3+1 Boyutta Manyetik Akı Simetrisi ve Bunun Renk Hapsine Etkisi

Program Kodu: 1002

Proje No: 117F203

Proje Yürütücüsü:

Prof. Dr. Altuğ Özpineci

Bursiyerler:

Dr. İbrahim Burak İlhan

Ağustos 2018

ANKARA

ÖNSÖZ

Bu projede Ilhan ve Kovner (2015) makalesinde geliştirilen yüksüz elektromanyetizmanın etkin bir teorisinin simetrileri incelenmiş, ve bu teorinin simetrilerini $Z(N)$'e kıran tedirgemeler bulunup Ilhan ve Kovner (2013) makalesinde bulunan sicim çözümlerinin bu teoride de bulunabileceği; daha genel çözümlerin bulunması için ise elektrik yüklerinin tutarlı bir şekilde tanımlanması gerektiği gösterilmiştir.

Bu proje TÜBİTAK tarafından “ARDEB-1002 - Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Projelerini Destekleme Pr." kapsamında desteklenmiştir. (proje no: 117F203)

İçindekiler

1. ÖZET

Bu proje kapsamında, yüksüz elektromanyetizmanın etkin bir modelinin çeşitli özelliklerini araştırdık. Ayar alanları kullanılmadan, Lorentz dönüşümleri altında kanonik olmayan dönüşümlere sahip alanlar cinsinden ifade edilen bu modelin sahip olduğu simetrilerin fiziksel objelere etkilerini inceledik. Daha sonra bu modelin simetrilerini, Yang-Mills teorisinin düşük enerji limitini tanımlayacak $Z(N)$'e kıran bir tedirgeme altında, durağan ve sonsuz ayrık sicim çözümlerine sahip olduğunu gösterdik. Daha genel çözümler bulunması icin yapılması gerekenleri belirterek projeyi başarıyla tamamladık.

Anahtar Kelimeler: Etkin Kuramlar, Elektromanyetizma, Simetriler, Renk Hapsi

2. ABSTRACT

In this project, several properties of an effective theory of free photons is investigated. Transformation of physically relevant objects under the symmetries of this model, which is constructed without gauge fields, and is defined in terms of fields which transform non canonically under Lorentz transformations is investigated in detail. Following this, the symmetries of the model is broken down to $Z(N)$, and it is shown that this theory has string solutions between infinitely separated static charges. We conclude the report by suggesting possible future directions.

Keywords: Effective theories, Electrodynamics, Symmetries, Color Confinement

3. GİRİŞ

Bu projede, parçacık fiziğinin standart modelinde halen cevap arayan bazı soruları yanıtlamayı amaçlayan bir programı ele alacak, bu kapsamda yapılan son çalışmayı biraz daha geliştireceğiz. Bu bağlamda esas amaçladığımız soru, standart modelin güçlü etkileşim kısmındandır: renk hapsi.

Kuantum renk dinamiğinin özgürlük dereceleri kuark ve gluonlar olmasına rağmen asimtotik özgürlük dereceleri mezon ve baryonlardan oluşur. Bu, genelde renk hapsi mekanizmasıyla açıklanır: iki kuark arasındaki etkileşim potansiyeli mesafeyle azalmak yerine çizgisel olarak artar. Bu davranış, belli bir enerji aralığında, hem deneysel (Lyons , 1985) olarak hem de kafes hesaplarında gösterilmiş (Gattinger ve Lang , 2010) olmasına rağmen, halen teorinin temel özelliklerinde yola çıkarak tutarlı bir şekilde analitik olarak elde edilememiştir. Bu amaçla atılan adımların en bilinenleri (Mandelstam , 1976; 't Hooft , 1981) esasen Abelyen mekanizmalar olup, Abelyen olmayan $SU(N)$ teorisini açıklamak için yeterli değillerdir.

Bu projede takip edilen programdaki amaç, Yang Mills teorisinin düşük enerji-uzak mesafelerdeki davranışını inceleyerek bu limitteki teoriyi "tahmin" etmektir. Böyle bir yaklaşım için teorinin tüm simetrileri ve bütün parçacık tayfını bilmek şart değildir. Etkin bir düşük enerji-uzak mesafe teorisi yazmak için, teorinin sadece bu limitteki simetrilerini taşıyan bir Lagrangian kullanılabilir. Ayrıca, uzak mesafelerde sadece kütlesiz parçacıklar etkili olacağı için diğer parçacıklar dikkate alınmak zorunda kalınmaz. Bu noktada, kütlesizliği dinamik olarak simetrilere (ve bunların kırılmasına) dayanan "Goldstone bozonları" kullanışlı olabilir.

Kuantum renk dinamiğinin düşük enerjilerdeki davranışını tam olarak bilinmese de bazı fikirler yol gösterici olabilir. 't Hooft (1978) tarafından gösterildiği üzere, temel alanların olmadığı Abelyen olmayan teoriler manyetik $Z(N)$ simetrisi taşırlar ve bu simetrinin kırılması renk hapsine bir işarettir. Eğer manyetik $Z(N)$ kuantum renk dinamiğinin düşük enerjilerini tanımlayan simetri ise, bu simetriyi taşıyan bir etkin model yazılabilir.

Bu raporda, üstte anlatılan fikirlerin ilk olarak çalışıldığı ve iyi anlaşıldığı $2+1$ boyuttaki durum kısaca hatırlatılıp (4. ve 5. bölüm), daha sonra projenin temelini oluşturan $3+1$ boyuta geçilecek (6. bölüm).Bu noktadan itibaren öncelikle Amaç 1 - İş Paketi 1 kapsamında Abelyen teorinin simetrilerini inceleyeceğiz (7. bölüm). Daha sonra da Amaç 2 ve 3 - İş Paketi 2 ve 3 kapsamında Abelyen olmayan teoriye geçmek için gerekli tedirgemeyi kullanarak, bu limitte sicim çözümleri arayacağız (8. ve 9. bölüm). En son olarak da bulgularımızı özetleyerek programın devamı için yapılması gerekenleri belirtip raporu sonlandıracağız (10. bölüm).

