Frobenius-benzeri bir FH grubu, sonlu bir grubu üzerinde $(|G|,|H|)=1$ ve $C_G(F)=1$ olacak şekilde etki etsin. Ayrıca [F,F] asal mertebeli olsun ve $[F,F,H]=1$ koşulu sağlansın. Bu durumda

1) Her π asal kümesi için $O_\pi(C_G(H))$ altgrubu, $O_\pi(G)$ ile $C_G(H)$ in kesişimidir,

2) G nin π-uzunluğu $C_G(H)$ nin π-uzunluğuna eşittir,

3) Her i=1,…,k için, π_i bir asallar kümesi olmak üzere $O_{\pi_1\, \pi_2,\dots,\pi_k}(C_G(H))$ altgrubu $O_{\pi_1\, \pi_2,\dots,\pi_k}(G)$ ile $C_G(H)$ in kesişimidir.

Örneklerle bilindiği üzere, TEOREM 10 un varsayımındaki F nin G üzerinde sabit noktasız olması, 1) sonucunu elde etmek için esastır ve $C_G(F)=1$ koşulu, $C_G(F)H$ in Frobenius olması koşulu ile bile değiştirilemez.

FH nin bir Frobenius-benzeri grup olduğu durumda da G nin bazı parametreleri üzerinde FH nin Frobenius kabul edildiği durumlarda elde edilenlere benzer sınırlar bulunabilir. [4] makalesinde sunulan şu sonuç bunun iyi bir örneğidir:

TEOREM 12. FH grubu 2. Varsayım'ı sağlayan bir Frobenius-benzeri grup ve p, FH in mertebesini bölmeyen bir asal sayı olsun. FH nin bir p-grubu olan P üzerinde [P,F]=P koşulunu sağlayacak şekilde etki ettiğini varsayalım. Bu durumda

1) P nin nilpotentlik sınıfı, $2\log_p|C_P(H)|$ ile üstten sınırlıdır,
2) |P|, sadece |H| ve |CP(H)| cinsinden sınırlanır,
3) r(P), sadece |H| ve r(CP(H)) cinsinden sınırlanır.

Bu sonuç Frobenius gruplar hakkındaki THEOREM 4 ün Frobenius-like gruplara genellemesi olan ve [4] makalesinde sunulan aşağıdaki sonucu gerektirir:

TEOREM 13. FH grubu 2. Varsayım 'I sağlayan bir Frobenius-benzeri grup olsun ve sonlu bir G grubu üzerinde (|G|,|FH|)=1 olacak şekilde otomorfizmalarla etki etsin. Bu durumda

1) $|G| \leq |C_G(F)|\, f(|H|,|C_G(H)|)$ dir ve,

2) $r(G) \leq r(C_G(F))+g(|H|,r(C_G(H)))$ olacak şekilde f ve g fonksiyonları vardır.

Son olarak [3] makalesinin esas teoremlerinden biri olan ve Frobenius-benzeri gruplar kapsamında en yeni sonucu sunmak istiyoruz. Dikkat çekilmesi gereken nokta bu sonucun, F nin yapısı hakkında bir bilgiye ulaşılmasını sağlamak bakımından öncekilerden farklı olduğudur.

TEOREM 14. FH grubu 2. Varsayım'ı sağlayan bir Frobenius-benzeri grup ve k, karakteristiği |FH| yi bölmeyen bir cisim olsun. FH nin k cismi üzerindeki bir V vectör uzayı üzerinde lineer transformasyonlarla sadık olarak etki ettiğini varsayalım. Bu durumda, $m=\dim_k C_V(H)$ için, F nin çözülebilirlik uzunluğu $\log_2 m+2$ ile üstten sınırlıdır.

THEOREM 8 in bir sonucu olarak $m\neq 0$ olduğundan, $\log_2 m+2$ iyi tanımlıdır. Öte yandan bu sınırın H den bağımsız oluşu da dikkat çekicidir. Son olarak belirtilmesi gereken ise 2.Varsayım'ın sağlanması koşulundan vazgeçilemeyeceğini gösteren örnekler olduğudur.

Yukarıda sunduğumuz literatür taraması bize, projemizin konusunu oluşturan 7 sorunun ne kadar aktüel ve dolayısıyla bu seçimin ne kadar isabetli olduğunu göstermektedir.

3. GEREÇ VE YÖNTEM

Çözümler için kullanılan yöntemler sıklıkla benzeşmektedir: İspatlar için genellikle indüksiyon yöntemi kullanılmaktadır. Dolayısıyla ilk adım, iddia edilen teoremin doğru olmadığı varsayımından hareketle bir minimal ters örnek; yani teoremin hipotezinin gerçeklendiği, ama sonucu sağlamayan bir minimal grup seçmektir. Bu örneğin yapısı; hipotezlerin, bazı tümevarım argümanların ve çeşitli (varolan veya elde edeceğimiz) yardımcı teoremlerin kullanımıyla, mümkün olduğunca iyi analiz edilerek, diğer bir deyişle indirgenerek bir çelişki üretilmektedir. İndirgeme adımlarında neredeyse her problemin çözümünde,

- Hall-Higman tipi argümanlar,
- mertebeleri aralarında asal olan iki grubun , birinin diğeri üzerinde etki etmesi halinde, arasındaki ilişkiye dair bilinen sonuçlar,
- bir etki normal altgruplara daraltıldığında kullanıma elverişli Clifford teoremi ve benzeri sonuçlar,

sıklıkla kullanılmaktadır. Bu indirgeme işlemi sonunda minimal ters örneğimizin yapısı hakkında artık iyice bilgi toplanmış ve hatta bir vektör uzayı üzerindeki etkisinin detaylı bir analizine ulaşılmıştır. Çoğu kez vektör uzayını belirleyen cismin, karakteristiği grubun mertebesini bölmeyen cebirsel kapalı bir cisim olarak alınması mümkün olmaktadır. Bu bakımdan klasik temsil teorisi ve hatta karakter teori kullanarak aranan çelişki bulunabilmektedir.

