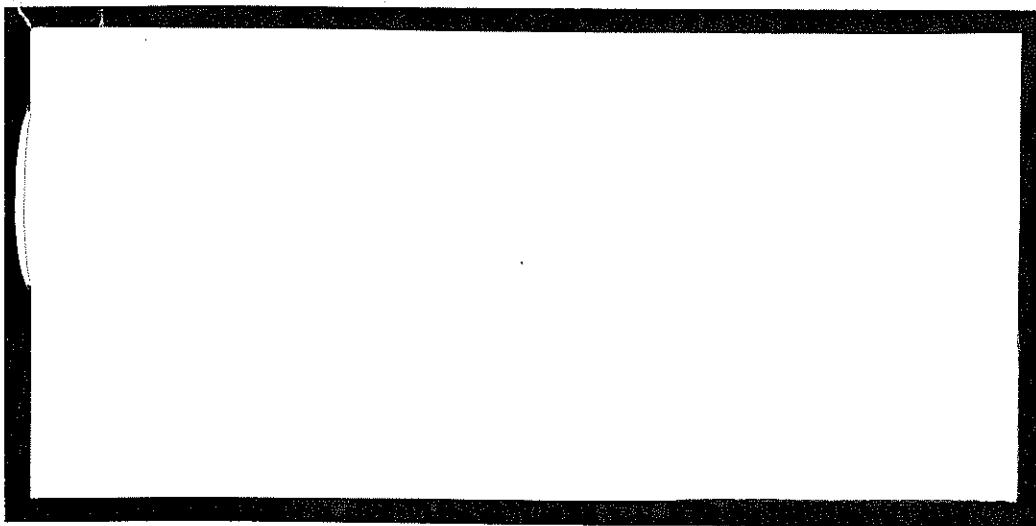


DUP
2002-228



TÜRKİYE BİLİMSEL VE
TEKNİK ARAŞTIRMA KURUMU

THE SCIENTIFIC AND TECHNICAL
RESEARCH COUNCIL OF TURKEY



**Makina, Kimyasal Teknolojiler, Malzeme ve İmalat Sistemleri
Araştırma Grubu**

**Mechanical Engineering, Chemical Technologies, Material
Sciences and Manufacturing Systems Research Grant
Committee**

**C++ DERLEYİCİSİ KULLANILARAK
ÜÇ BOYUTLU SIKIŞTIRILABİLEN AKIŞLAR
İÇİN ETKILEŞİMLİ BİR NAVIER-STOKES
ÇÖZÜCÜSÜNÜN GELİŞTİRİLMESİ**

PROJE NO : 132

**Proje Yürüttücsü : Prof. Dr. M. Halûk AKSEL
Ağustos 2001, ANKARA**

**TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNİK ARAŞTIRMA KURUMU
MAKİNA, KİMYASAL TEKNOLOJİLER
MALZEME VE İMALAT SİSTEMLERİ ARAŞTIRMA GRUBU
PROJE NO : 132**

**C++ DERLEYİCİSİ KULLANILARAK ÜÇ BOYUTLU
SIKIŞTIRILABİLEN AKIŞLAR İÇİN ETKİLEŞİMLİ BİR
NAVIER-STOKES ÇÖZÜCÜSÜNÜN GELİŞTİRİLMESİ**

**Proje Yürütücüsü : Prof. Dr. M. Halûk AKSEL
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Makina Mühendisliği Bölümü**

**Bu proje Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumunun desteği ile
Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Makina Mühendisliği Bölümünde yapılmıştır**

Ağustos 2001, ANKARA

ÖNSÖZ

Ülkemizde savunma sanayi ve uygulamaları gün geçtikçe gelişmektedir. Özellikle, roket ve uçakların uçuş sırasında üzerinde oluşan kuvvetlerin bulunması gün geçtikçe önem kazanmaktadır. Roket ve uçakların tasarımları ve elde mevcut olan tasarımlardaki değişiklikler ancak bu kuvvetlerin bilinmesi ile mümkün olmaktadır. Güdümzsüz ve güdümlü roketlerin uçuş simülasyonları, yine uçaklar üzerine takılabilcek çeşitli aygıtların uçuşu ne şekilde etkileyeceği bu kuvvetlerin çeşitli uçuş şartlarında hesaplanabilmesi ile gerçekleşmektedir. Bu nedenle uçan bir cisim üzerinde oluşan kuvvetlerin hesaplaması son derece önemlidir. Bu proje çerçevesinde, sıkıştırılabilen bir akişkan içerisinde ses altı, ses etrafi ve ses üstü hızlarda uçan üç boyutlu bir cisim etrafındaki akış Navier-Stokes denklemleri kullanılarak bulunmaktadır. Geliştirilen yazılım C++ bilgisayar derleme dili kullanılarak etkileşimli olarak hazırlandığı için kullanıcıların yazılımın detaylarını öğrenmeden hesaplama yapmaları mümkün olmaktadır. Araştırmacılar, projeye destek sağlayarak gerçekleşmesine yardımcı olan Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu, Makina, Kimyasal Teknolojiler Malzeme ve İmalat Sistemleri Araştırma Grubuna katkılarından dolayı teşekkür ederler.

ÖZ

Laminer ve türbülant akışların zamanla değişmeyen çözümlerini elde etmek için üç boyutlu, Reynolds averajlı Navier-Stokes denklemlerini çözen bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Reynolds averajlı Navier-Stokes denklemleri, ikinci dereceden hassas, tek adımlı Lax-Wendroff şeması ve hücre köşeli (cell vertex) sonlu hacim metodu kullanılarak sayısal olarak ayrıntılmıştır. Türbülant viskositenin hesaplanması için Baldwin-Lomax türbülans modeli kullanılmıştır.

Belirli zaman ilerlemeli (explicit time-marching) bu çözümü hızlandırılmak için bölgesel zaman adımı kullanılmıştır. Salınımları gidermek için ikinci ve dördüncü derece yapay sökümleme uygulanmıştır. Uzak bölge sınırlarında karakteristik sınır şartları kullanılırken, bu çalışmada durgun alınan katı duvarlar üzerinde kaymamazlık sınır şartı kullanılmıştır.

Programlama ortamı olarak, C++ programlama dili seçilmiştir. Çözüğün görsel bir versiyonunu oluşturmak için Nesneye-Yönelik Programlama (Object-Oriented Programming) kullanılmıştır. Çözüğün giriş dosyalarının ve gerekli parametrelerinin daha kolay ele alınması için bir arayüz hazırlanmıştır.

Üçü laminer, ikisi türbülant olan beş test durumu ele alınmıştır. İlk olarak, programın geçerliliğinin onaylanması için düz plaka üzerindeki laminer akış çözülmüş ve analitik çözümle karşılaştırılmıştır. Daha sonra biri sesaltı ve biri sesüstü durumlarda olan iki laminer akış, dairesel yay kaskadlarının üzerinde denenmiştir. Bir sonraki durum ise türbülans modelinin test edilmesi için denenen düz plaka üzerindeki türbülant akış olarak alınmıştır. Son olarak, NACA-0012 kanadının üzerindeki sescivarı, türbülant akış ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Reynolds Averajlı Navier-Stokes Denklemleri, Sonlu Hacim Metodu, Baldwin-Lomax Türbülans Modeli, C++ Programlama Dili, Nesneye Yönelik Programlama

ABSTRACT

A computer program, which solves three-dimensional, unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations, is developed in order to obtain steady solutions of laminar and turbulent flows. The Reynolds Averaged Navier-Stokes equations are discretized in conservative form with a second order accurate, one-step Lax-Wendroff scheme combined with a cell-vertex finite volume formulation. For the calculation of the turbulent eddy viscosity, the Baldwin-Lomax turbulence model is employed.

In order to accelerate this explicit, time-marching scheme local time stepping is used. Second and fourth order artificial smoothing is applied for stabilizing the oscillations. The characteristic type boundary conditions are applied at the far field boundaries, whereas the no-slip boundary conditions are applied on the solid walls, which are taken to be stationary in this study.

C++ programming language is selected as the programming environment. Object-oriented tools of C++ are used to construct a visual version of the solver. An interface is prepared for easier handling of the input files and the required parameters of the solver.

Five test cases are handled three for laminar and two for turbulent flows. First of all, the laminar flow over a flat plate is solved and compared with the analytical solution to validate the solver. Then two laminar flow cases over circular arc cascades are attempted one for the subsonic and the other for the supersonic conditions. The next case is the turbulent flow over a flat plate, which is attempted in order to check the turbulence model implemented. Finally, a turbulent, transonic flow over a NACA-0012 airfoil is handled.

Keywords: Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations, Finite Volume Method, Baldwin-Lomax Turbulence Model, C++ Programming Language, Object-Oriented Programming

DİZİN

ÖNSÖZ.....	ii
ÖZ	iii
ABSTRACT	iv
DİZİN	vii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
SEMBOL LİSTESİ	xi
BÖLÜM	
1. GİRİŞ	1
2. DENKLEMLER	9
2.1 Navier-Stokes Denklemleri	9
2.2 Yapışkanlık Katsayısının ve Isı İletkenliğinin Hesaplanması	13
2.2.1 Katmanlı Yapışkanlık Katsayısının Hesaplanması	13
2.2.2 Baldwin-Lomax Tedirginlik Modeli	14
2.3 Türevlerin Ayrıştırılması	16
3. SAYISAL ŞEMA	19
3.1 Çözüm Tekniği	19
3.2 Sürtünme ve Isı İleten Terimlerin Hesaplanması	33
3.3 Suni Yumuşatma Terimleri	36
3.4 Yöntemin Kararlılığı	37
4. SINIR ŞARTLARI	41
4.1 Sınır Şartı Uygulanması	42
4.2 Karakteristik Tip Sınır Şartları	42
4.2.1 Sesaltı Giriş	47

4.2.2	Sesüstü Giriş	49
4.2.3	Sesaltı Çıkış	50
4.2.4	Sesüstü Çıkış	51
4.3	Simetri Sınır Şartı	51
4.4	Katı Duvar Sınır Şartı	54
4.5	Uzak-Alan Sınır Şartı	55
5.	PROGRAMLAMA DETAYLARI	56
5.1	NS++'ın Detayları	57
5.2	NS++'ın Nesneye-Yönelik Yapısı	64
6.	SONUÇLAR	66
6.1	Katmanlı Düz Plaka Problemi	68
6.2	Sesaltı Dairesel Yay Kaskadı	71
6.3	Sesüstü Dairesel Yay Kaskadı	76
6.4	Tedirgin Düz Plaka Problemi	81
6.5	NACA-0012 Kanadı Üzerinde Tedirgin Sescivanı Akış	84
7.	GÖRÜŞLER ve VARILAN SONUÇLAR	88
7.1	Özet ve Görüşler	88
7.2	Gelecek için Tavsiyeler	89
	KAYNAKLAR	91
	EKLER	
A.	YÜZEY ALANLARININ HESAPLANMASI	96
B.	METRİKLERİN HESAPLANMASI	103

ŞEKİL LİSTESİ

ŞEKİLLER

3.1	Akiş alanının tipik bir hücresi	24
3.2	Şekil 3.1'deki nokta 1'i çevreleyen hücreler	25
3.3	Şekil 3.1'deki nokta 1'i çevreleyen hücrelerin ayrılmış formu	25
3.4	Değiştirilmiş kontrol hacmi AB-C-D-E-F-G-H 'nin hücre i'in içinde kalan kısmı	26
3.5	Hücre I için yüzey vektörleri	30
5.1	NS++'ın açılış ekranı	59
5.2a	Artıkların tarihçesi	60
5.2b	Düz plaka akışının çözümü için hız profili	61
5.3	Tipik bir proje dosyası	62
5.4	Tipik bir veri dosyası	63
5.5	Sayısal akış alanının tipik yüz ve yamaları	64
5.6	Tipik bir sınır şartı dosyası	64
5.7	NS++'da kullanılan sınıflar	66
5.8	NS++'da kullanılan sınıfları gösteren bir üç boyutlu akış alanı	66
6.1	Düz plaka probleminin H-tipi hesaplama ağı	68
6.2	Plakanın %50'sindeki akış yönündeki hız profili	69
6.3	Plakanın %50'sindeki akışa dik hız profili	70
6.4	Plakanın üstündeki yüzey sürtünme katsayısı dağılımı	70
6.5	Katmanlı düz plaka test durumu için artık tarihçesi	71
6.6	Sesaltı dairesel yay kaskadı için H-tipi hesaplama ağı	72
6.7	Kaskadın üstündeki yüzey sürtünme katsayısı dağılımı, mevcut çözüm	73
6.8	Kaskadın üstündeki basınç dağılımı, mevcut çözüm	73

6.9	Kaskadın üstündeki yüzey sürtünme katsayısı dağılımı, Kallinderis ve Baron [38]	74
6.10	kaskadın üstündeki basınç dağılımı, Kallinderis ve Baron [38]	74
6.11	Sesaltı dairesel yay kaskadının artık tarihçesi	75
6.12	Kaskadın üstündeki yüzey sürtünme katsayısı dağılımı, mevcut çözüm	77
6.13	Kaskadın üstündeki basınç dağılımı, mevcut çözüm	77
6.14	Kaskadın üstündeki yüzey sürtünme katsayısı dağılımı, Kallinderis ve Baron [38]	78
6.15	Kaskadın üstündeki basınç dağılımı, mevcut çözüm, Kallinderis ve Baron [38]	78
6.16a	Sesüstü kaskad durumu için isoMach eğrileri	79
6.16b	Sesüstü kaskad durumu için isoMach eğrileri	79
6.17	İsoMach eğrileri, Kallinderis ve Baron [38]	79
6.18	Sesüstü kaskad durumu için şok dalgası-sınır tabakası etkileşim bölgesinin yakın görüntüsü, mevcut çözüm	80
6.19	Sesüstü kaskad durumu için şok dalgası-sınır tabakası etkileşim bölgesinin yakın görüntüsü, Kallinderis ve Baron [38]	80
6.20	Tedirgin düz plaka durumu için yüzey sürtünme katsayısı dağılımı	83
6.21	Tedirgin düz plaka problemi için u^+ - y^+ grafiği	83
6.22	Tedirgin düz plaka problemi için artık tarihçesi	84
6.23	Tedirgin, sescivarı NACA-0012 test durumunun C-tipi hesaplama ağı	86
6.24	Tedirgin, sescivarı NACA-0012 test durumu için kanadın üzerindeki basınç katsayısı dağılımı	86
6.25	Tedirgin, sescivarı NACA-0012 test durumu için isoMach eğrileri, mevcut çözüm	87
6.26	Tedirgin, sescivarı NACA-0012 test durumu için isoMach eğrileri, Tınaztepe [27]	87
A.1	Yüzey vektörleri A_1 , A_2 ve A_3	99
A.2	Hücrenin bölümleri	100

SEMBOL LİSTESİ

\vec{A}	yüzey vektörü
c	ses hızı
c_p	sabit basınçtaki özgül ısı
C_p	basınç katsayısı
e	birim hacimdeki toplam enerji
F	x -yönündeki sürtünmesiz akı vektörü
G	y -yönündeki sürtünmesiz akı vektörü
H	z -yönündeki sürtünmesiz akı vektörü
h	toplam entalpi
\vec{i}	x -yönündeki birim vektör
\vec{j}	y -yönündeki birim vektör
J	Jakobian
\vec{k}	z -yönündeki birim vektör
L	benzerlik matrisi
M	Mach sayısı
\vec{n}	birim normal vektör
p	basınç
Pr	Prandtl sayısı
Q	korunabilir değişken, uzay koordinatını temsil eden değişken
q	ısı akısı
\vec{r}	pozisyon vektörü
Re	Reynolds sayısı

\vec{S}	yüzey vektörü
t	zaman
T	sıcaklık
U	korunabilir değişken vektörü
u	x -yönündeki hız bileşkesi
\vec{V}	hız vektörü
v	y -yönündeki hız bileşkesi
w	z -yönündeki hız bileşkesi
W	karakteristik değişken vektörü
x	fiziksel alandaki uzaysal değişken
y	fiziksel alandaki uzaysal değişken
z	fiziksel alandaki uzaysal değişken

Yunan Harfleri

Δ	birinci dereceden değişme operatörü
Δt	zaman adımı
ΔV	hücre hacmi
Δ^2	ikinci dereceden değişme operatörü
A	diagonal haldeki Jakobian matrisi
α	akış açısı
δ	düzelte operatorü
γ	özgül ısılارın oranı
λ	diagonalize olmuş jakobian matrisinin özdeğerleri
κ	ısı iletkenliği
μ	yapışkanlık
ρ	yoğunluk
σ	suni yumuşatma katsayısı
τ	kesme gerilmesi
ξ	sayısal alanda bölgesel koordinat
η	sayısal alanda bölgesel koordinat, Blasius benzerlik değişkeni

ζ	sayısal alanda bölgесel koordinat
∇	gradyan operatörü
∂	kısmi türev operatörü
ω	burgaç

Altışaretler

b	binormal
<i>corrected</i>	düzeltilmiş değer
<i>far</i>	uzak-alan değeri
i	nokta indeksi
∞	uzak-alan değeri
<i>inviscid</i>	sürtünmesiz
<i>lam</i>	katmanlı
n	normal yön
<i>predicted</i>	tahmin edilen değer
s	teğetsel yön
<i>total</i>	toplam değer
<i>tur</i>	tedirgin
v	aklı vektörünün sürtünmeli bileşkesi
<i>viscous</i>	sürtünmeli
<i>wall</i>	duvarın üzerinde hesaplanan değer

Üstışaretler

n	zaman adımı
-	bir önceki zaman adımdından bilinen değer
\otimes	ilkel form
+	boyutsuz tedirginlik değişkeni

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bir akışkanın hareketi üç boyutlu Navier-Stokes denklemleri ile açıklanabilir. Bu yüzden, Sayısal Akışkan Dinamiğinin (SAD) en önemli hedefi Navier-Stokes denklemlerinin değişik problemler için çözümlerini elde etmektir. Denklemler sisteminin tamamlanması için, akışkanın yapışkanlık katsayısı (vizkosite) ve ısı iletkenliği deneysel sonuçlar kullanılarak, sıcaklığa bağlı formüller, yani tamamlayıcı denklemler haline getirilir. Hirsch'in [1] de belirttiği gibi, katmanlı (laminar) bir akışta bütün akış fenomenlerinin tanımı için yukarıda bahsedilen tamamlayıcı denklemlerle birlikte Navier-Stokes denklemlerinden başka bir bilgiye gerek yoktur. Ancak, hız ve diğer akış özelliklerinin rasgele düzensiz değişimler gösterdiği tedirgin (turbulent) akışlar için bu geçerli değildir. Mevcut düzensiz değişimlerden ötürü karakteristik bir özellik olarak zamana bağlılık gösteren bu tür akışların ele alınması için, zamana bağlı ortalama alınması gereklidir.

Bu ortalama alma işlemi ilk olarak 1895'te Reynolds tarafından ele alınmış ve bugün Reynolds Ortalamalı Navier-Stokes denklemleri olarak bilinen denklemler ortaya çıkarılmıştır. Bu denklemlerin üç boyutlu şekli, düzensiz değişimlerden ötürü ortaya çıkan dokuz fazla terim içermektedir. Bu dokuz terim, Reynolds gerilimleri olarak adlandırıldılar ve taşınım terimleri olarak değil de, tedirginlik nedeniyle ortaya çıkan gerilim terimleri olarak kabul edildiler.

Boussinesq, Reynolds'la birlikte diğerlerini tedirgin akışların çözümlerine götüren en önemli araştırmacılardan biri oldu. 1877'de çalkantı yapışkanlık katsayısı (eddy viscosity) kavramını geliştirdi. Reynolds streslerinin, çalkantı yapışkanlık katsayısı ve ortalama akış hızının türevlerinin çarpımıyla değiştirilmesi bugünkü tedirginlik modellerinin temelini hazırladı. Boussinesq ve Reynolds, zaman-averajlı

Navier-Stokes denklemlerinin temelini hazırlamalarına karşın ikisi de bu denklemleri çözmeye çalışmadılar.

1904'te Prandtl tarafından sınır tabakasının keşfi, sürtünmeli akışların çözümlerine ön ayak oldu. Özel olarak tedirgin akışlar içinse, ilk çözüm 1925'te yine Prandtl'dan geldi. Prandtl, çalkantı yapışkanlık katsayısı kavramına uygun olan karmaşık uzunluğu modelini geliştirdi. Takip eden onyıllarda bir çok araştırmacı karmaşık uzunluğu hipotezi üzerinde çalıştı, ki bunların en önemlilerinden biri de von Karman'dı.

Daha sonraları Prandtl, 1945'te tedirgin kinetik enerji, k , için bir denklem geliştirdi. Tedirgin kinetik enerjiyi çalkantı yapışkanlık katsayısını hesaplamak için kullandı ve bu da tek-denklemli tedirginlik modelleri kavramını geliştirdi. Prandtl'dan sonra 1942'de Kolmogorov kendi $k-\omega$ modelini geliştirdi ve ω 'yı enerjinin birim zaman ve hacimdeki dağılıma hızı olarak tanımladı. Bu çalışma iki-denklemli tedirginlik modelleri kavramını ortaya çıkardı. Kolmogorov'dan sonra Rotta, 1951'de, Wilcox'un [2] deyişiyle ikinci dereceden kapamalı modellerin ilkini geliştirdi.

Bugün mevcut olan tedirginlik modelleri çalkantı yapışkanlık katsayısının hesaplanmasıında kullandıkları değişik yöntemlere göre dört farklı guruba ayrılabilirler. İlk grup, çalkantı yapışkanlık katsayısını hesaplamak için cebirsel formüller kullanan cebirsel gerilim modelleri ya da diğer adıyla sıfır-denklemli modellerdir. Bu gurubun en çok rastlanan modeli 1974'te bulunan meşhur Cebeci-Smith modelidir. Sonraları Baldwin ve Lomax, Cebeci ve Smith'in modelinden sınır tabakasının ucunu bulmayı önleyen daha sağlam bir model geliştirdiler. Bu çalışmada da Baldwin-Lomax tedirginlik modeli kullanılmıştır. Baldwin-Lomax tedirginlik modeli kullanılarak yapılan benzer çalışmalar arasında Knight [3, 4], Horstman et al. [5] ve Abdol-Hamid et al. [6] sayılabilir. Knight'in [3] ilk çalışması değişik rampa açılarındaki sesüstü sıkıştırma köşeleri üzerine yoğunlaşır. Özellikle sesüstü sıkıştırma köşeleri için geliştirilmiş olan üç değişik Baldwin-Lomax formülasyonu sunulmuştur. Knight [3] orjinal Baldwin-Lomax tedirginlik modelinin bu problemde tedirgin yapışkanlık katsayısını doğru olarak hesaplayamadığını vurgular ve yeni bir formülasyon sunar. Diğer çalışmasında Knight [4], sıfır ve iki-denklemli tedirginlik modellerini de kapsayan çeşitli tedirginlik modellerinin formülasyonlarını sunar. Sunulan bu modelleri kullanarak elde ettiği bazı sonuçları da verir. Baldwin-Lomax tedirginlik modeli de sunulan bu modeller arasında bulunmaktadır. Horstman ve diğerlerinin [5] çalışması

Baldwin-Lomax tedirginlik modelinin gerçek bir test durumundaki performansını görmek açısından güvenilir bir kaynak olarak kabul edilebilir. Horstman ve diğerleri [5], şok dalgası-tedirgin sınır tabakası etkileşimli bir akış için hem deneyel hem de sayısal sonuçlar sunar. Çalışmanın sayısal bölümü Baldwin-Lomax tedirginlik modelini kullanır ve karşılaştırma amacıyla ortalama ve düzensiz değişen akış özelliklerile tedirgin kesme gerilimlerinin grafiklerini verir. Baldwin-Lomax tedirginlik modelinin performansını görmek için literatürde bulunabilecek en iyi çalışmalarдан biri de Abdol-Hamid ve diğerlerinininkidir [6]. Hem Baldwin-Lomax, hem de $k-\varepsilon$ tedirginlik modelini kullanırlar. Bunlardan ilki cebirsel, ikincisiyse iki-denklemli tedirginlik modelidir. Ele alınan test durumları arasında düz plaka üstündeki sesüstü akış, sesüstü sıkıştırma köşesi, sesaltı kanat akışı ve kare bir boru içindeki akış gösterilebilir. Bahsedilen akışlardaki cisimler üzerinde iki ayrı tedirginlik modeliyle elde edilen hız profilleri, yüzey sürtünme katsayıları ve basınç dağılımları karşılaştırılmıştır.

Tedirginlik modellerinin ikinci grubu tek-denklemli modellerden oluşur. Tarihte geliştirilen ilk başarılı tek-denklemli tedirginlik modeli 1967 yılında Bradshaw, Ferriss ve Atwell tarafından sunulmuştur. Bu tür modellemede en son çalışmalar Spalart-Almaras ile Baldwin-Barth'a aittir. Bu modellere kısa birer giriş için Wilcox'a [2] başvurulabilir.

Bir sonraki gurup iki-denklemli tedirginlik modellerinden oluşur. Bu kategorideki ilk model yukarıda da açıklanan $k-\omega$ tedirginlik modelidir. Bu tedirginlik modelilarındaki detaylar da Wilcox'da [2] bulunabilir. Diğer bir popüler iki-denklemli tedirginlik modeli de meşhur $k-\varepsilon$ türbülans modelidir. Bu model üstündeki en kapsamlı çalışma Launder ve Spalding tarafından 1972'de yapıldı. O zamandan bu yana bir çok araştırmacı bu modeli kullanılar ve model üzerinde gelişmeler elde ettiler. $k-\varepsilon$ tedirginlik modeli üzerinde yapılan çalışmalar arasında Lakshminarayana [7, 8], Mohammadi [9, 10] ve Gerolymos'unkiler [11, 12] gösterilebilir. Lakshminarayana [7, 8] $k-\varepsilon$ tedirginlik modeli için geliştirdiği formülasyonu sunarken Mohammadi [9, 10] çeşitli cisimler üzerinde elde ettiği sayısal sonuçları verir. Bu iki araştırmadan ilkine modelin duvar yakını (near wall) formülasyonu hakkında detaylı bir görüş almak için, diğerine ise iki-denklemli modelin çeşitli test durumlarındaki performansını görmek için başvurulabilir.

Tedirginlik modellerinin son gurubu Boussinesq yaklaşımını ve de dolayısıyla çalkantı yapışkanlık katsayısının hesaplanması önleyen ikinci-dereceden kapama modellerinin kategorisine düşer. Ancak, bu yaklaşım çok fazla sayıda denklemin çözülmesi ihtiyacını doğurur ki bu da çok büyük bilgisayar kaynakları gerektirir. Bu tür modellerin kullanılmasını gerektiren en önemli ihtiyaç iki-denklemli modellerin içinde hatırı sayılır miktarda cisim kuvveti ya da kompleks gerginlik alanları bulunan akışları çözememesinden kaynaklanır. İkinci-dereceden kapamalı modellerin dezavantajı ekstra kıştı diferansiyel denklemleri çözmek için gereken büyük bilgisayar kaynaklarıdır [13]. Şu da söylenebilir ki bu modellerle yapılan çalışmaların sayısı iki-denklemli, bir-denklemli ve cebirsel modellerle yapılan çalışmaların sayısından çok azdır. Sonuç olarak ikinci-dereceden kapamalı modeller literatürde diğerleri kadar onaylanmamıştır.

Yukarıda kısaca açıklanan bütün modeller tedirginliğin ortalama akış değişkenlerinin üzerindeki etkilerini bulmak için kullanılır. Reynolds gerilimlerini ayrıca hesaplayabilen ikinci-dereceden kapamalı modeller buna bir istisna olarak gösterilebilir [13]. Ancak, tedirgin akışları çözmek için bazı veya bütün tedirginlik ölçeklerinin, yani çalkantıların (eddys) modellenmek yerine çözüldüğü daha genel bir yaklaşım yapılabilir. Bu teknikler Büyük Çalkantı Simülasyonu (BES) ve Direkt Sayısal Simülasyondur (DSS). BES'de zamana bağlı akış denklemleri tedirgin akış alanının en büyük çalkantıları ve ortalama akış özellikleri için çözülür. Sadece küçük çalkantıların etkileri modellenir. Böyle bir BES çalışması Knight [14] tarafından yapılmıştır ve daha detaylı bilgi bu çalışmada bulunabilir. BES'den daha kapsamlı olarak DSS çalkantıların etkilerini modellemez ve bunun yerine bütün seviyelerdeki çalkantılar için akış denklemlerini çözer. Dolayısıyla BES ve DSS çözümleri ikinci dereceden kapamalı modeller için gerekenden çok daha güçlü bilgisayar kaynakları gerektirir [13].

Buraya kadar tedirginlik olgusuna yapılan yaklaşımlar sunulmuştur. Tedirginlik modellemesinin tarihi, sebepleri ve geleceği hakkında detaylı bir açıklama Lumley'de [14] bulunabilir. En çok kullanılan modeller üzerinde de yorumda bulunmaktadır. Marvin [15] modellemenin sebepleri hakkında kısa bir açıklama verir ve en çok kullanılan modelleri listeler. Aynı zamanda çeşitli akışlar için elde edilen sayısal ve deneySEL sonuçlar hakkında karşılaştırmalar sunar. Lumley [14] ve Marvin'in [15] çalışmaları tekrar materyali olarak nitelendirilebilir ve tedirginlik modellemesinin SAD içindeki yeri hakkında bilgi edinmek için kullanılabilirler.

Diğer yanda, problemin türüne ve akışın hedeflenen özelliklerine göre Navier-Stokes denklemlerine de bazı yaklaşımalar yapılabilir. İlk mantıklı yaklaşım, Hirsch'in [1] de dediği gibi yüksek Reynolds sayılı akışlarda akış yönündeki sürtünme dağılıma terimlerinin ihmali edildiği ince kesme tabakası (thin shear layer) tahminidir. Böyle akışlarda sınır tabakası çok incedir ve ince kesme tabakası yaklaşımı sınır tabakası yüzeyle bağlı kaldığı ya da en kötü ihtimalle çok az bir ayrılma olduğu sürece geçerlidir.

Bir sonraki yaklaşım düzeyi Prandtl'ın [16] bulduğu sınır tabakası kavramı sayesinde ortaya çıkar. Yine ayrılmayan, yüzeye bağlı bir sınır tabakasının olduğu akışlarda sürtünmeli ve sürtünmesiz (inviscid) bölgeler ayrılabilir. Sürtünme gerilimlerinin etkileri duvara yakın olan sınır tabakasına indirgenir ve sınır tabakasının dışında kalan akış sürtünmesiz kabul edilir. Navier-Stokes denklemlerine böyle bir yaklaşım yapmanın temel amacı bilgisayar hafızasında depolanacak olan kesme gerilimi terimlerinin sayısını azaltmaktadır. Sınır tabakasının dışında sürtünmesiz akış denklemlerinin kullanımı basınç dağılımı üzerinde tatlınkar sonuçlar doğurur ve bütün akış alanının daha basit bir analizini sağlar. Sürtünmenin etkileri sadece sınır tabakasının içinde akışın yüzey sürtünme katsayısı gibi sürtünme özelliklerini bulmak için dikkate alınır. Bu tür yöntemler sürtünmeli-sürtünmesiz (viskos-inviscid) etkileşim yöntemleri olarak adlandırılırlar [1] ve ayrılmayan akışlar için verimli çözümler elde etmek için değerli araçlardır.

Sonuncu düzeydeki yaklaşım Navier-Stokes denklemlerinin sürtünmesiz tipi olan Euler denklemleridir. Aynı zamanda akışkanın ısı iletmediği de varsayıılır. Yukarıda da belirtildiği gibi bir akış alanının basınç dağılımı Euler denklemleri kullanılarak doğru olarak bulunabilir. Gerekli bilgisayar kaynakları Navier-Stokes denklemlerini çözmek için gerekenden çok daha az olduğu için bu yöntem çok verimli bir yaklaşımındır. Euler denklemlerinin çözümleri kanatlar üzerindeki kaldırma katsayılarını, füzeler ve diğer bir çok cisim üzerindeki basınç dağılımlarını tespit etmede kullanılmıştır.

Son yirmi yılda bilgisayar teknolojisinde elde edilen inanılmaz gelişmeler sayesinde şu an SAD dizayn ve üretim mühendisleri için çok kritik bir durumdadır. Günümüzün güçlü bilgisayarlarını kullanıp çoklu ağ (multigrid) yöntemleri [17-21] gibi hızlandırma tekniklerini ve hızlı kapalı (implicit) çözme algoritmalarını [22, 23]

uygulayarak bir çok cisim üzerindeki tedirgin akış alanlarının analizlerini yapmak mümkün olmuştur. Düzensiz değişen basınç ve hız bileşkeleri gibi tedirginlik olgularının hakkında çok daha detaylı bilgi verebilen BES ve DSS bile paralel hesaplama teknikleri kullanılarak mümkün olmuştur.