4. 2+1 Boyutta Manyetik Akı Simetrisi

Bu bölümde manyetik akı simetrisinin $2+1$ boyutlu Abelyen ve Abelyen olmayan teorilerdeki özellikleri hızlı bir şekilde hatırlatılıp, ilgili etkin teoriler ve sicim oluşturma mekanizması kısa bir şekilde tekrar edilecektir (Ilhan ve Kovner (2013),Kovner (2000)).

4.1 Manyetik akı simetrisi ve renk hapsi

İlk olarak, ‘t Hooft tarafından verilen manyetik $Z(N)$ simetrisi fikrini kısaca özetleyelim: $SU(N)$ simetrisine sahip adjoint Higgs alanlarından oluşan bir teori, $SU(N)$'in merkezi olan $Z(N)$ altında değişmezdir. Simetri kırılması olduğu sürece potansiyelin ne olduğu önemli değildir. Simetri kırılması durumunda standart Higgs alanları ve kütleli gluonların yanı sıra; kütleli, kararlı manyetik burgaçlar (magnetic vertices) da vardır. Böyle ağır cisimlerin kararlı olması ancak topolojik yük taşımalarıyla mümkündür. Bu yük, manyetik $Z(N)$ yüküdür: N dolanım içeren burgaç durumunun topolojik yüküyle boşluğun topolojik yükü aynıdır. Teorinin Higgs fazındaki bu simetri, parametrelerin düzgün şekilde değiştirilmesi sonucu renk hapsinin olduğu kuvvetli etkileşim fazına da taşınır. Parametreleri daha da değiştirerek Higgs alanları tamamen ayrıştırılarak sadece gluonlarla tanımlı bir teori elde edilir. Bu süreçte değişiklikler düzgün şekilde yapıldığı sürece teorinin $Z(N)$ simetrisi korunur ama farklı bir şekilde gerçekleşir. Kalan $Z(N)$ simetrisinin kırılması durumunda da teoriye eklenen ağır kuarklar arasında renk hapsi oluşur ('t Hooft , 1978).

4.2 Etkin teoriler

Proje kapsamında ele alınan $3+1$ boyutlu etkin teoriye geçmeden önce, $2+1$ boyuttaki durumu hatırlayalım (Kovner (2000)). Manyetik $Z(N)$ simetrisi ile renk hapsi arasındaki bağıntı, bu boyutta iyi anlaşılmıştır. Ayrıca, bu boyutta renk hapsi veren etkin teorilerle Abelyen etkin teoriler; Abelyen teorideki $U(1)$ simetrisinin $Z(N)$'e kıran bir tedirgeme ile bağlıdır. Burada kalan $Z(N)$ simetrisinin de kırılması, ‘t Hooft argumanı uyarınca renk hapsi verir.

$2+1$ boyutta örnek olarak Abelyen Higgs modeli alınabilir. Burada düzlemden geçen manyetik akı $U(1)$ simetrisini tanımlar: $\Phi = \int d^2xB(x)$. Bu simetrinin düzen parametresi olan bir V operatörü cinsinden etkin bir teori yazılmak istenirse bu basit bir şekilde yapılabilir:

$$L = -\partial^\mu V \partial_\mu V - \lambda \left(V^* V - \frac{e^2}{8\pi} \right)^2 \tag{1}$$

V alanının boşluk beklenti değerinin sıfır olup olmadığı ikinci terim tarafından belirlenirken, ilk terim standart kinetik terimdir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, bu Lagrangian'ı yazmak için sadece teorinin $U(1)$ simetrisine sahip olduğunun ve bu simetrinin kırıldığının bilinmesinin yetmesidir.

Bu teori etkin olarak 2+1 boyutlu elektromanyetizmayla eşdeğer olup, manyetik akı simetrisinin düzen parametresi olan kompleks V alanı, manyetik burgaç oluşturan bir operatördür. $V = \rho e^{i\chi}$ şeklinde ifade edilebilecek bu alanın fazı kütlesiz fotona karşılık gelir. Simetrinin kırılıp kırılmaması ise fotonun kütleli olup olmadığını belirleyen Higgs-Coulomb faz geçişini tanımlar.

Elektrik yükü taşıyan durumlar ise V alanının topolojik yüküyle bağıntılıdır:

$$J_\mu = \frac{1}{e} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \partial_\nu V^* \partial_\lambda V \tag{2}$$

bu ifade dolanım sayısını ölçer ve sıfırdan farklı yük taşıyan durumlara örnek olarak, θ kutupsal açı olmak üzere $V = ve^{i\theta}$ durumu alınabilir.

Bu Abelyen teoriyi renk hapsini tanımlayabilecek Abelyen olmayan durumlara bağlamak için mevcut $U(1)$ simetrisini $Z(N)$'e kıracak bir terim eklenir.

$$L = -\partial^\mu V \partial_\mu V - \lambda \left(V^* V - \frac{e^2}{8\pi} \right)^2 + \mu \left(V^N + V^{*N} \right) \tag{3}$$

Bu teoride, daha önce sonsuz dejenere olan boşluk, $Z(N)$ simetrisiyle bağlı olacak şekilde ayrık hale gelir. Bunun sonucunda, dönel simetri taşıyan yüklü durumlar teorinin düşük enerjili konfigurasyonları değillerdir. Bunun yerine yüklerin yük - anti yük çiftleri şeklinde oldukları ve dolanımın çiftler arasında bir boyutlu bir tüp (sicim) içine hapsoldukları çözümler bulunur.

5. 3+1 boyutta Abelyen Model

Bu bölümdeki amacımız, bir önceki bölümde anlatılan fikirleri $3+1$ boyuta taşımaktır. Bunun için öncelikle bu boyutta elektrodinamiği ayar alanları olmadan, skaler alanlar cinsinden tanımlayacak etkin bir model yazılmalıdır. Bu modelde fotonla eşleştirilecek iki Goldstone bozonu olmalı, ve ayrıca, elektrik yükleriyle eşleştirilebilecek, topolojik yük taşıyan durumlar bulunabilmelidir. Bu yükler de, Abelyen olmayan bir tedirgeme sonucu renk hapis durumları tanımlayabilmelidir.