Çoğu problemi çözümlemek için ispatladığımız yardımcı teoremler; aslında [2] ve [5] makalelerinde elde ettiğimiz yardımcı teoremlerin daha genel bir versiyonu olarak elde edilmişlerdir.

Öte yandan “aralarında asal” etkinin kolaylaştırıcı birçok özelliği bulunmaktadır. Bu özellikleri sıklıkla kullandık.

Dördüncü problemimiz çok çalışılan $C_G(A)=1$ koşulunu genellemekte ve $C_G(A)$ nın G içine nasıl gömüldüğü hakkında sorulan sorularda hiç karşılaşmadığımız yepyeni bir hipotez kullanmaktadır. $C_G(A)$ nın “TNI-altgrup” olması durumunu iyi anlayabilmek için, bazı özel altgrupları aşikar kesişim kümesi olan grupların yapısını çalışan bir çok makaleyi bir seminer dizisi ile anlamaya çalıştık. Böylece hem varolan yöntemleri öğrendik hem de yeni yöntemler üretme imkanı bulduk.

4. BULGULAR

4.1 Notasyon

$C_G(A)=\{g \in G : a(g)=g \text{ her } a \in A \text{ için}\}$

F(G): G nin Fitting altgrubu

$F_i(G)$. G nin Fitting serisinin i-nci terimi

f(G): G nin Fitting (nilpotent) uzunluğu

ℓ(A): A nın mertebesini bölen asalların sayısı

4.2 Soru (I) ve bir benzeri

2014 yılında Journal of Group Theory dergisinde yayınlanan "Action of a Frobenius-like group with fixed point free kernel" [2] başlıklı makalemizde ispatlanan teorem aşağıdaki gibidir:

FH tek mertebeli, [F’,H]=1 koşulunu sağlayan Frobenius-benzeri bir grup ve G grubu üzerinde aralarında asal etki ediyor olsun. F’ asal mertebeli ve $C_G(F)=1$ ise (i) her pozitif tamsayı i için, $F_i(C_G(H))$ altgrubu, $F_i(G)$ ile $C_G(H)$ nin kesişimidir

(ii) f(G)=f(CG(H)) dir.

Soru (I) esasen bu teoremin koşullarından olan “F’ grubu asal mertebeli ve [F’,H]=1 olsun” kabulunu zayıflatmak meselesidir. Bu soruya ilişkin ilk cevabımız, bazı ek koşullar altında kanıtlanan bir teorem olarak SCI-Çekirdek dergiler kategorisinde yer alan International Journal of Algebra and Computation dergisinde yayınlandı (Bkz. EK1). Elde edilen sonucun ifadesi tam olarak şudur:

G tek mertebeli Fitting uzunluğu n olan çözülebilir bir grup, FH ise G üzerinde [F’,H]=1 ve $C_G(F)=1$ olacak şekilde aralarına asal etki eden tek mertebeli bir Frobenius-benzeri grup olsun. F’ asal kuvvetli mertebeye sahip bir maksimal altgruba sahipse ve $G/F_{n-1}(G)$ üzerindeki etkisi Frobenius ise $n=f(C_G(H))$ olur.

İkinci olarak, “F’ grubu asal mertebeli ve [F’,H]=1 olsun” kabulunu, çok daha zayıf ve doğal bir şart olan “$C_F(H)$ altgrubu asal mertebeli olsun” kabulü ile değiştirerek yine aynı kapsamda başka bir çalışma yaptık. Ayrıca $C_F(H)$ altgrubunun asal mertebeli olması koşulunun zayıflatılamayacağını gösteren bir örnek inşa ederek, elde edilmiş sonucun en iyi sonuç olduğu kanıtladık. Bu çalışmamız SCI-Çekirdek dergiler kategorisinde yer alan Monatshefte für Mathematik dergisinde yayınlandı (Bkz. EK2). Bu makalenin ana sonucu şudur:

FH grubu tümleyeninin mertebesi asal olan ve G üzerinde $C_G(F)=1$ olacak şekilde etki eden Frobenius-benzeri bir grup olsun. $C_F(H)$ asal mertebeye sahip sahipse (i) $f(G) \leq f(C_G(H))+1$ dir,

(ii) her pozitif tamsayı i için, $F_i(C_G(H))$ altgrubu, $F_i(G)$ ile $C_G(H)$ nin kesişimidir.

(Fi(G)= Fitting serisinin i-terimidir)