Bu çalışma SAD'ı katmanlı ve tedirgin akış tahminlerinde kullanmak ve yüzey sürtünme katsayısı, hız dağılımları gibi sürtünmeli akış olguları hakkında daha detaylı bilgi edinebilmek için başlatılmıştır. Bu amaçla Navier-Stokes denklemleri ele alınmıştır. Denklemlerin ayırtırılması için zamanda ve uzayda ikinci dereceden olan tek adımlı Lax-Wendroff şeması bir hücre-köşeli sonlu hacim metoduyla birlikte kullanılmıştır. Şok yakalayan çözümü için Navier-Stokes denklemlerinin korunabilir (conservative) şekli kullanılmıştır. Akış özelliklerinin güçlü değişimlerinin olduğu bölgelerde ortaya çıkan sayısal titreşimleri yumuşatmak için hem ikinci-dereceden hem de dördüncü-derceden suni yumuşatma [24-26] kullanılmıştır. Şemanın açık (explicit) karakteri sebebiyle izin verilen zaman adımına CFL kriteri kullanılarak bir sınır koyulmuştur. Sınırlı hacim integrasyonu için altigen, düzgün (structured) ızgaralar kullanılmıştır. Belirli, zamanda ilerleyen bir şema kullanıldığı için zamanla değişmeyen durum çok fazla iterasyondan sonra elde edilmiştir. Bu yaklaşım işlemini hızlandırmak için bölgesel zaman adımı tekniği kullanılmıştır. Sınırlar için aslında Euler denklemleri gibi hiperbolik bir denklem seti oluşturan denklemler için olan karakteristik sınır şartları kullanılmıştır. Ancak, zamana göre değişen Navier-Stokes denklemlerinin kompleks hiperbolik-parabolik yapısı viskosite ve ısı iletkenliğinin kaybolduğu sürtünmesiz bölgelerde hiperbolik karaktere dönüşür. Bu da çözümün hiperbolik sınır şartlarını kullanabilmesini mümkün kılar. Bu tarz bir yaklaşımın örnekleri Tınaztepe [27] ve Gerolymos'da [11] bulunabilir.

Bu çalışma Sert'in [28] çalışmasının devamıdır ve onun C++ diliyle yazılmış olan üç-boyutlu Euler çözümü başlangıç noktası olarak alınmıştır. Dolayısıyla, mevcut çözüm de C++ programlama dili [29, 30] kullanılarak yazılmıştır. Sert'in kullandığı Nesneye-Yönelik Programlama (NYP) yapısı aynı tutulmuş ama Navier-Stokes denklemlerinin fizigiyle alakalı olarak bazı yeni üye fonksiyonları ve özel değişkenler eklenmiştir. Bir akış alanının fiziksel bölümleri beş sınıffa temsil edilmiştir. Ele alınan değişik problemler için gerekli veri dosyalarını yüklemek ya da değiştirmek amacıyla bir kullanıcı arabirimini geliştirilmiştir.

Karışık Lax-Wendroff, sonlu hacim yaklaşımının dağıtım formülleri Ni'den [18] alınmıştır. Ni [18], ikinci-dereceden değişim formüllerini de bu çalışmasında açıklamaktadır. Anderson'ın [31] da dediği gibi Euler denklemlerini çözmek için kullanılan sayısal ayrıştırma teknikleri Navier-Stokes denklemlerini çözmek için de geliştirilerek kullanılabilir ve aslında sürtünmeli akış problemlerini çözmeye kullanılan metotların büyük bir bölümü Euler denklemlerini çözmek için geliştirilen metotlardan elde edilmiştir. Bu gerçekten faydalananarak Navier-Stokes denklemlerinin sürtünmesiz akıları, yine Lax-Wendroff şemasını sonlu hacim metoduyla birleştiren Sert'in [28] Euler çözümçüsünün kullandığı teknikle ayrıstırılmıştır. Ancak, Navier-Stokes denklemlerine uzantı olarak sürtünmeli terimlerin hesaplanması gösterilebilir. Bu amaç için literatürde bir çok değişik yaklaşım mevcuttur. İlk ve en basit olan yaklaşım Ni'ye [19] aittir ve türevler noktasal olarak ikinci-dereceden hassas sonlu fark formülleriyle hesaplanır. Bir sonraki yaklaşım Jameson [32] tarafından tanıtılmıştır ve aynı zamanda Tınaztepe [27] tarafından da kullanılmıştır. Bu metotta türevler hücre bazlı hesaplanmış, dolayısıyla hücre-köşeli yöntem sürtünmesiz akıların hücre köşelerinde, sürtünmeli akılarınsa hücre merkezlerinde saklandığı bir hibrid şema haline dönüşmüştür. Bu şemanın ilk bahsedilenden daha kararlı olduğu gözlenmiştir. Hücre-köşeli metotlar hakkında daha detaylı bilgi Chima ve Johnson [21], Swanson ve Radespiel [33, 34] ve Morton et al.'de [35] bulunabilir. Chima ve Johnson [21], ikinci dereceli değişimler için Ni tipi formülasyonu olan Lax-Wendroff metodu için bir formülasyon verir. Ancak, tümseklerin üzerindeki akılar için MacCormack metodunu kullanırlar ve hem Euler hem de Navier-Stokes denklemlerinin sonuçlarını elde ederler. Swanson ve Radespiel [33] Navier-Stokes denklemlerinin çözümü için bir hücre-köşeli ve bir de hücre-merkezli şemanın karşılaştırması üzerinde dururlar. Kanatlar üzerindeki sescivarı akıslarda bir kaç değişik hesaplama ağıyla elde edilen yüzey sürtünme ve basınç katsayılarının çeşitli grafikleri sunulmuştur. Çalışma aynı zamanda aynı test durumu için hücre-köşeli ve hücre-merkezli şemaların yaklaşım tarihlerini de vermektedir. Swanson ve Radespiel [34] de hücre-köşeli bir metotta yaklaşım hızlanması için elde ettikleri gelişmeleri sunarlar. Kapalı artık (Implicit residual) yumoşatması ve bölgesel zaman adımı gibi teknikler açıklanmaktadır. Morton ve diğerlerinin [35] çalışması hücre-köşeli, sonlu hacim yöntemleri üzerine genel bir araştırmadır. Sürtünmeli terimlerin hesaplanması için bir çok yöntem verilir ve değişik

ikinci-derece ve dördüncü-derece yumusatma katsayılarıyla kanatlar üzerindeki sürünlü akışlar için elde edilen sonuçlar da sunulur.

Akış özelliklerinin türevlerini hesaplamak için üçüncü yaklaşım yine Ni'ye [20] aittir, ki mevcut çalışmada da bu yöntem kullanılmıştır. Bu kez de Jameson'ından [32] biraz farklı bir hücre bazlı hesaplama tekniği sunulmuştur. Bu hesaplama yönteminin detayları Bölüm 3'te verilmiştir.

Geliştirilen kod üzerine buraya kadar verilen açıklamalarla bu çalışmanın taslağı şöyle verilebilir. Bölüm 2 Reynolds Ortalamalı Navier-Stokes denklemlerini açıklamaktadır. Katmanlı yapışkanlık ve ısı iletkenliği için kullanılan tamamlayıcı denklemler de verilmiştir. Tedirgin çalkantı yapışkanlık katsayısını hesaplamak için kullanılan Baldwin-Lomax tedirginlik modeli de bu bölümde sunulmuştur. Üçüncü bölüm hakim denklemlerin sayısal ayrıştırma metodunu verir. Ni tipi dağıtım formülleri çıkarılmış ve sürünlü terimlerin hesaplanması açıklanmıştır. Aynı zamanda, suni yumusatma terimleri de verilmiş ve sayısal kararlılık için gereken durum açıklanmıştır. Yukarıda da bahsi geçen karakteristik sınır şartları ve bunların çıkarılması dördüncü bölümde verilmiştir. Beşinci bölüm mevcut çözümün nesneye-yönelik yapısının hakkında kısa bir açıklama ve geliştirilen kullanıcı arabiriminin tanıtımı için ayrılmıştır. Bölüm 6, ele alınan beş test durumu için elde edilen sonuçları vermektedir. Son olarak, çalışma üzerine görüşler ve varılan sonuçlar, gelecekteki çalışmalar için düşünülen önerilerle birlikte yedinci bölümde verilmiştir.

BÖLÜM 2

DENKLEMLER

Bu çalışmada ele alınan sıkıştırılabilen, sürtünmeli, ısı ileten akışkanın hareketi durgun bir referans koordinatına göre yazılmış olan Navier-Stokes denklemleri tarafından açıklanabilir. Aslında hava olarak alınan akışkanın üzerinde hiç bir cisim kuvvetinin etkimedigi de kabul edilmiştir. Denklemler sistemini kapatmak için durum denklemi bu çalışmadaki test durumlarda kabul edilebilir olan kusursuz gaz kanunu olarak yazılır. Yukarıda bahsedilen denklemlere ek olarak yapışkanlık ve iletkenliğin hesaplanması için tamamlayıcı denklemler de kullanılmıştır.

Navier-Stokes denklemleri üç-boyutlu ve korunabilir şekilde bir Cartesian koordinat sisteminde kabul edilmişlerdir. Bu denklemlerin açık hali ve yukarıda bahsedilen tamamlayıcı denklemler bu bölümde sunulmuştur.

2.1 NAVIER-STOKES DENKLEMLERİ

Navier-Stokes denklemlerinin bir Cartesian koordinat sistemindeki vektörel yazılımları şöyledir

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} + \frac{\partial H_v}{\partial z} \quad (2.1)$$

Burada

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uh \end{bmatrix} \quad (2.3.a)$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vh \end{bmatrix} \quad (2.3.b)$$

$$H = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho v^2 + p \\ \rho wh \end{bmatrix} \quad (2.3.c)$$

$$F_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xx}u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w - q_x \end{bmatrix} \quad (2.4.a)$$

$$G_u = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{yx}u + \tau_{yy}v + \tau_{yz}w - q_y \end{bmatrix} \quad (2.4.b)$$

$$H_u = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{zx}u + \tau_{zy}v + \tau_{zz}w - q_z \end{bmatrix} \quad (2.4.c)$$

Stokes'un yapışkanlık kanununu kullanarak kesme gerilimleri şöyle yazılabilir:

$$\tau_{xx} = \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (2.5a)$$

$$\tau_{yy} = \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (2.5b)$$

$$\tau_{zz} = \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.5c)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.5d)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.5e)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.5f)$$

İş akıları da Fourier'ın iletkenlik kanunuyla şöyle açıklanabilir

$$q_x = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.6a)$$

$$q_y = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.6b)$$

$$q_z = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.6c)$$

Durum denklemi de şöyledir

$$p = (\gamma - 1) \left[e - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \right] \quad (2.7)$$

Ayrıca Denklemler (2.3)'de de kullanılan birim kütledeki toplam entalpi de şöyle açıklanabilir

$$h = \frac{e + p}{\rho} \quad (2.8)$$

Yukarıdaki denklemlerde u , v ve w sırasıyla x , y ve z yönlerindeki hız komponentleri, p basınç, e birim hacimdeki toplam iç enerji, μ toplam viskosite (laminer artı türbülant) ve κ da toplam ısı iletkenliğidir. Ayrıca γ da akışkanın spesifik isılarının oranıdır.

Formülasyonda kullanılan bir başka parametre de Prandtl sayısıdır ve şöyle verilebilir

$$\text{Pr} = \frac{\mu \cdot c_p}{k} \quad (2.9)$$

Burada, c_p akışkanın sabit basınçtaki özgül ısısıdır.

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad (2.10)$$

2.2 YAPIŞKANLIK KATSAYISININ VE ISI İLETKENLİĞİNİN HESAPLANMASI

Denklemler (2.5)'de μ ile gösterilen toplam yapışkanlık Boussinesq yaklaşımına uygun olarak tedirgin ve katmanlı kısımların yapışkanlıklarının toplamına eşittir. Katmanlı ve tedirgin kısımlar programda ayrı ayrı hesaplanır ve daha sonra toplanırlar

$$\mu_{total} = \mu_{lam} + \mu_{tur} \quad (2.11)$$

burada alt işaretler *total*, *lam* ve *tur* sırasıyla toplam, katmanlı ve tedirgin manalarına gelmektedirler.

Reynolds'un tahminine uygun olan bir başka yaklaşım da katmanlı ve tedirgin ısı iletkenlik katsayılarının Denklem (2.6)'da da kullanıldığı gibi toplanmaları sonucunu doğurur.

$$\kappa_{total} = \left(\frac{\mu_{lam}}{Pr_{lam}} + \frac{\mu_{tur}}{Pr_{tur}} \right) \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad (2.12)$$

Yukarıdaki denklemlerde kullanılan katmanlı yapışkanlık katsayısı Sutherland'in formülünü kullanarak hesaplanırken tedirgin kısım Baldwin-Lomax tedirginlik modeliyle elde edilir.

2.2.1 Katmanlı Yapışkanlık Katsayısının Hesaplanması

Sutherland'in formülü havanın yapışkanlığının sıcaklığa bağlılığını göz önüne alarak hesaplamak için kullanılan deneysel bir formüldür ve şöyle verilebilir

$$\mu_{lam} = 1.45 \times 10^{-6} \frac{T^{1.5}}{T + 110.0} \quad (2.13)$$

Denklem (2.13)'de sıcaklık Kelvin olarak verilirken yapışkanlık Pa.s olarak elde edilir.

2.2.2 Baldwin-Lomax Tedirginlik Modeli

Bu tedirgin yapışkanlık katsayısını hesaplamada kullanılan iki-tabakalı bir tedirginlik modelidir ve şöyle verilebilir:

$$\mu_{mr} = \begin{cases} (\mu_{tar})_{inner}, & y_n < y_{crit} \\ (\mu_{tar})_{outer}, & y_n > y_{crit} \end{cases} \quad (2.14)$$

Yukarıdaki formülasyonda y_{crit} yüzeyin üzerinde iç çalkantı yapışkanlık katsayısının dış çalkantı yapışkanlık katsayısını geçtiği nokta olarak alınabilir. Ayrıca y_n de duvardan olan normal uzaklığı simgeler. İç ve dış çalkantı yapışkanlık katsayıları şöyle verilebilir:

$$(\mu_{tar})_{inner} = \rho \left[0.4y \left(1 - e^{\frac{-y^+}{26}} \right) \right]^2 \omega \quad (2.15)$$

burada ω dönüm vektörünün büyüklüğünü ve y^+ da duvardan birimsiz uzaklığı simgeler. Bu iki parametre şöyle açıklanabilir

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2} \quad (2.16)$$

$$y^+ = \frac{\rho}{\mu_{lam}} y \cdot u_\tau \quad (2.17)$$

Yukarıdaki denklemde u_τ sürtünme hızıdır ve şöyle verilebilir:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_{wall}}{\rho_{wall}}} \quad (2.18)$$

Dış çalkantı yapışkanlık katsayısının formülü ise şöyledir:

$$(\mu_{tar})_{outer} = \rho K C_{cp} F_{wake} F_{kleb} \quad (2.19)$$

Yukarıdaki formülasyonda K Clauser'in sabitidir ve 0.0168'e eşittir. Ayrıca C_{cp} de Baldwin-Lomax tedirginlik modeline ait bir başka sabit olup değeri 1.6'ya eşittir. Diğer iki parametre olan F_{wake} ve F_{kleb} de şöyle hesaplanabilirler

$$F_{wake} = \min\left(y_{max} F_{max}, C_{WK} y_{max} \frac{V_{dif}^2}{F_{max}}\right) \quad (2.20)$$

Denklem (2.20)'deki ilk formül bağlı sınır tabakaları için geçerli olup ikincisiyse ayrılmış ve bağlanmış sınır tabakalarıyla arka (wake) bölgeleri için geçerlidir. Bu formülasyonda C_{WK} değeri orjinal Baldwin-Lomax tedirginlik modelinde 0.25 olan bir sabittir. Ayrıca parametre V_{dif} de şöyle hesaplanır

$$V_{dif} = V_{max} - V_{min} \quad (2.21)$$

Yukarıdaki denklemde simbol V hız vektörünün büyüklüğünü simgeler. V_{min} profilen minimum hızına karşılık gelirken V_{max} ise dönüm momenti F 'nin maksimum olduğu yere karşılık gelir. F şu formülle verilir

$$F = \begin{cases} y\omega \left(1 - e^{-y^*/26} \right) \\ y\omega \end{cases} \quad (2.22)$$

Denklem (2.22)'de üst formül duvar sınır tabakaları alt formülse arka (wake) bölgeler için geçerlidir. F 'nin bütün profil içindeki maksimumu bulunur ve Denklem (2.20)'de kullanılır.

Denklem (2.19)'da dış çalkantı yapışkanlık katsayısının hesaplanmasında kullanılan son parametreyse F_{Kleb} yani Klebanoff azaltma faktörüdür. Böyle bir faktörü kullanmadaki amaç dış çalkantı yapışkanlık katsayısının y_n sonsuza giderken sıfır gittigini garantilemektir. F_{Kleb} şöyle verilebilir

$$F_{Kleb} = \frac{1}{1 + 5.5 \left(\frac{C_{Kleb} y_n}{y_{\max}} \right)^6} \quad (2.23)$$

C_{Kleb} de yine modelin bir sabiti olup değeri 0.3'e eşittir. Bu arada y_{\max} de F 'nin maksimum olduğu yere tekabül eder.

2.3 TÜREVLERİN AYRIŞTIRILMASI

Navier-Stokes denklemlerindeki (2.1) sürtünmeli ve ısı ileten terimler hız vektörünün üç bileşkesi ve sıcaklığın türevlerinden oluşur. Bu değişkenler, yani u , v , w ve T korunabilir değişkenler cinsinden verilebilir, bu yüzden onların türevleri de korunabilir değişkenlerin türevleri cinsinden verilebilirler.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \bar{u} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad (2.24a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial y} - \bar{u} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \quad (2.24b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial z} - \bar{u} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \quad (2.24c)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} - \bar{v} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad (2.24d)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - \bar{v} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \quad (2.24e)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial z} - \bar{v} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \quad (2.24f)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial(\rho w)}{\partial x} - \bar{w} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad (2.24g)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial(\rho w)}{\partial y} - \bar{w} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \quad (2.24h)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} - \bar{w} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \quad (2.24i)$$

Sıcaklık ise aşağıdaki gibi verilebilir:

$$T = \frac{\gamma-1}{R} \left\{ \frac{e}{\rho} - \frac{1}{2\rho^2} [(\rho u)^2 + (\rho v)^2 + (\rho w)^2] \right\} \quad (2.25)$$

Denklem (2.25)'i kullanarak T 'nin türevleri şöyle elde edilebilir

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\gamma-1}{R} \left\{ \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{\bar{e}}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\bar{\rho}^3} \frac{\partial \rho}{\partial x} [(\bar{\rho} u)^2 + (\bar{\rho} v)^2 + (\bar{\rho} w)^2] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\bar{\rho}^2} \left[(\bar{\rho} u) \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + (\bar{\rho} v) \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + (\bar{\rho} w) \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.26a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\gamma-1}{R} \left\{ \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial e}{\partial y} - \frac{\bar{e}}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{1}{\bar{\rho}^3} \frac{\partial \rho}{\partial y} [(\bar{\rho} u)^2 + (\bar{\rho} v)^2 + (\bar{\rho} w)^2] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\bar{\rho}^2} \left[(\bar{\rho} u) \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} + (\bar{\rho} v) \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + (\bar{\rho} w) \frac{\partial(\rho w)}{\partial y} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.26b)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial z} = & \frac{\gamma - 1}{R} \left\{ \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{\bar{e}}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{1}{\bar{\rho}^3} \frac{\partial \rho}{\partial z} \left[(\bar{\rho}u)^2 + (\bar{\rho}v)^2 + (\bar{\rho}w)^2 \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{\bar{\rho}^2} \left[(\bar{\rho}u) \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} + (\bar{\rho}v) \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} + (\bar{\rho}w) \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \right\} \quad (2.26c)\end{aligned}$$

Denklem (2.24) ve (2.26)'daki üstçizgili değişkenler averaj değerlerdir, sabit olarak algılanırlar ve bir önceki zaman adımdından bilindikleri varsayılar.

BÖLÜM 3

SAYISAL ŞEMA

Bu bölüm genel olarak bu çalışmada kullanılan Ni'nin şeması olarak adlandırılan ve tek adımlı Lax-Wendroff şemasından çıkarılan sayısal yöntemle ilgilidir. Bu bölümde, bu yöntemin detayları verilmekte ve son dağıtım formülleri çıkarılmaktadır. Ayrıca, suni dağılma terimlerinin formülasyonu da sunulmaktadır. Son olarak, sayısal yöntemin kararlılığı açısından gerekli olan Courant-Fredrichs-Lowy (CFL) durumu sunulmaktadır.

3.1 ÇÖZÜM TEKNİĞİ

Bu çalışmada kullanılan yöntem açık, hücre-köşeli ve genel olarak korunabilir akı vektörü U 'nun ikinci dereceden Taylor serisi açılımından ibaret olan Lax-Wendroff şeması üzerine kurulmuştur. Zaman ve uzayda ikinci dereceden hassas olan bu teknik ilk olarak Ni [18] tarafından Euler denklemleri için geliştirilmiştir. Daha sonra, Ni ve çalışma arkadaşları [19-20] bu yöntemi daha da geliştirerek sürtünmeli akışları da ele alabilecek hale getirmiştir. Şemanın ilk formülü aşağıdaki gibi verilebilir.

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_i^n \Delta t + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_i^n \frac{\Delta t^2}{2} \quad (3.1)$$

Yukarıdaki denklemde altışaret i noktayı simgelerken üstişaret n zaman adımını simgeler. Bu denklem, zaman adımı t^n den t^{n+1} e kadar U 'nun değerindeki değişme anlamına gelen değişme terimi δU 'yu kullanarak daha uygun bir forma sokulabilir.

$$\delta U = U_i^{n+1} - U_i^n = \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_i^n \Delta t + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_i^n \frac{\Delta t^2}{2} \quad (3.2)$$

Değişme Denklem (3.2)'nin de gösterdiği gibi iki parçadan oluşur: birinci-derece değişme ve ikinci-derece değişme. Bu iki terim bu bölümde daha sonra açıklanacağı gibi farklı şekillerde ele alınır.

Denklem (2.1)'de verilen Navier-Stokes denklemlerinin vektörel formu hatırlanırsa, şu ilişki elde edilir:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} + \frac{\partial H_v}{\partial z} \right) \quad (3.3)$$

Kullanılan metot açık olduğu için yukarıdaki denklemde bulunan bütün terimler zaman adımı n 'de alınmıştır. Bu yüzden Denklem (3.3)'ün sağ tarafında kalan bütün terimler bilinen değerlerdir. Bu sonuç Denklem (3.2)'ye konulduğunda aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} \delta U &= -\Delta t \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \Delta t \left(\frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} + \frac{\partial H_v}{\partial z} \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} + \frac{\partial H_v}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Sürtünmesiz akı terimlerinin zamana bağlı türevleri şöyle yazılabilir:

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} \right) \right] \\ &= \frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial U} \Delta U \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial U} \Delta U \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H}{\partial U} \Delta U \right) \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Benzer bir şekilde sürtünmeli akıların zamana bağlı türevleri de aşağıdaki gibi yazılabılır:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} + \frac{\partial H_v}{\partial z} \right) \\
 &= \frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_v}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G_v}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H_v}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} \right) \right] \\
 &= \frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_v}{\partial U} \Delta U \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G_v}{\partial U} \Delta U \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H_v}{\partial U} \Delta U \right) \right]
 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Bu noktada Jakobian'lar Ni'nin formülasyonuna göre

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial U} \Delta U \quad (3.7a)$$

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial U} \Delta U \quad (3.7b)$$

$$\Delta H = \frac{\partial H}{\partial U} \Delta U \quad (3.7c)$$

$$\Delta F_v = \frac{\partial F_v}{\partial U} \Delta U \quad (3.7d)$$

$$\Delta G_v = \frac{\partial G_v}{\partial U} \Delta U \quad (3.7e)$$

$$\Delta H_v = \frac{\partial H_v}{\partial U} \Delta U \quad (3.7f)$$

şeklinde verilir. Denklem (3.4) yardımı ile aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}
 \delta U = & -\Delta t \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \Delta t \left(\frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} + \frac{\partial H_v}{\partial z} \right) \\
 & - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial(\Delta F)}{\partial x} + \frac{\partial(\Delta G)}{\partial y} + \frac{\partial(\Delta H)}{\partial z} \right) \\
 & + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial(\Delta F_v)}{\partial x} + \frac{\partial(\Delta G_v)}{\partial y} + \frac{\partial(\Delta H_v)}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Denklem (3.8)'deki son iki terim korunabilir değişkenlerin ikinci dereceden türevlerini içeren sürtünmeli terimlerin etkisini göstermektedir. Dolayısıyla, sürtünmeli akıların ikinci-dereceden değişimini gösteren Denklem (3.8)'deki son terim genelde ihmal edilir [19-20][27]. Bu gerçeği kullanarak toplam değişim formülü şu şekli alır:

$$\begin{aligned}\delta U = & -\Delta t \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \Delta t \left(\frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} + \frac{\partial H_v}{\partial z} \right) \\ & - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial(\Delta F)}{\partial x} + \frac{\partial(\Delta G)}{\partial y} + \frac{\partial(\Delta H)}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (3.9)$$

Yukarıdaki, Jakobian'lar Ni'nin metodunu kullanarak aşağıdaki şekilde verilir:

$$\Delta U = \begin{bmatrix} \Delta\rho \\ \Delta(\rho u) \\ \Delta(\rho v) \\ \Delta(\rho w) \\ \Delta e \end{bmatrix} \quad (3.10a)$$

$$\Delta F = \begin{bmatrix} \Delta(\rho u) \\ u\Delta(\rho u) + \rho u\Delta u + \Delta p \\ v\Delta(\rho u) + \rho u\Delta v \\ w\Delta(\rho u) + \rho u\Delta w \\ h\Delta(\rho u) + \rho u\Delta h \end{bmatrix} \quad (3.10b)$$

$$\Delta G = \begin{bmatrix} \Delta(\rho v) \\ u\Delta(\rho v) + \rho v\Delta u \\ v\Delta(\rho v) + \rho v\Delta v + \Delta p \\ w\Delta(\rho v) + \rho v\Delta w \\ h\Delta(\rho v) + \rho v\Delta h \end{bmatrix} \quad (3.10c)$$

$$\Delta H = \begin{bmatrix} \Delta(\rho u) \\ u\Delta(\rho v) + \rho v \Delta u \\ v\Delta(\rho v) + \rho v \Delta v \\ w\Delta(\rho w) + \rho w \Delta w + \Delta p \\ h\Delta(\rho h) + \rho h \Delta h \end{bmatrix} \quad (3.10d)$$

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} [\Delta(\rho u) - u \Delta \rho] \quad (3.11a)$$

$$\Delta v = \frac{1}{\rho} [\Delta(\rho v) - v \Delta \rho] \quad (3.11b)$$

$$\Delta w = \frac{1}{\rho} [\Delta(\rho w) - w \Delta \rho] \quad (3.11c)$$

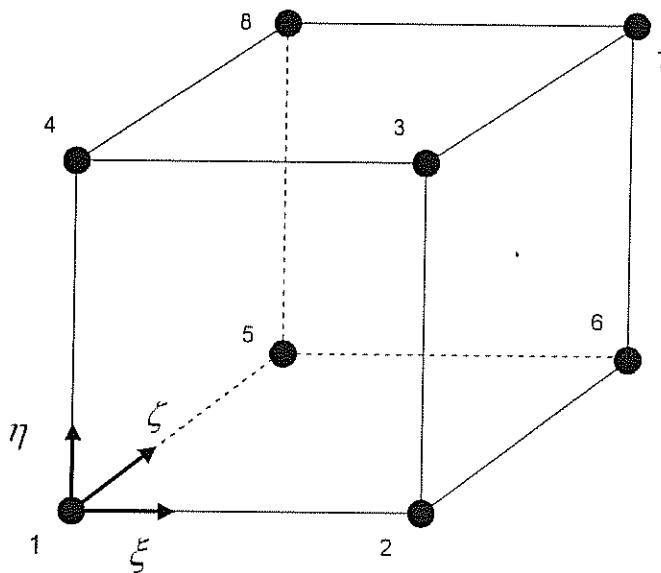
$$\begin{aligned} \Delta p = (\gamma - 1) \{ & \Delta e - \frac{1}{2} (u\Delta(\rho u) + v\Delta(\rho v) + w\Delta(\rho w) \\ & + \rho u \Delta u + \rho v \Delta v + \rho w \Delta w) \} \end{aligned} \quad (3.11d)$$

$$\Delta h = \frac{1}{\rho} [\Delta e + \Delta p - h \Delta \rho] \quad (3.11e)$$

Şimdi, Denklem (3.9) akış alanı içindeki bir kontrol hacmi üzerinde integre edilebilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \iiint_{\delta V} \delta U dV = & - \iiint_{\delta V} \Delta t \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) dV + \iiint_{\delta V} \Delta t \left(\frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} + \frac{\partial H_v}{\partial z} \right) dV \\ & - \iiint_{\delta V} \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial(\Delta F)}{\partial x} + \frac{\partial(\Delta G)}{\partial y} + \frac{\partial(\Delta H)}{\partial z} \right) dV \end{aligned} \quad (3.12)$$

Akış alanının noktalar ve hücrelerden oluştugu kabul edilir. Örnek bir hücre Şekil 3.1'de verilmiştir.



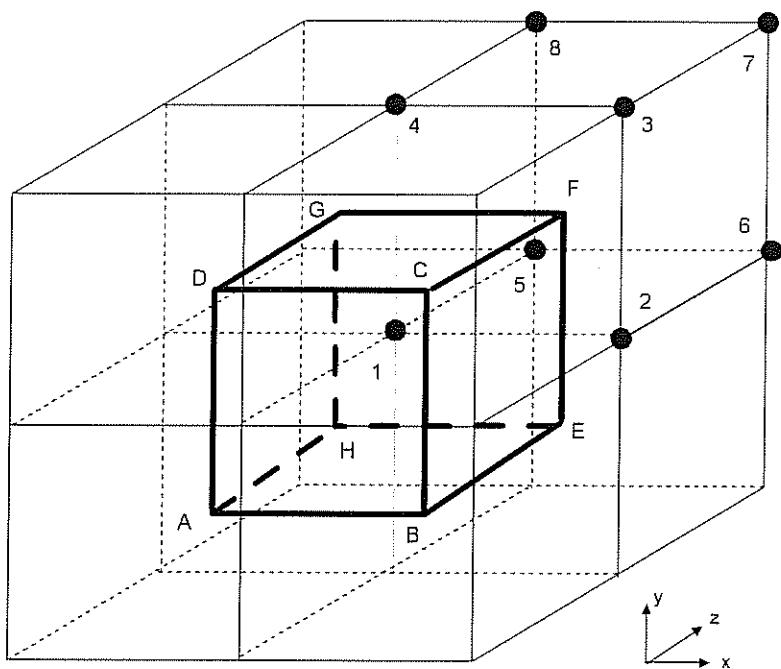
Şekil 3.1 Akış alanının tipik bir hücresi

Hücrenin bütün noktaları aslında toplam sekiz adet hücre tarafından çevrilirler (sınırında olanlar hariç). Örneğin Şekil 3.1'deki nokta 1'i çevreleyen hücreler gösterilmiştir.

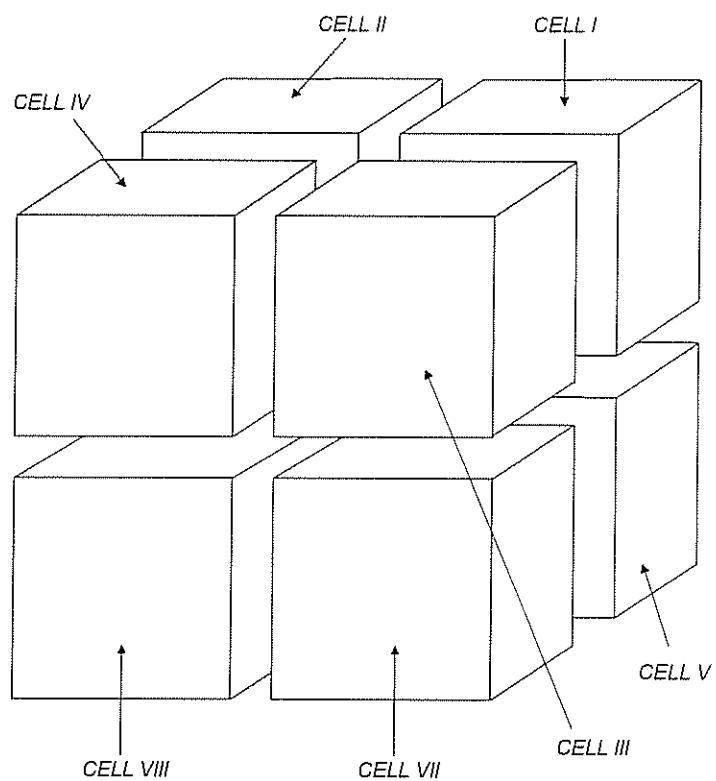
Şekil 3.1'de gösterilen ve 1'den 8'e kadar noktaları olan hücre Şekil 3.2'de nokta 1'i çevreleyen sekiz hücreden biri olarak gösterilmiştir. İndisleri A'dan H'ye kadar değişen, yani kalın siyah çizgilerle belirtilmiş olan hücre nokta 1'i çevreleyen sekiz hücrenin merkezlerinin birleştirilmesiyle oluşmuştur. Böyle bir değiştirilmiş kontrol hacmi ikinci-dereceden sürdürməsiz ve birinci-dereceden sürdürmeli değişimleri hesaplayabilmek için gereklidir. Kontrol hacmi A-B-C-D-E-F-G-H, çevreleyen sekiz hücrenin içinde sekiz parçaya sahiptir.