Bu özellikleri taşıyan en basit teori, çizgisel olmayan sigma modelidir. Bu model,

$$\phi_a \phi_a = 1 \tag{4}$$

şartıyla bağlı üç skaler alan şeklinde tanımlanır ve topolojik yük taşımaya uygun $\Pi_2(S^2) = Z$ boşluk manifolduna sahiptir. Bu durumda topolojik yük, elektrodinamikteki elektrik yüküyle eşleştirilir:

$$Q = \frac{e}{4\pi^2} \int d^3x \epsilon_{abc} \epsilon_{ijk} \partial^i \phi^a \partial^j \phi^b \partial^k \phi^c \tag{5}$$

Yük taşıyan durumlara örnek, döngüsel simetri taşıyan "kirpi" durumudur:

$$\phi^a = \frac{r^a}{r} f(r), \quad f(r \to \infty) \to 1 \tag{6}$$

Eğer oluşturulacak teori, skaler alanlar için standart kinetik terim içerirse, yük taşıyan bu gibi durumların enerjisi kızılötesinde ikinci dereceden sonsuza gider. Bu sebeple, eğer yüklü durumların kızılötesinde sonlu enerjiye sahip olmaları isteniyorsa, teorideki kinetik terim ikiden fazla türev içermelidir.

Bu özelliği taşıyan ve üstte tanımladığımız yük tanımına doğal şekilde bağlı bir kinetik terim kolayca bulunabilir. Üstte elde edilen yükü, elektromanyetik akımın zaman bileşeni olarak alınırsa, elektrik akımı

$$J^\mu = \frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{abc} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \partial^\nu \phi^a \partial^\lambda \phi^b \partial^\sigma \phi^c \tag{7}$$

olarak yazılabilir. Buna bağlı olarak Maxwell denklemleri

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\mu \tag{8}$$

uyarınca, elektromanyetik tensör

$$F_{\mu\nu} = \epsilon_{abc}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\phi^a\partial^\lambda\phi^b\partial^\sigma\phi^c \tag{9}$$

olarak bulunur. Bu tanımı kullanarak ve elektromanyetizma ile olabildiğince benzer bir teori yazmak istenildiği düşünülürse, kullanılabilecek bir Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2 \tag{10}$$

olarak alınabilir. Üstteki tanımlar gereğince bu Lagrangian 4 türev taşımasına rağmen antisimetri gereği zaman türevleri sadece iki tanedir ve hayalet durumları ve kararsızlık gibi problemler bulunmaz. Lagrangian'ın işaretinin normalde kullanılanın aksi olmasının sebebi ise çifteş formulasyondur: Elektrik ve Manyetik alanlar cinsinden aynı Hamilton operatörü elde edilmek isteniyorsa, bu işaret tercih edilmelidir.

ϕ alanlarının radyal özgürlüğünün olmadığı güçlü etkileşim limitinde ($\lambda \to \infty$), elektromanyetik tensör tanım gereği korunur:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{11}$$

Ancak diğer iki Maxwell denkleminin sağlanmadığı Ilhan ve Kovner (2013) tarafından gösterilmiştir. Bu sorunu çözüp, yüksüz Maxwell teorisini elde etmek için, elektromanyetik tensör tanımını kısmen değiştirmek gerekir (Ilhan ve Kovner , 2015). Bu değişiklik sonucu elde edilen model, raporun kalan kısmında ayrıntılı olarak incelenecektir.

6. Temel tanımlar

Başlangıç noktamız olan Lagrange fonksiyonu

$$L = \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{\lambda}{4}\left(\phi^2 - v^2\right)^2 \tag{12}$$

şeklindedir. Burada elektromanyetik tensör, etkin alanlar cinsinden

$$F^{\mu\nu} = g\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}[\epsilon^{abc}\phi_a\partial_\alpha\phi_b\partial_\beta\phi_c + (n\cdot\partial)n_\alpha\partial_\beta\Phi] \tag{13}$$

şeklinde tanımlı olup $n = (1,0,0,0)$ zamansal bir birim vektördür. Daha önce de tanımlandığı üzere, $\phi_i, (i = 1,2,3)$ $O(3)$ simetrisiyle bağıntılı skaler alanlar ve Φ da bunlardan ayrı bir skaler alandır. Bu noktadan itibaren, $\phi^2 = v^2$ şeklinde sınırlandırılmış $O(3)$ simetrik alanlar

$$\phi_3 \equiv z, \qquad \phi_1 + i\phi_2 \equiv \sqrt{v^2 - z^2}e^{i\chi}, \tag{14}$$

şeklinde ifade edilecektir. (Ayrıca, hesaplarda bir değişikliğe yol açmadan notasyonu basitleştirmek amacıyla $v^2 = 1$ şartını sağlayan birimler seçilecek). Bu gösterimde, elektromanyetik tensör

$$F^{\mu\nu} = g\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}[-2\partial_\beta\chi\partial_\alpha z + n_\alpha\partial_\beta\partial_0\Phi] \tag{15}$$

olarak elde edilir. Bu durumda, elektrik ve manyetik alanların etkin alanlar cinsinden ifadeleri

$$E_i = 2\epsilon_{ijk}\partial_j z\partial_k\chi \tag{16}$$

$$B_k = 2(\partial_k\chi\partial_0 z - \partial_0\chi\partial_k z) - \partial_k\partial_0\Phi \tag{17}$$

gibidir.