Giriş bölümünde not edildiği üzere bu projenin aynı zamanda etki eden A grubunun Frobenis-benzeri grup olma şartının zayıflatılabilir olup olmadığını tartışmaktır. Düzenlediğimiz ilk çalıştaya Shumyatsky'yi davet etmemizin nedenlerinden biri 2013 yılında Journal of Algebra' da yayınlanmış olan bir makalesidir (*The dihedral group as group of automorphisms, Journal of Algebra 375(2013)1-12*) ki burada "bir sonlu dihedral grubun diğer bir sonlu grup üzerindeki etkisi" çalışılmaktadır. Sorularımız ve yöntemlerimizin benzeşimi bize bu makalenin okunması gereğini düşündürdü ve nitekim, o makalenin ana teoreminin tam bir genellemesini kısa süre içinde, Frobenius-benzeri grupların etkilerini çalışırken kullanmakta olduğumuz argümanlar vasıtasıyla kanıtlamayı başardık. Ne var ki, çalıştay sırasında bu sorunun başka bir yöntemle, ama daha kapsamlı biçimde, Shumyatsky' nin eski öğrencilerinden Emerson De Melo tarafından çözülmüş olduğunu ve Communications in Algebra dergisinin Temmuz 2015 sayısında yayınlandığını öğrendik. Bu durumda bizim çalışmamızın değerini yitirmesi kaçınılmaz olsa da, yardımcı teorem olarak kullandığımız bir sonucumuzun (bkz. Ek3, Proposition) başka ilginç soruları ispatlamaya yarayabileceği, bizzat Shumyatsky tarafından ifade edildi. Bu nedenle çalışmamızın hala değerli olduğunu düşünerek sunduğumuz makalemiz uluslarası Algebra and Discrete Mathematics dergisinde yayına kabul edildi (Bkz.Ek3). Makalenin ana sonucu aşağıgaki gibidir:

$D=\langle\alpha,\beta\rangle$ grubu, α ve β involüsyonları tarafından üretilen dihedral grup ve $F=\langle\alpha\beta\rangle$ olsun. (Burada $D=FH$ ve $H=\langle\alpha\rangle$ olur) D grubu bir G grubu üzerinde $C_D(F)=1$ olacak şekilde etki ediyor olsun. $C_G(\alpha)$ ve $C_G(\beta)$ nilpotent iseler, G de nilpotenttir.

Yukarıda sunduğumuz çalışmalarla söz konusu 1.Soruya fazlasıyla yanıt verebildiğimizi düşünüyoruz.

4.3 Soru (II)

[10] makalesinde Khukhro ve Makarenko şu sonucu elde etmişlerdir:

G grubu, Fitting uzunluğu n olan çözülebilir bir grup, FH ise G üzerinde aralarında asal etki eden bir Frobenius grup olsun. $C_G(H)$ *in nilpotent olması F(G) nin G içindeki indeksi* $|C_G(F)|$ *ve* $|F|$ *cinsinden sınırlıdır.*

Soru (II) bu teoremin sonucunun FH Frobenius-benzeri bir grup olduğunda da doğru olup olmadığıdır. Bu soruya bir ilk cevabı 2014 yılında yazdığımız [5] makalesinde yer alan Theorem 4.3 ile [F',H]=1 olması durumunda vermiştik. Ek4 de sunduğumuz sonucumuzla aynı soruyu F' altgrubu asal mertebeli olmadığı zaman ele aldık ve Soru (I) e verdiğimiz ilk cevabın ek koşulları altında aynı sonuca ulaştık. EK4 de elde edilen teorem aşağıdaki gibidir:

G tek mertebeli ve Fitting uzunluğu n olan çözülebilir bir grup, FH ise G üzerinde [F',H]=1 olacak şekilde aralarına asal etki eden tek mertebeli bir Frobenius-benzeri grup olsun. F' asal kuvvetli mertebeye sahip bir maksimal altgruba sahipse ve $G/F_{n-1}(G)$ *üzerindeki etkisi Frobenius ise,* $C_G(H)$ *in nilpotent olması G nin de nilpotent olmasını gerektirir.*

Öte yandan, Soru (VII) nin cevabını tam olarak verebildiğimiz takdirde bu makaleyi çok daha geniş kapsamlı bir hale getirebilme imkanı doğacağını farkettik. Bu durumda SCI-çekirdek dergilerden birinde kabul edilebilmesi daha mümkün olacağından bekletmeye karar verdik. Sonuç olarak, EK4 makalesiyle 2. Sorumuza yeterli cevabı verdiğimizi düşünüyoruz.

4.4 Soru (III)

2013 yılında yayınlanan [6] makalesinde şu teoremi ispatlamıştık:

FH Frobenius bir group ve G grubu üzerinde aralarında asal etki ediyor olsun. [G,F]=G ve $C_G(F)H$ grubu Frobenius ise $f(G)=f(C_G(H))$ dir.

Bu sonuç yukarıda da söz edilen [7] makalesinin bir genellemesi olarak elde edilmişti. Projemizin 3. Sorusu ise $C_G(F)H$ grubunun Frobenius olması koşulunun da $C_G(FH)=1$ olması koşulu ile zayıflatılabilir olup olmadığıdır. Bu soru ele alındıysa da, istenen genellikte cevap bulunamayacağını gösteren örnekler EK5 de sunuldu. Bu durumda aşağıdaki iddia hala açık bir sorudur:

Frobenius bir FH grubu sonlu bir G çözülebilir grubu üzerinde otomorfizmalarla etki ediyor olsun. Eğer $(|G|,|H|) = 1$ ve $C_G(FH)=1$ ise G grubunun Fitting uzunluğu en fazla $C_G(H)+c$ olacak şekilde bir negatif olmayan c tam sayısı var mıdır?

Öte yandan Soru (IV) kapsamında yazdığımız ve Journal of Algebra'da yayına kabul edilen makalemizde (Bkz EK5 Corollary 4.3) yer verdiğimiz aşağıdaki teorem, 3. Soru için de kısmi bir cevap oluşturmaktadır. Öyle ki burada ek bir şart olarak $C_G(F)$ nin TNI-alt grup olduğu kabul edilmiştir:

Frobenius bir FH grubu bir G çözülebilir grubu üzerinde aralarında asal etki ve sabit noktasız ediyor olsun. $C_G(F)$ normal olmayan bir TNI-alt grup ise $f([G,F]) =$

$f(G) \leq f(C_G(H)) +1$ olur.