Şekil 3.3'de yukarıda bahsedilen sekiz hücre ayrı ayrı gösterilmiştir. Nokta 1 hücre 6 gibi şeklin merkezindedir ve görülemeyecek durumdadır. Herhangi bir zaman adımdında nokta 1'in toplam değişimini ona sekiz çevreleyen hücreden gelen etkinin toplamıdır. Dolayısıyla, değişimler hücre bazlı olarak hesaplanırlar ve ondan sonra hücrenin noktalarına dağıtırlar.

Değişim terimini hücre için ortalama bir değer olarak kabul ederek Denklem (3.12) aşağıdaki şekilde yazılabilir, ki burada ΔV ele alınan hücrenin hacmidir.



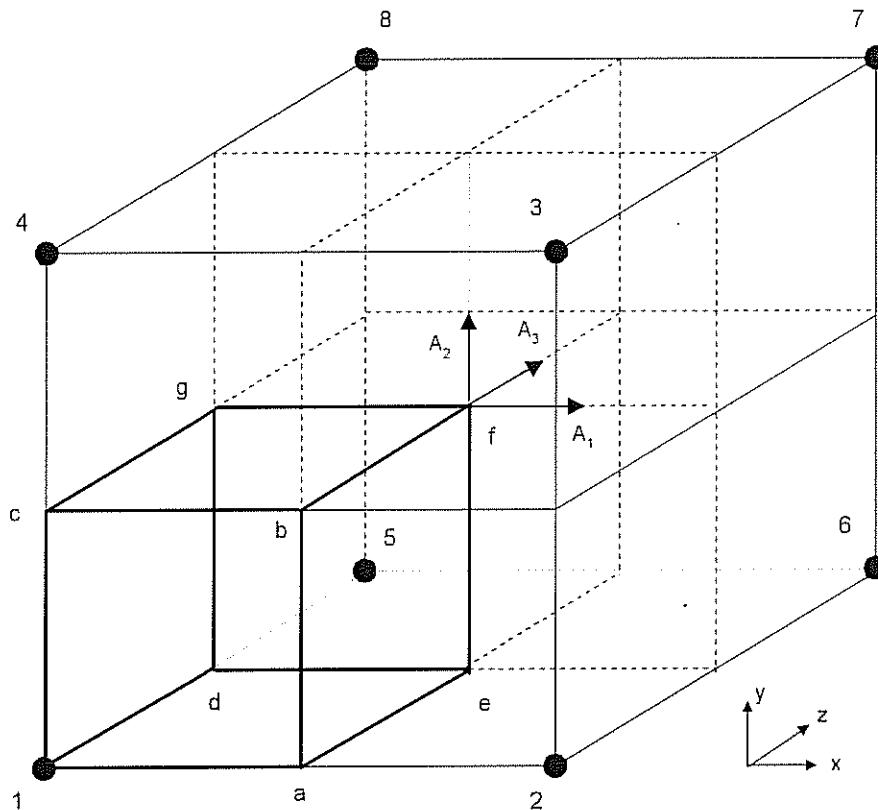
Şekil 3.2 Şekil 3.1'deki nokta 1'i çevreleyen hücreler



Şekil 3.3 Şekil 3.1'deki nokta 1'i çevreleyen hücrelerin ayrılmış formu

$$\delta U = -\frac{\Delta t}{\Delta V} \iiint_{\delta V} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) dV + \frac{\Delta t}{\Delta V} \iiint_{\delta V} \left(\frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} + \frac{\partial H_v}{\partial z} \right) dV - \frac{\Delta t}{2\Delta V} \iiint_{\delta V} \left(\frac{\partial(\Delta F)}{\partial x} + \frac{\partial(\Delta G)}{\partial y} + \frac{\partial(\Delta H)}{\partial z} \right) dV \quad (3.13)$$

Şekil 3.1'de gösterilen hücre I'in nokta 1'e olan etkisini hesaplamak için değiştirilmiş kontrol hacmi A-B-C-D-E-F-G-H 'nin hücre I içinde kalan kısmı açıkça gösterilmelidir, çünkü integrasyonun bir kısmı bu bölüm üzerinde yapılacaktır. Şekil 3.4'te gösterildiği gibi hücre I'deki kontrol hacmi 1-a-b-c-d-e-f-g'yi kullanarak Denklem (3.14) şöyle yazılabilir:



Şekil 3.4 Değiştirilmiş kontrol hacmi A-B-C-D-E-F-G-H 'nin hücre I'in içinde kalan kısmı

$$\begin{aligned}
\delta U_{II} = & -\frac{1}{8} \frac{\Delta t}{\Delta V_I}_{cell-1} \iiint \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) dV \\
& + \frac{\Delta t}{\Delta V_I}_{abcdefg} \iiint \left(\frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} + \frac{\partial H_v}{\partial z} \right) dV \\
& - \frac{\Delta t}{2\Delta V_I}_{abcdefg} \iiint \left(\frac{\partial(\Delta F)}{\partial x} + \frac{\partial(\Delta G)}{\partial y} + \frac{\partial(\Delta H)}{\partial z} \right) dV
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Denklem (3.14)'te δU 'nın üstişaretleri hücre I'ın nokta 1'in toplam değişimine herhangi bir zaman adımda olan etkisini belirtmektedir. Benzer etkiler nokta 1'i çevreleyen diğer yedi hücreden de gelir. Bu yüzden, nokta 1'in toplam değişimini aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
\delta U_1 = & \delta U_{1,I} + \delta U_{1,II} + \delta U_{1,III} + \delta U_{1,IV} + \delta U_{1,V} \\
& + \delta U_{1,VI} + \delta U_{1,VI} + \delta U_{1,VIII}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Birinci dereceden sırtınlımsız değişimin önündeki 1/8 katsayısı hücre I'ın birinci dereceden sırtınlımsız değişiminin kendi sekiz noktası arasındaki eşit dağılımı sebebiyle gelir. Bu da demek olur ki, bir hücrenin sekiz noktasının birinci dereceden sırtınlımsız değişimleri birbirinin aynıdır ve aralarındaki farkı oluşturan ikinci dereceden sırtınlımsız ve birinci dereceden sırtınlı terimlerdir.

Gauss'un Divergence Teoremini kullanarak Denklem (3.14)'teki hacim integralleri, alan integrallerine çevrilebilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\delta U_{II} = & -\frac{1}{8} \frac{\Delta t}{\Delta V_I}_{cell-1} \iint (FdS_x + GdS_y + HdS_z) \\
& + \frac{\Delta t}{\Delta V_I}_{abcdefg} \iint (F_v dS_x + G_v dS_y + H_v dS_z) \\
& - \frac{\Delta t}{2\Delta V_I}_{abcdefg} \iint (\Delta F dS_x + \Delta G dS_y + \Delta H dS_z)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

burada S_x , S_y ve S_z sırasıyla x , y ve z yönlerine dik olan alanları belirtmektedirler.

Yukarıdaki denklemdeki terimler daha kolay bir işaretleme için şöyle adlandırılabilirler:

$$\Delta U_i = -\frac{\Delta t}{\Delta \nabla_I}_{cell-1} \iint (F dS_x + G dS_y + H dS_z) \quad (3.17a)$$

$$\Delta U_v = \frac{\Delta t}{\Delta \nabla_I}_{abcdefg} \iint (F_v dS_x + G_v dS_y + H_v dS_z) \quad (3.17b)$$

$$\Delta^2 U_i = -\frac{\Delta t}{2 \Delta \nabla_I}_{abcdefg} \iint (\Delta F dS_x + \Delta G dS_y + \Delta H dS_z) \quad (3.17c)$$

Dolayısıyla, Denklem (3.16) aşağıdaki şekli alır.

$$\delta U_{1,I} = \frac{1}{8} \Delta U_i + \Delta^2 U_i + \Delta U_v \quad (3.18)$$

Hücre I'ın birinci-dereceden sürtünmesiz değişimi, akıları her yüzey üzerinde ortalama olarak alarak ve Şekil 3.5'te gösterilen yüzey vektörlerini kullanarak hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} \Delta U_i = & \frac{\Delta t}{\Delta \nabla_I} \{ (F_{5148} \cdot S_{1,x} + G_{5148} \cdot S_{1,y} + H_{5148} \cdot S_{1,z}) \\ & - (F_{6237} \cdot S_{2,x} + G_{6237} \cdot S_{2,y} + H_{6237} \cdot S_{2,z}) \\ & + (F_{1265} \cdot S_{3,x} + G_{1265} \cdot S_{3,y} + H_{1265} \cdot S_{3,z}) \\ & - (F_{4378} \cdot S_{4,x} + G_{4378} \cdot S_{4,y} + H_{4378} \cdot S_{4,z}) \\ & + (F_{1234} \cdot S_{5,x} + G_{1234} \cdot S_{5,y} + H_{1234} \cdot S_{5,z}) \\ & - (F_{5678} \cdot S_{6,x} + G_{5678} \cdot S_{6,y} + H_{5678} \cdot S_{6,z}) \} \end{aligned} \quad (3.19)$$

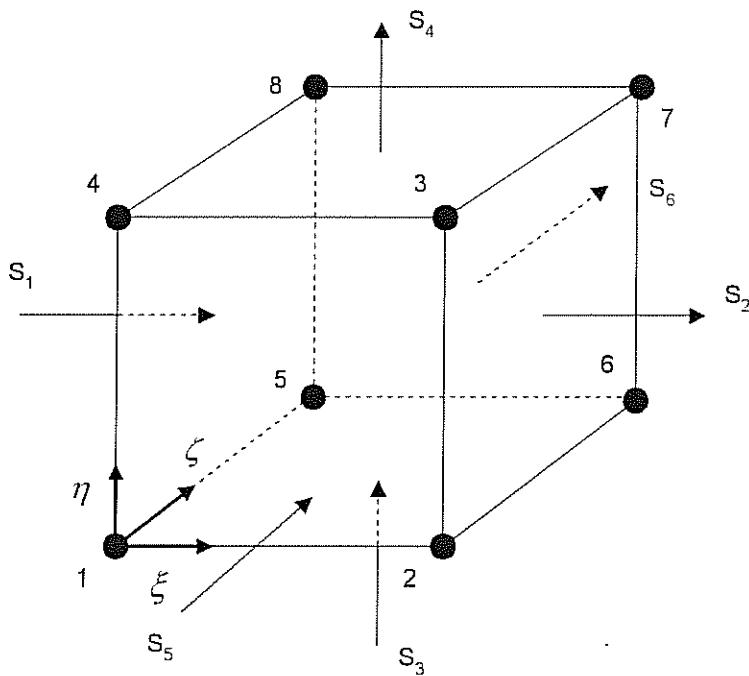
Yukarıdaki denklemde, örnek olarak akı terimi F_{5148} aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$F_{5148} = \frac{F_5 + F_1 + F_4 + F_8}{4} \quad (3.20)$$

Yukarıdakine benzer bir formülasyon kullanılarak Denklem (3.19) aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned} \Delta U_i = & \frac{\Delta t}{\Delta V_I} \left\{ \frac{F_5 + F_1 + F_4 + F_8}{4} S_{1,x} + \frac{G_5 + G_1 + G_4 + G_8}{4} S_{1,y} \right. \\ & + \frac{H_5 + H_1 + H_4 + H_8}{4} S_{1,z} - \frac{F_6 + F_2 + F_3 + F_7}{4} S_{2,x} \\ & - \frac{G_6 + G_2 + G_3 + G_7}{4} S_{2,y} - \frac{H_6 + H_2 + H_3 + H_7}{4} S_{2,z} \\ & + \frac{F_1 + F_2 + F_6 + F_5}{4} S_{3,x} + \frac{G_1 + G_2 + G_6 + G_5}{4} S_{3,y} \\ & + \frac{H_1 + H_2 + H_6 + H_5}{4} S_{3,z} - \frac{F_4 + F_3 + F_7 + F_8}{4} S_{4,x} \\ & - \frac{G_4 + G_3 + G_7 + G_8}{4} S_{4,y} - \frac{H_4 + H_3 + H_7 + H_8}{4} S_{4,z} \\ & + \frac{F_1 + F_2 + F_3 + F_4}{4} S_{5,x} + \frac{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}{4} S_{5,y} \\ & + \frac{H_1 + H_2 + H_3 + H_4}{4} S_{5,z} - \frac{F_5 + F_6 + F_7 + F_8}{4} S_{6,x} \\ & \left. - \frac{G_5 + G_6 + G_7 + G_8}{4} S_{6,y} - \frac{H_5 + H_6 + H_7 + H_8}{4} S_{6,z} \right\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Denklem (3.21)'de kullanılan yüzey vektörlerinin hesaplanması Ek A'da verilmiştir. ΔU_i bulunduktan sonra, $\Delta^2 U_i$ bu değerleri kullanarak her hücre için hesaplanabilir. Bu hesaplama için Şekil 4.4'te gösterildiği gibi değiştirilen kontol hacminin hücre I'in içinde kalan kısmı yani kontrol hacmi 1-a-b-c-d-e-f-g kullanılır. İntegralin hesaplanacağı yüzeyler a-b-f-e, b-c-g-f ve d-e-f-g'dir. Ancak, bu alanlar hücre I'in merkezindeki alanların $\frac{1}{4}$ 'ü olarak alınır. Bu amaçla Şekil 3.4'te gösterilen üç yüzey vektörü A_1 , A_2 and A_3 kullanılır. Bu vektörlerin de hesaplanması Ek A'da verilmiştir.



Şekil 3.5 Hücre I için yüzey vektörleri

Yukarıda verilen bilgileri kullanarak ikinci dereceden sürtünmesiz değişim denklemi şöyle yazılabilir

$$\begin{aligned} \Delta^2 U_i = & -\frac{\Delta t}{2\Delta V_i} \frac{1}{4} \{ \Delta F(A_{1,x} + A_{2,x} + A_{3,x}) + \Delta G(A_{1,y} + A_{2,y} + A_{3,y}) \\ & + \Delta H(A_{1,z} + A_{2,z} + A_{3,z}) \} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Bu noktada yeni bir işaretleme kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\Delta f_i = A_{1,x} \Delta F + A_{1,y} \Delta G + A_{1,z} \Delta H \quad (3.23a)$$

$$\Delta g_i = A_{2,x} \Delta F + A_{2,y} \Delta G + A_{2,z} \Delta H \quad (3.23b)$$

$$\Delta h_i = A_{3,x} \Delta F + A_{3,y} \Delta G + A_{3,z} \Delta H \quad (3.23c)$$

Denklem (3.23)'ü kullanarak Denklem (3.22) aşağıdaki şekilde yazılabılır:

$$\Delta^2 U_i = \frac{1}{8} \frac{\Delta t}{\Delta V_I} (-\Delta f_i - \Delta g_i - \Delta h_i) \quad (3.24)$$

Burada şu not edilmelidir ki $\Delta^2 U_i$ nokta 1'e sadece hücre I'den gelen ikinci dereceden değişimdir. Hücre I'in diğer noktalarına olan etkileri de her nokta için uygun, değiştirilmiş kontrol hacimleri kullanılarak bulunabilir.

Şimdi sıra ikinci dereceden sürtünmesiz değişme terimiyle aynı şekilde hesaplanan sürtünmeli değişme teriminin hesaplamaya gelmiştir. Integrasyon Şekil 3.4'teki aynı değiştirilmiş kontrol hacmi yani kontrol hacmi 1-a-b-c-d-e-f-g üzerinde yapılır. Denklem (3.17)'de verilen sürtünmeli değişimlerin formülasyonu aşağıdaki hali alır.

$$\begin{aligned} \Delta U_v = & \frac{1}{4} \frac{\Delta t}{\Delta V_I} \left\{ F_v (A_{1,x} + A_{2,x} + A_{3,x}) + G_v (A_{1,y} + A_{2,y} + A_{3,y}) \right. \\ & \left. + H_v (A_{1,z} + A_{2,z} + A_{3,z}) \right\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Aşağıda verilen işaretlemeyi kullanarak

$$\Delta f_v = A_{1x} F_v + A_{1y} G_v + A_{1z} H_v \quad (3.26a)$$

$$\Delta g_v = A_{2x} F_v + A_{2y} G_v + A_{2z} H_v \quad (3.26b)$$

$$\Delta h_v = A_{3x} F_v + A_{3y} G_v + A_{3z} H_v \quad (3.26c)$$

Denklem (3.25) şöyle yazılabilir

$$\Delta U_v = \frac{1}{4} \frac{\Delta t}{\Delta V_I} (\Delta f_v + \Delta g_v + \Delta h_v) \quad (3.27)$$

Burada şu not edilmelidir ki F_v , G_v ve H_v hücrenin her noktası için ayrı ayrı hesaplanırlar. Bu hesaplama prosedürü bu bölümde daha sonra açıklanacaktır.

Bütün terimleri ekleyerek hücre I'in her noktasının toplam değişimlerinin formülasyonu şöyle yazılabilir

$$\delta U_{1I} = \frac{1}{8} \left\{ \Delta U_i + \frac{\Delta t}{\Delta V_I} [(-\Delta f_i - \Delta g_i - \Delta h_i) - 2(-\Delta f_v - \Delta g_v - \Delta h_v)] \right\} \quad (3.28a)$$

$$\delta U_{2I} = \frac{1}{8} \left\{ \Delta U_i + \frac{\Delta t}{\Delta V_I} [(+\Delta f_i - \Delta g_i - \Delta h_i) - 2(+\Delta f_v - \Delta g_v - \Delta h_v)] \right\} \quad (3.28b)$$

$$\delta U_{3I} = \frac{1}{8} \left\{ \Delta U_i + \frac{\Delta t}{\Delta V_I} [(+\Delta f_i + \Delta g_i - \Delta h_i) - 2(+\Delta f_v + \Delta g_v - \Delta h_v)] \right\} \quad (3.28c)$$

$$\delta U_{4I} = \frac{1}{8} \left\{ \Delta U_i + \frac{\Delta t}{\Delta V_I} [(-\Delta f_i + \Delta g_i - \Delta h_i) - 2(-\Delta f_v + \Delta g_v - \Delta h_v)] \right\} \quad (3.28d)$$

$$\delta U_{5I} = \frac{1}{8} \left\{ \Delta U_i + \frac{\Delta t}{\Delta V_I} [(-\Delta f_i - \Delta g_i + \Delta h_i) - 2(-\Delta f_v - \Delta g_v + \Delta h_v)] \right\} \quad (3.28e)$$

$$\delta U_{6I} = \frac{1}{8} \left\{ \Delta U_i + \frac{\Delta t}{\Delta V_I} [(+\Delta f_i - \Delta g_i + \Delta h_i) - 2(+\Delta f_v - \Delta g_v + \Delta h_v)] \right\} \quad (3.28f)$$

$$\delta U_{7I} = \frac{1}{8} \left\{ \Delta U_i + \frac{\Delta t}{\Delta V_I} [(+\Delta f_i + \Delta g_i + \Delta h_i) - 2(+\Delta f_v + \Delta g_v + \Delta h_v)] \right\} \quad (3.28g)$$

$$\delta U_{8I} = \frac{1}{8} \left\{ \Delta U_i + \frac{\Delta t}{\Delta V_I} [(-\Delta f_i + \Delta g_i + \Delta h_i) - 2(-\Delta f_v + \Delta g_v + \Delta h_v)] \right\} \quad (3.28.h)$$

Son olarak güncelleme işlemi aşağıdaki gibi tamamlanabilir.

$$U_{II}^{n+1} = U_{II}^n + \delta U_{II}^n \quad (3.29)$$

3.2 SÜRTÜNME VE ISI İLETEN TERİMLERİN HESAPLANMASI

Korunan değişkenlerin türevlerini içeren terimler metrikler kullanılarak hesaplanır. Herhangi bir korunmayan değişken U ele alınırsa, U 'nın x , y ve z yönlerindeki türevlerinin formülasyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial U}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial U}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial U}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.30a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{1}{J} \left\{ - \frac{\partial U}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial U}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial U}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.30b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} &= \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial U}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial U}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial U}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.30c)$$

Yukarıdaki denklemlerin çıkarılmasının detayları Ek B'de verilmiştir.

Bu türevler her hücrede Ni'nin [20] önerdiği gibi birinci-dereceden sonlu fark yaklaşımıyla hücreyi oluşturan her nokta için ayrı ayrı hesaplanır. Örnek olarak, Şekil 3.1'deki nokta 1 ele alınırsa

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} \approx \frac{\Delta U}{\Delta \xi} = \frac{U_2 - U_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{U_2 - U_1}{\Delta \xi} = U_2 - U_1 \quad (3.31a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} \equiv \frac{\Delta U}{\Delta \eta} = \frac{U_4 - U_1}{\eta_4 - \eta_1} = \frac{U_4 - U_1}{\Delta \eta} = U_4 - U_1 \quad (3.31b)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta} \equiv \frac{\Delta U}{\Delta \zeta} = \frac{U_5 - U_1}{\zeta_5 - \zeta_1} = \frac{U_5 - U_1}{\Delta \zeta} = U_5 - U_1 \quad (3.31c)$$

Yukarıdaki denklemlerde hücrenin sayısal alandaki büyüklüğü her yönde bir birim olarak alınmıştır. ($\Delta \varepsilon = \Delta \eta = \Delta \zeta = 1$).

Aynı şekilde metrikler de birinci dereceden sonlu fark yaklaşımıyla hesaplanabilir.

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta \xi} = \frac{x_2 - x_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta \xi} = x_2 - x_1 \quad (3.32a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta \eta} = \frac{x_4 - x_1}{\eta_4 - \eta_1} = \frac{x_4 - x_1}{\Delta \eta} = x_4 - x_1 \quad (3.32b)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \zeta} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta \zeta} = \frac{x_5 - x_1}{\zeta_5 - \zeta_1} = \frac{x_5 - x_1}{\Delta \zeta} = x_5 - x_1 \quad (3.32c)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} \equiv \frac{\Delta y}{\Delta \xi} = \frac{y_2 - y_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{y_2 - y_1}{\Delta \xi} = y_2 - y_1 \quad (3.32d)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} \equiv \frac{\Delta y}{\Delta \eta} = \frac{y_4 - y_1}{\eta_4 - \eta_1} = \frac{y_4 - y_1}{\Delta \eta} = y_4 - y_1 \quad (3.32e)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \zeta} \equiv \frac{\Delta y}{\Delta \zeta} = \frac{y_5 - y_1}{\zeta_5 - \zeta_1} = \frac{y_5 - y_1}{\Delta \zeta} = y_5 - y_1 \quad (3.32f)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} \equiv \frac{\Delta z}{\Delta \xi} = \frac{z_2 - z_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{z_2 - z_1}{\Delta \xi} = z_2 - z_1 \quad (3.32g)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} \equiv \frac{\Delta z}{\Delta \eta} = \frac{z_4 - z_1}{\eta_4 - \eta_1} = \frac{z_4 - z_1}{\Delta \eta} = z_4 - z_1 \quad (3.32h)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} \equiv \frac{\Delta z}{\Delta \zeta} = \frac{z_5 - z_1}{\zeta_5 - \zeta_1} = \frac{z_5 - z_1}{\Delta \zeta} = z_5 - z_1 \quad (3.32i)$$

Denklemler (3.31) ve (3.32)'yi kullanarak korunabilir değişken U 'nun Cartesian koordinat sistemindeki bütün türevleri bulunabilir. Burada hatırlanması gereken şey bu formüllerin hücre I'in nokta 1'i için geçerli olduklarıdır. Kalan yedi nokta için de uygun birinci-dereceden yaklaşımlar yapılabılır. Q 'nun bir korunabilir değişken ya da bir Cartesian koordinatı yani x, y veya z olduğunu düşünlürse, Q 'nun türevlerine her nokta için yapılan birinci dereceden sonlu fark yaklaşımları aşağıdaki şekilde verilebilir.

(i) Nokta 1:

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} \equiv Q_2 - Q_1 \quad \frac{\partial Q}{\partial \eta} \equiv Q_4 - Q_1 \quad \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \equiv Q_5 - Q_1 \quad (3.33a)$$

(ii) Nokta 2:

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} \equiv Q_2 - Q_1 \quad \frac{\partial Q}{\partial \eta} \equiv Q_3 - Q_2 \quad \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \equiv Q_6 - Q_2 \quad (3.33.b)$$

(iii) Nokta 3:

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} \equiv Q_3 - Q_4 \quad \frac{\partial Q}{\partial \eta} \equiv Q_3 - Q_2 \quad \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \equiv Q_7 - Q_3 \quad (3.33c)$$

(iv) Nokta 4:

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} \equiv Q_3 - Q_4 \quad \frac{\partial Q}{\partial \eta} \equiv Q_4 - Q_1 \quad \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \equiv Q_8 - Q_4 \quad (3.33d)$$

(v) Nokta 5:

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} \equiv Q_6 - Q_5 \quad \frac{\partial Q}{\partial \eta} \equiv Q_8 - Q_5 \quad \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \equiv Q_5 - Q_1 \quad (3.33e)$$

(vi) Nokta 6:

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} \equiv Q_6 - Q_5 \quad \frac{\partial Q}{\partial \eta} \equiv Q_7 - Q_6 \quad \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \equiv Q_6 - Q_2 \quad (3.33f)$$

(vii) Nokta 7:

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} \equiv Q_7 - Q_8 \quad \frac{\partial Q}{\partial \eta} \equiv Q_7 - Q_6 \quad \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \equiv Q_7 - Q_3 \quad (3.33g)$$

(viii) Nokta 8:

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} \equiv Q_7 - Q_8 \quad \frac{\partial Q}{\partial \eta} \equiv Q_8 - Q_5 \quad \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \equiv Q_8 - Q_4 \quad (3.33h)$$

Yukarıdaki formülleri kullanarak bir hücrenin her noktası için u , v , w ve T 'nin x , y ve z yönlerindeki türevleri Denklemler (2.24) ve (2.26)'ya göre hesaplanabilir. Dolayısıyla, her nokta için viskos ve ısı ileten terimlerin hepsi hesaplanabilir.

3.3 SUNİ YUMUŞATMA TERİMLERİ

Merkezi bir şema olan tek adımlı Lax-Wendroff metodu keskin devamsızlıklar civarında dalgalanmalar üretir. Bu dalgalanmalar Ni'nin [20] de dediği gibi kullanılan hesaplama ağı yeterince düzgün olduğu sürece kullanılan yöntem fiziksel yapışkanlıkla dengelenebilir. Ancak, bir çok durumda bu dalgalanmaları yumuşatmak için suni yöntemler gereklidir. Bu suni yumuşatma Navier-Stokes denklemlerinin (2.1) sağ tarafına yeni terimler ekleyerek sağlanabilir. Dolayısıyla yumuşatma terimleri Denklem (3.28)'de verilen dağıtma formüllerine eklenir.

Yumuşatma terimleri bir ikinci derece ve bir de dördüncü derece yumuşatma mekanizmasına sahiptir. İkinci derece yumuşatma metodu Ni tarafından Euler denklemlerinin çözümü üzerine olan makalesinde verilmiştir [18]. İkinci derece yumuşatma terimlerine çok benzeyen dördüncü derece yumuşatma terimleri Tınaztepe'den [27] alınmıştır. Dağıtma formüllerine eklenen suni yumuşatma terimleri şöyle verilebilir.

$$\delta^2 U_i = \sigma^2 \frac{\Delta t}{8\Delta V} \Delta A (\bar{U} - U_i) \quad (3.34a)$$

$$\delta^4 U_i = \sigma^4 \frac{\Delta t}{8\Delta V} \Delta A (\delta^2 \bar{U} - \delta^2 U_i) \quad (3.34b)$$

Yukarıdaki denklemlerde i ele alınan hücredeki nokta numarasını simgeler. Üstçizgili terimler yine hücredeki averaj değerleri gösterir ve ΔA Şekil 3.4'te verilen hücrenin ortasındaki alanlarla bağlantılıdır. Bu durumda

$$\Delta A = \sqrt{\left| \vec{A}_1 \right|^2 + \left| \vec{A}_2 \right|^2 + \left| \vec{A}_3 \right|^2} \quad (3.35)$$

Ayrıca, σ^2 ve σ^4 ikinci ve dördüncü dereceden yumuşatma katsayılarıdır. σ^2 'nin değeri çözülen probleme bağlıken σ^4 , Tınaztepe'nin [27] de önerdiği gibi σ^2 'nin $1/32$ 'si olarak alınır.

Sayısal yöntemin yaklaşımı için gerekli olsalar da suni yumuşatma terimlerinin hesaplamalara bir miktar hata kattıkları açıktır. Ancak, Ni'nin [20] de bahsettiği gibi suni yumusatmanın miktarı özellikle katı duvarların yakınında mümkün olduğu kadar azaltılmalıdır. Bu gerçeği uygulayabilmek için Mach sayısı ölçeklendirmesi kullanılır. İkinci derece yumusatma katsayısı bölgelidir Mach sayısına göre Tınaztepe'nin [27] verdiği gibi değiştirilir.

$$(\sigma^2)_{scaled} = \left(\frac{M}{M_\infty} \right)^2 \sigma^2 \quad (3.36)$$

Son olarak verilen bir hücrenin bir noktasının toplam değişmesi takip eden formüle göre güncellenir

$$\delta U_i = \delta U_i + \delta^2 U_i + \delta^4 U_i \quad (3.37)$$

3.4 YÖNTEMİN KARARLILIĞI

Bu çalışmada kullanılan yöntem daha önce de açıklandığı gibi açık bir yöntemdir. Bu yüzden yakınsak bir çözüm elde etmek için her yinelemede zaman adımına bir limit koymak zorunludur. Zaman adımına koyulan bu limite CFL durumu denir.

Üç-boyutlu Navier-Stokes denklemleri (2.1) çok karmaşık denklemlerdir. Hatta üç-boyutlu Euler denklemleri bile çok karmaşıktır ve her iki denklem seti de von Neumann kararlılık analizi için uygun değildir. Ancak Oktay [37] Euler denklemlerine çok benzeyen ama onlardan çok daha kolay olan lineer, üç-boyutlu dalgı denkleminin von Neumann analizini verir. Ni [18] de Euler denklemlerinin zaman adımını kısıtlamak için bir formülasyon verir. Bu formülasyon yine Ni [20] tarafından değiştirilerek Navier-Stokes denklemlerine adapte edilmiştir ve şu şekilde verilmiştir

$$\Delta t = CFL \cdot \min \left[\frac{\vec{L}}{\left| \vec{V} \cdot \vec{l} \right| + c + \frac{8\mu}{\left| \vec{L} \right|}} \right] \quad (3.38)$$

Yukarıdaki denklemde L hücrenin her Cartesian yönündeki uzaklık vektörü ve \vec{l} de L 'nin yönündeki birim vektördür. Vektör L x , y ve z yönlerinin her birinde sırasıyla aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\vec{L} = \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{1}{4}(x_2 + x_3 + x_6 + x_7) - \frac{1}{4}(x_1 + x_4 + x_5 + x_8) \right] \vec{i} \\ & + \left[\frac{1}{4}(y_2 + y_3 + y_6 + y_7) - \frac{1}{4}(y_1 + y_4 + y_5 + y_8) \right] \vec{j} \\ & + \left[\frac{1}{4}(z_2 + z_3 + z_6 + z_7) - \frac{1}{4}(z_1 + z_4 + z_5 + z_8) \right] \vec{k} \end{aligned} \right\} \quad (3.39a)$$

$$\vec{L} = \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{1}{4}(x_3 + x_4 + x_7 + x_8) - \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_5 + x_6) \right] \vec{i} \\ & + \left[\frac{1}{4}(y_3 + y_4 + y_7 + y_8) - \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_5 + y_6) \right] \vec{j} \\ & + \left[\frac{1}{4}(z_3 + z_4 + z_7 + z_8) - \frac{1}{4}(z_1 + z_2 + z_5 + z_6) \right] \vec{k} \end{aligned} \right\} \quad (3.39b)$$

$$\vec{L} = \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{1}{4}(x_5 + x_6 + x_7 + x_8) - \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \right] \vec{i} \\ & + \left[\frac{1}{4}(y_5 + y_6 + y_7 + y_8) - \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \right] \vec{j} \\ & + \left[\frac{1}{4}(z_5 + z_6 + z_7 + z_8) - \frac{1}{4}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) \right] \vec{k} \end{aligned} \right\} \quad (3.39c)$$

Diğer terimler c ve μ ses hızı ve efektif yapışkanlığı temsil ederler. Efektif yapışkanlık katsayısı laminer ve türbülant yapışkanlık katsayılarının toplamı olarak alınır. CFL, özel test durumu için seçilen CFL sayısını belirtir.