6.1 Hareket Denklemleri

İlk olarak Ilhan ve Kovner (2015) tarafından da gösterildiği üzere, elimizdeki teorinin yüksüz elektromanyetizma ile eşdeğer olduğunu gösterelim. Yukarıda verilen Lagrange fonksiyonunun yanı sıra, Elektromanyetik alanın tanımı sonucu, $\phi^2 = 1$ şartı sağlandığı sürece Maxwell denklemlerinin ikisinin aynen sağlandığını gösterilebilir.:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{18}$$

Diğer taraftan etkin alanların varyasyonu sonucu Euler-Lagrange denklemleri elde edilir:

$$\partial_0\partial_k B_k = 0$$
$$\partial_k \chi[\partial_0 B_k + (\partial \times E)_k] = 0 \tag{19}$$
$$\partial_k z[\partial_0 B_k + (\partial \times E)_k)] = 0$$

Bu denklemlerden ilki, "manyetik yük yoğunluğu"nun yerel korunum denklemidir. Bu denklem bir korunum denklemi olduğu için teori, manyetik yük yoğunluğunun her zaman sabit kaldığı süper-seçim sektörlerine bölünmüş olur. Teorinin elektromanyetik teoriyle eşdeğer olduğu limitte çalışmak için, manyetik yüklerin var olmadığı $\partial_k B_k = 0$ durumunun ele alınması, yani üstteki ilk denklemin çözümündeki sabitin 0 olarak seçilmesi gerekir. Elektromanyetik sektörde bu şartın sağlanması gerekmesine rağmen, Abelyen olmayan limitte (renk) manyetik yüklerin varlığı, bu limiti gevşetebilme özgürlüğünü sağlar.

Denklem 19'un ilk satırından elde edilen $\partial_k B_k = 0$ şartını kullanarak, ikinci ve üçüncü eşitlikler,

$$\partial_0 B_k + (\partial \times E)_k = \alpha E_k \tag{20}$$

şeklinde çözülebilir. Bu denklemin en genel çözümünde sağ tarafta elektrik alana orantılı bir terim olsa da, elektromanyetik teorinin parite simetrisini sağlanması şartı, orantı sabitinin sıfır olmasını gerektirir. Yani, hareket denklemleri sonucu, son iki Maxwell denklemi elde edilir:

$$\begin{aligned} \partial_k B_k &= 0 \\ \partial_0 B_k + (\partial \times E)_k &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Böylece, elde edilen teorinin yüksüz elektromanyetizma ile eşdeğer olduğu sonucuna varılır. Bu teorinin simetrilerini ve özellikle Lorentz simetrisi altında etkin alanların davranışlarını incelenmeden önce, Hamilton gösterimindeki duruma da bakılabilir.

6.2 Hamilton Gösterimi

Eldeki teorinin etkin alanları cinsinde ifadesinin elektromanyetik teori ile eşdeğer olduğu Hamilton dilinde de gösterilebilir. Teorinin simetrilerini daha iyi anlaşılmasını sağlayacak bu formülasyona geçmek için, öncelikle kanonik momentumları standart şekilde hesaplanırsa:

$$p_z = \frac{\delta L}{\delta \partial_0 z} = 2B_k \partial_k \chi = 2\partial_k \chi \left[2(\partial_k \chi \partial_0 z - \partial_0 \chi \partial_k z) - \partial_k \partial_0 \Phi\right] \tag{22}$$

$$p_\chi = \frac{\delta L}{\delta \partial_0 \chi} = -2B_k \partial_k z = -2\partial_k z \left[2(\partial_k \chi \partial_0 z - \partial_0 \chi \partial_k z) - \partial_k \partial_0 \Phi\right] \tag{23}$$

$$p_\Phi = \frac{\delta L}{\delta \partial_0 \Phi} = \partial_k B_k = \partial_k \left[2(\partial_k \chi \partial_0 z - \partial_0 \chi \partial_k z) - \partial_k \partial_0 \Phi\right] \tag{24}$$

bulunur. Elektrik alan sadece kanonik kordinatlara (yani alanlara) bağlı olduğu için momentum ifadelerinden bir katkı almaz. Diğer taraftan kanonik dilde manyetik alan

$$D_k \equiv \frac{1}{E^2} \epsilon_{klm} E_l (p_z z_m + p_\chi \chi_m) \tag{25}$$

tanımı kullanılarak

$$B_k = D_k - E_k \int_{-\infty}^{x} dl_C \frac{\partial_m D_m - p_\Phi}{E} \tag{26}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada integral, elektrik alan yönünde bir çizgi integralidir.

Hamilton operatörü de Lagrange fonksiyonunun Legendre dönüşümü olarak (bir sınır terimini ihmal ederek)

$$H = \int d^3x \left[p_z \dot{z} + p_\chi \dot{\chi} + p_\Phi \dot{\Phi} - L\right] = \int d^3x \frac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right) \tag{27}$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca, elektrik ve manyetik alanların

$$[E_i(x), E_j(y)] = 0, \quad [B_i(x), B_j(y)] = 0 \tag{28}$$

ve

$$[E_i(x), B_j(y)] = i\epsilon_{ikj}\partial_k^x \delta(x-y) \tag{29}$$

şeklindeki standart kanonik komütasyon bağıntılarını sağladıkları da gösterilebilir (Ilhan ve Kovner , 2015). Böylece modelin yüksüz elektromanyetizma ile eşdeğer olduğu sonucunu bir kez daha doğrulanmış olur.

6.3 Lorentz Simetrisi

Teorinin elektromanyetik teoriyle eşdeğer olması şartı, Lorentz simetrisinin de standart şekilde geçerli olmasını gerektirir. Bu şartı sağlamanın yolu, elektrik ve manyetik alanların tensör bileşenleri şeklinde dönüşmesi veya daha genel olarak, elektromanyetik alanın ikinci dereceden bir tensör gibi dönüşmesini gerektirir.

$$F_{\mu\nu} \to \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta F_{\alpha\beta} \tag{30}$$