4.5 Soru (IV)

Bu soru bir FH Frobenius-benzeri grubu otomorfizma grubu olarak kabul eden sonlu çözülebilir bir G grubunun yapısını, $C_G(F)$' nin bir aşikar kesişim kümesi olması, başka bir deyişle, $C_G(F)$ ve öz eşleniklerinin aşikar şekilde kesişmesi durumunda inceleme problemidir. Literatürde bu tarz bir çalışmanın yer almaması soruyu cazip kılmaktadır.

Yaptığımız çalışmalar sonucunda eşlenikleri ayrık olma özelliğinin bölüm gruplarına geçmiyor oluşunun zorluğunu aşmak mümkün olmayınca, C.Hering'in bir makalesinde [20] tanımlanan kısaca TNI-altgrup, kavramından yola çıkarak, aşağıda sıraladığımız ve önemli olduğunu düşündüğümüz şu sonuçları elde ettik. Nitekim, hazırladığımız "*GROUPS OF AUTOMORPHISMS WITH TNI-CENTRALIZERS*" başlıklı makale SCI-çekirdek kategorisinde yer alan Journal of Algebra dergisinde basım için kabul aldı(Bkz.EK5):

Tanım: *G bir grup ve H bir altgrubu olsun. Eğer her* $g \epsilon G\text{-}N_G(H)$ *için* $N_G(H) \cap H^g=1$*ise H altgrubuna G nin bir TNI-altgrubu denir.*

Theorem 1 *A grubu G grubu üzerinde etki ediyor olsun ve* $(|G|,|A|)=1$ *koşulu sağlansın.* $C_G(A)$ *çözülebilir bir TNI-altgrup ise G de çözülebilirdir*

Theorem 2 *A grubu çözülebilir bir G grubunun meretebesi asal bir otomorfizması olsun.* $C_G(A)$ *bir TNI-altgrup ise* $f(G) \mid \leq f(C_G(A))+1$ *dir.* $C_G(A)$ *nın normal altgrup olmaması durumunda ise* $f(G) \mid \leq 4$ *dür*.

Bu sonuçlar Thompson'a ait ve sonlu gruplar teorisinin ünlü sonuçlarından biri olan aşağıdaki sonucu genellemeleri bakımından oldukça önemlidir:

Mertebesi asal bir otomorfizma G grubu üzerinde sabit noktasız etki ediyorsa G çözülebilir ve hatta nilpotent bir gruptur.

Görüldüğü üzere, $C_G(A)=1$ kabul edilirse Theorem 1 ile G nin çözülebilir olduğu, Teorem 2 ile ise, bu durumda f(C_G(A))=0 olacağından f(G)=1, yani G nin nilpotentliği elde edilmektedir.

Projemizin ana hedefi Frobenius veya Frobenius-benzeri grup etkilerini araştırmak olduğundanTNI-merkezleyenler üzerindeki araştırmamızı, etki eden A grubunu bir Frobenius grup FH olacak şekilde ve $C_G(F)$ TNI-altgrup kabulüyle sürdürdük. Bu yeni sorumuz 1. ve 2. Sorularımız kapsamında kabul ettiğimiz $C_G(F)=1$ koşulunun zayıflatılabilirliğini tartışmak açısından önemliydi. Sonuç olarak elde ettiğimiz aşağıdaki teoremle, literatürde varolan ve Frobenius FH grubunun etkisini $C_G(F)=1$ kabulu altında çalışan [7] makalesinin ana sonucunu da genellemiş olduk; şöyle ki, $C_G(F)=1$ olması halinde bizim teoremimizde f(G)=f(C_G(H))) eşitliğini vermektedir.

Theorem 3 *FH Frobenius grubu bir çözülebilir G grubu üzerinde aralarında asal etki ediyor olsun. Eğer* $C_G(F)$ *bir TNI-altgrup ise,* $f([G,F]) = f(C_{[G,F]}(H))$ *ve dolayısıyla* $f(G) \leq f(C_G(H)) + f(C_G(F))$ *olur.*

Bu teoremin bir sonucu olarak $C_G(F)=1$ şartının $C_G(FH)=1$ ve $C_G(F)$ TNI-altgrup kabulleriyle zayılatılması durumunda da tatmin edici bir sonuç elde ettik. Şöyle ki:

A grubu G grubu üzerinde etki ediyor olsun ve $(|G|,|A|)=1$ koşulu sağlansın. $C_G(A)$ çözülebilir bir TNI-altgrup ise G de çözülebilirdir

Frobenius bir FH grubu bir G çözülebilir grubu üzerinde aralarında asal etki ve sabit noktasız ediyor olsun. $C_G(F)$ normal olmayan bir TNI-alt grup ise $f([G,F]) =$

$f(G) \leq f(C_G(H))+1$ olur.

Bu makalenin ardından elde ettiğimiz ve EK6 da sunduğumuz şu sonuç ise durumu A nın abelyen olması haline genelleyen önemli bir gözlemdir. Ama daha da genel bir sonuç elde edebilmek umuduyla şimdilik bir dergiye sunmadan bekletmekteyiz.

Teorem 4 *A abelyen bir grup olsun ve çözülebilir bir G üzerinde aralarında asal etki ediyor olsun. $C_G(A)$ bir TNI-altgrup ise $f(G) \mid \leq f(C_G(A))+\ell(A)$ dır.*

4.5 Soru (V)

Proje sürecinde diğer sorular birbirleriyle daha bağlantılı olduğundan 5.soru üzerinde çalışıp fikir üretmek mümkün olamadı.