Üç-boyutlu Navier-Stokes denklemlerinin CFL kriteri için daha kapsamlı bir formülasyon Hoffman'da [36] verilmiştir.

$$(\Delta t)_{viscous} = \frac{(\Delta t)_{inviscid}}{1 + \frac{2}{Re_\Delta}} \quad (3.40)$$

Burada, ortalama hücre Reynolds sayısı

$$Re_{\Delta} = \min(Re_{\Delta x}, Re_{\Delta y}, Re_{\Delta z}) \quad (3.41a)$$

$$Re_{\Delta x} = \frac{|\rho V \Delta x|}{\mu} \quad (3.41b)$$

$$Re_{\Delta y} = \frac{|\rho V \Delta y|}{\mu} \quad (3.41c)$$

$$Re_{\Delta z} = \frac{|\rho V \Delta z|}{\mu} \quad (3.41d)$$

şeklinde verilir

Denklemler (3.40)'da kullanılan değerler hücre için ortalamalardır. Hoffmann [36] bu formülasyonun deneysel olduğunu ve MacCormack şeması için geliştirildiğini belirtir. Ancak, bu kriter mevcut çalışmada kullanılan şema için de kullanılabilir. Sürtünmesiz zaman adımı Set [28] ve Tınaztepe [27] tarafından sunulan Oktay'ın [37] sonucuna göre hesaplanabilir.

$$(\Delta t)_{inviscid} = CFL \cdot \min \left(\frac{\Delta \nabla}{\vec{V} \cdot \vec{A}_1 + c \left| \vec{A}_1 \right|}, \frac{\Delta \nabla}{\vec{V} \cdot \vec{A}_2 + c \left| \vec{A}_2 \right|}, \frac{\Delta \nabla}{\vec{V} \cdot \vec{A}_3 + c \left| \vec{A}_3 \right|} \right) \quad (3.42)$$

Yüzey vektörleri A_1 , A_2 ve A_3 'ün hesaplanması Ek A'da verilmiştir. Sembol c yine hücrenin içindeki ses hızını ortalama bir değer olarak temsil eder. Yöntemin kararlılığını sağlamak için Hirsch'in [1] de dediği gibi CFL sayısı yukarıda verilen bütün formülasyonlar için 1.0'in altında tutulmuştur.

BÖLÜM 4

SINIR ŞARTLARI

Bir diferansiyel denklemin çözümleri sonsuz sayıdadır. Spesifik bir durum için çözümü tek yapan sınır şartlarıdır. Bu yüzden bir kısmi diferansiyel denklem setinin çözümünde en önemli bölümlerden biri sınır şartlarının ele alınmasıdır.

Spesifik bir diferansiyel denklem için seçilecek sınır şartları diferansiyel denklemin tipine bağlıdır. Örneğin, Sert'in [28] de açıkladığı gibi üç-boyutlu, zamana bağlı Euler denklemleri için uygun olan sınır şartları bu denklemlerin hiperbolik davranışına uygun olarak karakteristik tiptedir. Ancak, Navier-Stokes denklemleri (2.1) için durum bu kadar basit değildir. Zamana bağlı, üç-boyutlu Navier-Stokes denklemleri (2.1) çok daha kompleks bir davranış sergilerler. İkinci dereceden sürtünmeli terimler yüzünden zaman-uzay koordinatlarında parabolik, uzay koordinatlarında zamana bağlı olmadan eliptiktirler. Momentum ve enerji denklemlerinin zaman ve uzayda parabolik olmalarının yanında birinci dereceden olan devamlılık denklemi hala hiperbolik bir davranış sergiler. Dolayısıyla zamana bağlı, üç-boyutlu Navier-Stokes denklemleri (2.1) parabolik-hiperbolik bir denklem seti oluşturur denebilir.

Navier-Stokes denklemlerinde bulunan ikinci dereceden terimler yüzünden hız ve sıcaklığın türevlerini ekstra sınır şartları olarak kullanmak gereklidir. Ancak, bu bilgisayar kullanımı açısından zor ve verimsiz olabilir. Bu noktada, unutulmaması gereken bir şey Navier-Stokes denklemlerinin hız bileşkeleri ve sıcaklığın türevlerinin kaybolduğu bölgelerde kaybolan sürtünmeli ve ısı ileten terimlerle Euler denklemlerine dönüştüğüdür. Akış alanının sürtünmesiz bölgeleri için bu gerçeği ele alarak genel bir tahmin yapılabilir ve genelde hiperbolik sistemlerde kullanılan karakteristik tip sınır şartları Navier-Stokes denklemleri için de kullanılabilir. Aslında, sınır şartlarının bu şekilde modellenmesi Gerolymos [11] ve Tınaztepe [27] tarafından da tedirgin iç ve dış

akışlar için denenmiş olup kabul edilebilir sonuçlar elde edilmiştir. Kolay uygulanabilirlikleri ve verimli kullanımı düşünülerek bu çalışma için en akla yatar çözümün karakteristik sınır şartlarının kullanılması olduğu söylenebilir. Gerçekte de duvarların üstünde kaymamazlık şartıyla sıcaklık türevinin verilmesi Navier-Stokes denklemleri (2.1) için yeterlidir. Duvar üzerindeki basınç momentum denkleminin normal bileşkesi kullanılarak bulunur.

4.1 SINIR ŞARTI UYGULANMASI

Sınır şartlarının akış alanı üzerinde uygulanması için bir tahmin edici-düzeltilci yöntem kullanılır. Tahmin edici faz sınırların üzerindeki noktalara ait korunabilir değişkenlerin Lax-Wendroff yöntemine göre güncellenmesiyle yapılır. Bu adımdan sonra, karakteristik tip sınır şartları tahmin edilen değerler kullanılarak açık olarak şöyleden uygulanır:

$$\delta U_{\text{boundary}} = U_{\text{corrected}} - U_{\text{predicted}} \quad (4.1)$$

Yukarıdaki formülde $U_{\text{corrected}}$ korunabilir değişkenin uygun sınır şartına göre değiştirildikten sonraki değerini gösterirken $U_{\text{predicted}}$ korunabilir değişkenin tahmin edici adım uygulandıktan sonraki haline tekabül eder.

4.2 KARAKTERİSTİK TİP SINIR ŞARTLARI

Karakteristik sınır şartlarını incelemek için Euler denklemleri karakteristik değişkenler cinsinden yazılmalıdır. Bu prosedürün detayları Hirsch'de [1] bulunabilir, ama burada da kısa bir açıklama verilmiştir. İlk adım Euler denklemlerini ilkel değişkenler cinsinden yazmaktadır.

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial n} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial b} = 0 \quad (4.2)$$

Yukarıdaki denklemde n normal yönü, s ve b de teğetsel ve binormal yönleri temsil etmektedir. Bu noktada bir tahmin yapılarak \tilde{U} 'nın normal yöndeki değişiminin diğer iki yöndeki değişimlerine baskın olduğu kabul edilebilir. Bu yüzden, Denklem (4.2) şu hale gelir:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial n} = 0 \quad (4.3)$$

Ya da quasi-lineer formda

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial n} = 0 \quad (4.4)$$

Burada \tilde{U} ilkel değişken vektörü ve \tilde{A} da Jakobian'dır ve aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ u_n \\ u_s \\ u_b \\ p \end{bmatrix} \quad (4.5a)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \bar{u}_n & \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u}_n & 0 & 0 & 1/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & \bar{u}_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{u}_n & 0 \\ 0 & \bar{\rho}\bar{c}^2 & 0 & 0 & \bar{u}_n \end{bmatrix} \quad (4.5b)$$

Jakobian'ın formülasyonunda üstçizgili değişkenler ortalama değerler olarak ele alınırlar ve sabit olarak kabul edilmişlerdir. Ayrıca, \bar{c} da ortalama ses hızını temsil etmektedir.

İlkel değişken formülasyonundan karakteristik değişken formülasyonunu elde etmek için Jacobian matris L 'nin de yardımıyla diagonal forma koymalıdır. Bu durumda

$$L^{-1} \tilde{A} L = \Lambda \quad (4.6)$$

şeklini alır. Burada

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\bar{\rho}}{2\bar{c}} & \frac{\bar{\rho}}{2\bar{c}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{\rho}\bar{c}}{2} & \frac{\bar{\rho}\bar{c}}{2} \end{bmatrix} \quad (4.7a)$$

ve

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\bar{c}^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}\bar{c}} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}\bar{c}} \end{bmatrix} \quad (4.7b)$$

şeklinde verilir. Dolayısıyla diagonal matris Λ şöyle elde edilir

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u}_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{u}_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{u}_n + \bar{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{u}_n - \bar{c} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Yukarıdaki formülasyonda $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ve λ_5 Euler denklemleri sisteminin özdeğerleridir. A , L ve L^{-1} 'i kullanarak, Jakobian \tilde{A} şöyle ifade edilebilir.

$$\tilde{A} = L\Lambda L^{-1} \quad (4.9)$$

Denklem (4.9)'u kullanarak Denklem (4.4) aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + L\Lambda L^{-1} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial n} = 0 \quad (4.10)$$

Yukarıdaki denklem takip eden denklemi elde etmek için L^{-1} ile soldan çarpılır.
Bu durumda

$$L^{-1} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \Lambda L^{-1} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial n} = 0 \quad (4.11)$$

Şimdi karakteristik değişken vektörü için bir tanım yapılabilir.

$$\delta W = L^{-1} \delta \tilde{U} \quad (4.12)$$

Yukarıdaki açıklamayı kullanarak karakteristik değişken formülasyonu elde edilebilir. Bu durumda

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial W}{\partial n} = 0 \quad (4.13)$$

Vektör W lineerize olmuş karakteristik değişkenler vektörü olarak tabir edilir ve aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$W = \begin{bmatrix} \rho - \frac{p}{c^2} \\ u_b \\ u_s \\ u_n + \frac{p}{c^2} \\ -u_n + \frac{p}{c^2} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Yukarıdaki formülasyon yansıtmayan sınır şartlarını uygulamak için kullanılmaktadır. Bu uygulama için iki farklı tipte sınır şartı kullanılır: sayısal ve fiziksel. Sınırda hangisinin uygulanacağı karakteristiğin özdeğerine bağlıdır. Pozitif özdeğerler için karakteristik akış alanının dışından içine doğru gelir. Bu yüzden, fiziksel sınır şartı uygulanmalıdır ve karakteristiğin uzak alan değeri düzeltilmiş değere eşitlenir. Öte yandan, sıfır ve negatif olan özdeğerler içinse sayısal şema tarafından bulunan karakteristik değerin düzeltilmiş değere eşitlenmesi anlamına gelen sayısal sınır şartı kullanılır.

Bir önceki paragrafta verilen açıklamalar yansıtmayan sınır şartlarının karakteristik yönünde ilerleyen bölgesel tedirgilerin (perturbation) yok olması gereksinimine dayanırlar. [1]

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0 \quad (4.15)$$

Denklem (4.13)'e göre bu aynı zamanda aşağıdaki anlama da gelmektedir.

$$\Lambda \frac{\partial W}{\partial n} = 0 \quad (4.16)$$

Bu çalışmada yukarıdaki durum şöyle uygulanmıştır:

$$\Delta W = 0 \quad (4.17)$$

Özdeğerlerin işaretleri akış Mach sayısına ve ele alınan sınırın akış alanındaki yerine bağlıdır. Diğer bir deyişle, akışın sesaltı mı yoksa sesüstü mü olduğu; akış alanının giriş ve çıkışının yeri özdeğerleri etkiler. Bu dört durum bu bölümün kalan kısmında açıklanacaktır. Ayrıca, duvar sınır şartı da verilecektir.

4.2.1 Sesaltı Giriş

Bu durum için, $c > u_n > 0$, dolayısıyla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ pozitifdir ve λ_5 negatiftir. Dolayısıyla, sınırda kullanılması gereken fiziksel sınır şartlarının sayısı dörtken beşinci karakteristik akış alanının içinden gelen bilgiyle tespit edilir.

$$W_1: \quad \rho_{corrected} - \frac{P_{corrected}}{\bar{c}^2} = \rho_{far} - \frac{P_{far}}{\bar{c}^2} \quad (4.18a)$$

$$W_2: \quad u_{b,corrected} = u_{b,far} \quad (4.18b)$$

$$W_3: \quad u_{s,corrected} = u_{s,far} \quad (4.18c)$$

$$W_4: \quad u_{n,corrected} + \frac{P_{corrected}}{\bar{\rho}c} = u_{n,far} + \frac{P_{far}}{\bar{\rho}c} \quad (4.18d)$$

$$W_5: \quad -u_{n,corrected} + \frac{P_{corrected}}{\bar{\rho}c} = -u_{n,predicted} + \frac{P_{predicted}}{\bar{\rho}c} \quad (4.18e)$$

Yukarıdaki denklemlerde altışaretler *corrected*, *predicted* ve *far* sırasıyla düzeltilmiş, tahmin edilmiş ve uzak alan değerlerine tekabül eder. Burada not edilmesi gereken önemli bir nokta da normal hız komponenti u_n 'nin akış alanına doğru pozitif

olarak alınması gerektidir [1]. Giriş sınırı için uzak alan değerleri uzak alan toplam basıncı p_{total} , uzak alan toplam sıcaklığı T_{total} ve Mach sayısı M_{far} kullanılarak hesaplanır. Uzak alandaki yoğunluk, basınç ve sıcaklığı elde etmek için izentropik denklemler kullanılır. Hız bileşkeleri Mach sayısı, ses hızı ve akış açıları (yani açıların kosinüsleri) kullanılarak hesaplanır.

$$p_{far} = p_{total} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{far}^2 \right)^{\frac{-\gamma}{\gamma - 1}} \quad (4.19)$$

$$\rho_{total} = \frac{P_{total}}{RT_{total}} \quad (4.20)$$

$$\rho_{far} = \rho_{total} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{far}^2 \right)^{\frac{-1}{\gamma - 1}} \quad (4.21)$$

$$u_{n,far} = M_{far} \sqrt{\gamma \frac{P_{far}}{\rho_{far}}} \cos \alpha_1 \quad (4.22a)$$

$$u_{s,far} = M_{far} \sqrt{\gamma \frac{P_{far}}{\rho_{far}}} \cos \alpha_2 \quad (4.22b)$$

$$u_{b,far} = M_{far} \sqrt{\gamma \frac{P_{far}}{\rho_{far}}} \cos \alpha_3 \quad (4.22c)$$

Yukarıdaki denklemlerde ρ_{total} giriş sınırının uzak-alanındaki toplam yoğunluğu temsil ederken α_1 , α_2 ve α_3 üç akış açısıdır. Denklem (4.18)'i tekrar düzenleyerek her ilkel değişken için düzeltilmiş değerler elde edilebilir.

$$p_{corrected} = \frac{1}{2} [p_{far} + p_{predicted} + \bar{\rho}c(u_{n,far} - u_{n,predicted})] \quad (4.23a)$$

$$\rho_{corrected} = \rho_{far} + \frac{P_{corrected} - P_{far}}{\bar{c}^2} \quad (4.23b)$$

$$u_{n,corrected} = u_{n,far} + \frac{P_{far} - P_{corrected}}{\bar{\rho}\bar{c}} \quad (4.23c)$$

$$u_{s,corrected} = u_{s,far} \quad (4.23d)$$

$$u_{b,corrected} = u_{b,far} \quad (4.23e)$$

4.2.2 Sesüstü Giriş

Bu tip sınır şartı için bütün özdeğerler pozitiftir. Bu yüzden, bütün karakteristik değişkenler uzak alan akış değerleri kullanılarak düzelttilirler.

$$W_1: \quad \rho_{corrected} - \frac{P_{corrected}}{\bar{c}^2} = \rho_{far} - \frac{P_{far}}{\bar{c}^2} \quad (4.24a)$$

$$W_2: \quad u_{b,corrected} = u_{b,far} \quad (4.24b)$$

$$W_3: \quad u_{s,corrected} = u_{s,far} \quad (4.24c)$$

$$W_4: \quad u_{n,corrected} + \frac{P_{corrected}}{\bar{\rho}\bar{c}} = u_{n,far} + \frac{P_{far}}{\bar{\rho}\bar{c}} \quad (4.24d)$$

$$W_5: \quad -u_{n,corrected} + \frac{P_{corrected}}{\bar{\rho}\bar{c}} = -u_{n,far} + \frac{P_{far}}{\bar{\rho}\bar{c}} \quad (4.24e)$$

Yukarıdaki cebirsel denklem seti çözülmek ilkel değişkenler için düzeltilmiş değerler elde edilebilir.

$$P_{corrected} = P_{far} \quad (4.25a)$$

$$\rho_{corrected} = \rho_{far} \quad (4.25b)$$

$$u_{n,corrected} = u_{n,far} \quad (4.25c)$$

$$u_{s,corrected} = u_{s,far} \quad (4.25d)$$

$$u_{b,corrected} = u_{b,far} \quad (4.25e)$$

4.2.3 Sesaltı Çıkış

Normal yön sınırın içine doğrudur, bu yüzden hız vektörünün normal bileşkesi çıkış sınırı için negatiftir ve dahası büyüklüğü ortalam ses hızınınından daha azdır. Bu söyle ifade edilebilir: $u_n < 0$, $|u_n| < c$.

Bu formülasyona göre $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_5$ negatif ve λ_4 pozitifdir. Dolayısıyla, sadece W_4 uzak alan değerlerinden bulunur ve karakteristik denklemler şu hali alır

$$W_1: \quad \rho_{corrected} - \frac{p_{corrected}}{\bar{c}^2} = \rho_{predicted} - \frac{p_{predicted}}{\bar{c}^2} \quad (4.26a)$$

$$W_2: \quad u_{b,corrected} = u_{b,predicted} \quad (4.26b)$$

$$W_3: \quad u_{s,corrected} = u_{s,predicted} \quad (4.26c)$$

$$W_4: \quad u_{n,corrected} + \frac{p_{corrected}}{\rho c} = u_{n,far} + \frac{p_{far}}{\rho c} \quad (4.26d)$$

$$W_5: \quad -u_{n,corrected} + \frac{p_{corrected}}{\rho c} = -u_{n,predicted} + \frac{p_{predicted}}{\rho c} \quad (4.26e)$$

Eğer çıkış basıncı spesifik bir durumda belirlenmişse, dördüncü karakteristik denklem elimine edilir ve basıncın düzeltilmiş değeri olarak belirlenen değer alınır. Yukarıdaki denklemleri yeniden düzenleyerek şu sonuçlar elde edilir:

$$p_{corrected} = p_{far} \quad (4.27a)$$

$$\rho_{corrected} = \rho_{predicted} + \frac{p_{corrected} - p_{predicted}}{\bar{c}^2} \quad (4.27b)$$

$$u_{n,corrected} = u_{n,predicted} + \frac{p_{corrected} - p_{predicted}}{\rho c} \quad (4.27c)$$

$$u_{s,corrected} = u_{s,predicted} \quad (4.27d)$$

$$u_{b,corrected} = u_{b,predicted} \quad (4.27e)$$

4.2.4 Sesüstü Çıkış

Bütün özdeğerler $u_n < 0$ ve $|u_n| > c$ olduğundan negatiftir. Karakteristik denklemler şu hali alır

$$W_1: \quad \rho_{corrected} - \frac{P_{corrected}}{\bar{c}^2} = \rho_{predicted} - \frac{P_{predicted}}{\bar{c}^2} \quad (4.28a)$$

$$W_2: \quad u_{b,corrected} = u_{b,predicted} \quad (4.28b)$$

$$W_3: \quad u_{s,corrected} = u_{s,predicted} \quad (4.28c)$$

$$W_4: \quad u_{n,corrected} + \frac{P_{corrected}}{\bar{\rho}\bar{c}} = u_{n,predicted} + \frac{P_{predicted}}{\bar{\rho}\bar{c}} \quad (4.28d)$$

$$W_5: \quad -u_{n,corrected} + \frac{P_{corrected}}{\bar{\rho}\bar{c}} = -u_{n,predicted} + \frac{P_{predicted}}{\bar{\rho}\bar{c}} \quad (4.28e)$$

Yukarıdaki denklem setinin yeniden düzenlenmesiyle şu elde edilebilir:

$$P_{corrected} = P_{predicted} \quad (4.29a)$$

$$\rho_{corrected} = \rho_{predicted} \quad (4.29b)$$

$$u_{n,corrected} = u_{n,predicted} \quad (4.29c)$$

$$u_{s,corrected} = u_{s,predicted} \quad (4.29d)$$

$$u_{b,corrected} = u_{b,predicted} \quad (4.29e)$$

Bu da demektir ki sesüstü akışlar hiç bir zaman çıkış sınırının uzak alanından haberdar olmazlar ve çıkış sınırına bilgi sadece akış alanının içinden taşınır.

4.3 SİMETRİ SINIR ŞARTI

Simetri sınırı bir kayma yüzeyi olarak alınır. Dolayısıyla, kayma yüzeyinin üstündeki hız yüzeye tegettir ve bu yüzden yüzeyden akış geçemez (yani $u_n = 0$). Bu da $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_5$ 'i negatif veya sıfır ve λ_4 'ü de pozitif yapar. Bu yüzden karakteristik formülasyon şu hali alır

$$W_1: \quad \rho_{corrected} - \frac{P_{corrected}}{\bar{c}^2} = \rho_{predicted} - \frac{P_{predicted}}{\bar{c}^2} \quad (4.30a)$$

$$W_2: \quad u_{b,corrected} = u_{b,predicted} \quad (4.30b)$$

$$W_3: \quad u_{s,corrected} = u_{s,predicted} \quad (4.30c)$$

$$W_4: \quad u_{n,corrected} + \frac{P_{corrected}}{\bar{\rho}\bar{c}} = u_{n,wall} + \frac{P_{wall}}{\bar{\rho}\bar{c}} \quad (4.30d)$$

$$W_5: \quad -u_{n,corrected} + \frac{P_{corrected}}{\bar{\rho}\bar{c}} = -u_{n,predicted} + \frac{P_{predicted}}{\bar{\rho}\bar{c}} \quad (4.30e)$$

Yukarıdaki sette Denklem (4.30d), kayma yüzeyini akış geçemediği için $u_{n,corrected}$ sıfıra eşitlenerek elimine edilir. Düzeltilmiş değerler için elde edilen sonuç şöyle sunulabilir:

$$u_{n,corrected} = u_{n,wall} = 0 \quad (4.31a)$$

$$u_{s,corrected} = u_{s,predicted} \quad (4.31b)$$

$$u_{b,corrected} = u_{b,predicted} \quad (4.31c)$$

$$p_{corrected} = p_{predicted} - \bar{\rho} \bar{c} u_{n,predicted} \quad (4.31d)$$

$$\rho_{corrected} = \rho_{predicted} + \frac{p_{corrected} - p_{predicted}}{\bar{c}^2} \quad (4.31e)$$

4.4 KATI DUVAR SINIR ŞARTI

Bu çalışmadaki bütün katı duvarlar sabit olarak alınmıştır, bu yüzden kaymamazlık durumu şu hale indirgenir:

$$u = v = w = 0 \quad (4.32)$$

Sınır şartlarını tamamlamak için sıcaklığın kendisi veya türevi duvara normal olan yönde verilmelidir. Bu çalışmada sıcaklık türevi verilmiş ve sıfır eşit alınmıştır.

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (4.33)$$

Böyle bir sınır şartı yalıtılmış (ısı geçirmeyen) duvara aittir. Duvarın üstündeki basınç momentum denkleminin duvara normal olan yöndeki komponentinin çözülmesiyle bulunur. Aslında, Navier-Stokes denklemleri için bu denklem şu hale indirgenir:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (4.34)$$

4.5 UZAK ALAN SINIR ŞARTI

Dış akışlar için sayısal akış alanının büyüklüğünü sınırlayabilmek için cisimden en azından beş kiriş uzağa koyulan uzak alan sınırlarının üzerinde uzak alan değerleri uygulanır. Aslında, bu değerlerin doğrudan uygulanması dalgaların fiziksel olmayan bir biçimde bu sınırlardan yansımalarına neden olabilir. Ancak, uzak alan sınırı yeterince uzağa yerleştirilmişse Navier-Stokes denklemlerinin sürtünme mekanizması bu yansıtıcı dalgaları genelde dağıtmayı başarır.

Aslında, Hirsch'in [1] de gösterdiği gibi bu tür yansıtıcı dalgaların etkilerini azaltmak için başka yollar da vardır. Kaldırma katsayısına bağlı olan yeni bir terim uzak alan değerlerine eklenerek düzeltilmiş değerler bulunur. Bu formülasyon Tınaztepe [27] tarafından da uygulanmıştır. Ancak, bu çalışmada uzak alan değerleri hiç bir değişiklik yapılmadan uygulanmışlardır.

BÖLÜM 5

PROGRAMLAMA DETAYLARI

Sayısal yöntemler diferansiyel denklemlere yaklaşık sonuçlar sağlarlar. Bu yaklaşık sonuçlar, yapılan tahminler nedeniyle sadece belli durumlar için geçerlidirler. Bu yüzden, bir sayısal yöntem doğruluğu, uygulama sahası ve tutarlılığıyla test edilebilir. Bunlar da sayısal yöntemlerin yaklaşım seviyelerine, ayırtırma metodlarına ve yaklaşım hızlandırmasıyla suni yumuşatma gibi diğer kriterlere göre sınıflandırılmasına yol açar.

Ancak, bir sayısal metodun en önemli iki özelliği sağlamlığı ve verimliliğidir. Bu doğrudan kullanılan programlama diliyle alakalıdır. Günümüzde geliştirilen SAD kodlarının büyük bir bölümü en eski programlama dillerinden biri olan FORTRAN ile yazılmıştır. Ancak, gelişen yazılım teknolojisine ayak uydurmak ve daha iyi programlama için geliştirilen yeni ortamlara alışmak gerekmektedir.

Programlama dünyasında elde edilen en önemli gelişmelerden biri, bu çalışmada da kullanılan Nesneye Yönerek Programlamadır (NYP). NYP sayesinde daha sağlam ve verimli çözüçüler oluşturmak mümkün olmuştur. NYP'nin gücü, ele alınan problemin fiziksel özelliklerinin bilgisayar ortamında modellenmesinde kullanılan sınıfların kullanımından gelir. Bu da programcının daha detaylı ama problemin fizигini daha iyi sunabilen modeller geliştirmesini sağlar.

Ama yine de NYP'nin en güçlü özelliği Dinamik Hafiza Tahsisatıdır (DHT). Büyük sıralar kullanan SAD kodları gibi bilgisayar programlarında DHT verimli kodlar yazmak için gerçek araç haline gelir. Bu sıraların problemi, büyüklüklerinin spesifik probleme göre çalışma zamanından önce bilinememesidir. Dolayısıyla, basit bir program kullanılıyorsa, programcı, yeni bir durum ele alındıkça kodu değiştirmek ve bu sıraların büyüklüklerini ayarlamak zorundadır. Bir başka çözüm de bu sıraların

büyüklüklerini çok büyük rakamlar olarak verip bu sayıların其实te gerekebilecek rakamlardan çok daha büyük olacaklarını garanti etmektir. Ancak, bu sağlamlık problemini çözmek için son derece verimsiz bir yoldur. Hafızanın çok kötü şekilde kullanımına yol açar ve muhtemelen gereksiz yere büyük olan bu sıralardan dolayı bilgisayarın takılmasına neden olur.

Bu probleme tek etkili çözüm, sıraların büyüklüklerini çalışma zamanında vermektedir. DHT kullanılarak sadece bu sıraların büyüklükleri çalışma zamanında verilmez, sıraların kendileri de aynı zamanda oluşturulmuş olur. NYP programcıya DHT aracılığıyla böyle büyük bir avantaj sağlar ve oldukça fazla yer kaplayan bu sıraları, eğer ki gerekmiyorsa, çalışma zamanında silmek de mümkün olur. Bu da bilgisayar kullanımındaki verimi arttırır. Aynı zamanda, kullanıcının farklı durumlara kodu değiştirmeden uygulayabilmesini sağlayarak kodu daha sağlam yapar.

Mevcut NYP dillerinden bu çalışma için C++ seçilmiştir. Bunun birinci nedeni C++ programlama dilinin kullanıcı dostu (user-friendly) derleyicisidir. Bir çok mühendislik alanındaki popüleritesi de bir başka faktör olmuştur. Ancak, en önemli neden C++'ın mevcut grafiksel kütüphanesidir. Bu grafiksel kütüphaneleri kullanarak görüntüsüz olan bir kodu eğer ki C++ ile yazılmışsa görüntülü hale getirmek çok kolaydır. Bu da programının çok fazla bir çalışmadan kurtulmasını ve belki de kodun görsel olmayan kısmının programlanması kadar bir zamanı ona kazandırır. C++'ın seçilmesinin bir nedeni de onun NYP olmayan düşük-seviyeli bir programlama dili olan C'ye uzantısının olmasıdır. Bu yüzden, C++ da düşük-seviyeli bir programlama dilidir ve makina kodunun bir seviye üstündedir. Bu da derleme işleminin Fortran ve Pascal gibi yüksek-seviyeli dillere göre daha hızlı yapılmasını sağlar.

Bu bölümün takip eden kısımlarında katmanlı Navier-Stokes denklemlerini iki boyutta çözen görsel SAD programı NS++ hakkında genel bir bilgi verilmiştir. Çalışmada kullanılan sınıflar hakkında detaylı bilgi sunulmuştur.

5.1 NS++'IN DETAYLARI

Bu çalışmanın diğer bir amacı da sağlamlık ve kararlılık gösteren görsel, kullanıcı dostu bir SAD kodu geliştirmektir. Görsel olmayan üç-boyutlu, tedirgin bir

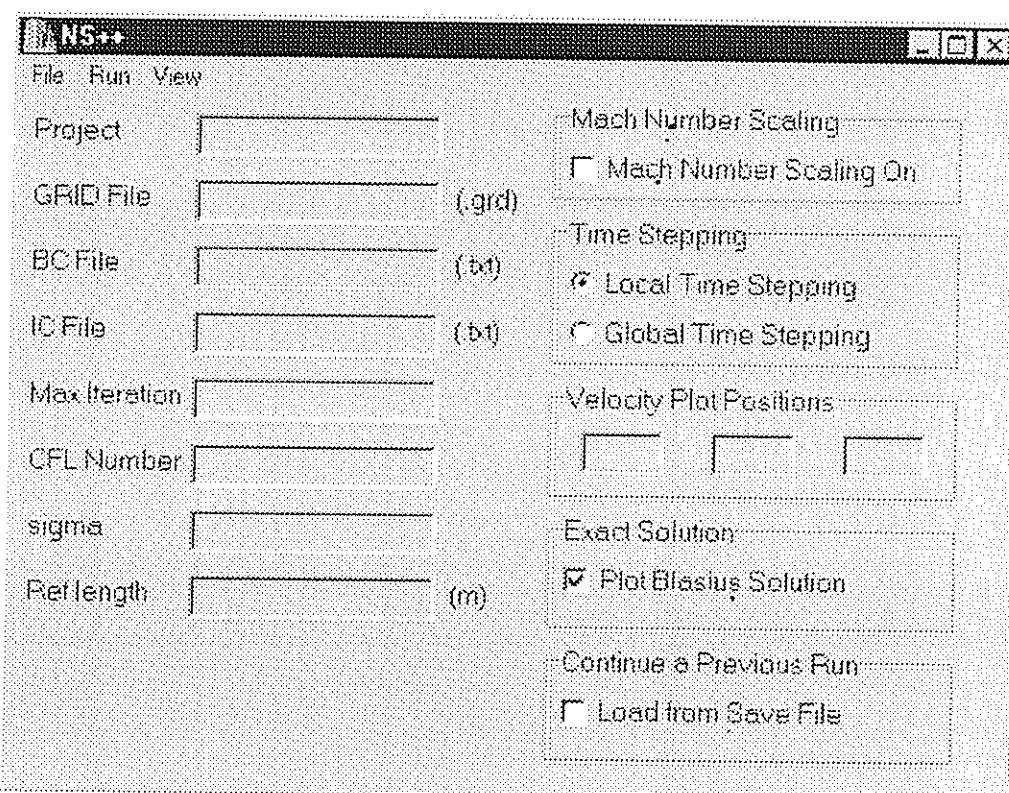
Navier-Stokes çözümü geliştirildikten sonra görsel tip bu çözümün iki-boyutlu, laminar versiyonundan yapılmıştır. İki-boyutlu ve katmanlı bir çözümün seçiliş nedeni gerekli bilgisayar kaynaklarının eksikliğidir. Üç-boyutlu bir problem, katmanlı olsa bile bilgisayar hafızasında çok yer tutar. Dahası, eğer koda eklenmiş bir tedirginlik modeli varsa yeni gelen değişkenler nedeniyle gerekli hafıza daha da artar. Görsel bileşkeler yüzünden ortaya çıkacak olan ekstradan gereken hafıza göz önüne alınınca iki-boyutlu, katmanlı tip seçilmiştir. Aslında, asıl amaç böyle sağlam bir çözümün yapılabileceğinin kanıtlanması ve böyle bir kodu gelecekteki araştırmacılara bırakarak görsel programlama alanında onlara cesaret vermektedir.