Bunun sağlanmasının yolu, daha önce skaler olarak tanımlanan ϕ ve Φ alanlarının Lorentz dönüşümleri altında kanonik olmayan dönüşüm terimleri içermelerini gerektirir. Üstteki denklemin bileşenlerini, etkin alanlar cinsinden yazarak bu alanların dönüşüm özelliklerini, β dönüşüm parametresi, ω Lorentz dönüşümü jeneratörleri ve $\Delta = \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
z(x) \to z(\Lambda^{-1}x) &= (1+\beta\Delta)z(x) + \frac{1}{E^2}\left(\hat{n}_i\beta\partial_0\Phi - \partial_i \int_\infty^x dl_C \hat{E}_m \hat{n}_m \beta\partial_0\Phi\right)\epsilon_{ijk}E_j z_k \\
\chi(x) \to \chi(\Lambda^{-1}x) &= (1+\beta\Delta)\chi(x) + \frac{1}{E^2}\left(\hat{n}_i\beta\partial_0\Phi - \partial_i \int_\infty^x dl_C \hat{E}_m \hat{n}_m \beta\partial_0\Phi\right)\epsilon_{ijk}E_j \chi_k
\end{aligned} \tag{31}$$

ve

$$\begin{aligned}
\partial_0\Phi(\Lambda^{-1}x) &= (1-\beta\Delta)\partial_0\Phi(x) + \partial_0 \int_\infty^x dl_C \hat{E}_i \hat{n}_i \beta\partial_0\Phi \\
&\quad + \frac{2}{E^2}\epsilon_{ijk}E_j(\partial_0\chi z_k - \partial_0 z\chi_k)\left[\hat{n}_i\beta\partial_0\Phi - \partial_i \int_\infty^x dl_C \hat{E}_l \hat{n}_l \beta\partial_0\Phi\right]
\end{aligned} \tag{32}$$

olarak bulunur. Beklendiği üzere etkin alanlar, Lorentz dönüşümleri altında kanonik olmayan biçimde dönüşüp birbirlerine karışmaktadırlar.

Raporun bu noktasına kadar manyetik akı simetrisi, bunu $2+1$ boyutta Abelyen ve Abelyen olmayan teorilerdeki durumunu özetleyip, $3+1$ boyuta bu fikirlerin taşınması amacıyla önerilen ve projenin temelini oluşturan teorinin ana hatlarına değindik. Buradan itibaren, proje önerisinde değinilen amaç ve iş paketleri üzerindeki çalışmaların sunumu başlamaktadır.

7. Teorinin Simetrileri

İlk olarak Amaç 1 - İş Paket 1 kapsamında Abelyen teorinin simetrileri incelenip, bu simetrilerin fiziksel olarak önemli operatörlere etkileri hesaplanacak.

Bu teorinin biri yerel ve biri global olmak üzere iki farklı simetri dönüşümü vardır. Global simetri, elektromanyetik teoriyi elde edilmesini sağlayan Φ alanı eklenmeden önceki terimlerin kinetik kısmının oluşturduğu alan-koruyan difeomorfizmlerdir. Bu dönüşümün jeneratörü

$$C_G = \int d^3x \left[p_z \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial \chi} - p_\chi \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial z} \right] \tag{33}$$

olarak yazılabilir. Burada $G[z,\chi]$, iki değişkene bağlı keyfi bir fonksiyondur. Bu jeneratör sonucu oluşan dönüşümün alanlara olan etkilerini bulmak için $[z, C_G]$ ve $[\chi, C_G]$ komütatörlerini hesaplarsak, alanların dönüşümlerinin

$$z \to z + \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial \chi}, \quad \chi \to \chi - \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial z} \tag{34}$$

şeklinde olduğunu bulunur. Bu simetriye ek olarak, elektromanyetik teorinin geçerli olduğu süperseçim sektöründe kalmamızı sağlayan diğer şart, yerel bir simetri jeneratörü olan

$$C_L = p_\Phi = 0 = \partial_k B_k \tag{35}$$

şeklindedir. 22, 23 ve 24 denklemleri kullanılarak, üstte verilen global simetri jeneratörü :

$$\begin{aligned} &\int d^3x \left[p_z \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial \chi} - p_\chi \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial_z} \right] = \int d^3x \left[2B_k \partial_k \chi \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial \chi} + 2B_k \partial_k z \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial_z} \right] \\ &= \int d^3x 2B_k \left[\partial_k \chi \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial \chi} + \partial_k z \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial_z} \right] = \int d^3x 2B_k \partial_k G[z,\chi] = - \int d^3x 2\partial_k B_k G[z,\chi] \end{aligned} \tag{36}$$

şeklinde yazılabilir. Son terimdeki $\partial_k B_k = p_\Phi = 0$ ifadesi, yerel simetrinin jeneratörü olup sağlandığı için, global simetri jeneratörünün de sıfır olduğunu gösterilmiş olur. Simetri jeneratörünün sıfır olması, bu simetrinin bir ayar simetrisi olduğu ve yeni fiziksel özgürlük dereceleri vermediğini gösterir. Böylece, üstte gösterilen etkin teorinin, yeni simetriler taşımasına karşın, elektrik ve manyetik alanlar dışında fiziksel özgürlük derecesi içermediği sonucuna da ulaşılır. Bu da, teorinin yeni simetriler içermesine rağmen fiziksel olarak elektromanyetizmayla aynı olduğunu gösterir.

7.1 Simetrilerin Genelleştirilmesi

Burada elde edilen yerel ve global özgürlük dereceleri uygun şekilde tek bir denklem haline sokulabilir, şöyle ki, yerel şart:

$$C_L = p_\Phi = 0 \tag{37}$$

Her noktada geçerli olduğu için, global şarta, bu terimi çarpan herhangi bir fonksiyon eklenebilir, şöyle ki global simetri jeneratörünün eşit olduğu ifade, yerel şart şeklinde ifade edilebilir:

$$C_G = \int d^3x \left[p_z \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial \chi} - p_\chi \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial z} \right] = -2 \int d^3x \partial_k B_k G[z,\chi] = -2 \int d^3x p_\Phi G[z,\chi] \tag{38}$$

Bu durumda, iki tarafa da elektromanyetik limitte sıfır olan bir ifade eklersek

$$C_G = \int d^3x \left[p_z \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial \chi} - p_\chi \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial z} + 2 p_\Phi G[z,\chi] \right] = 0 \tag{39}$$

gibi bir jenerator elde ederiz. Bu jeneratör, daha önceki ifadenin aksine, $p_\Phi \neq 0$ durumunda da global bir ayar simetrisidir ve kinetik terimden kaynaklı global simetrilerin, yerel şartın gevşetileceği Abelyen olmayan limitte de geçerli olmasını sağlayabilir. Diğer taraftan bu fikir daha da genelleştirilebilir, şöyle ki; yerel simetri her noktada geçerli olduğu için F herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$C_F = \int d^3x \left[p_z \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial \chi} - p_\chi \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial z} + p_\Phi F \right] = 0 \tag{40}$$

şeklinde bir jeneratör de elde edilebilir. Görüldüğü üzere, Ilhan ve Kovner (2015) makalesinde elde edilen global ayar simetrisi, çok daha genel bir simetri jeneratörünün özel hali olarak düşünülebilir.