4.6 Soru (VI)

Bu soruyu motive eden sanı şudur:

A, G grubu üzerinde sabit noktasız etki eden nilpotent bir grup ise f(G), A nın mertebesini bölen asal sayıların sayısı ile sınırlıdır.

Bu sanının sonucu $(|G|,|A|)=1$ ise nilpotent olması gerekmeyen herhangi bir A grubu için kanıtlanmış olmakla birlikte, aralarında asallık koşulu olmadığında A grubunun nilpotent olmaması halinde A nın Fitting uzunluğunu sınırlamanın imkanı olmadığı bilinmektedir.

A nın devirli olması halinde dahi açık kalmış bu soru ilgi alanımızın merkezinde durması bakımından çözümüne yarayabileceğini düşündüğümüz her metodla ilgilenegeldik. Frobenis-benzeri grup etkilerine ait sonuçların da bu konuda kullanılabilirliklerini tartıştık. Ancak bir ilişki kurabilmek mümkün olmadı. Bununla birlikte eski metodlarla bu sanıya kısmi de olsa cevap verebilmek amacıyla çalışmalarımızı sürdürdük. Aşağıda sunduğumuz ve EK yardımcı teorem “extra-special” grup koşulunu sağlayan bir konfigürasyon bulunamadığı için yetersiz kalmakla birlikte bu sanının çözümüne yönelik önemli bir adım olmuştur:

Farklı p ve r asalları için, P bir p-grup, R bir r-group, ve A bir grup olsun.

P, PRA içinde normal ve R, RA içinde normal olacak şekilde aşağıdaki koşullar sağlansın:

(a) P bir extraspecial p-grup , Z(P), Z(PRA) içinde normal, CA(P) = 1;

(b) R/ CR(P) grubunun klası 2 ve exponenti r, $A_0 = C_A(R/R_0) = 1$*;*

(c) $A = A_p \times A_r \times A_{\{p,r\}'}$ *, öyle ki* A_p *ve Ar devirli gruplar,*

ve $A_{\{p,r\}'}$ *grubu* $R/C_R(P)$ *regüler yörüngelerle etki eder,*

(d) p = 2 ise r bir Fermat asalı değildir.

O halde, λ sadık bir komplex PRA-character ise λA

regular A-karakteri içerir.

4.8 Soru (VII)

Bu soru üzerinde indüksiyon yöntemi kullanarak uzun süre çalıştıysak da çok çetin bir problem olduğunu gördük ve minimal ters örneğin yapısını fazlaca indirgemek mümkün olmadı. Araştırmaya şimdilik ara versek de ömümüzdeki çalışma planında ilk ele alacağımız sorulardan biri bu olacaktır.

4.9 Diğer Sorular

Proje çerçevesinde ele aldığımız bir diğer soru Khukhro tarafından ortaya atılan şu açık soru idi:

FH Frobenius grubu bir G grubu üzerinde =1 ve süperçözülebilir olacak şekide etki edersen G de süperçözülebilir midir?

Uzun süre bu konuda çalışıp alınan bir minimal ters örneğin yapısını inceledik. Ancak bir yazışma sırasında Bettina Wilkens tarafından verilen ve EK 8 de sunulan ters örnek bu sorunun yanlış olduğunu gösterdi. Gösterdiğimiz çaba ve elde ettiğimiz bazı yardımcı teoremlerin bu sorunun değişik versiyonlarını tartışmakta yardımcı olabileceğini düşünüyoruz.(Bkz EK9)

4.8 Yapılan Sunumlar

Proje kapsamında elde edilen sonuçları bildirmek veya genel olarak bu problem sahasını tanıtmak amacıyla özellikle uluslarası olanlara proje imkanları ile katılabildiğimiz toplantılarda sunumlar yaptık.

- Gülin Ercan “Action of a Frobenius-like group”, 18 Aralık 2014, Bölüm semineri, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

- İsmail Güloğlu “Frobenius-like groups as groups of automorphisms ”, 28-31 Ocak 2015, 3BIGTC , Ferdowsi University, Mashad, (davetli konuşma) (Bkz. EK 15,16)

- İsmail Güloğlu, “Finite groups admitting a dihedral groups of automorphisms”, 4. Cemal Koç Cebir Günleri (uluslarası), 22 Nisan 2016, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara. (davetli konuşma) (Bkz. EK 17,18)

- Gülin Ercan, “Sabit noktasız etki” 1-3 Mayıs 2015, II. Kadın Matematikçiler Derneği Çalıştayı, Cumhuriyet Universitesi, Sivas. (davetli konuşma) (Bkz.EK 19,20)

- Gülin Ercan, “Action of a Frobenius-like group”, 22-24 Mayıs 2015, Zassenhaus Group Theory Conference, Binghampton University, New York. (Bkz.EK 21,22)

- Gülin Ercan, “Frobenius-like groups as groups of automorphisms”, 7-12 Ağustos 2015, Finite groups and their automorphisms, Doğuş University, Istanbul. (Bkz. EK 23,24)

- Gülin Ercan, “Frobenius-like groups as groups of automorphisms”, 31 Ağustos-2 Eylül 2016, Groups,Rings and their Automorphisms, University of Lincoln, UK. (Bkz. EK 25,26)

- İsmail Güloğlu “About the action of automorphism groups with TI-centralizers” 6-7 Ekim 2016, Marmara Üniversitesi Matematik Günleri, Marmara Üniversitesi, (davetli konuşma)

- İsmail Güloğlu “On the actions of groups with TNI-centralizers” 24 Kasım 2016, Bölüm semineri, Mimar Sinan Üniversitesi, İstanbul.