NS++, biri giriş dosyalarını yüklemek ve gerekli parametreleri değiştirmek ve diğer de çözüm ilerledikçe akış parametrelerindeki değişiklikleri izlemek için gereken iki pencereden oluşur. Bu iki ana formun ötesinde Sert'in [28] kendi Euler çözümüsünde tasarladığı gibi olan beş sınıf vardır. Bu çalışma bu Euler çözümüsünden başlatılmış ve nesneye-yönelik yapı mümkün olduğunda aynı bırakılmaya çalışılmıştır. Doğal olarak, Navier-Stokes denklemlerinin fizigiyle alakalı bir çok yeni parametre ve üye fonksiyon koda eklenmiştir, ancak nesneye-yönelik yapının özü korunmuştur. Bu bölümün bu kısmında bahsedilen iki form açıklanmış ve beş sınıfın detaylı açıklamaları verilmiştir.

Şekil 5.1'de de verilen ilk form kullanıcının NS++.exe dosyasını çalıştırıldığında ilk gördüğü sahnedir. Kullanıcının "slv" uzantılı bir proje dosyasını "Load" düğmesiyle yüklemesi veya giriş dosyalarının herbirinin isimlerini teker teker formun üzerindeki boşluklara girmesi beklenmektedir. Eğer yüklenmiş ya da girilmiş bir projenin üzerinde değişiklikler yapılmışsa bunlar aynı proje ismiyle veya farklı bir isimle sırasıyla "Save" ya da "Save as" düğmeleri kullanılarak kaydedilebilirler. Bütün düğmeler kullanıcıya formun üstündeki "File" menüsünün altında sunulmuştur. "File" menüsüne ait olan iki düğme daha vardır. Bunların ilki programdan çıkmaya yarayan "Exit" düğmesi, ikincisi ise formun üstündeki boşluklarda yazan her şeyi silecek "New" düğmesidir.

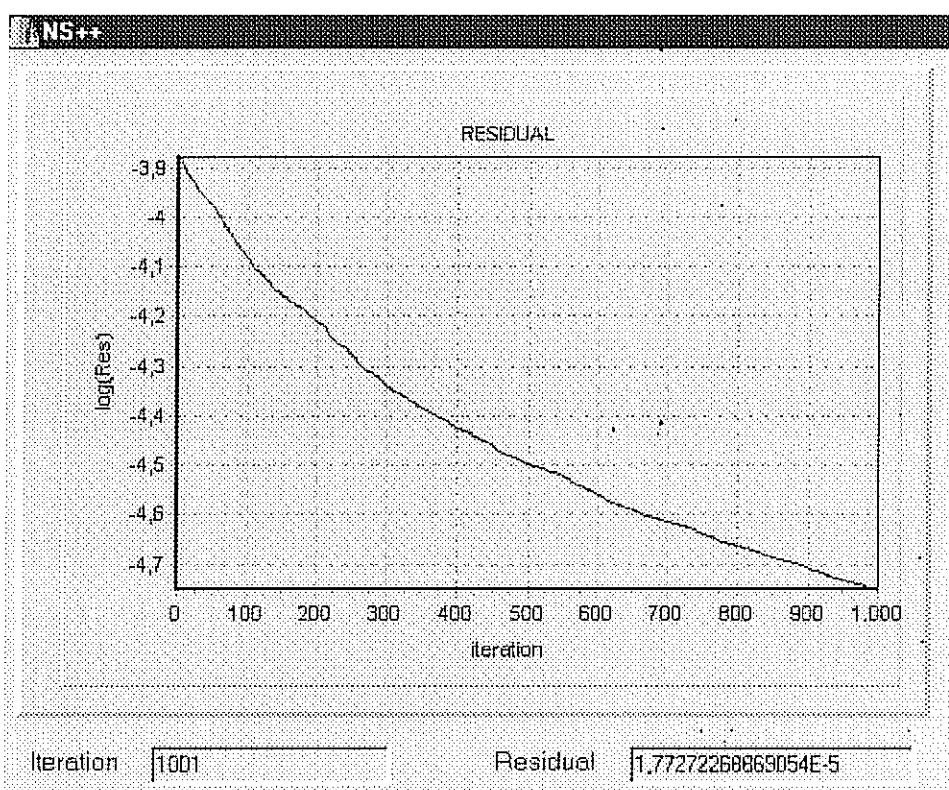
Formun üzerindeki diğer menü "Run" menüsüdür. Bu menüde "Run" ve "About" düğmeleri bulunur. "Run" düğmesinin bütün giriş parametreleri yazıldıktan sonra yinelemeleri başlattığı ve "About" düğmesinin de kod hakkında bilgi verdiği açıkları. Formun üzerindeki son menü, "Plots" düğmesini barındıran "View" menüsüdür. Bu düğmeye basarak kullanıcı, hepsi NS++'ın ikinci formunda olan artık (residual), yüzey sürtünme katsayısı ve hız profillerinin önceden belirli üç yerdeki grafiklerini görebilir.

Çalışma zamanında kullanıcıya iterasyonlar bitene kadar ikinci form gösterilir. Yukarıda bahsedilen beş grafikle birlikte o anki iterasyon sayısı, ortalama artık ve Reynolds sayısı da kullanıcıya gösterilir. Bu grafiklerden ikisi Şekil 5.2a ve 5.2b'de verilmiştir. Iterasyonlar bittikten sonra kullanıcı ikinci formun üzerindeki grafikleri doğrudan basma şansına sahiptir. Çözümün hangi yineleme sayısına kadar devam edeceği kullanıcının seçimine bırakılmıştır. Bu maksimum yineleme sayısının formun üzerindeki aynı adlı boşluğa yazılmışıyla sağlanır. Ancak, ilk girilen sayı gerekli yaklaşım için yeterli olmayabilir. Eğer ki durum buyusa, kullanıcı ana menüyü işaret eden düğmeye basarak ilk forma geri dönebilir. Daha sonra maksimum yenileme sayısı için yeni bir rakam girip "start from a previous solution" ibareli kutuya basıp kaldığı yerden devam edebilir. Bu, böyle bir kodun kesinlikle gerekli bir özelliğidir, çünkü genelde çözümü sonuçlandırmak için yaklaşık olarak 30000 iterasyon gereklidir.

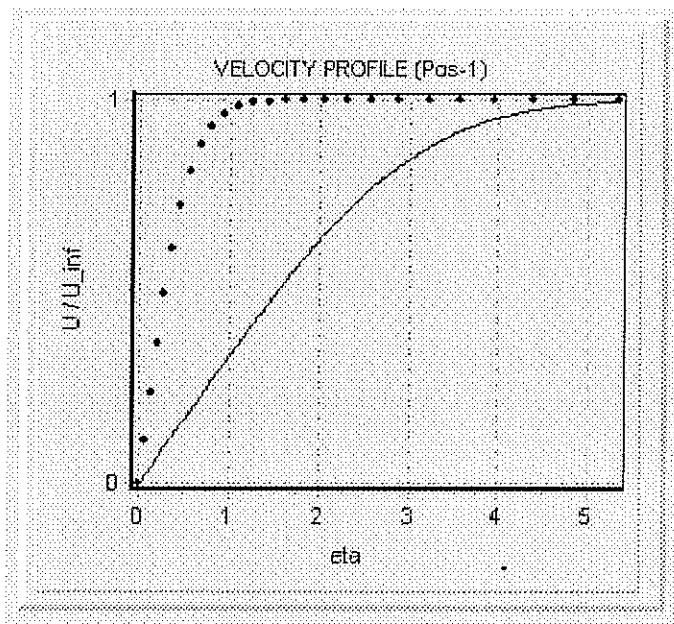


Şekil 5.1 NS++'in açılış ekranı

İlk olarak boş olan formun üzerindeki boşluklar giriş dosyaları için gerekli olan bilgileri tutarlar. Kod, çalışmak için biri hesaplama ağı için, bir diğerini sınır durumları için ve sonucusu da ilk durumlar için olan üç giriş dosyasına ihtiyaç duyar. Şekil 5.1'de de gösterildiği gibi kod, hesaplama ağı dosyasını "grd" uzantısıyla, ilk durumlar ve sınır durumları için olan dosyalarıysa "txt" uzantısıyla NS++.exe dosyasının bulunduğu dizinde ister. Bu üç dosyanın isimlerinin yanında bir proje ismi de, ele alınan farklı durumları ayırdedebilmek için çözücüye verilmek zorundadır. Maksimum yineleme sayısı, CFL sayısı, suni yumuşatma katsayısı ve referans uzunluğu metre cinsinden verilmelidir. Hız profillerinin grafiklerinin çizileceği üç yer de proje dosyasının içinde verilmelidir. Bütün bu isimler elle girilebileceği gibi bir proje dosyasından da yüklenebilir. Bir proje dosyasının örneği Şekil 5.3'te verilmiştir. Bu şekilde her satırda verilen bilgi NS++'in ilk formunun üzerindeki karşılık gelen her boşluğa aktarılır.



Şekil 5.2a Artıkların tarihçesi



Şekil 5.2b Düz plaka akışının çözümü için hız profili

Bu detayların haricinde birinci formun üzerinde sayısal metotla ilgili olan bazı şalterler de vardır. Bunların ilki Bölüm 3'te anlatılan Mach sayısı ölçeklendirilmesiyle ilgilidir. Bu kutu ilk olarak basılmamış durumdadır. İkinci seçim zaman adımlarına yöneliktedir. Çözüm prosedürünü hızlandırmak için hesaplanan Δt 'nin her hücre için ayrı ayrı kullanılması manasına gelen bölgesel zaman adımlaması kullanılabilir. Ancak, bu özel durumlarda bazı problemlere neden olabilir, bu yüzden kullanıcı bütün hücrelerin zaman adımlarının en küçüğünün bütün akış alanı içiⁿ kullanıldığı genel zaman adımlamasını tercih edebilir. Zaman adımlaması için olan şalterin hemen altında bulunan hız grafik yerleri hız profillerini izlemek için seçilen x-yönündeki nokta numaralarıdır. Bu sayılar elle girilebilecekleri gibi bir proje dosyasından da yüklenenebilirler. Bir sonraki şalter hız profillerinin ve yüzey sürtünme katsayısının grafiklerinin Blasius çözümlerinin katmanlı düz plaka probleminde sunulup sunulmayacağı kontrol eder. Aslında bunun kodun onaylanmasıdan başka bir yararı yoktur ve formun üzerine yalnızca akademik amaçlarla spesifik olarak düz plaka problemi için koyulmuştur. Aynı formun üzerindeki son şalter işlevi daha önce bu bölümde anlatılan ve yarılmış bir çözüme devam etmeyi sağlayan şalterdir.

Kod aynı zamanda başka grafik programlarıyla kullanmak için hız profillerinin, yüzey sürtünme katsayısının ve korunabilir değişkenlerin her noktadaki değerlerini önceden belirlenmiş yinelenme sayılarında ayrı dosyaların içine yazar.

fp	: Project Name
flatplate9	: Grid File
1f8BC	: Boundary Condition File
1INI	: Initial Condition File
1500	: Maximum Number of Iterations
0,5	: CFL Number
0,001	: Artificial Smoothing Coefficient
0,005	: Reference Length
80	: Velocity Plot Position-1
95	: Velocity Plot Position-2
110	: Velocity Plot Position-3

Şekil 5.3 Tipik bir proje dosyası

Kodun daha detaylı bir açıklaması için giriş dosyalarının da incelenmesi gereklidir. İlk olarak ele alınacak olan hesaplama ağının dosyasıdır. Bu sadece akış alanının bütün noktalarının x , y ve z koordinatlarının bulunduğu bir yazı dosyasıdır. Doğal olarak, iki-boyutlu durumda sadece x ve y koordinatları bulunmaktadır. Ayrıca, x ve y yönlerindeki toplam nokta sayıları da ilk satırda verilir. Bir hesaplama dosyası örneği Şekil 5.4'te verilmiştir.

Ele alınacak bir sonraki dosya ilk durum dosyasıdır. Uzak alan Mach sayısını, toplam sıcaklığını ve toplam basıncını akış açılarıyla birlikte bulundurur. Kod, bahsedilen değerleri akış alanının her sınırı için ayrı ayrı okur.

Son olarak ele alınacak dosya sınır şartlarıyla ilgili bilgileri tutandır. Akış alanının sınırları açıklanmadan önce bu çalışmada kullanılan yüz ve yama kavramlarının sunulması gereklidir. Şekil 5.5'e bakarak, üç boyutta akış alanının altı yüzdenoluştugu söylenebilir. İki boyutta bu sayı dörde eşittir. Dolayısıyla, yüz terimi akış alanının sınırlarını temsil eder. Ancak, bir yüz üzerinde uygulanması gereken birden fazla tipte sınır şartı olabilir. Böyle bir durumda kurtuluş yeni bir terim olan yamayı sunmaktadır. Yine Şekil 5.5'te görülebileceği gibi yama, üzerinde birden fazla sayıda sınır şartının etkin olduğu bir yüzün parçasıdır.

Bir sınır şartı dosyasında ilk verilen bilgi yama sayısıdır. Eğer bu değer bire eşitse, bu bütün yüzün tek bir yamadan oluştuğunu belirtir. Bu yüzden, yüzün başlangıç ve bitiş noktalarının koordinatlarıyla sınır şartının tipi verilmelidir. Bu amaçla, sınır şartı tipi için bir tamsayı ve yüzün başlangıç ve bitiş noktaları içinse altı tamsayı dosyaya yazılır. Birden fazla yaması olan bir yüz için bütün yamalara ait sınır şartı tipleri ve başlangıç ve bitiş noktalarının koordinatları verilir ve diğer bir yüze daha sonra geçilir. Bu metotla bütün yüzler taranır ve sınır şartı dosyası kapatılır. Örnek bir dosya Şekil 5.6'da verilmiştir.

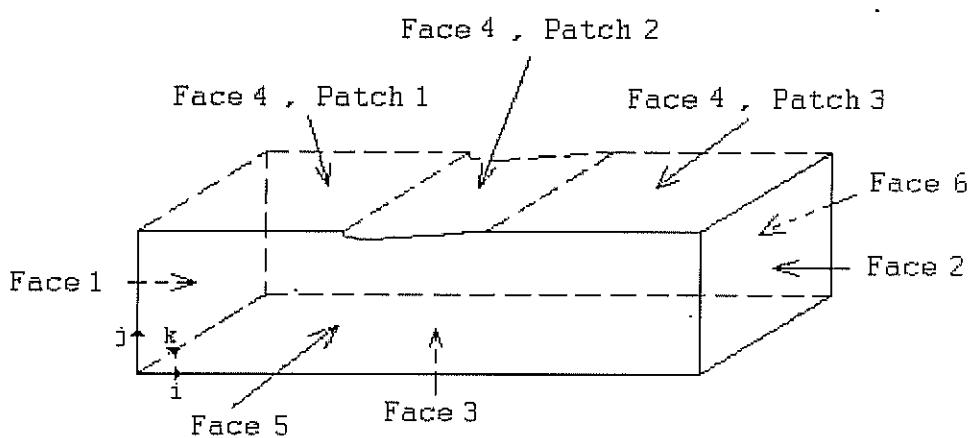
Sınır şartlarının uygulanmasında her sınır şartı tipinin bir tamsayıyla temsil edildiği özel bir kodlama kullanılır. Kod önce verilen tamsayıyı okur ve sınır şartının tipini anlar. Bölüm 3'te de açıklanan sınır şartlarının bu kodlamadaki sayıları şöyledir:

- | | | |
|---|---|--|
| 0 | : | Giriş Sınır Şartı |
| 1 | : | Cıkış Sınır Şartı |
| 2 | : | Uzak-Alan Sınır Şartı |
| 3 | : | Kayma Yüzeyi (Simetri Sınır Şartı) |
| 4 | : | Katı Duvar Sınır Şartı |
| 5 | : | Üç-boyutlu <i>Periodicity</i> için Sınır Şartı |

Tamsayı beşe tekabül eden sınır şartı kenar duvarlar üzerindeki noktaların iç akış alanındaki değerlerle güncellenmesi manasına gelir ve bu z-yönünde sadece üç noktası bulunan üç-boyutlu, düz plaka probleminde kullanılır.

121	81	3
-2.000000	0.000000	0.000
-2.000000	0.000000	0.001
-2.000000	0.000000	0.002
-2.000000	0.000250	0.000
-2.000000	0.000250	0.001
-2.000000	0.000250	0.002
.....		

Şekil 5.4 Tipik bir veri dosyası



Şekil 5.5 Sayısal akış alanının tipik yüz ve yamaları

	number of patches:	BC Type:	indices of the starting point:	indices of the end point:
Face 1	1	0	0 0 0	0 80 2
Face 2	1	1	120 0 0	120 80 2
Face 3 patch 1:	2	3	1 0 0	39 0 2
patch 2:		4	40 0 0	119 0 2
Face 4	1	2	1 80 0	119 80 2
Face 5	1	5	1 1 0	119 79 0
Face 6	1	5	1 1 2	119 79 2

Şekil 5.6 Tipik bir sınır şartı dosyası

5.2 NS++'IN NESNEYE-YÖNELİK YAPISI

Daha önce de açıklandığı gibi bu çalışmada geliştirilen kod beş sınıfından oluşmaktadır. Bunlar alan, blok, yüz, hücre ve noktadır. Bu sınıflar Sert [28] tarafından

kendi Euler çözümü için geliştirilmiştir. Bu çalışma onunkinin bir devamı nitelikinde olduğu için aynı sınıflar alınmış ve bunlara eklemeler yapılmıştır.

Bütün sınıflar akış alanının belirli parçalarını temsil ederler. Alan sınıfı hepsinin içinde en kapsamlıdır, çünkü bütün akış alanını temsil eder. Bu yüzden, ele alınan her durum bir alan nesnesi içerir. En kapsamlı ikinci sınıf bloktur. Bir alan ele alınan özel duruma bağlı olarak bir ya da daha fazla bloktan oluşur. Bir blok bir akış alanının belirli bir parçasıdır. Karmaşık geometrisi olan problemler için tek bloklu bir yaklaşım uygun olmayabilir. Dolayısıyla, bütün akış alanı birden fazla blokla ele alınır ve bu blokları bağlamak için yeni bir tür sınır şartı kullanılır.

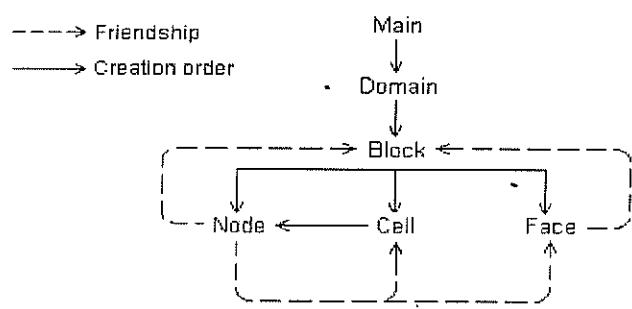
Çok bloklu yaklaşımın daha detaylı bir açıklaması Sert'te [28] bulunabilir. Ancak, bu çalışmada geliştirilen çözümü sadece tek-bloklu problemleri ele alabilecek kapasiteye sahiptir. Çok bloklu yaklaşım sunulmamasına rağmen blok sınıfı orjinal nesneye yönelik yapıya sadık kalınmak için tutulmuştur. Bu yapıyı aynı tutarak eğer istenirse çok-bloklu yaklaşımın uygulanması kolaylaştırılmıştır.

Ele alınacak diğer sınıf yüzdür. Bu bölümde daha önce de açıklandığı gibi alanın bir yüzü aslında bir dış sınırı temsil etmektedir. Üç boyutlu bir problemde kodun içinde yüz sınıfıyla temsil edilen ve Şekil 5.6'da görülebilen altı yüz vardır.

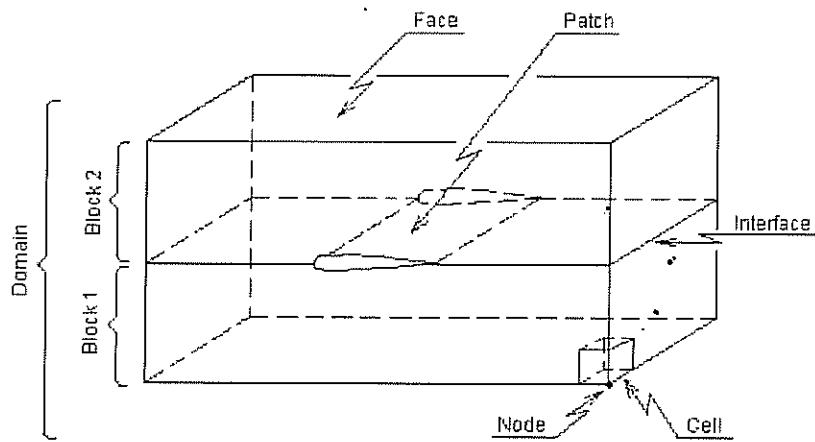
Bu sayısal yöntemde akış alanı sınırlı hacimlere, yani hücrelere bölünmüştür. Bu hücreler mevcut çalışmada hücre sınıfıyla temsil edilmişlerdir. Bir hücrenin hacim ve yüzey alanları gibi geometrik özellikleri hafızada hücre sınıfının özel değişkenleri olarak saklanmışlardır.

Ancak, bir hücre akış alanının en küçük birimi değildir. Mevcut yöntem bir hücre köşeli yöntem olduğu için korunabilir değişkenler bir hücrenin sekiz köşesinde saklanmıştır. Akış alanını dolduran bütün hücrelerin köşeleri birleştirildiğinde değişkenlerin değerlerini tutan bir noktalar matrisi oluşur. Bu yüzden bunlar akış alanının en küçük birimi olarak kabul edilirler ve kodda da nokta sınıfıyla temsil edilirler.

Bu beş sınıfın en kapsamlıdan en küçüğe doğru olan yaratılış sırası Şekil 5.7'de verilmiştir. Yukarıda açıklanan bu sınıfları göstermek için Şekil 5.8'de üç boyutlu bir akış alanı verilmiştir.



Şekil 5.7 NS++'da kullanılan sınıflar



Şekil 5.8 NS++'da kullanılan sınıfları gösteren bir üç boyutlu akış alanı

BÖLÜM 6

SONUÇLAR

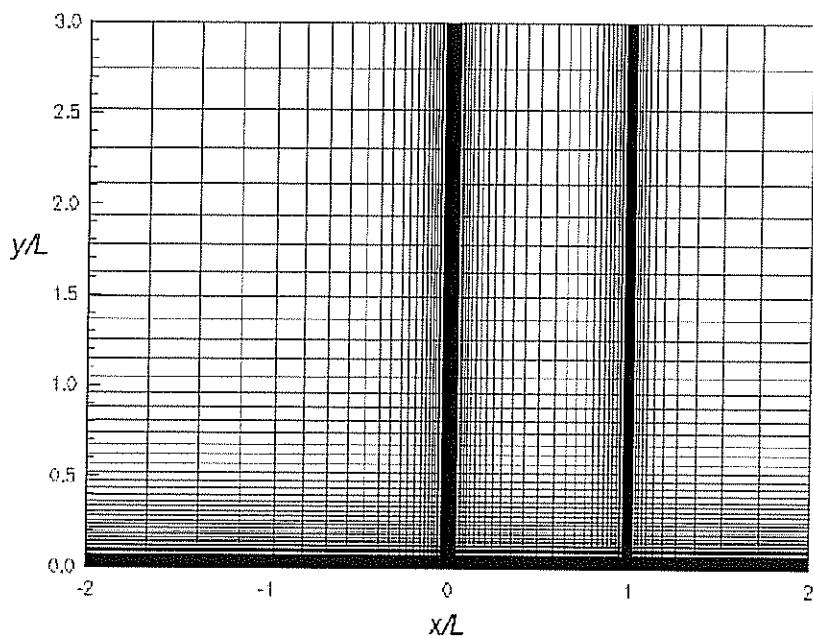
Bu çalışmada geliştirilen sayısal metot çeşitli cisimler üzerinde kodu onaylamak ve farklı problemler karşısında doğruluğunu test etmek için uygulanmıştır. Bu amaçla beş test durumu seçilmiştir. Bunların arasında ilk üçü katmanlı problemlerken son ikisi tedirgin yapıdadır.

Çözüğün sürtünmeli terimleri doğru ele alıp olmadığını kontrol etmenin en iyi yolu şüphesiz çözümücü baskın kuvvetlerin sürtünmeli terimlerden kaynaklandığı düz plaka probleminde test etmektir. Bu amaçla Jameson [25] ve Tinaztepe [27] tarafından da ele alınan Reynolds sayısı 35000 olan katmanlı bir akış seçilmiştir. Akış Mach sayısı sıkıştırılamayan akışı temsil etmesi için 0.3 alınmıştır. İkinci katmanlı test durumu Reynolds sayısı 8000 olan %10'luk dairesel yay kaskadı üzerindeki akıştır ve bu durum daha önce Kallinderis ve Baron [38] tarafından da denenmiştir. Bu sesaltı akış için Mach sayısı 0.5'tir. Benzer bir durum %8'lik dairesel yay kaskadının üzerindeki Reynolds sayısı 24000 olan katmanlı bir akış için de denenmiştir. Bu kez Mach sayısı kodu sesüstü durumlarda test etmek için 1.4 alınmıştır.

Yukarıda açıklanan katmanlı test durumları iki boyutlu problemlerdir. Bu çalışmada ele alınan tek üç boyutlu test durumu Reynolds sayısı 6,000,000 ve Mach sayısı 0.3 olan düz plaka üzerindeki tedirgin akıştır. Bu problemle Baldwin-Lomax tedirginlik modeli test edilmiş ve elde edilen sonuçlar analitik çözümle karşılaştırılmıştır. Çalışmanın son test durumu yine iki-boyutlu bir problem olarak ele alınmıştır. Bu kez sescivanı, tedirgin bir akışa maruz kalan bir NACA-0012 kanadı ele alınmıştır.

6.1 KATMANLI DÜZ PLAKA PROBLEMI

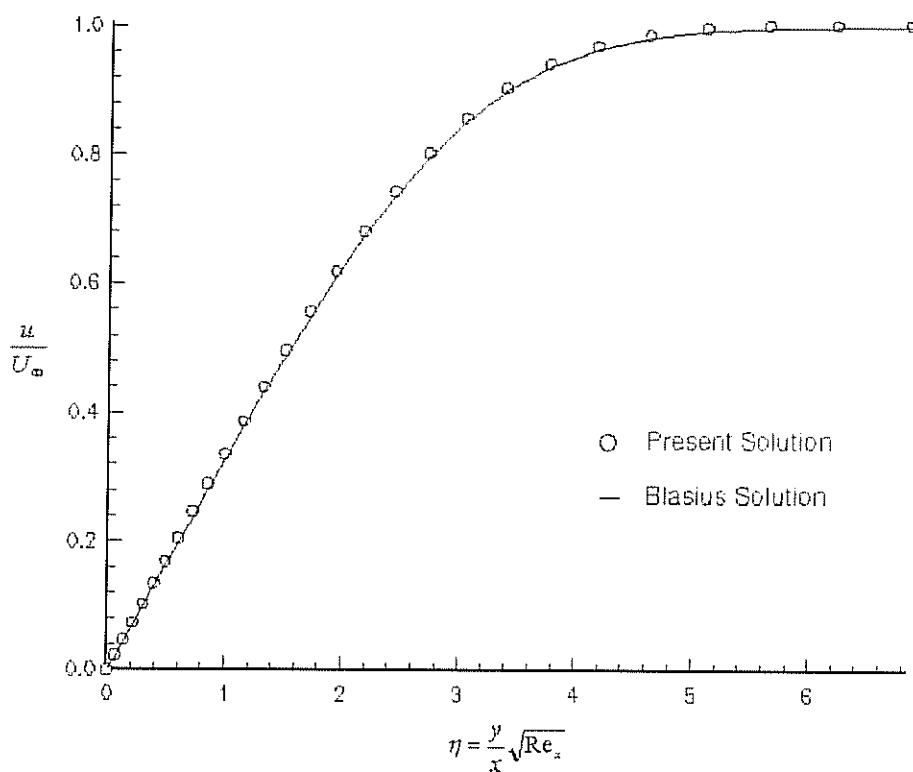
Bu problemin Reynolds sayısı 35000, Mach sayısı da 0.3 olarak seçilmiştir. Kodu böyle bir test durumunda çalıştırmanın amacı onaylanmasıdır. Katmanlı düz plaka problemi çözümünün sürtünmeli terimleri doğru olarak ele alıp almadığını kontrol etmenin en iyi yoludur. Bu tarz bir akış için basıncın akış yönündeki türevi plakanın başlangıç ucuna yakın olan bölge hariç her yerde sıfırdır. Dolayısıyla, Şekil 6.1'de de gösterildiği gibi oluşturulan 121×81 'lik H-tipi hesaplama ağı akış yönünde başlangıç ucuna doğru sıkıştırılmıştır. Sayısız çalışırmalardan sonra hesaplama ağının bitiş ucuna doğru da sıkıştırılmasının daha doğru sonuçlar verdiği tespit edilmiştir. Şekil 6.1'de de görüldüğü gibi plakanın önünde bir kayma yüzeyi vardır. Bu kayma yüzeyinin üzerinde 40 nokta, plakanın üzerinde 61 nokta ve plakadan sonraki arka bölgede de 20 nokta mevcuttur. Kullanılan y -yönündeki en küçük aralık (Δy) plakanın uzunluğunun 0.00025'iyken, x -yönündeki aralık (Δx) plakanın uzunluğunun 0.0005'idir. Böyle bir sıkıştırma sınır tabakasında 20'den fazla noktası olmasını sağlar, ki bu da gerekli olan doğruluk için yeterlidir. Bu problemde kullanılan ikinci dereceden yumusatma katsayısı 0.001'dir.



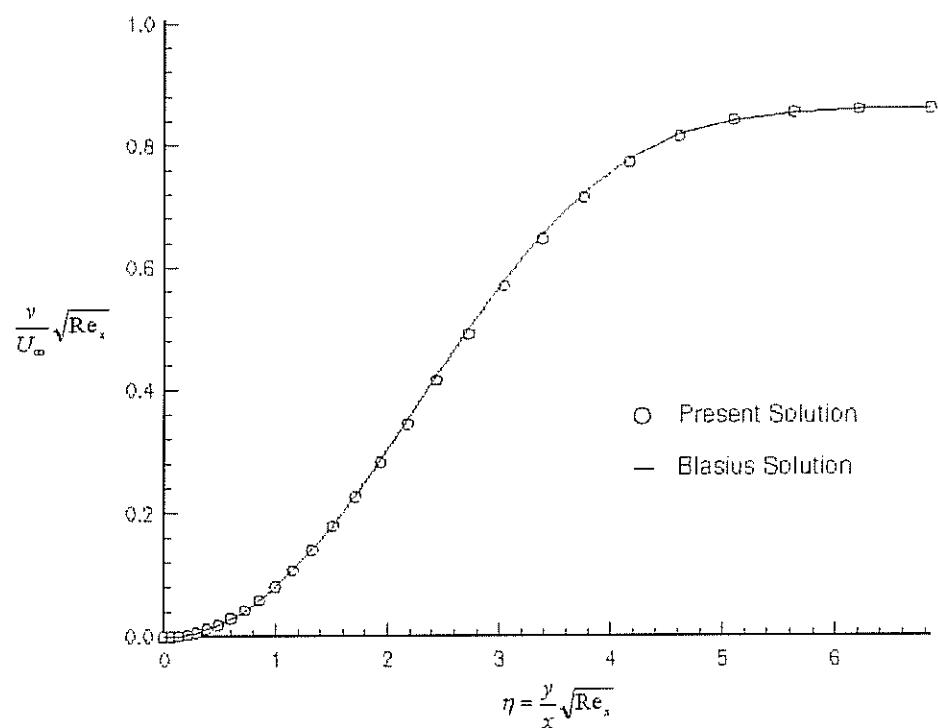
Şekil 6.1 Düz plaka probleminin H-tipi hesaplama ağı

Bu problem için hız profilleri plakanın üstünde plaka uzunluğunun %25'i, %50'si ve %75'i olmak üzere üç yerde kontrol edilmiştir. Bütün grafikler benzer çıkmıştır. Bu yüzden, akışa dik ve akış yönündeki hız profillerinin sadece plaka uzunluğunun %50'sinde olanları Şekil 6.2 ve 6.3'te sunulmuştur.