Modelin fikirlerinin dayandığı 2+1 boyutlu teorilerde benzer global simetriler olmadığı için, Abelyen olmayan limitte bu simetrilere ne olacağı, kırılması veya korunması mı gerektiği açık değildir. Burada geliştirilen jeneratörler, Abelyen limitte geçerli olan simetrileri $p_\Phi = 0$ şartının sağlanmasının şart olmadığı Abelyen olmayan limite taşır.

7.2 Alanların dönüşüm özellikleri

İlk olarak yukarıda elde edilen simetri jeneratörü altında alanların nasıl dönüştüklerini inceleyelim. Üstte tanımlanan elektrik ve manyetik alanların yanı sıra, elektrik alanın dolam şeklinde yazılmasına olanak veren

$$A_i = z\partial_i\chi - \chi\partial_i z \tag{41}$$

tanımının da dönüşümünü inceleyelim. Bu alan cinsinden elektrik alan

$$E_i = \epsilon_{ijk}\partial_j A_k \tag{42}$$

şeklinde ifade edilip çifteş vektör potansiyeline benzer bir rol oynasa da, ayar potansiyeli olmadığını unutmamak gerekir. Burada dikkat çeken bir diğer nokta, elektrik alanın üstteki ifadesi için

$$A_i = z\partial_i\chi, \quad A_i = -\chi\partial_i z \tag{43}$$

ifadelerinin de ayrı ayrı kullabılabilmesidir. A alanının global simetri jeneratörü altındaki dönüşümü için $[A_i, C_G]$ hesaplanabilir, veya eşdeğer olarak denklem 34'te elde edilen dönüşümler kullanılarak, A alanının

$$\begin{aligned}
A_i =& z\partial_i\chi - \chi\partial_i z \\
\rightarrow& \left(z + \frac{\partial G}{\partial\chi}\right)\partial_i\left(\chi - \frac{\partial G}{\partial z}\right) - \left(\chi - \frac{\partial G}{\partial z}\right)\partial_i\left(z + \frac{\partial G}{\partial\chi}\right) \\
=& z\partial_i\chi - \chi\partial_i z + \partial_i\chi\frac{\partial G}{\partial\chi} + \partial_i z\frac{\partial G}{\partial z} - z\partial_i\frac{\partial G}{\partial z} - \chi\partial_i\frac{\partial G}{\partial\chi} \\
=& z\partial_i\chi - \chi\partial_i z + 2\left(\partial_i\chi\frac{\partial G}{\partial\chi} + \partial_i z\frac{\partial G}{\partial z}\right) - \partial_i\left(z\frac{\partial G}{\partial z} + \chi\frac{\partial G}{\partial\chi}\right) \\
=& z\partial_i\chi - \chi\partial_i z + 2\partial_i G - \partial_i\left(z\frac{\partial G}{\partial z} + \chi\frac{\partial G}{\partial\chi}\right)
\end{aligned} \tag{44}$$

gibi dönüştüğü bulunur. Burada dönüşümü veren son iki terim bir tam türev ifadesidir. Bu noktadan itibaren, kordinatlar için kullanılar notasyon, $q_1 = z$, $q_2 = \chi$ olacak şekilde basitleştirilecektir, yani örneğin A alanı:

$$A_i = z\partial_i \chi - \chi \partial_i z = \epsilon_{ab} q_a \partial_i q_b \tag{45}$$

olarak ifade edilir. Bu notasyon ile, üstte tanımlı global simetri jeneratörü

$$C = \int d^3x \left[p_z \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial \chi} - p_\chi \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial z} \right] = \int d^3x \left[\epsilon_{ab} p_a \frac{\partial G[q]}{\partial q_b} \right] \tag{46}$$

şeklinde yazılırken, A alanının dönüşümü :

$$[A_i(x), C(y)] = 2i\delta(x-y)\partial_i G[q] - i\partial_i^x \left[q_d \frac{\partial G[q]}{\partial q_d} \delta(x-y) \right] \tag{47}$$

olarak hesaplanır. Elektrik alan

$$\begin{aligned} [E_i(x), C(y)] =& \epsilon_{ijk} \partial_j^x \left[A_k(x), C(y) \right] = \epsilon_{ijk} \partial_j^x \left(2i\delta(x-y)\partial_k G[q] - i\partial_k^x \left[q_d \frac{\partial G[q]}{\partial q_d} \delta(x-y) \right] \right) \\ =& 2i\epsilon_{ijk} \partial_j^x \delta(x-y) \partial_k G[q] = 2i\epsilon_{ijk} \partial_j^x \left(\delta(x-y)\partial_k G[q] \right) \end{aligned} \tag{48}$$

gibi dönüşür. Manyetik alanın dönüşümünü incelemek için öncelikle

$$\left[p_z z_m + p_\chi \chi_m, p_z \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial \chi} - p_\chi \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial z} \right] \tag{49}$$