- İsmail Güloğlu “About the action of automorphism groups with TI-centralizers” 22 Aralık 2016, Bölüm Semineri, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

- . İsmail Güloğlu “About the action of automorphism groups with TI-centralizers”, 20 Ocak 2017, 4th Biennial International Group Theory Conference, Kuala Lumpur (davetli konuşma) (Bkz.EK 27,28)

- İsmail Güloğlu “Groups of automorphisms with TNI-centralizers“, 22 Mart 2017, bölüm semineri, Boğaziçi Üniversitesi, İstanbul.

- Gülin Ercan “Influence of the fixed point subgroup in group actions ” 10 Nisan 2017, Bilkent Üniversitesi, Ankara.

Gülin Ercan, “Group actions with TNI-centralizers”, 5. Cemal Koç Cebir Günleri, 29 Nisan 2017, İstanbul Kültür Üniversitesi, İstanbul. (davetli konuşma).(Bkz. EK 35,36)

- Gülin Ercan “Influence of the fixed point subgroup in group actions 2”

3-6 Mayıs 2017, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Bolu.(Bkz. EK 29,30)

- İsmail Güloğlu “Influence of the fixed point subgroup in group actions 1” 3-6 Mayıs 2017, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Bolu. .(Bkz. EK 31,32)

- Gülin Ercan “Group actions with TNI-centralizers”, 5-13 Eylül 2017, Groups St Andrews 2017 in Birmingham, UK. (Bkz. EK 33,34)

4.9 Düzenlenen Çalıştaylar

Proje kapsamında düzelenen iki uluslarası çalıştaydan ilki, “Finite Groups and Their Automorphisms” başlığı altında 7-16 Ağustos 2015 tarihlerinde Doğuş Üniversitesi-İstanbul’ da gerçekleştirildi. Lisans-lisansüstü öğrencilerin ve doktora sonrası araştırmacıların oluşturduğu 23 katılımcısı ile bu çalıştay, hedeflediğimizden çok daha kapsamlı bir toplantı oldu. Öyle ki, çalıştay bünyesinde 10 saatlik bir **GAP (Groups, Algorithms and Programming)** ders dizisi organize etmek de mümkün oldu. GAP’ı geliştiren önemli isimlerden biri olan Stefan Kohl tarafından sunulan bu derslerin içerikleri, GAP sistemini kullanmayı öğretmenin ötesinde, özellikle “grup otomorfizmaları ve sabit nokta altgrupları” ile ilişkili sorularla ilgili araştırmalarımızda GAP sistemini nasıl kullanacağımızı öğretmek üzere hazırlandı [bkz. Ek 10]. Çalıştayın ardından katılımcıların çok faydalandıklarını dile getirmeleri bizim açımızdan mutluluk vericiydi.

Çalıştayın ikinci bölümü, gruplar teorisinin önemli isimlerinden Pavel Shumyatsky ve Marian Deaconescu tarafından sunulan dörder saatlik ders dizileri ve proje kapsamındaki çalışmalarımızı tanıtmak üzere Gülin Ercan tarafından verilen derslerle devam etti [özetler, program ve katılımcı listesi için, bkz. Ek 11, Ek 12, Ek 13]. 13 Ağustos 2015 itibariyle Kohl ve Deaconescu’ nun ayrılmaları ardından 16 Ağustosa kadar, gerek proje çerçevesinde gerekse diğer ortak ilgi alanlarında ilginç bulduğumuz sorular üzerinde Shumyatsky ile tartışmayı sürdürdük.

İkinci çalıştayımız ise “Finite Groups and Their Automorphisms 2017” başlığı altında 3-6 Mayıs 2017 tarihlerinde Abant İzzet Baysal Üniversitesi-Bolu’ da gerçekleştirildi (Bkz. fga.math.metu.edu.tr). Gruplar teorsi alanında dünya çapında araştırmacılar arasında yer alan Danila Revin, Alexander Buturlakin, Attila Maroti ve Zoltan Halasi davetlilerimizdi. (Bkz. EK14) Onlar tarafından verilen ders dizileri, Gülin Ercan ve İsmail Güloğlu’nun birer konuşmayla proje ve sonuçlarını tanıtımı ve gruplar teorisi alanında çalışan ya da çalışmayı planlayan doktora öğrencilerinin bazı sunumlarıyla oldukça kaliteli bir organizasyon gerçekleştirmek mümkün oldu. Davetlilerimizle kurduğumuz ilişki gelecekte çeşitli problemler üzerinde ortak çalışma imkanı bulunduğunu gösterdi.

4.10 Diğer kazanımlar

Bu proje çerçevesinde sayılabilecek bir soru üzerinde çalışmasını ve eşlenik ayrık altgruplar hakkında bir makale okumasını önerdiğimiz M.Yasir Kızmaz, daha sonra kendi kurduğu bir problem çerçevesinde ilerleyerek doktora tezini tamamladı. Henüz savunması yapılmayan ama iki ayrı makale halinde yayına sunulup, biri SCI-Core da yer alan Communications in Algebra dergisinden kabul alan bu tezi dolaylı da olsa projemizin bir ürünü olarak görmekteyiz.

Bir diğer kazanım ise Eren Ertürk'ün yazacağı yüksek lisans tezi olacaktır. Öyle ki, proje kapsamında bir makale çalışılmış ve teze dönüşmeyi beklemektedir. Şu sıralar Eren Ertürk'ün İstanbul'da çalışma hayatına başladığı için yazımına ara verilse de önümüzdeki yıl sonu tamamlanacağını düşünüyoruz.