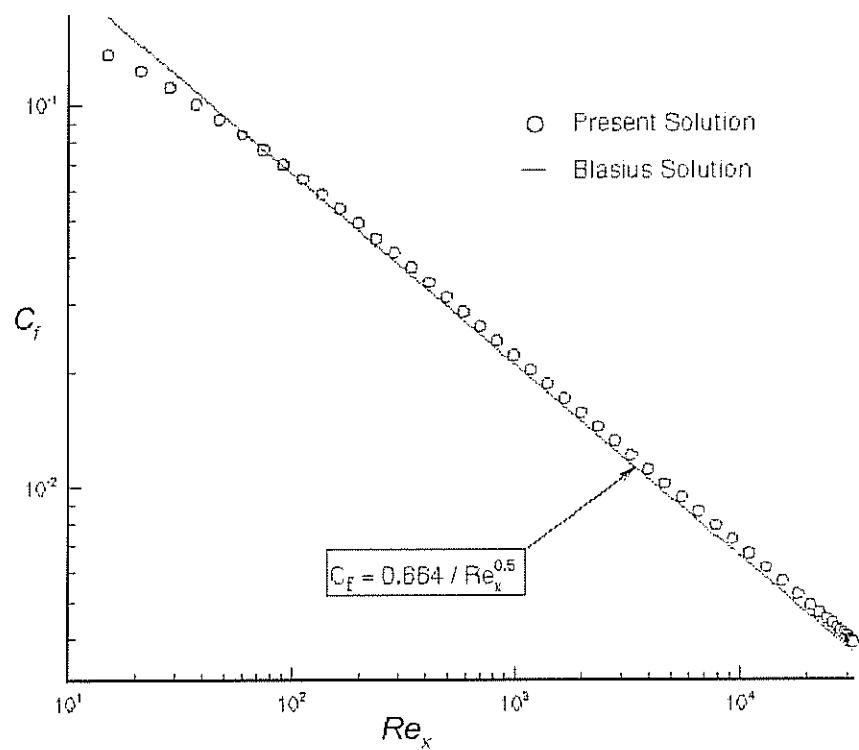
Şekil 6.2 de görüldüğü gibi akış yönündeki hız profili kabul edilebilirdir ve Blasius'un çözümüyle arasında pek fark yoktur. Aynı yorum Şekil 6.3'te verilen akışa dik hız profili için de geçerlidir. Ancak, çözümünün doğruluğunu bütün plaka üzerinde kontrol etmenin daha iyi bir yolu, yüzey sürtünme katsayısını çizmektir. Böyle bir grafik Şekil 6.4'te verilmiş ve elde edilen sonuç Blasius'un sonucuya karşılaştırılmıştır. Bu iki grafik arasındaki ufak farkı farketmek kolaydır. Böyle küçük bir farkın varlığına rağmen genel doğruluk kabul edilebilir denebilir.



Şekil 6.2 Plakanın %50'sinde akış yönündeki hız profili



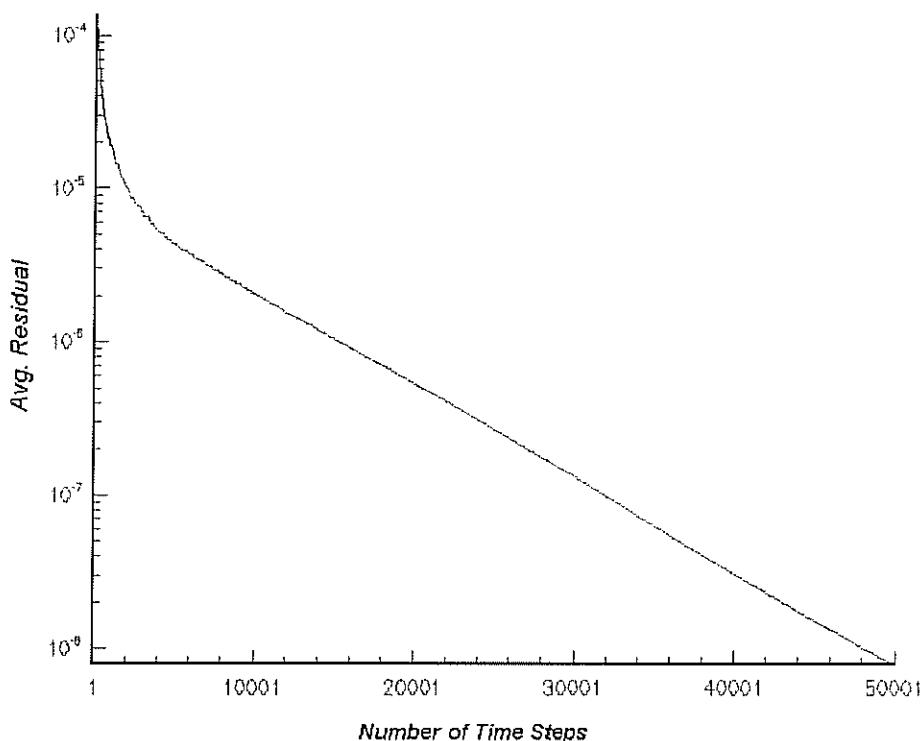
Şekil 6.3 Plakanın %50'sinde akışa dik hız profili



Şekil 6.4 Plakanın üstündeki yüzey sürtünme katsayısı dağılımı

Kod ortalama x -momentum artığında dört derecelik bir düşüş görülene kadar devam ettirilmiştir. Bu artığın tarihçesi Şekil 6.5'te verilmiştir. Ortalama artık da Denklem (6.1) ile verilmiştir.

$$Avg. Res.s = \frac{\sum U^{n+1} - U^n}{\sum U^{n+1}} \quad (6.1)$$



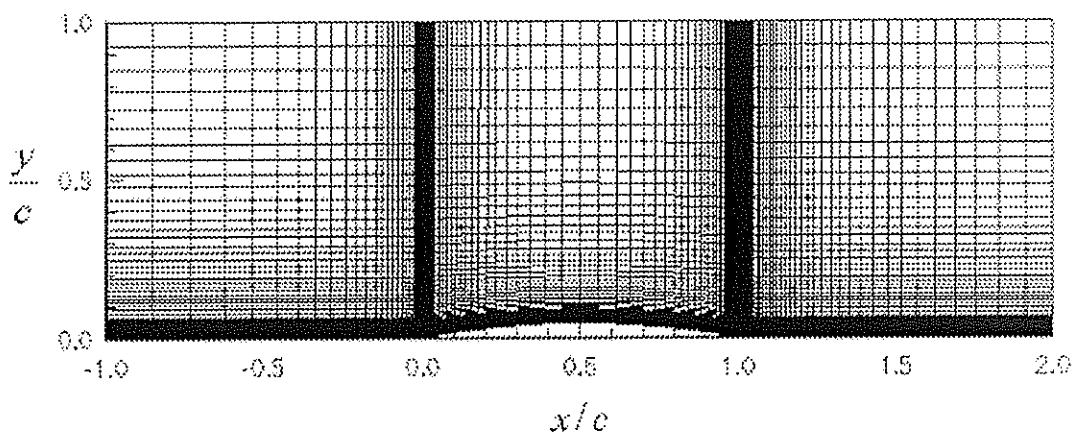
Şekil 6.5 Katmanlı düz plaka test durumu için artık tarihçesi

6.2 SESALTI DAİRESEL YAY KASKADI

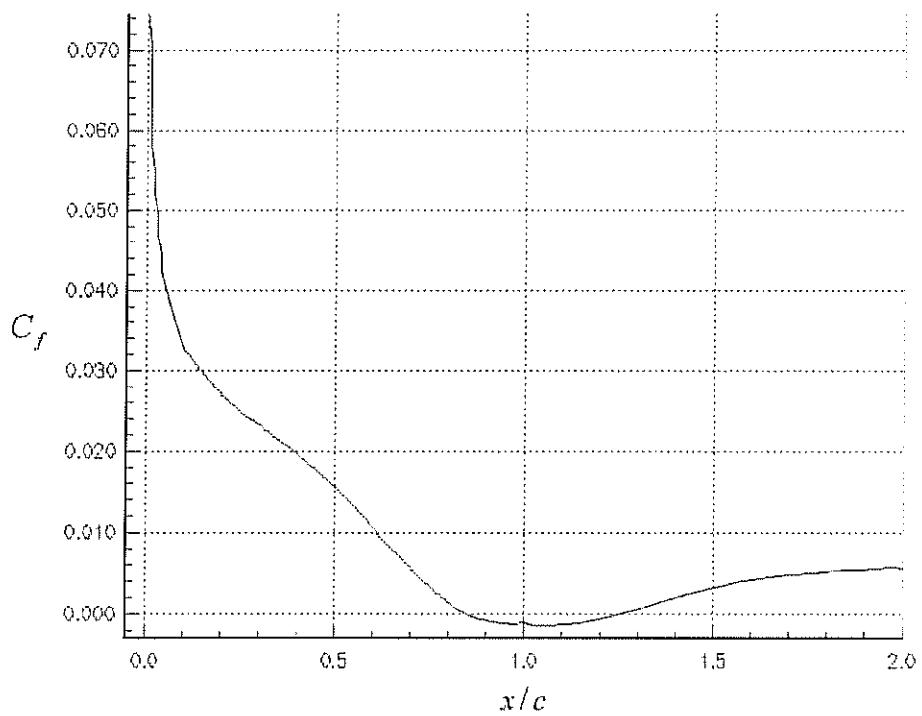
Bu katmanlı akışlar için ele alınan ikinci test durumudur. Reynolds sayısı 8000, Mach sayısı da 0.5'tir. Bu problem için %10'luk tümseğin üstünde 141x61'lik bir H-tipi hesaplama ağı kullanılmıştır. Hesaplama ağı x ve y yönlerinde sıkıştırılmıştır. y -yönünde en küçük Δy kırışın 0.0008'ıdır. Tümseğin başlangıç ucundan önce bir kayma yüzeyi mevcuttur ve tümsekten sonraki düz kısım Kallinderis ve Baron'a [38] uygun olması açısından katı duvar olarak alınmıştır. x -yönünde kullanılan 141 hesaplama ağı noktasının 30'u kayma yüzeyinin, 60'ı da tümseğin üzerindedir. Geriye kalan 50 nokta

tümsekten sonraki düz kısma yerleştirilmiştir. Hesaplama ağı x -yönünde biri tümseğin başlangıç ucu diğer de bitiş ucu olmak üzere iki yerde sıkıştırılmıştır. Başlangıç ucu teorik olarak bir durma noktasıdır, bu yüzden hesaplama ağını bu nokta civarında sıkıştırmak bir zorunluluktur. Ancak, ilk bakışta tümseğin bitiş ucunda sıkıştırmaya neden gerek olduğu anlaşılamayabilir. Bitiş ucunda böyle sıkı bir hesaplama ağı sayısal deneylerden sonra yapılmıştır ve buranın bir süreksizlik noktası olduğu belirlenmiştir. x -yönündeki en küçük adım sıkıştırılmış alanlarda kırışın 0.001'i kadardır. Hesaplama ağıının üst sınırı bir simetri yüzeyi olarak alınmıştır.

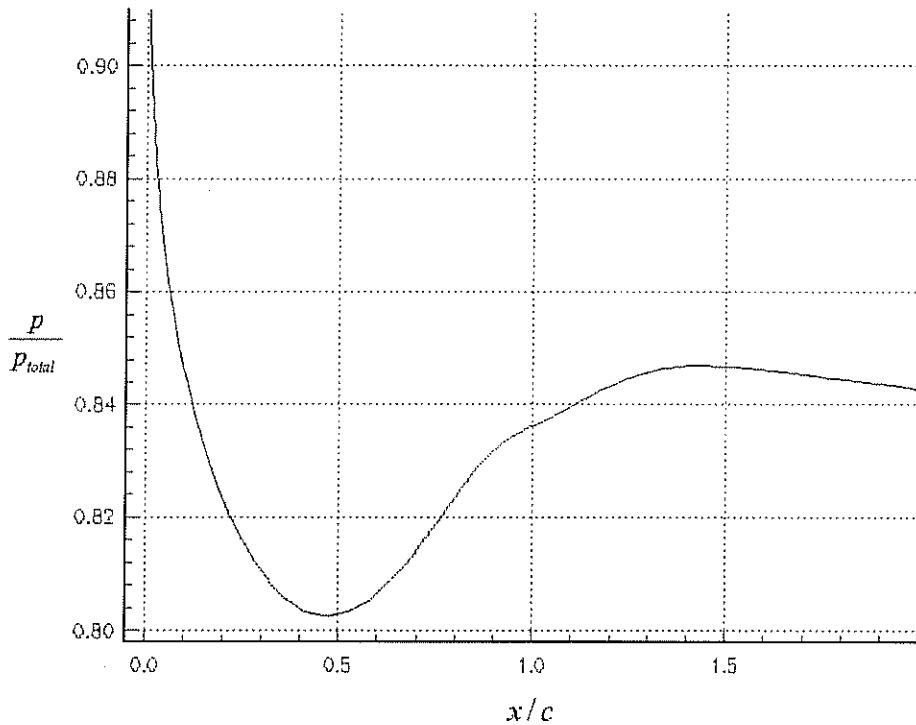
Bu problemde kullanılan hesaplama ağı Şekil 6.6'da verilmiştir. Tümseğin ve ondan sonraki düz kısmın üzerindeki yüzey sürtünme katsayısı ve basınç dağılımları sırasıyla Şekik 6.7 ve 6.8'de verilmiştir. Karşılaştırma amacıyla Kallinderis ve Baron [38] tarafından elde edilen aynı dağılımlar da Şekil 6.9 ve 6.10'da verilmiştir. Ortalama x -momentum artık tarihçesi de Şekil 6.11'de sunulmuştur. Yakınsak bir çözüm elde etmek için ortalama artık yaklaşıklar olarak dört derecelik bir düşüş gözlenmiştir.



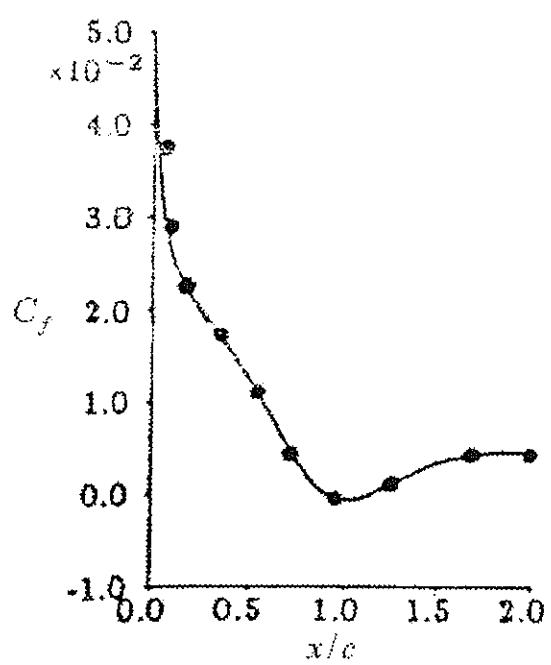
Şekil 6.6 Sesaltı dairesel yay kaskadı için H-tipi hesaplama ağı



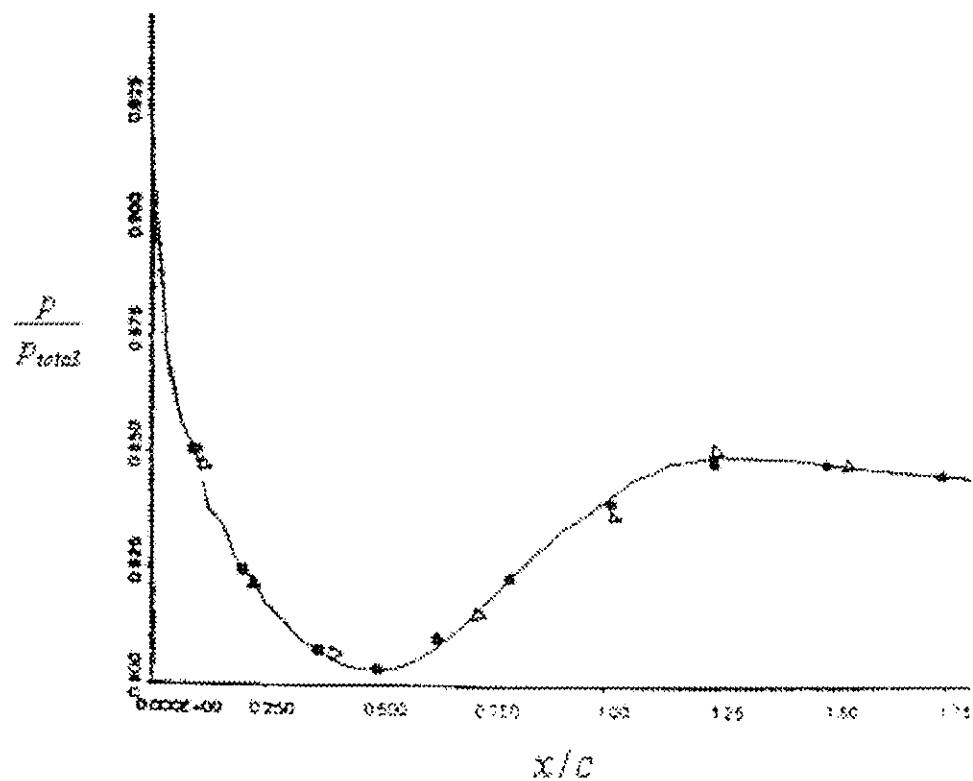
Şekil 6.7 Kaskadın üstündeki yüzey sürtünme katsayısı dağılımı, mevcut çözüm



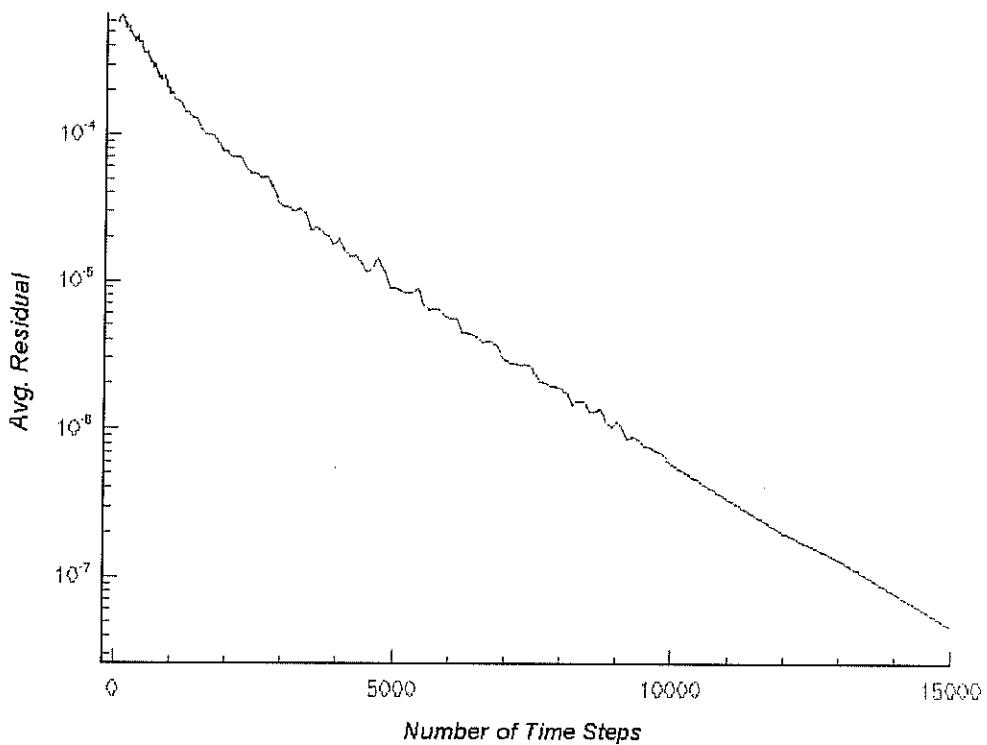
Şekil 6.8 Kaskadın üstündeki basınç dağılımı, mevcut çözüm



Şekil 6.9 Kaskadın üstündeki yüzey sürtünme katsayıları dağılımı, Kallinderis ve Baron [38]



Şekil 6.10 Kaskadın üstündeki basınç dağılımı, Kallinderis ve Baron [38]



Şekil 6.11 Sesaltı dairesel yay kaskadının artık tarihçesi

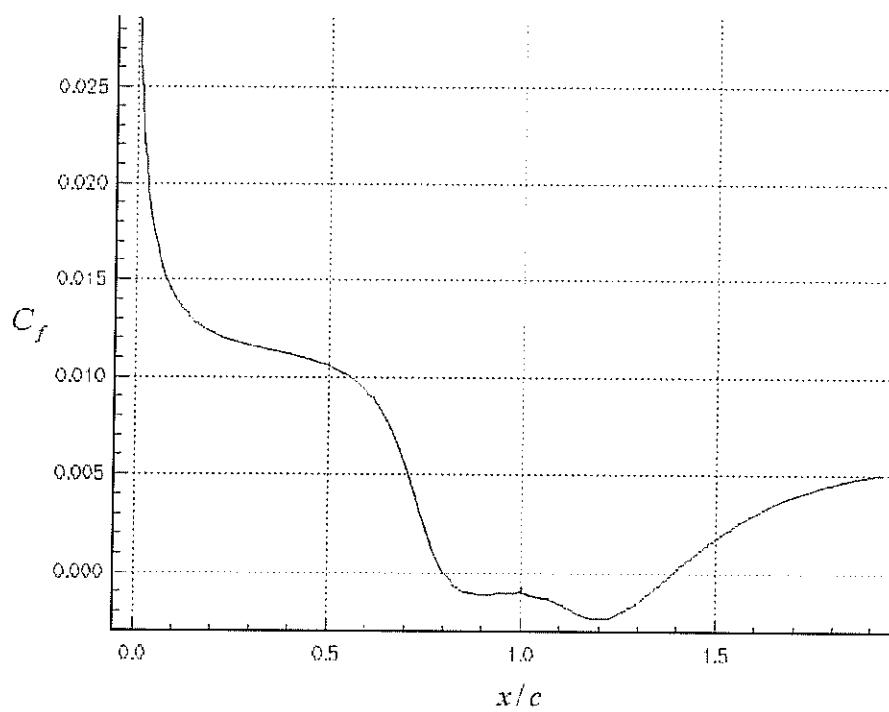
Elde edilen yüzey sürtünme katsayısının Kallinderis ve Baron [38] tarafından elde edilenle gayet iyi bir benzerlikte olduğu görülmüştür. Bu iki grafik arasındaki en temel fark kaskadın başlangıç ucuna yakın olan bölgede gözlenmiştir. Kallinderis ve Baron [38] yüzey sürtünme katsayısını başlangıç ucunda yaklaşık olarak 0.05 olarak tespit ederken mevcut çalışmada bu değer 0.07 olarak bulunmuştur. Bu farkın temel sebebi iki çalışmada kullanılan farklı hesaplama ağları olarak gösterilebilir. Kallinderis ve Baron'un [38] hesaplama ağı mevcut çalışmada kullanılan ve Şekil 6.6'da verilen hesaplama ağıyla karşılaştırıldığında oldukça kaba kalmaktadır. Dolayısıyla, mevcut çalışma yüzey sürtünme katsayısını başlangıç ucuna daha yakın bir yerde hesaplamaktadır. Başlangıç ucu yüzey sürtünme katsayısi için bir süreksizlik noktası olduğu için böyle bir fark oluşur. Bahsedilen bu farkdan başka iki grafik oldukça uyumlu gözükmektedir. Yüzey sürtünme katsayısının tümsekten sonraki düz alandaki neredeyse sabit olan değeri iki çalışmada da hemen hemen aynıdır.

Kaskadın bitiş ucu civarındaki bölge haricinde kalan yerlerde duvar basınç dağılımları da benzerdir. Kallinderis ve Baron [38] tarafından bitiş ucu civarında bulunan doğrusal dağılım mevcut kod tarafından tespit edilememiştir. Bu mevcut izgaranın çok fazla sıkıştırılmış olmasından kaynaklanabilir. Ancak, mevcut çözümü duvar basınç dağılımindaki bölgesel maksimum ve minimum değerlerle bunların yerlerinin tespitinde başarılı olmuştur. Bölgesel minimum basınç kaskadın yarı kordinata giriş toplam basıncının 0.8'inden biraz büyük bir değer olarak belirlenmiştir. Kordinata 1.4'ü civarında bulunan bölgesel maksimum basıncın yerinin tespitinde ufak bir fark da olsa bunun değeri yaklaşık olarak giriş toplam basıncının 0.85'i olarak doğru tespit edilmiştir. Genel olarak mevcut çözümü, yüzey sürtünme katsayısı ve basınç dağılımlarını doğru olarak tahmin etme başarısını göstermiştir.

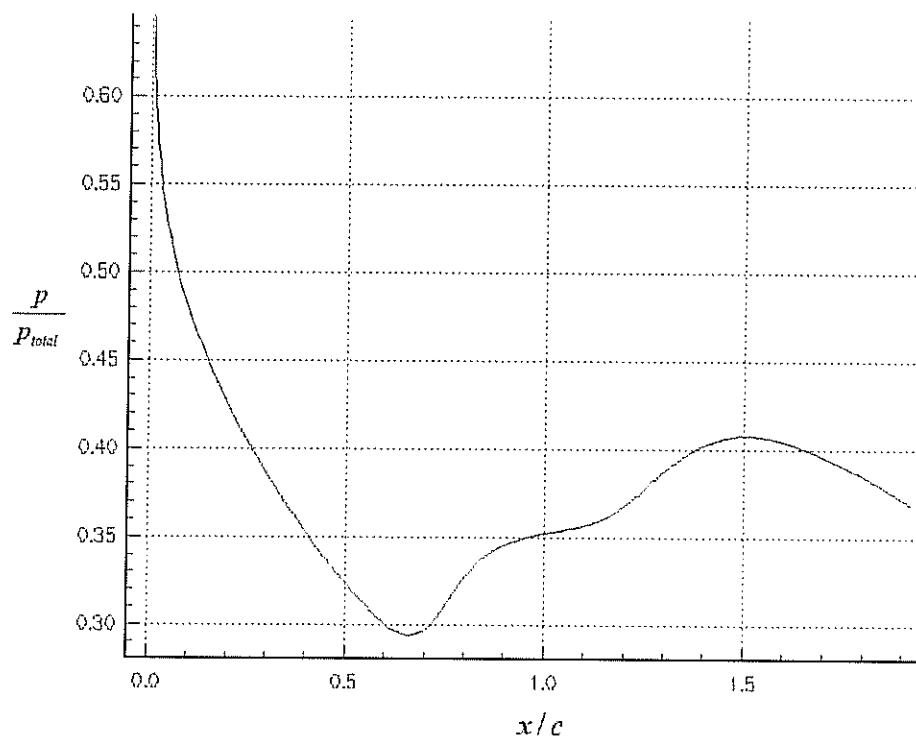
6.3 SESÜSTÜ DAİRESEL YAY KASKADI

Çözüğünün sesüstü durumlar için performansını tespit etmek böyle bir test durumu ele alınmıştır. Reynolds sayısı 24000 olarak ele alınırken Mach sayısı 1.4'e ayarlanmıştır. Tümsek %8'lük olarak kabul edilmiştir ve aslında bir önceki problemde hesaplama açısından tek fark da budur. Dolayısıyla, kullanılan hesaplama ağıının özellikleri sesaltı durumunkiyle aynıdır. Mevcut çözümüyle elde edilen yüzey sürtünme katsayısı ve duvar basınç dağılımları sırasıyla Şekil 6.12 ve 6.13'te verilmiştir. Bunlar Şekil 6.14 ve 6.15'te de verilen, Kallinderis ve Baron [38] tarafından elde edilen grafiklerle karşılaştırılmıştır. Artık tarihçesi sesaltı durumunkine oldukça benzemektedir. Yine ortalama x -momentum artığında dört derecelik bir düşüş elde edilmiştir.

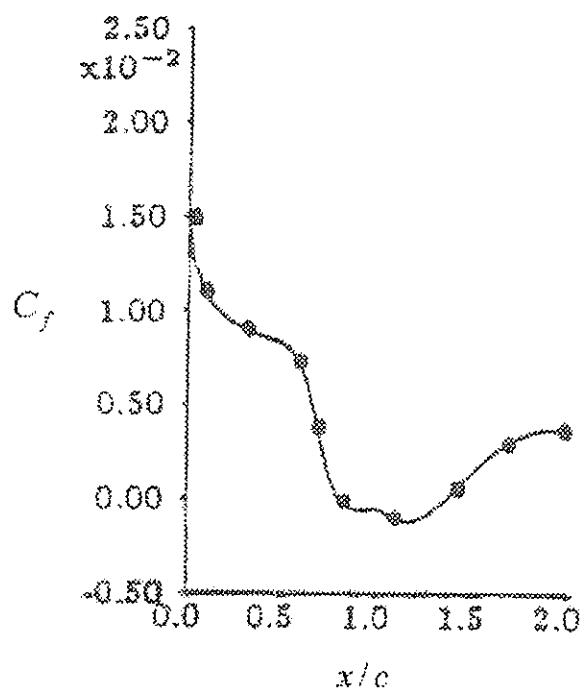
Mach sayısının tüm akış alanındaki kontur grafiği Şekil 6.16a ve 6.16b'de verilmiştir. Ayrıca, bu grafiğin şok dalgası-sınır tabakası etkileşim bölgesi civarındaki yakın çekim versiyonu da Şekil 6.18'de verilmiştir. Şekil 6.16a ve 6.16b, Kallinderis ve Baron'un [38] Şekil 6.17 ve 6.19'da verilmiş olan sonuçlarıyla kıyaslanabilir. Bu problem için ikinci-dereceden yumuşatma katsayısı 5.0 alınmıştır.