komütatörünü hesaplamak faydalıdır. Üstte tanımlanan notasyon ile, bu dönüşüm

$$\begin{aligned} &\left[p_a(x) \partial_m^x q_a(x), \epsilon_{bc} p_b(y) \frac{\partial G[q]}{\partial q_c}(y) \right] = \epsilon_{bc} \left[-\delta(x-y) \frac{\partial^2 G}{\partial q_a \partial q_c}(x) \partial_m^x q_a(x) p_b(x) + \partial_m^x \delta(x-y) p_b(x) \frac{\partial G}{\partial q_c}(y) \right] \\ &= \epsilon_{bc} \left[-\delta(x-y) \partial_m \left(\frac{\partial G}{\partial q_c} \right) p_b + \partial_m^x \left[\delta(x-y) p_b \frac{\partial G}{\partial q_c} \right] - \delta(x-y) \partial_m p_b \frac{\partial G}{\partial q_c} \right] \\ &= \epsilon_{bc} \left[-\delta(x-y) \partial_m \left[p_b \frac{\partial G}{\partial q_c} \right] + \partial_m^x \left[\delta(x-y) p_b \frac{\partial G}{\partial q_c} \right] \right] = \partial_m^x \delta(x-y) \left[\epsilon_{bc} p_b \frac{\partial G}{\partial q_c} \right] \end{aligned} \tag{50}$$

olarak hesaplanır veya denklem 34 ve kanonik momentumların

$$p_z \to p_z - \frac{\delta C}{\delta z} = p_z - p_z \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \chi} + p_\chi \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} \tag{51}$$

$$p_\chi \to p_\chi - \frac{\delta C}{\delta \chi} = p_\chi - p_z \frac{\partial^2 G}{\partial \chi^2} + p_\chi \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \chi} \tag{52}$$

şeklindeki dönüşümleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
p_z z_m + p_\chi \chi_m \to & \left(p_z - p_z \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \chi} + p_\chi \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right) \partial_m \left(z + \frac{\partial G}{\partial \chi}\right) + \left(p_\chi - p_z \frac{\partial^2 G}{\partial \chi^2} + p_\chi \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \chi}\right) \partial_m \left(\chi - \frac{\partial G}{\partial z}\right) \\
= p_z z_m + p_\chi \chi_m - p_z & \left(\partial_m z \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \chi} + \partial_m \chi \frac{\partial^2 G}{\partial \chi^2} - \partial_m \frac{\partial G}{\partial \chi}\right) + p_\chi \left(\partial_m z \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + \partial_m \chi \frac{\partial^2 G}{\partial \chi \partial z} - \partial_m \frac{\partial G}{\partial z}\right) \\
= p_z z_m + p_\chi \chi_m &
\end{aligned} \tag{53}$$

bulunur. Bu hesap ile elektrik alan ve D_k alanının yanı sıra, manyetik alanın da global simetri jeneratörü altındaki değişmezliği gösterilmiş olur. Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta, manyetik alan dönüşümünde p_Φ teriminin herhangi bir rol oynamamasıdır.

7.3 ‘t Hooft Çizgi Operatörü ve Değiştirilmiş Simetri

$$V(x, y) = e^{-i\Phi(x)} \exp\left(i \int_y^x A_i dx^i\right) e^{i\Phi(y)} \tag{54}$$

şeklinde tanımlı bir operatörü ele alalım. Bu operatör, Wilson çizgi operatörüne çifteş olarak tanımlı bir ‘t Hooft çizgisi ile bağlı bir tekkutup - anti tekkutup çiftine karşılık gelir ve böyle bir operatör, manyetik akı simetrisinin düzen parametresi olabilecek bir operatör tanımlar. Öncelikle buradaki söylevi hesapla tamamlamak amacıyla üstteki operatörü parça parça inceleyelim. Ortadaki terimde integrali alınan A alanı, etkin alanlar cinsinden daha önce de belirtildiği üzere

$$A_i = z \partial_i \chi - \chi \partial_i z. \tag{55}$$

şeklinde ifade edilip, elektrik alana

$$E_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \tag{56}$$

şeklinde bağlı olduğu hatırlanırsa, bu tanımın manyetik alanın standart vektör potansiyeli cinsinden tanımıyla eşdeğer olduğu görülür. Yani ortadaki üstel terim, esasen Wilson çizgi operatörünün çifteşi olabilecek bir operatördür. Bu operatörün

$$\int dS_k B_k(x) \tag{57}$$

şeklinde tanımlı herhangi bir düzlem üstündeki manyetik akı ile komütasyonunu hesaplamak için

$$[E_i(x), B_k(y)] = i\epsilon_{iak}\partial_a^x \delta(x-y) \tag{58}$$

denklemi kullanılırsa

$$[\epsilon_{ijm}\partial_j A_m(x), B_k(y)] = i\epsilon_{iak}\partial_a^x \delta(x-y) \tag{59}$$

bulunur. Yani, standart elektromanyetizmaya çifteş şekilde bağlı olmak üzere A ve B alanlarının kanonik olarak bağlandığı gösterilmiş olur:

$$[A_i(x), B_j(y)] = i\delta(x-y)\delta_{ij} \tag{60}$$

Uçlarda yer alan Φ operatörlerini yorumlamak için, manyetik akı operatörü ile Φ alanının komütatörü hesaplanabilir:

$$\int dS_k [B_k(x), \Phi(y)] \tag{61}$$

bu amaçla, kanonik bağıntılar kullanılırsa:

$$[\Phi(x), p_\Phi(y)] = i\delta(x-y) = [\Phi(x), \partial_k B_k(y)] = \partial_k^y [\Phi(x), B_k(y)] \tag{62}$$

bulunur, yani bu operatör etki ettiği noktada birim manyetik akı oluşturmaktadır. Bütün bu sonuçları toplanırsa, V operatörünün y noktasında bir manyetik tekkutup oluşturduğunu, bu tekkutuptan kaynaklanan manyetik akının bir çizgi üzerinden x noktasındaki bir anti-manyetik tekkutupta son bulduğu anlaşılır. Bu operatör, $2+1$ boyuttaki düzen parametresinin bir benzeri olsa da, 3+1 boyutta elektromanyetik teorinin sağlaması gereken

$$\partial_k B_k = 0 \tag{63}$$

şartı, manyetik alan çizgilerinin ya sonsuza kadar uzanmalarını, veya başladıkları noktada sonlanmalarını gerektirmektedir. Abelyen olmayan limite geçildiğinde ise bu şart serbest bırakılabilir ve sonlu ‘t Hooft operatörleri teoriye tutarlı bir şekilde eklenebilir. İlerleyen bölümlerde bu operatörün noktasal limitinden yola çıkarak tanımlanabilecek bir operatör de bulunacaktır.