Öte yandan Gülin Ercan Birmingham'da düzenlenen konferansa katılımı sırasında Çinli matematikçi X. Guo ile tanışmış ve HC-altgruplarına dair bazı çalışmalarından haberdar olmuştur, öyle ki her TNI-altgroup bir HC-altgrup olmaktadır. Bu bakımdan proje çerçevesinde elde edilen sonuçlarda yer alan TNI-altgrup olma kabullerinin HC-altgruplara genişletilmesi mümkün görünmektedir. Bu konuda çalışmalarımızı konuya ilgisini gösteren Dr. Şükran Gül'le birlikte yapmayı planlıyoruz.

5. TARTIŞMA/SONUÇ/ÖNERILER

Proje başvuru formunun Yaygın Etki bölümünde beklentimizin "uluslarası saygın dergilerde en az 3 makale, en az 5 uluslararası bildiri ve 2 çalıştay" olduğu bildirilmişti. BULGULAR bölümünde ifade ettiğimize göre bu proje sürecinde "3 makale SCI-Çekirdek listesinde ve 1 makale de Mathematical Reviews ve Zentralblatt fur Mathematik de taranan dergilerde yayına kabul edilmiştir. Öte yandan 1 makale yayına sunulmuş ve henüz hakem değerlendirmesinde, 2 makale ise hazırlanma aşamasındadır. Ayrıca 2 uluslarası çalıştayın yanısıra, 8 i uluslarası olan 17 sunum yapılmıştır. Bu nedenle vaadlerimizin tümünü fazlasıyla gerçekleştirmiş bulunuyoruz.

Bu projede, direk uygulama konularından uzak teorik matematiğin özel bir konusu etrafında, ancak belirli sayıda uzmanın dikkatini çeken ama gene de uluslararası matematik camiasının ilgi sahasında olan bir çerçevede, proje teklifinde sunulan yedi soru doğrultusunda araştırmalar yapılmıştır. Bu süreçte bazı başlangıç sorularımızın çok isabetli sorulmadığı , bizim ilk tahminlerimizden çok daha derin ve karmaşık bir araştırma konusu oldukları veya cevaplarının negatif olarak verildikleri görülmüştür. Ancak buna karşılık araştıma sürecinde karşılaşılan bazı yeni problemler başarıyla cevaplandırılmış, veya yeni araştırma konuları önerileri ortaya çıkmıştır.

Bu durumda projenin başarı ölçütü olarak ortaya konan hedefe ne kadar ulaşıldığı ile değerlendirmeyi tamamlamak istersek; herhalde bu projenin teorik matematik dalındaki araştırma projesinin uluslararası matematik camiasında ne kadar kabul ve takdir aldığı , elde edilen sonuçların ne kadar tanıtılabildiği , memleketimizin genç matematikçilerinin oluşup gelişmelerine ne kadar hizmet ettiği dikkate alınmalıdır. Biz de bu proje çerçevesinde uluslararası saygın matematik (hatta daha spesifik uzmanlaşmış , Cebir konulu) dergilerde dört makale yayınlamış olmak, iki küçük ama etkili uluslararası çalıştayı başarıyla organize etmiş olmak , ve yurt içi ve dışı pek çok bilimsel toplantıda çalışmalarımızın ürünlerini başarıyla matematik camiasına sunmuş olmak ve bu arada ODTÜ de genç bir grup teorisi araştırmacıları gurubu oluşturup onları süregelen seminerler ile geliştirmek ve bunlardan birinin esas olarak doktorayı tamamlamış olmasıyla çok başarılı bir proje döneminin sonuna geldiğimizi değerlendiriyoruz.

Özellikle organize edilen çalıştaylar için, Tubitak desteği çok önemli olmuştur. Bunun için teşekkürlerimizi sunuyoruz. Bu proje çerçevesinde, dar bir sahada da olsa yoğun, ve gerçek uzmanları biraraya getiren çalıştayların, projede çalışılan soruların cevabını oluşturmakta direk etkiye sahip olmasalar bile çok faydalı olduklarını gözlemledik. Organizasyon problemleri dolayısıyla biraz vakit kaybına neden oluyorlar ise de vesile oldukları fikri yoğunluk ve kurulan ilişkiler, hem araştırmacılar için hem de eğitilmekte olan genç matematikçiler için yön gösterici ve aydınlatıcı olmaktadır. Bu nedenle proje önerisinde bulunacak herkese proje kapsamında çalıştay planlamalarını özellikle tavsiye etmek istiyoruz.

Ne var ki, proje yöneticisi ve araştırmacılarının bulundukları üniversite ve Tubitak arasındaki “paper-work” ile aşırı meşgul edilmek ve bazı mağduriyetlere neden olacak bürokratik meselelere muhatap olduğumuzu hatırlatmak ve Tubitak tarafından korunabilmemizin çarelerinin aranacağını hala ummakta olduğumuzu belirtmek istiyoruz.

KAYNAKLAR

[1] Güloğlu İ.Ş. ve Ercan G. 2014. " Action of a Frobenius-like group", J. Algebra 402, 533-543.

[2] Ercan G. ve Güloğlu İ.Ş. 2014. "Action of a Frobenius-like group with fixed point free kernel", J. Group Theory 17 (2014), no. 5, 863–873.

[3] Ercan G., Güloğlu İ.Ş. ve Khukhro E. 2014. "Derived length of a Frobenius-like kernel", J. Algebra 412 (2014), 179–188.

[4] Ercan G., Güloğlu İ.Ş. ve Khukhro E. 2014. "Rank and order of a finite group admitting a Frobenius-like group of automorphisms", submitted to Algebra and Logic.

[5] Ercan G., Güloğlu İ.Ş. ve Khukhro E. 2014. "Frobenius-like groups as goup of automorphisms", Turkish J. Math. 38 (2014) no.6,965-976.