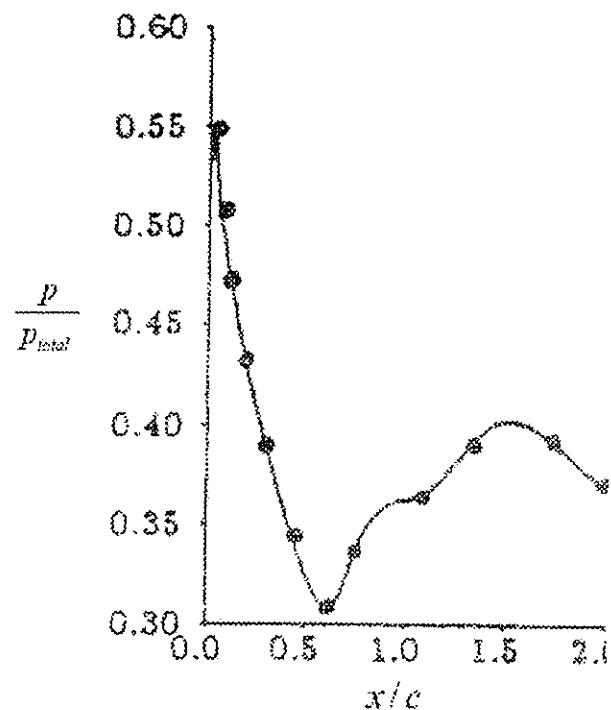
Şekil 6.12 Kaskadın üstündeki yüzey sürtünme katsayısı dağılımı, mevcut çözüm



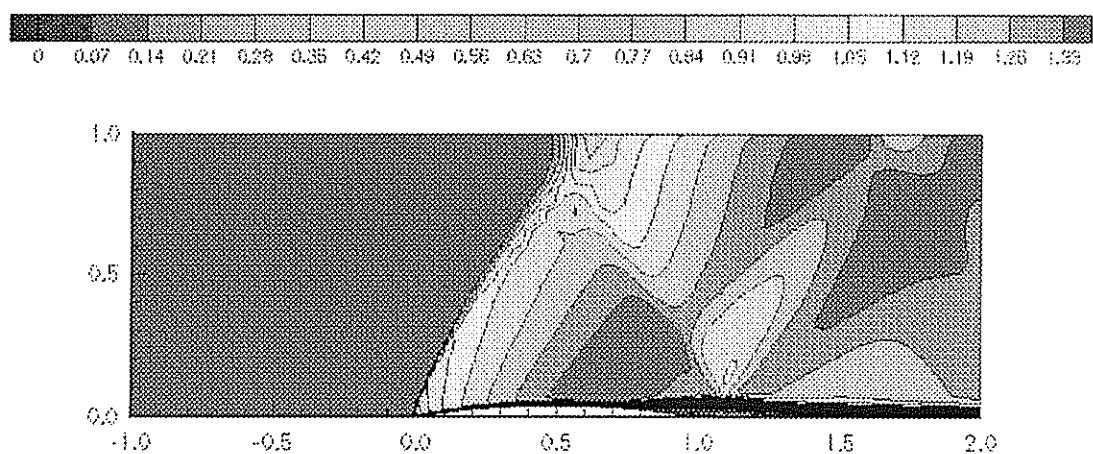
Şekil 6.13 Kaskadın üstündeki basınç dağılımı, mevcut çözüm



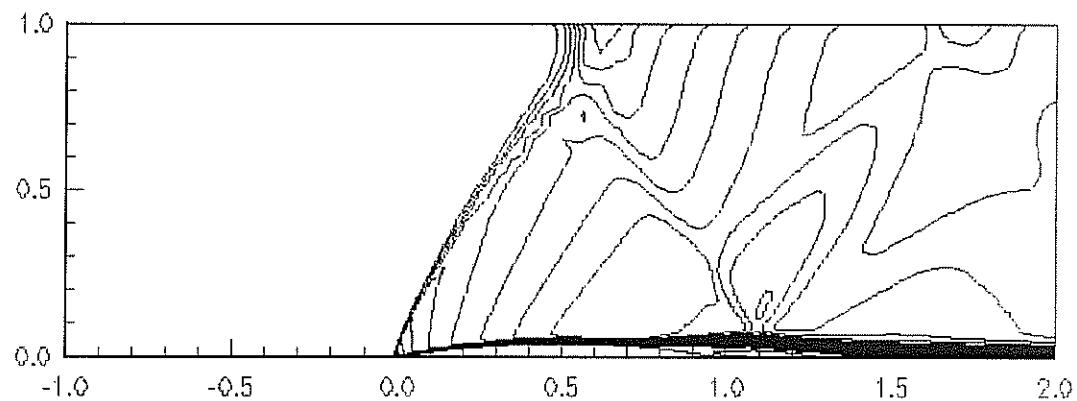
Şekil 6.14 Kaskadın üstündeki yüzey sürtünme katsayısı dağılımı,
Kallinderis ve Baron [38]



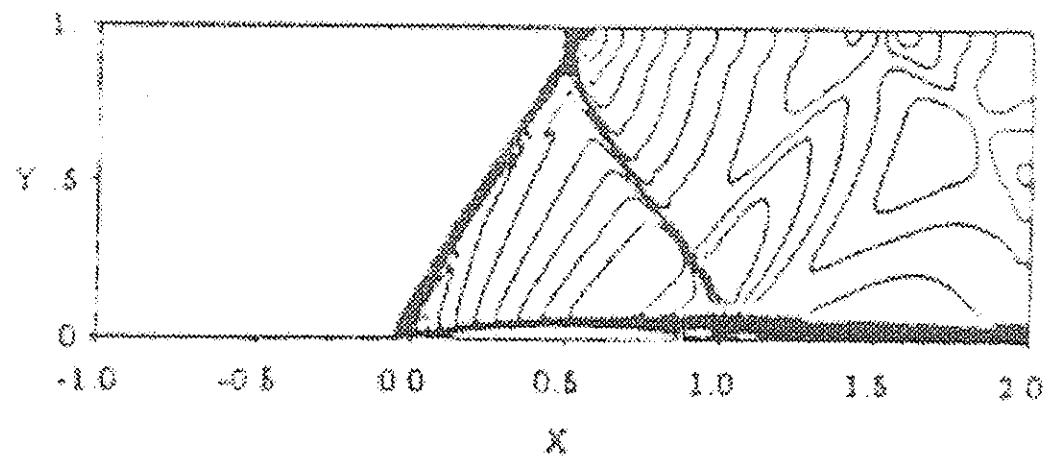
Şekil 6.15 Kaskadın üstündeki basınç dağılımı, mevcut çözüm,
Kallinderis ve Baron [38]



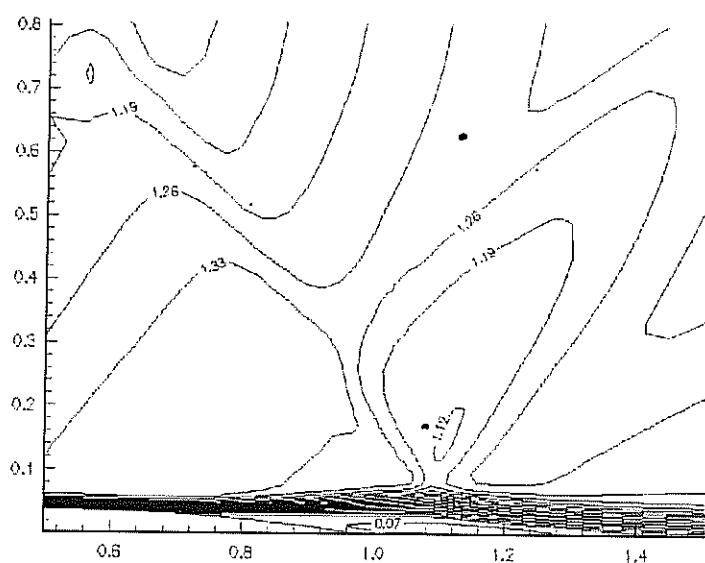
Şekil 6.16a Sesüstü kaskad durumu için isoMach eğrileri



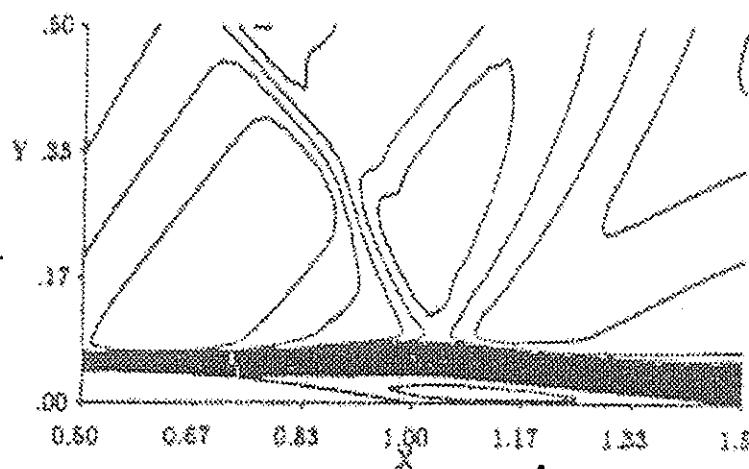
Şekil 6.16b Sesüstü kaskad durumu için isoMach eğrileri



Şekil 6.17 IsoMach eğrileri, Kallinderis ve Baron [38]



Şekil 6.18 Sesüstü kaskad durumu için şok dalgası-sınır tabakası etkileşim bölgesinin yakın görüntüsü, mevcut çözüm



Şekil 6.19 Sesüstü kaskad durumu için şok dalgası-sınır tabakası etkileşim bölgesinin yakın görüntüsü, Kallinderis ve Baron [38]

Mevcut çözümüyle elde edilen yüzey sürtünme katsayısının ve duvar basıncının dağılımları yine Kallinderis ve Baron'un [38] sonuçlarıyla nitelik açısından gayet iyi bir uyum içindedir. Ancak, sayısal bir karşılaştırma yapıldığında bazı farklar gözlenebilir. Mevcut çözümünün sonuçlarının Kallinderis ve Baron'unkilerden [38] ilk farkları yüzey sürtünme katsayısında gözlenebilir. Başlangıç ucundaki değer, mevcut çözümü tarafından daha yüksek olarak bulunmuştur. Ancak, bunun sebebi sesaltı durumda karşılaşılanla aynıdır ve orada bunun sebebiyle ilgili kısa bir açıklama verilmiştir. Yüzey sürtünme katsayısında başlangıç ucuyla yarı kırış arasındaki bölgede de bir farklılık tespit edilmiştir. Ancak, mevcut çözümünün tümsekten sonraki düz alandaki yüzey sürtünme katsayısı tahmini Kallinderis ve Baron'unkiyle [38] hemen hemen aynıdır. Ayrılmış bölgedeki dağılım da Kallinderis ve Baron'un [38] sonucuya benzeşmektedir.

İki çalışmanın duvar basınç dağılımları hemen hemen aynıdır. Bu kez bölgesel maksimum ve minimum noktaları mevcut çözümü tarafından daha doğru tespit edilmiştir. Yerel minimum basınç yaklaşık olarak kırışın 0.6'sında tespit edilmiştir. Ancak bunun değeri giriş toplam basıncının 0.3'ünden biraz az olarak bulunmuştur. Oysa ki Kallinderis ve Baron [38,] bu değeri giriş toplam basıncının 0.3'ü olarak bulmuşlardır. Bölgesel maksimum basınç da Kallinderis ve Baron'la [38] aynı yerde tespit edilmiştir. Bu değer kırışın 1.5'inde giriş toplam basıncının 0.4'ü olarak tespit edilmiştir.

Bütün akış alanının isoMach eğrileri iki çalışmada da hemen hemen aynıdır. Şok dalgasının simetri yüzeyinden yansımıası mevcut çözümü tarafından iyi yakalanmıştır. Yansıyan şok dalgasının arkasında kalan Mach eğrileri da oldukça benzerdir. Sınır tabakasının bitiş ucu civarında ayrılması da iyi tespit edilmiştir. Yeniden çevrim bölgesinin iki çalışmadaki yakın çekimleri de gayet benzerdir.

6.4 TEDİRGİN DÜZ PLAKA PROBLEMİ

Bu çalışmada ele alınan tek üç-boyutlu test durumu, düz plaka üstündeki tedirgin akıştır. Aslında, ele alınan problem fiziksel olarak iki boyutludur. Ancak, geliştirilen çözümün üç boyutlu şeklini kontrol etmek için tek mantıklı seçim tedirgin düz plaka akışıdır. Bu fiziksel olarak üç boyutlu olan bir tedirgin akış probleminin

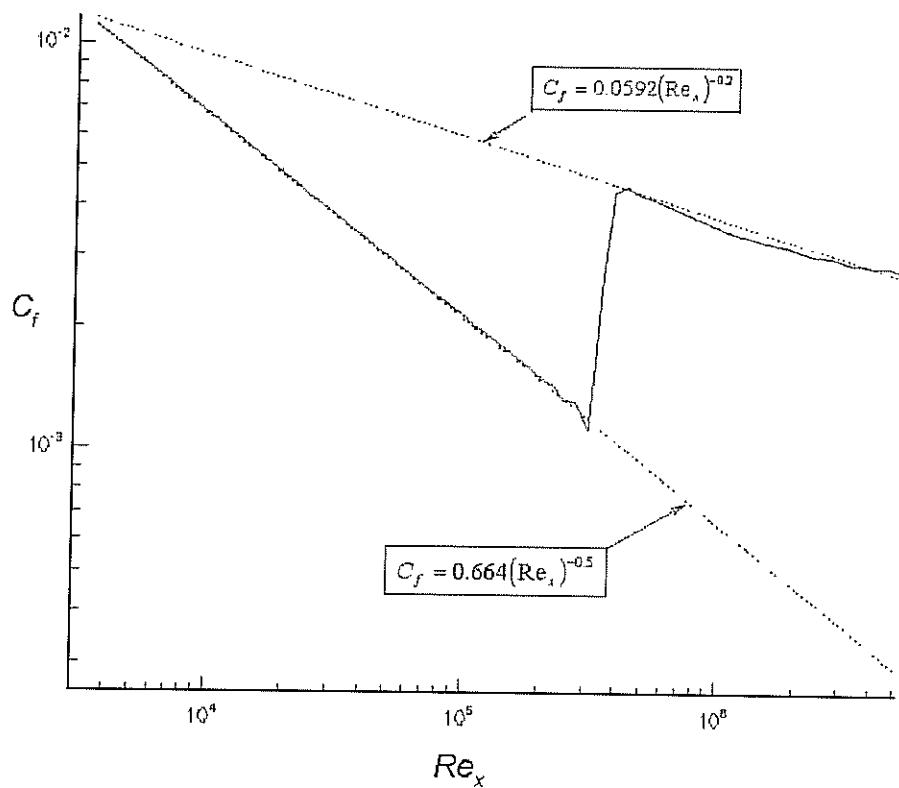
büyük hafıza gereksinimleri yüzündendir. Bu test durumu için z yönünde sadece üç hesaplama noktası alınmıştır. Kenar duvarlar üzerindeki noktalar, her zaman adının sonunda bu noktaların tuttuğu korunabilir değişkenlerin değerlerini iç noktaların korunabilir değişken değerlerine eşitleyerek güncellenir. Bu problemle hem Baldwin-Lomax tedirginlik modelinin performansı onaylanmış, hem de kodun üç-boyutlu şekli test edilmiştir.

Katmanlı düz plaka probleminin hesaplama ağına benzer bir yapı kullanılmıştır. Ancak, bitiş ucuna doğru hiç sıkıştırma uygulanmamıştır. Sıkıştırma sadece başlangıç ucunda mevcuttur ve x -yönündeki en küçük artış plakanın uzunluğunun 0.000015'ıdır. Bu durum için Mach sayısı yine sıkıştırılamayan akışı temsil etmesi için 0.3 alınmıştır. Reynolds sayısı Jameson [32] ve Tınaztepe'ye [27] uygun olması için 6,000,000 olarak alınmıştır. Bu Reynolds sayısı için geçiş noktası kırışın 0.054'üne geçiş Reynolds sayısını Jameson [32] gibi 324,000 alarak sabitlenmiştir. 121x81'lik H-tipi hesaplama ağıının en küçük Δy 'si plakanın uzunluğunun 0.00001'i olarak alınmıştır. Böyle bir sıkıştırma katmanlı alt-tabakanın içinde en azından iki noktanın bulunmasını sağlamıştır. Katmanlı düz plaka probleminin hesaplama ağı gibi bu da plakanın önündeki düz alanda 40 nokta ve plaka ile arka bölgesinde ise 81 nokta bulundurmaktadır.

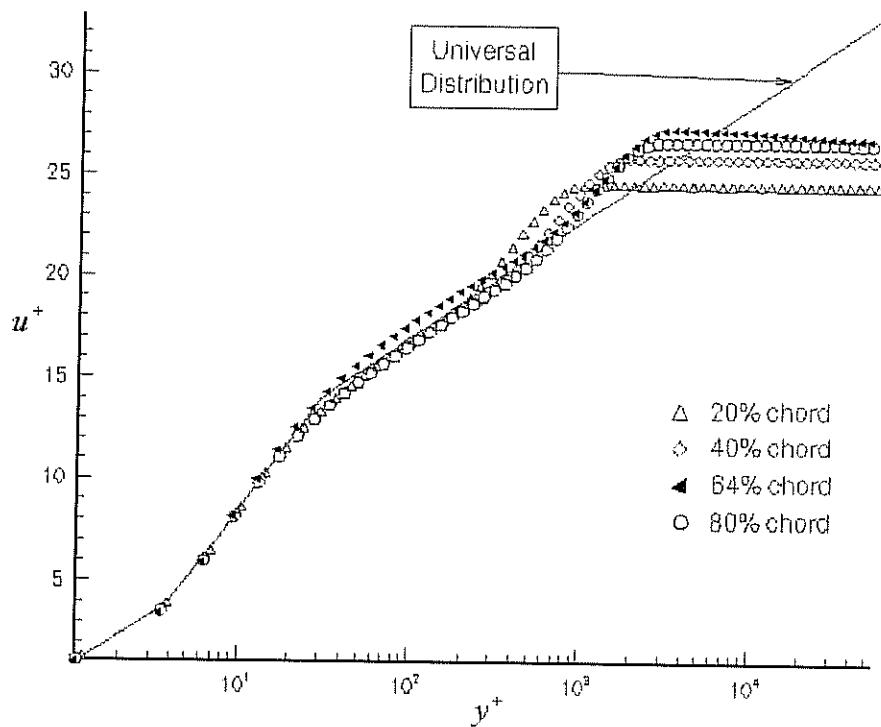
Elde edilen yüzey sürtünme katsayısı dağılımı Şekil 6.20'de verilmiştir. Mevcut çözümün sonucu analitik sonuçlarla karşılaştırılmış ve kabul edilebilir bir doğruluk saptanmıştır. Plakanın üstündeki çeşitli yerlerdeki u^+ - y^+ grafiği Şekil 6.21'de verilmiş ve evrensel dağılımla karşılaştırılmıştır.

Şekil 6.21'de verilen tedirgin benzerlik profillerinin evrensel dağılımı şu formüle göre alınmıştır

$$u^+ = \begin{cases} y^+, & 0 < y^+ < 5 \\ 5.0 \cdot \log(y^+) - 3.05, & 5 < y^+ < 30 \\ 2.5 \cdot \log(y^+) + 5.5, & 30 < y^+ \end{cases} \quad (6.2)$$

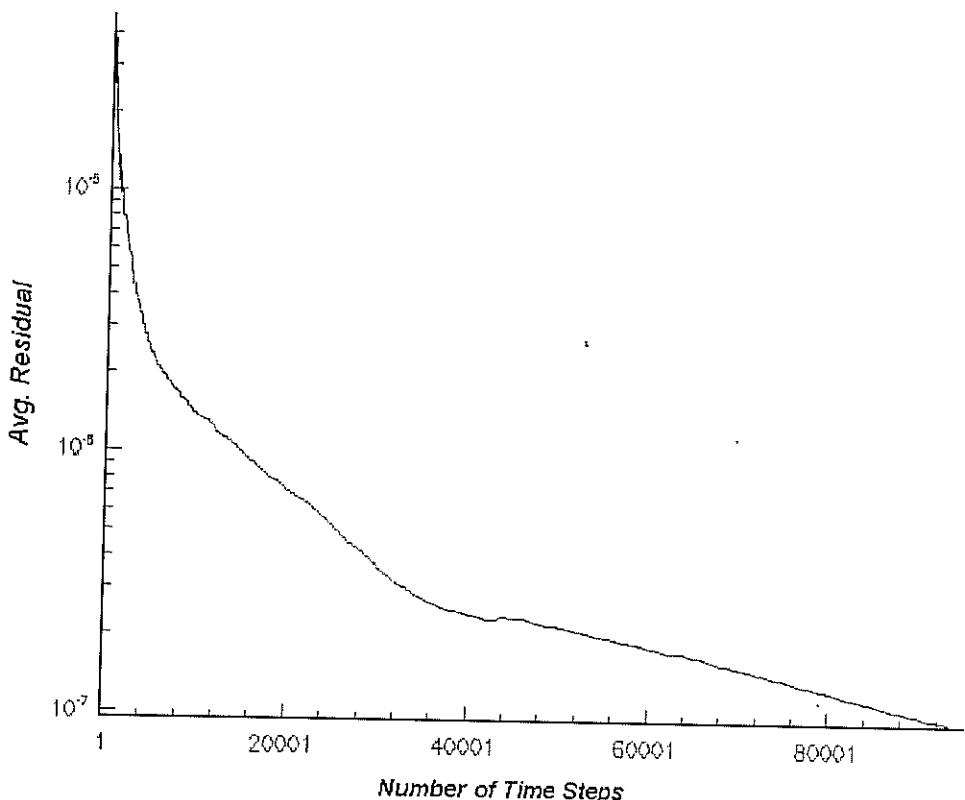


Şekil 6.20 Tedirgin düz plaka durumu için yüzey sürtünme katsayısı dağılımı



Şekil 6.21 Tedirgin düz plaka problemi için u^+ - y^+ grafiği

İkinci-dereceden suni yumuşatma katsayısı yine 0.001 alınmıştır. Tedirgin yapışkanlık katsayıSİ, Ni'nin [20] kodun kararlılığı için bunun her yirmi zaman adımında bir kere hesaplanmasıının yeteceğini söylemesine karşın, her zaman adımında hesaplanmıştır. Çözüm ortalama x -momentum artığı iki dereceden biraz fazla düşene kadar devam ettirilmiştir. Artık tarihçesi Şekil 6.22'de verilmiştir.



Şekil 6.22 Tedirgin düz plaka problemi için artık tarihçesi

6.5 NACA-0012 KANADI ÜZERİNDE TEDİRGİN SESÇİVARI AKIŞ

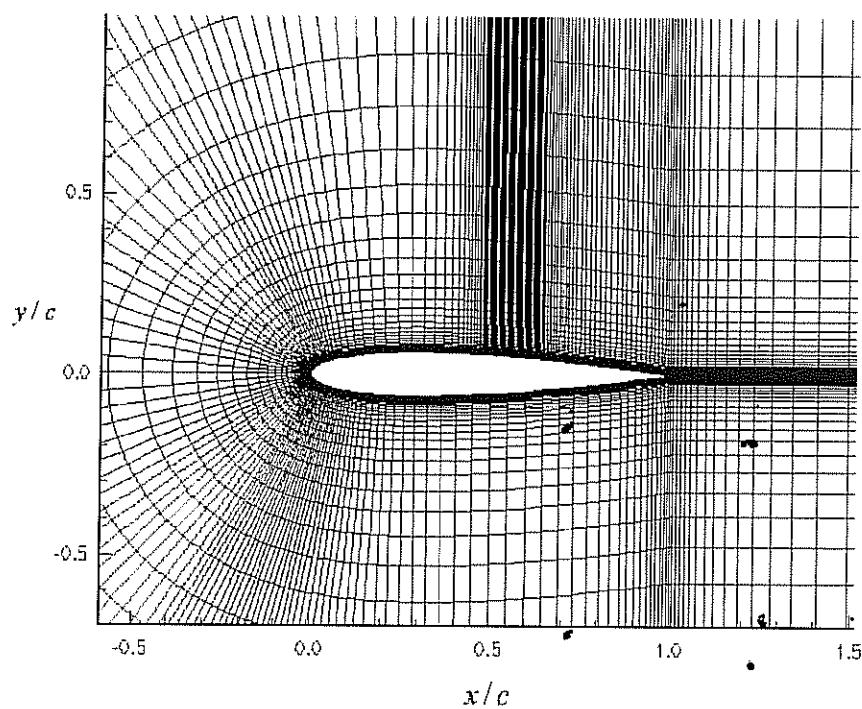
Bu çalışmada ele alınan son test durumu budur. Ele alınan akış sesçivarı olup Mach sayısı 0.799'dur. Reynolds sayısı 9,000,000'dur. Kanat 2.26 derecelik bir húcüm açısına sahiptir. Bu test durumu daha önce Tinaztepe'nin [27] de aralarında bulunduğu bir çok araştırmacı tarafından denenmiştir. Dolayısıyla, elde edilen sonuçlar onukilerle ve literatürde mevcut olan diğer sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Dahası, ele alınan akış tedirgindir de. Bu yüzden, kod bir şok dalgası-tedirgin sınır tabakası etkileşim problemi için de test edilmiştir. Baldwin-Lomax tedirginlik modelindeki sabit C_{WK} Tınaztepe'nin [27] tavsiye ettiği gibi 1.0 alınmıştır. Bu problem için 257x65'lik bir C-tipi hesaplama ağı kullanılmıştır. Bu ızgara Tınaztepe'nin [27] kullandığının tıpatıp aynısıdır. Kanadın üstünde 193, arka bölgesindeyse 32 nokta vardır. Hesaplama ağı, şokun oluşmasının beklentiği kanadın üst kısmında bir hayli sıkıştırılmıştır. Bunun yüzünden üst kısmda 120 hesaplama noktası varken alt kısmda hesaplama noktalarının sayısı 73'tür. y -yönündeki en küçük adım kırışın 0.00001'i kadardır. x -yönündeki sıkıştırma, kanadın alt kısmında başlangıç ucunda kırışın 0.001'i ve bitiş ucundaysa kırışın 0.008'i kadardır. Kanadın üst kısmadaysa şok civarında bu sıkıştırma kırışın 0.004'ü kadardır. Bu hesaplama ağının bir bölümü Şekil 6.23'te verilmiştir.

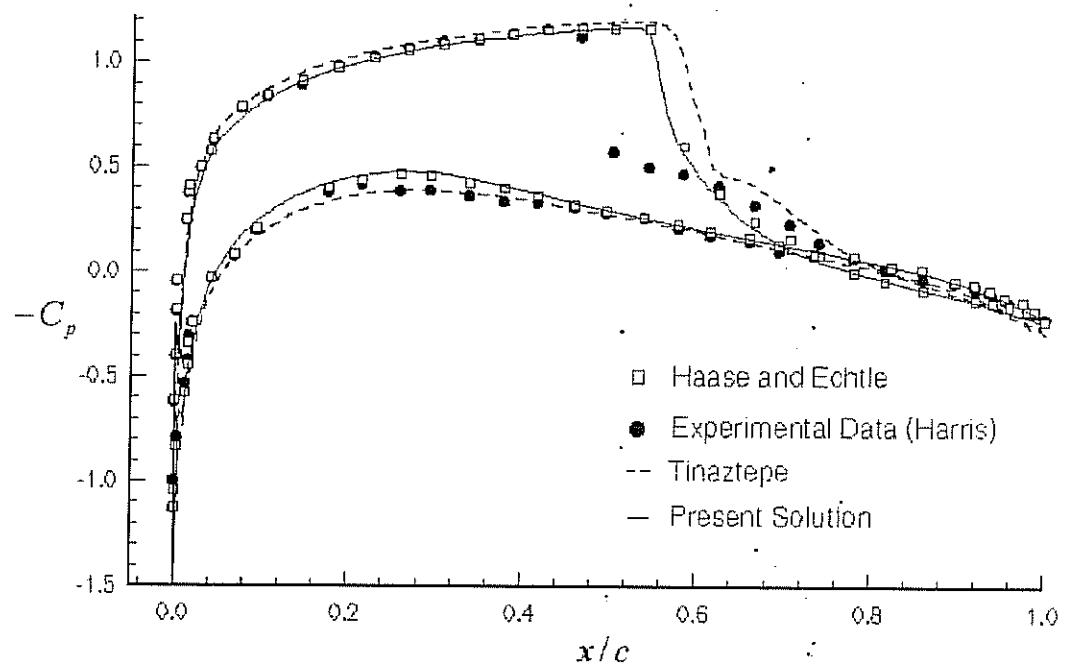
Çözüm ortalama x -momentum artığında yaklaşık olarak iki derecelik bir düşüş olana kadar sürdürmüştür. Kanadın üstündeki basınç katsayısı C_p dağılımı Şekil 6.24'te verilmiştir. Mevcut çözümün sonucu Tınaztepe [27], Maksymiuk ve Pulliam, Haase ve Echtle'in sayısal çalışmalarıyla ve Harris'in deneysel verileriyle karşılaştırılmıştır. Adı geçen bütün sonuçlar Tınaztepe'den [27] alınmıştır. Ayrıca, kanadın isoMach eğrileri de Şekil 6.25'te verilmiştir. Bu sonuç, Şekil 6.26'da verilen Tınaztepe'nin [27] sonucuya karşılaştırılmıştır. Bu problem için kullanılan ikinci-dereceden suni yumuşatma katsayışı 5.0 ve CFL sayısı da 0.25 alınmıştır.

Elde edilen basınç katsayısı grafiği Haase ve Echtle'inkine oldukça benzemektedir. Aynı zamanda şoktan hemen sonraki bölüm haricinde Tınaztepe'ninkiyle [27] de uyum içindedir. Ancak, bu üç sayısal çalışma da şokun yerini bitiş ucuna Harris'in deneysel datasından daha yakın tespit etmektedir.

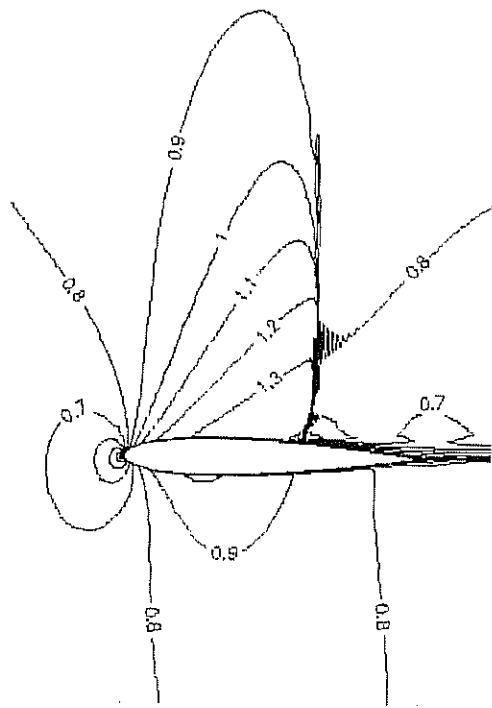
Mevcut çözümüyle elde edilen isoMach eğrileri Tınaztepe'ninkinden [27] biraz farklıdır. Büyük ihtimalle suni yumuşatmaya bağlı olarak şoktan hemen sonraki 0.8'lik Mach eğrisinde ufak bir fark oluşturmaktadır. Bahsedilen bu farktan başka iki grafik benzer gözükmektedir. Mevcut sonuç, bilgisayar kaynaklarındaki kısıntıdan dolayı bölgesel zaman adımlaması kullanılarak elde edilmiştir. Ancak, Tınaztepe [27] kendi çözümünü genel zaman adımlaması yaparak elde ettiğini belirtmiştir. Bu da iki çözüm arasında bazı farkların oluşmasını sağlamış olabilir.



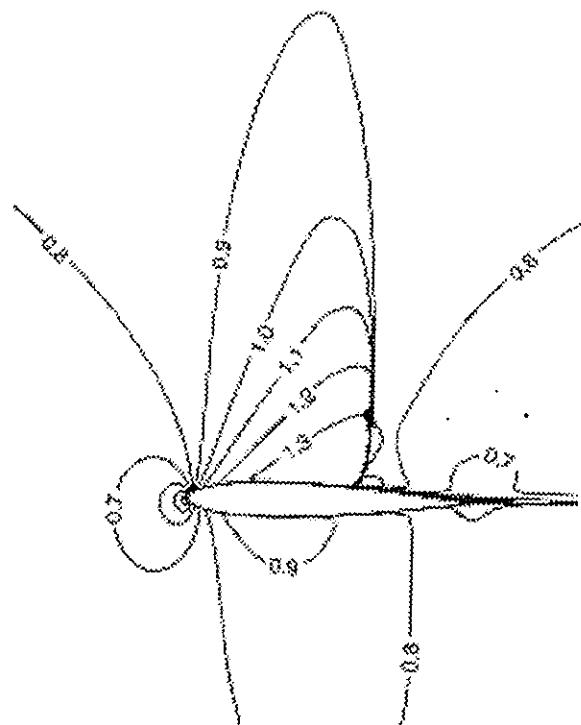
Şekil 6.23 Tedirgin, sescivarı NACA-0012 test durumunun C-tipi hesaplama ağı



Şekil 6.24 Tedirgin, sescivarı NACA-0012 test durumu için kanadın üzerindeki basınç katsayıları dağılımını



Şekil 6.25 Tedirgin, sescivarı NACA-0012 test durumu için isoMach eğrileri, mevcut çözüm



Şekil 6.26 Tedirgin, sescivarı NACA-0012 test durumu için isoMach eğrileri, Tinaztepe [27]

BÖLÜM 7

GÖRÜŞLER VE VARILAN SONUÇLAR

7.1 ÖZET VE GÖRÜŞLER

Mevcut çalışmada hem katmanlı, hem de tedirgin akışları ele alabilen üç boyutlu bir Navier-Stokes çözümüsü geliştirilmiştir. Zamana bağlı Reynolds ortalamalı Navier-Stokes denklemlerinin korunabilir formunun ayrıştırılması için zamanda ve uzayda ikinci dereceden hassas olan tek adımlı Lax-Wendroff yöntemi bir hücre-köşeli sonlu hacim formülasyonuyla birlikte uygulanmıştır. Viskos terimler hücre bazlı olarak Ni'nin [20] teknigiyle hesaplanmıştır. Tedirgin çalkantı yapışkanlık katsayısının hesaplanması için Baldwin-Lomax tedirginlik modeli kullanılmıştır.

Sayısal dalgalanmaları yumoşatmak için ikinci ve dördüncü dereceden yumoşatma terimleri kullanılmıştır. Bunların etkileri katı cisimlere yakın bölgelerde bölgesel Mach sayısı ölçeklendirmesi kullanılarak azaltılmıştır. Zamanda ilerleyen çözümü bölgesel zaman adımlaması kullanılarak hızlandırılmıştır. Sınırlarda karakteristik sınır şartları bir çeşit tahmin edici-düzeltilci metot kullanılarak uygulanmıştır.