[6] Ercan G., Güloğlu İ.Ş. ve Öğüt Elif. 2014. "Nilpotent length of a finite solvable group with a coprime Frobenius group of automorphisms", Comm. Algebra 42 (2014), no. 11, 4751–4756.

[7] Khukhro E. 2010. "The nilpotent length of a finite group admitting a Frobenius group of automorphisms with a fixed point free kernel", Algebra Logika, 49, 819-833; English Trans., Algebra Logic 49 (2011), 551-560.

[8] Khukhro E. 2012. "Fitting height of a finite group with a Frobenius group of automorphisms", J. Algebra, 366, 1-11.

[9] Khukhro E. 2013. "Rank and order of a finite group admitting a Frobenius group of automorphisms", Algebra Logika, 52, 99-108; English transl., Algebra Logic 52 (2013), 72-78.

[10] Khukhro E. ve Makarenko N. Y. 2013. "Finite groups and Lie rings with a metacyclic Frobenius group of automorphisms", J. Algebra, 386, 77-104.

[11] Khukhro E. ve Makarenko N. Y. 2014 "Finite p-groups admitting a Frobenius groups of automorphisms with kernel a cyclic p-group", to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[12] Khukhro E., Makarenko N. Y. Ve Shumyatsky P. 2014. "Frobenius groups of automorphisms and their fixed points", Forum Math, 26, 73-82.

[13] Makarenko N. Y. ve Shumyatsky P. 2010. "Frobenius groups as groups of automorphisms", Proc. Amer. Math. Soc., 138, 3425-3436.

[14] Shumyatsky P. 2011. "On the exponent of a finite group with an automorphism group of order twelve", J. Algebra, 331,482-489.

[15] Khukhro E. ve Mazurov V.D. 2010. “Unsolved problems in group theory The Kourovka notebook”, 17th ed., Institute of Mathematics, Novosibirsk.

[16] Belyaev, B.B. ve Hartley B. 1996. “Centralizers of finite nilpotent subgroups in locally finite groups” Algebra Logika, 35,389-410.

[17] Huppert B. 1967. “Endliche gruppen I”, Springer-Verlag, Berlin-New York.

[18] Turull A. 1990. “Groups of automorphisms and centralizers”, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 107, 227.

[19] Dade E.C. 1969. “Carter subgroups and Fitting heights of finite solvable groups”, Illinois J. Math. 13, no.3,449-623.

[20] Hering,C. 1972. “”J.Algebra, 20, 622-629.

TÜBİTAK
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU

Proje Yürütücüsü:	Prof. Dr. GÜLİN ERCAN
Proje No:	114F223
Proje Başlığı:	Otomorfizma Grubu Olarak Frobenius-Benzeri Gruplar
Proje Türü:	1001 - Araştırma
Proje Süresi:	36
Araştırmacılar:	İSMAİL ŞUAYİP GÜLOĞLU
Danışmanlar:	
Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi:	ORTA DOĞU TEKNİK Ü. FEN F. MATEMATİK B.
Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri:	01/10/2014 - 01/10/2017
Onaylanan Bütçe:	155050.0
Harcanan Bütçe:	104387.98
Öz:	A sonlu grubu, sonlu bir G grubu üzerinde otomorfizmalarla etki etmekte olsun. A=FH nin, çekirdeği F ve tümleyeni H olan bir Frobenius grubu olması durumu Khukhro, Makarenko ve Shumyatsky tarafından çalışılmıştır. Gülin Ercan ve İsmail Ş. Güloğlu, bu çalışmalardaki şartları zayıflatmayı amaçlarken, Frobenius-benzeri grup kavramını ortaya atmışlar; ve bu kapsamda bir çok sonuçlar elde etmişlerdir. Bu projenin ana hedefi Frobenius-benzeri grupların etkileri üzerine yapılmış olan çalışmalardaki bazı kısıtlayıcı şartları kaldırmak ve aynı sonuçların geçerli olduğu en zayıf koşulları bulmaktır. Bütün bu çalışmalarda F nin sabit noktasız etkisi kabul edilmektedir. Bu projede, özellikle FH nin Frobenius-benzeri olması veya F nin sabit noktasız etki etmesi koşullarının zayıflatılabilirliği sorusuna cevap aradık. Elde ettiğimiz sonuçlar 7 ayrı makale halinde yazılmış olup, 3 ü SCI-çekirdek, 1 i SCI-genişletilmiş kategorisinde yeralan dergilerde basıma kabul almıştır. Diğer 1 makale henüz hakem değerlendirmesinde olup, 2 makale ise sonuçlarını genişletebilme ümidiyle bekletilmektedir. Bu makalelerin içerdiği sonuçlar 8 i uluslarası toplantılarda (ki bunlardan 2 si proje çerçevesinde organize edildi) olmak üzere toplam 17 sunum yapılmıştır. Ayrıca proje sürecinde henüz savunması gerçekleşmeyen bir doktora tezi tamamlanmış ve bir master öğrencisinin tez süreci başlamıştır.
Anahtar Kelimeler:	Frobenius-benzeri grup, Fitting (nilpotent) uzunluk, sabit noktasız etki, TNI-altgrup
Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu Mu?:	Hayır
Projeden Yapılan Yayınlar:	1- Action of a Frobenius-like group with kernelhaving central derived subgroup (Makale - İndeksli Makale), 2- On the influence of fixed point free nilpotent automorphism groups (Makale - İndeksli Makale), 3- Finite groups admitting a dihedral group of automorphisms (Makale - Diğer Hakemli Makale),