Üç boyutlu, tedirgin çözümü geliştirildikten sonra katmanlı, iki-boyutlu şekli C++ programlama dili kullanılarak bir kullanıcı dostu, görsel çözümü geliştirmek için kullanılmıştır. Çözüm yönteminde kullanılan giriş dosyalarının ve parametrelerinin kolay ele alınabilmesi için bir arayüz geliştirilmiştir. Artık tarihçesi, yüzey sürütme katsayısı ve önceden belirlenmiş yerlerdeki hız profilleri kullanıcıya her yinelemede sunulmuştur.

Kodun geliştirilmesinde Nesneye Yönelik Programlama (NYP) kullanılmıştır. Problemin fiziksel özellikleri C++ programlama ortamında sınıflar kullanılarak modellenmiştir. Bu amaçla bir akış alanının alt kısımları ele alınmıştır, ki bunlar

bloklar, yüzler, hücreler ve noktalardır. Adı geçen alt bölümlerin isimleri verilerek beş adet sınıf oluşturulmuştur. Bütün kod bu sınıfların özel üyeleri ve fonksiyonları kullanılarak yazılmıştır. Bu da yazılan kodu modüler bir hale sokup gelişim için açık bir hale getirmektedir.

Geliştirilen çözücü beş değişik test durumunda denenmiştir. İlk iki durum bir düz plaka üstündeki katmanlı ve tedirgin akışlara aittir. Bu iki durum kodun onaylanması için gereken veriyi sağlamıştır. Elde edilen sonuçlar analitik sonuçlarla uyum içindedir. Daha sonra ele alınan iki durum, iki dairesel yay kaskadının üstündeki sesaltı ve sesüstü, katmanlı akışlara aittir. Mevcut çözüğünün performansı sesüstü şartlar altında denenmiş ve yüzey sürtünme katsayısı, duvar basınç dağılımı ve bütün akış alanının isoMach eğrileri için tatmin edici sonuçlar alınmıştır. Ele alınan son test durumu hucum açısı olan bir NACA-0012 kanadının üzerindeki tedirgin, sescivarı akışa aittir. Çözüğünün şok dalgası-tedirgin sınır tabakası etkileşimi olan bir problem için performansı denenmiştir. Elde edilen basınç katsayısı dağılımı literatürdeki sayısal çalışmalarla benzer olarak bulunmuştur. Bu beş test durumundan edinilen sonuçlar doğrultusunda mevcut çözüğünün sesaltı, sescivarı ve sesüstü katmanlı ve tedirgin problemler için güvenilir bir şekilde kullanılabileceği sonucuna varılmıştır.

7.2 GELECEK İÇİN TAVSİYELER

Mevcut çözüğünün nesneye-yönelik yapısı yeni sınıflar, üye fonksiyonlar ve değişkenler ekleyerek onu kolayca geliştirebilmeyi mümkün kılmıştır.

Bu çalışmada ilk not edilecek nokta test edilen problemlerde karşılaşılan çalışma zamanlarıdır. Kullanılan hesaplama ağlarının büyüklüklerinden ve sürtünme sonucu meydana gelen yeni terimlerden dolayı bilgisayar hafızası gereksinimi bir Euler çözümüsünükle karşılaşıldığında çok fazla artar. Bu da hiç pratik olmayan bir şekilde, günler süren çalışma zamanlarına neden olur. Bu yüzden, bir çoklu hesaplama ağı algoritması, çözme sürecini hızlandırmak için mevcut çözücüye eklenebilir. Dahası paralel hesaplama teknikleri koda uygulanabilir. Bu yaklaşma hızını inanılmaz derecede artırabilir, öyle ki geometrik olarak daha karmaşık, üç boyutlu problemler rahatlıkla ele alınabilir.

Mevcut çözümüne getirilebilecek bir başka ana yenilik de suni yumuşatmanın kullanımına gerek bırakmayan bir TVD şemasının koda eklenmesi olabilir. Yumuşatma terimleri çözümün yaklaşması için gerekli olsalar da fiziksel terimler olmadıkları için sonuca mutlaka bir miktar hata katmaktadır. Bu yüzden bu terimlerden kurtulmak ve artığın fiziksel olmayan davranışını suni olarak düzeltmektense hesaplamalar sırasında sınırlandırmak iyi bir fikir olabilir.

Son olarak, bir iki denklemli tedirginlik modeli daha sağlam bir çözüm elde etmek için koda eklenebilir. Böyle bir model cebirse, bir modelden daha fazla hafiza gerektirmesine rağmen tedirginlik olusunu modellemenin en iyi yolu iki denklemli bir tedirginlik modelinin kullanımıdır. Bu yüzünden ki, iki fazla taşıma denkleminin çözümü çalkantı yapışkanlık katsayısını cebirsel bir formülle hesaplamaktan daha fiziksel olacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] Hirsh, C., "Numerical Computation of Internal and External Flows", Cilt 1-2, John Wiley and Sons, ABD, 1988-1990.
- [2] Wilcox, D. C., "Turbulence Modelling for CFD", La Canada DCW Industries, ABD, 1998.
- [3] Visbal, M. ve Knight, D., "The Baldwin-Lomax Turbulence Model for Two-Dimensional Shock-Wave/Boundary-Layer Interactions", AIAA Journal, Cilt 22, s. 921-928, 1984.
- [4] Knight, D., "Turbulence Modelling for Compressible Flow", Seminer notları, NATO Research and Technology Agency sponsorlu Seminer, Rocketsan Engineering Development Design Group, ODTÜ, 1999.
- [5] Kussoy, M. I., Viegas, J. R. ve Horstman, C.C., "Investigation of a Three-Dimensional Shock Wave Separated Turbulent Boundary Layer", AIAA Journal, Cilt 18, s. 1477-1484, 1980.
- [6] Abdol-Hamid, K. S., Lakshmanan, B. ve Carlson, J. R., "Application of Navier-Stokes Code PAB3D with $k-\varepsilon$ Turbulence Model to Attached and Separated Flows", NASA Technical Paper 3480, ABD, 1995.
- [7] Fan, S. ve Lakshminarayana, B., "Low-Reynolds-Number $k-\varepsilon$ Model for Unsteady Turbulent Boundary-Layer Flows", AIAA Journal, Cilt 31, s. 1777-1784, 1993.

- [8] Kunz, R.F. ve Lakshminarayana, B., "Explicit Navier-Stokes Computation of Cascade Flows Using the $k-\varepsilon$ Turbulence Model", AIAA Journal, Cilt 30, s. 13-22, 1992.
- [9] Mohammadi, B., "Complex Turbulent Compressible Flow Computation Using a Two-Layer Approach", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Cilt 15, s. 747-771, 1992.
- [10] Mohammadi, B. ve Medic, G., "A Critical Evaluation of the Classical $k-\varepsilon$ Model and Wall-Laws for Unsteady Flows over Bluff Bodies", Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA) Rapport de Recherche, Fransa, 1996.
- [11] Gerolymos, G. A., "Implicit Multiple-Grid Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations Using Kappa-Epsilon Turbulence Closure", AIAA Journal, Cilt 28, s. 1707-1717, 1990.
- [12] Gerolymos, G. A. ve Vallet, I., "Implicit Computation of Three-Dimensional Compressible Navier-Stokes Equations Using $k-\varepsilon$ Closure", AIAA Journal, Cilt 34, s. 1321-1330, 1996.
- [13] Versteeg, H. K. ve Malalasekera, W., "An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method", Addison Wesley, Büyük Britanya, 1995.
- [14] Lumley, J. L, "Turbulence Modelling", Journal of Applied Mechanics, Cilt 50, sf. 1097-1103, 1983.
- [15] Marvin, J. G., "Turbulence Modelling for Computational Aerodynamics", AIAA Journal, Cilt 21, s. 941-955, 1983.
- [16] Schlichting, H., "Boundary-Layer Theory", McGraw Hill, ABD, 1968.

- [17] Erturk, E., "A Numerical Experimentation of The Boundary Conditions For a Two-Dimensional Multigrid Euler Solver Using Finite Volume Method for Internal Flows", Yüksek Lisans Tezi, ODTÜ, Temmuz 1995.
- [18] Ni, R. H., "A Multiple-Grid Scheme for Solving the Euler Equations", AIAA Journal, Cilt 20, s. 1565-71, 1982.
- [19] Davis, R. L., Ni, R. H. ve Bowley, W. W., "Prediction of Compressible, Laminar Viscous Flows Using a Time-Marching Control Volume and Multiple-Grid Technique", AIAA Journal, Cilt 22, s. 1573-1581, 1984.
- [20] Davis, R. L., Ni, R. H. ve Carter, J. E., "Cascade Viscous Flow Analysis Using the Navier-Stokes Equations", AIAA Paper, 86-0033, 1986.
- [21] Chima, R.V. ve Johnson, G. M., "Efficient Solution of the Euler and Navier-Stokes Equations with a Vectorized Multiple-Grid Algorithm", AIAA Journal, Cilt 23, sf. 23-32, 1985.
- [22] MacCormack, R. W., "A Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow", AIAA Journal, Cilt 20, s. 1275-1281, 1982.
- [23] Lawrence, S. L., Tannehill, J. C. ve Chaussee, D. S., "Application of the Implicit MacCormack Scheme to the Parabolized Navier-Stokes Equations", AIAA Journal, Cilt 22, s. 1755-1763, 1984.
- [24] Knight, D., "Compressible Large Eddy Simulation", Seminer notları, NATO Research and Technology Agency sponsorlu Seminer, Rocketsan Engineering Development Design Group, ODTÜ, 1999.
- [25] Jameson, A., Schmidt, W. ve Turkel, E., "Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time Stepping Schemes", AIAA Paper 81-1259, 14th Fluid and Plasma Dynamics Conference, Kaliforniya, 1981.

- [26] Stringer, S. M. ve Morton, K. W., "Artificial Viscosity for the Cell Vertex Method", Oxford University Computing Laboratory Numerical Analysis Group Report 96/08, İngiltere, 1996.
- [27] Tinaztepe, H. T., "A Finite Volume Method for Compressible Viscous Flows", Doktora Tezi, ODTÜ, Mart 1997.
- [28] Sert, C., "Development of a Three-Dimensional Object-Oriented Euler Solver Using C++ Programming Language", Yüksek Lisans Tezi, ODTÜ, Haziran 1998.
- [29] Schildt, H., "Using Turbo C++", McGraw-Hill, ABD, 1990.
- [30] Lippman, S. B., "C++ Primer", Addison-Wesley, ABD, 1990.
- [31] Anderson J. D., "Computational Fluid Dynamics – The Basics with Applications", McGraw Hill, Singapur, 1995.
- [32] Liu, F. ve Jameson, A., "Multigrid Navier-Stokes Calculations for Three-Dimensional Cascades", AIAA Journal, Cilt 31, s. 1785-1791, 1993.
- [33] Swanson, R.C. ve Radespiel, R., "Cell Centered and Cell Vertex Multigrid Schemes for the Navier-Stokes Equations", AIAA Journal, Cilt 29, s. 697-703, 1991.
- [34] Radespiel, R., Rossow, C. ve Swanson, R. C., "Efficient Cell-Vertex Multigrid Scheme for the Three-Dimensional Navier-Stokes Equations", AIAA Journal, Cilt 28, s. 1464-1472, 1990.
- [35] Crumpton, P. I, MacKenzie, J. A. ve Morton, K.W., "Cell Vertex Algorithms for the Compressible Navier-Stokes Equations", Journal of Computational Physics, Cilt 109, s. 1-15, 1993.
- [36] Hoffman, K. A., "Computational Fluid Dynamics", Vol. 1-2, Engineering Education System Publication, ABD, 1989.

- [37] Oktay, E., "A Cell Vertex Method for Three Dimensional Inviscid Internal Flows", Doktora tezi, ODTÜ, Kasım 1991.
- [38] Kallinderis, Y. G. ve Baron, J. R., "Adaptation Methods for a New Navier-Stokes Algorithm", AIAA Journal, Cilt 27, s. 37-43, 1989.
- [39] Kordulla, W. ve Vinokur, M., "Efficient Computation of Volume in Flow Predictions", AIAA Journal, Cilt 21, s. 917-8, 1983.

EK A

YÜZEY VEKTÖRLERİNİN HESAPLANMASI

Bu bölümün amacı Bölüm 3'te gösterilen birinci ve ikinci dereceden değişimlerin formülasyonlarında kullanılan yüzey vektörlerinin hesaplanması sunmaktadır. Birinci dereceden sürtünmesiz değişiklik için Şekil 3.5'te gösterilen yüzey vektörleri S_1, S_2, \dots, S_6 kullanılır. Bu yüzey vektörleri üç Cartesian koordinatı yönündeki bileşkelerine ayrıstırılırlar. Hesaplama işlemi için bir dörtgenin alanının iki diagonalının vektörel çarpımının büyüklüğünün yarısı olduğu hatırlanmalıdır. Ancak, yönler de önemli olduğu için burada bu alanlar vektörler olarak hesaplanırlar ve S_1, S_2, \dots, S_6 'nın herbirinin yönü Şekil 3.5'e uygun olarak alınır. Sol elli bir Cartesian koordinat sistemi ele alınarak yüzey vektörü S_1 şu vektör çarpımıyla ifade edilebilir.

$$\vec{S}_1 = \frac{1}{2} \left(\vec{r}_{54} \times \vec{r}_{18} \right) \quad (\text{A.1})$$

burada r iki nokta arasındaki uzaklık vektörünü temsil eder ve altışaretler akış alanının örnek bir hücresinin oluşturan noktalar olarak Şekil 3.5'ten takip edilebilirler.

Dahası, Denklem (A.1)'de verilen pozisyon vektörleri şöyle açıklabilirler:

$$\vec{r}_{54} = (x_4 - x_5) \vec{i} + (y_4 - y_5) \vec{j} + (z_4 - z_5) \vec{k} \quad (\text{A.2a})$$

$$\vec{r}_{18} = (x_8 - x_1) \vec{i} + (y_8 - y_1) \vec{j} + (z_8 - z_1) \vec{k} \quad (\text{A.2b})$$

Bu sonuçları Denklem (A.1)'e koyarak şu formül elde edilir:

$$\vec{S}_1 = \frac{1}{2} \left(\vec{r}_{54} \times \vec{r}_{18} \right) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_4 - x_5 & y_4 - y_5 & z_4 - z_5 \\ x_8 - x_1 & y_8 - y_1 & z_8 - z_1 \end{vmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Yukarıdaki denklem açık halde aşağıdaki gibi yazılabılır.

$$\begin{aligned} \vec{S}_1 = & \frac{1}{2} \left(\vec{r}_{54} \times \vec{r}_{18} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \vec{i} [(y_4 - y_5)(z_8 - z_1) - (y_8 - y_1)(z_4 - z_5)] \right. \\ & - \vec{j} [(x_4 - x_5)(z_8 - z_1) - (x_8 - x_1)(z_4 - z_5)] \\ & \left. + \vec{k} [(x_4 - x_5)(y_8 - y_1) - (x_8 - x_1)(y_4 - y_5)] \right\} \quad (\text{A.4a}) \end{aligned}$$

Üç Cartesian bileşkesi $S_{1,x}$, $S_{1,y}$ ve $S_{1,z}$ 'yi Denklem (A.4a)'dan elde etmek çok kolaydır. Benzer bir formülasyon kullanılarak şu denklemler de geriye kalan yüzey vektörleri için yazılabılırler.

$$\begin{aligned} \vec{S}_2 = & \frac{1}{2} \left(\vec{r}_{63} \times \vec{r}_{27} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \vec{i} [(y_3 - y_6)(z_7 - z_2) - (y_7 - y_2)(z_3 - z_6)] \right. \\ & - \vec{j} [(x_3 - x_6)(z_7 - z_2) - (x_7 - x_2)(z_3 - z_6)] \\ & \left. + \vec{k} [(x_3 - x_6)(y_7 - y_2) - (x_7 - x_2)(y_3 - y_6)] \right\} \quad (\text{A.4b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{S}_3 = & \frac{1}{2} \left(\vec{r}_{52} \times \vec{r}_{61} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \vec{i} [(y_2 - y_5)(z_1 - z_6) - (y_1 - y_6)(z_2 - z_5)] \right. \\ & - \vec{j} [(x_2 - x_5)(z_1 - z_6) - (x_1 - x_6)(z_2 - z_5)] \\ & \left. + \vec{k} [(x_2 - x_5)(y_1 - y_6) - (x_1 - x_6)(y_2 - y_5)] \right\} \quad (\text{A.4c}) \end{aligned}$$

$$\vec{S}_4 = \frac{1}{2} \left(\vec{r}_{83} \times \vec{r}_{74} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \vec{i} [(y_3 - y_8)(z_4 - z_7) - (y_4 - y_7)(z_3 - z_8)] \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \vec{j} [(x_3 - x_8)(z_4 - z_7) - (x_4 - x_7)(z_3 - z_8)] \\
& + \vec{k} [(x_3 - x_8)(y_4 - y_7) - (x_4 - x_7)(y_3 - y_8)] \Big\} \quad (\text{A.4d})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{S}_5 &= \frac{1}{2} \left(\vec{r}_{13} \times \vec{r}_{24} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \vec{i} [(y_3 - y_1)(z_4 - z_2) - (y_4 - y_2)(z_3 - z_1)] \right. \\
& - \vec{j} [(x_3 - x_1)(z_4 - z_2) - (x_4 - x_2)(z_3 - z_1)] \\
& \left. + \vec{k} [(x_3 - x_1)(y_4 - y_2) - (x_4 - x_2)(y_3 - y_1)] \right\} \quad (\text{A.4e})
\end{aligned}$$

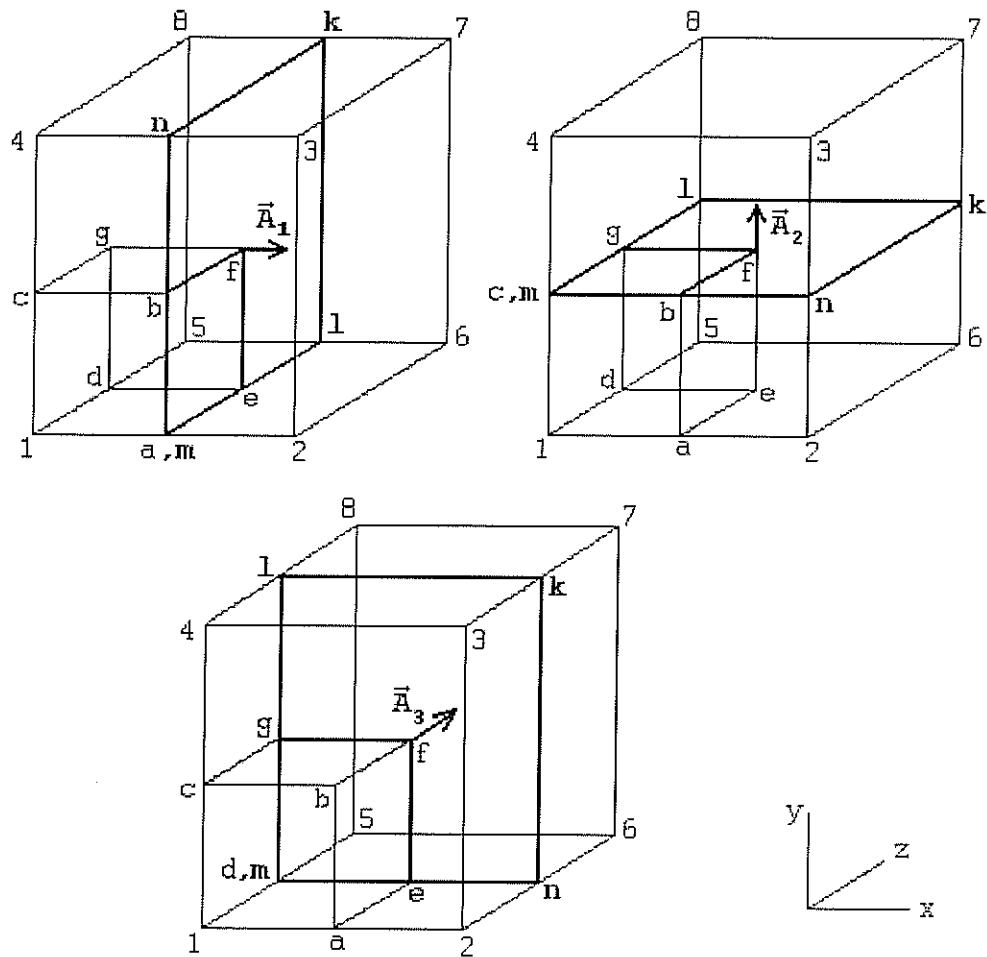
$$\begin{aligned}
\vec{S}_6 &= \frac{1}{2} \left(\vec{r}_{57} \times \vec{r}_{68} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \vec{i} [(y_7 - y_5)(z_8 - z_6) - (y_8 - y_6)(z_7 - z_5)] \right. \\
& - \vec{j} [(x_7 - x_5)(z_8 - z_6) - (x_8 - x_6)(z_7 - z_5)] \\
& \left. + \vec{k} [(x_7 - x_5)(y_8 - y_6) - (x_8 - x_6)(y_7 - y_5)] \right\} \quad (\text{A.4f})
\end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemlerle sürtünmesiz birinci dereceden değişmenin formülasyonunda kullanılan yüzey vektörleri tamamlanmış olur. Ancak, ikinci dereceden sürtünmesiz ve birinci dereceden sürtünmeli değişimelerin hesaplanmalarında kullanılan üç yüzey vektörü daha vardır. Bu vektörler A_1 , A_2 ve A_3 olarak simgelenirler ve Bölüm 3'te, Şekil 3.4'te gösterilmişlerdir. Hücrenin merkezinde hesaplanırlar. Şekil A.1'e bakarak bu vektörleri veren vektör çarpımları şöyle yazılabilir:

$$\vec{A}_1 = \frac{1}{4} \vec{S}_{klmn} = \frac{1}{4} \left(\vec{r}_{ln} \times \vec{r}_{mk} \right) \quad (\text{A.5})$$

Yukarıdaki denklem birincil hücrenin köşeleri kullanılarak yazılabılır.

$$\vec{A}_1 = \frac{1}{4} \left[\frac{(\vec{r}_7 + \vec{r}_8) - (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)}{2} \times \frac{(\vec{r}_5 + \vec{r}_6) - (\vec{r}_3 + \vec{r}_4)}{2} \right] \quad (\text{A.6})$$

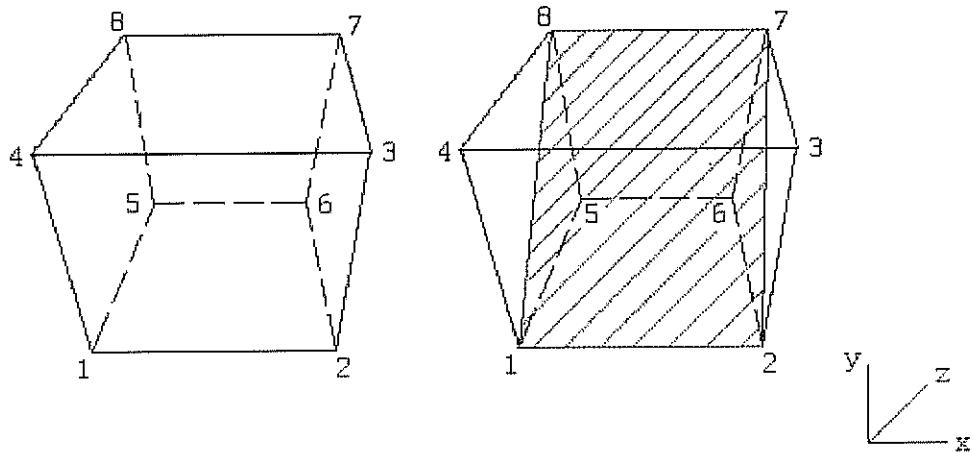


Şekil A.1 Yüzey vektörleri A_1 , A_2 ve A_3

Benzer bir işlem de yüzey vektörleri A_2 ve A_3 için de uygulanabilir. Vektör çarpımlarının sonuçlarını bulduktan sonra bu üç vektörün bileşkeleri şöyle yazılabılır:

$$A_{1,x} = \frac{1}{8} [(y_8 + y_7 - y_1 - y_2)(z_5 + z_6 - z_4 - z_3) - (z_8 + z_7 - z_1 - z_2)(y_5 + y_6 - y_4 - y_3)] \quad (\text{A.7a})$$

$$A_{1,y} = \frac{1}{8} [(x_8 + x_7 - x_1 - x_2)(z_5 + z_6 - z_4 - z_3) - (z_8 + z_7 - z_1 - z_2)(y_5 + y_6 - y_4 - y_3)]$$



Şekil A.2 Hücrenin bölümleri

Şekil A.2'de de gösterildiği gibi, hücre her ikisi de üç dörtyüzlü tarafından oluşturulan iki parçaya bölünür. Yarı-hücre 1-8-5-2-6-7, dörtyüzlüler 1-5-8-7, 1-5-6-7 ve 1-6-2-7'ye bölünürken diğer yarı-hücre 1-4-8-2-3-7 dörtyüzlüler 1-4-8-7, 1-3-4-7 ve 1-2-3-7'ye bölünür.

Dolayısıyla hücrenin hacmi bu altı alt-hacmin toplamından oluşur.

$$\begin{aligned}
 \Delta V &= \frac{1}{6} \vec{r}_{71} \cdot \left\{ \left(\vec{r}_{51} \times \vec{r}_{61} \right) + \left(\vec{r}_{81} \times \vec{r}_{51} \right) + \left(\vec{r}_{61} \times \vec{r}_{21} \right) + \left(\vec{r}_{21} \times \vec{r}_{31} \right) + \left(\vec{r}_{31} \times \vec{r}_{41} \right) + \left(\vec{r}_{41} \times \vec{r}_{81} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{6} \vec{r}_{71} \cdot \left[\left(\vec{r}_{52} \times \vec{r}_{61} \right) + \left(\vec{r}_{45} \times \vec{r}_{81} \right) + \left(\vec{r}_{24} \times \vec{r}_{31} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{3} \vec{r}_{71} \cdot \left(\vec{S}_1 + \vec{S}_3 + \vec{S}_5 \right)
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

burada \vec{S}_1 , \vec{S}_3 ve \vec{S}_5 Şekil 3.5'te verilen yüzey vektörleridir ve

$$\vec{r}_{71} = (x_1 - x_7) \vec{i} + (y_1 - y_7) \vec{j} + (z_1 - z_7) \vec{k} \tag{A.9}$$

Hücre hacminin formülasyonunun son hali şöyledir:

$$\begin{aligned}
\Delta V = & \frac{1}{3} \left\{ (x_1 - x_7)(S_{1,x} + S_{2,x} + S_{3,x}) \right. \\
& + (z_1 - z_7)(S_{1,z} + S_{2,z} + S_{3,z}) \\
& \left. + (z_1 - z_7)(S_{1,z} + S_{2,z} + S_{3,z}) \right\} \quad (\text{A.10})
\end{aligned}$$

burada $S_{1,x}, \dots, S_{5,z}$ yüzey vektörlerinin bileşkeleridir ve Denklem (A.4)'te hesaplanırlar.

EK B

METRİKLERİN HESAPLANMASI

Hareket denklemlerinin kolay ele alınabilmesi için bunlar fiziksel uzaydan sayısal uzaya dönüştürülürler. Bu dönüşüm metrikler kullanılarak yapılır. Üç boyutlu Cartesian koordinat sisteminde fiziksel uzay (x, y, z) koordinatlarıyla, sayısal uzaysa (ξ, η, ζ) koordinatlarıyla temsil edilirler. Bu çalışmada kullanılan hesaplama ağı hesaplama işlemi boyunca sabit olduğu için sayısal uzayın koordinatları zamana bağlı değildir. Bu açıklamayla ξ , η ve ζ koordinatları aşağıdaki gibi ifade edilebilirler:

$$\xi = \xi(x, y, z) \quad (\text{B.1a})$$

$$\eta = \eta(x, y, z) \quad (\text{B.1b})$$

$$\zeta = \zeta(x, y, z) \quad (\text{B.1c})$$

Zincir kuralı kullanılarak bir korunabiler değişken olan U 'nun sayısal uzayın herhangi bir curvilinear koordinatına göre olan türevi şöyle yazılabilir:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (\text{B.2a})$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \quad (\text{B.2b})$$

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \quad (\text{B.2c})$$

Denklem seti (B.2) matris formunda şöyle yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} \\ \frac{\partial U}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Yukarıdaki denklem şöyle de sunulabilir:

$$[U]_{(\xi, \eta, \zeta)} = [C][U]_{(x, y, z)} \quad (\text{B.4})$$

Konunabilir değişken U 'nın fiziksel uzaydaki türevlerini elde etmek için Denklem (B.4) katsayı matrisi C 'nin tersiyle soldan çarpılmalıdır.

$$[U]_{(x, y, z)} = [C]^{-1}[U]_{(\xi, \eta, \zeta)} \quad (\text{B.5})$$

Katsayı matrisinin tersi şöyle yazılabilir

$$[C]^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} & -\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Yukarıdaki denklemde katsayı matrisi C 'nin determinantına J ile gösterilen Jacobian denir aşağıdaki gibi verilebilir.

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial x}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \\ + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \quad (\text{B.7})$$

Yukarıdaki sonuçları Denklem (B.5)'e koyarak korunabilir değişken U 'nun fiziksel uzaydaki türevleri matris halinde şöyle elde edilebilir

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} & -\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} \\ \frac{\partial U}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Yukarıdaki denklem her Cartesian koordinatındaki türevler için açık olarak, Bölüm 3'te Denklem (3.30) ile verilen son formülleri elde etmek için yazılabilir.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial U}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial U}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial U}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \right\} \quad (\text{B.9a})$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{J} \left\{ -\frac{\partial U}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial U}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial U}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \right\} \quad (\text{B.9b})$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial U}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial U}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial U}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right\} \quad (\text{B.9.c})$$

UYGULAMA ÖZETİ

Projenin Adı

C++ Derleyicisi Kullanılarak Üç Boyutlu Sıkıştırılabilen Akımlar İçin Etkileşimli Bir Navier-Stokes Çözücüsünün Geliştirilmesi

Proje Numarası

MİSAG-132

Proje Yürüttüsü

Prof. Dr. Mehmet Halûk Aksel

Uygulama Özeti

Bu proje çerçevesinde, laminer ve türbülant akışların zamanla değişimeyen çözümlerini elde etmek için üç boyutlu, Reynolds averajlı Navier-Stokes denklemlerini çözen bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Reynolds averajlı Navier-Stokes denklemleri, ikinci dereceden hassas, tek adımlı Lax-Wendroff şeması ve hücre köşeli (cell vertex) sonlu hacim metodunu kullanılarak sayısal olarak ayrıstırılmıştır. Türbülant viskositenin hesaplanması için Baldwin-Lomax türbülans modeli kullanılmıştır.

Belirli zaman ilerlemeli (explicit time-marching) bu çözümü hızlandırabilmek için bölgesel zaman adımı kullanılmıştır. Salınımları gidermek için ikinci ve dördüncü derece yapay sönütleme uygulanmıştır. Uzak bölge sınırlarında karakteristik sınır şartları kullanılırken, bu çalışmada durgun alınan katı duvarlar üzerinde kaymamazlık sınır şartı kullanılmıştır.

Programlama ortamı olarak, C++ programlama dili seçilmiştir. Çözücünün görsel bir versyonunu oluşturmak için Nesneye-Yönelik Programlama (Object-Oriented Programming) kullanılmıştır. Çözücünün giriş dosyalarının ve gerekli parametrelerinin daha kolay ele alınması için bir arayüz hazırlanmıştır.

Üçü laminer, ikisi türbülant olan beş test durumu ele alınmıştır. İlk olarak, programın geçerliliğinin onaylanması için düz plaka üzerindeki laminer akış çözülmüş

ve analitik çözümle karşılaştırılmıştır. Daha sonra biri sesaltı ve biri sesüstü durumlarda olan iki laminer akış, dairesel yay kaskadlarının üzerinde denenmiştir. Bir sonraki durum ise türbülans modelinin test edilmesi için denenen düz plaka üzerindeki türbülant akış olarak alınmıştır. Son olarak, NACA-0012 kanadının üzerindeki sescivarı, türbülant akış ele alınmıştır.

Sonuç Raporunun Duyurulabileceği Kurumlar

1. TÜBİTAK-SAGE
Samsun Yolu
Lalahan, P.K. 16
Mamak
06261 Ankara
2. ROKETSAN
Ankara-Samsun Karayolu 40. km
P.K. 30, Elmadağ
06780 Ankara
3. TUSAŞ Havacılık ve Uzay Sanayii A.Ş.
İstanbul Yolu 30. km
Akıncı
Ankara