7.4 Değiştirilmiş simetri

İlk olarak burada tanımladığımız ‘t Hooft operatörünün, üstte türetilen simetri dönüşümleri altında nasıl davrandığını inceleyelim. Bunun için, operatörün noktasal limit değerini inceleyelim:

$$V(x) = \lim_{y \to x} e^{i\Phi(x)} \; exp\left(i \int_y^x A_i dx^i \right) e^{-i\Phi(y)} \tag{64}$$

böyle bir operatör her ne kadar formal limitinde bire gitse de, sonsuz küçük limiti teorinin simetrileri hakkında fikir edinmek için kullanılabilir. Denklem 40’daki özgürlük kullanılarak, bu operatörü değişmez bırakan bir dönüşümün nasıl olması gerektiği bulunabilir. Denklem 38’de verilen global dönüşüm altında A_i alanı

$$A_i \to A_i + \partial_i \left(2G - z\frac{\partial G}{\partial z} - \chi \frac{\partial G}{\partial \chi} \right) \tag{65}$$

olarak davranırken Φ alanı

$$\Phi \to \Phi - 2G \tag{66}$$

olarak dönüşür. Üstte $p_\Phi = 0$ şartının verdiği özgürlük ile simetri jeneratörünün değiştirebileceği düşünülerek, bu terimi değişmez bırakan jeneratörü elde etmek için, A’nın dönüşümündeki fazla terimlerin etkisini sıfırlayan terimler eklenirse

$$\begin{aligned} C_m &= \int d^3x \left(p_z \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial \chi} - p_\chi \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial z} + 2p_\Phi \left[G[z,\chi] - \left(z\frac{\partial G[z,\chi]}{\partial z} + \chi \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial \chi} \right) \right] \right) \\ &= \int d^3x \left(2p_\Phi G + \frac{\partial G}{\partial q_b} \left(\epsilon_{ab} p_a - 2p_\Phi q_b \right) \right) \end{aligned} \tag{67}$$

bulunur. Böylece V operatörünü sabit bırakan global ayar simetri jeneratörü bulunmuş olur. Bu ekleme z ve χ alanlarının dönüşümünü değiştirmez. p_Φ da değişmez olarak kalmaya devam eder. p_z ve p_χ alanlarının dönüşümü ise şu şekilde değişir:

$$[p_c, \mathcal{C}_m] = \left[p_c, 2p_\Phi G + \frac{\partial G}{\partial q_b}(\epsilon_{ab}p_a - 2p_\Phi q_b)\right] = -\frac{\partial^2 G}{\partial q_c \partial q_b}(\epsilon_{ab}p_a - 2p_\Phi q_b) \tag{68}$$

Proje kapsamında önemli olan manyetik alanın dönüşümü de hesaplanabilir. Manyetik alanın

$$B_k = D_k - E_k \int_{-\infty}^{x} dl_C \frac{\partial_m D_m - p_\Phi}{E} \tag{69}$$

şeklinde tanımlandığı hatırlanırsa, terim terim çalışarak D_k alanının dönüşümü

$$\begin{aligned}
D_k = \frac{1}{E^2}\epsilon_{klm}E_l(p_c\partial_m q_c) &\to \frac{1}{E^2}\epsilon_{klm}E_l\left[\left(p_c + \frac{\partial^2 G}{\partial q_c \partial q_b}\left(2p_\Phi q_b - \epsilon_{ab}p_a\right)\right)\partial_m\left(q_c + \epsilon_{cd}\frac{\partial G}{\partial q_d}\right)\right] \\
&= D_k + \frac{1}{E^2}\epsilon_{klm}E_l\left[p_c\epsilon_{cd}\partial_m\frac{\partial G}{\partial q_d} + \frac{\partial^2 G}{\partial q_c \partial q_b}\left(2p_\Phi q_b - \epsilon_{ab}p_a\right)\partial_m q_c\right] \\
&= D_k + \frac{1}{E^2}\epsilon_{klm}E_l\left[p_c\epsilon_{cd}\partial_m\frac{\partial G}{\partial q_d} + \left(2p_\Phi q_d - \epsilon_{cd}p_c\right)\partial_m\frac{\partial G}{\partial q_d}\right] \\
&= D_k + \frac{2p_\Phi}{E^2}\epsilon_{klm}E_l q_d\partial_m\frac{\partial G}{\partial q_d}
\end{aligned} \tag{70}$$

olduğu bulunur. Bu sonuçlar bir araya getirilirse, V operatörünün değişmez bırakan simetri jeneratörü altında manyetik alanın

$$B_k \to B_k + \frac{2p_\Phi}{E^2}\epsilon_{klm}E_l q_d\partial_m\frac{\partial G}{\partial q_d} - E_k\int_{-\infty}^{x} dl_C(y)\frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial y^m}\left(\frac{2p_\Phi}{E^2}\epsilon_{klm}E_l q_d\partial_m\frac{\partial G}{\partial q_d}\right) \tag{71}$$

olarak dönüştüğü bulunur. Elektromanyetik limitte geçerli olan $p_\Phi = \partial_k B_k = 0$ durumunda manyetik alan modifiye dönüşüm altında sabit kalırken, Abelyen olmayan limite geçildiğinde sabit kalması için, ilki elektrik alana dik ve ikincisi buna paralel terimlerden oluşan son iki terimin tam olarak sıfır olması gerekir.

Diğer taraftan yeni simetri jeneratörü z ve χ alanlarının dönüşümlerini etkilemediği ve A_i ve elektrik alan sadece kanonik koordinatlara bağlı oldukları için, bunların dönüşümleri değişmez:

$$A_i \to A_i + \partial_i \left(2G - z\frac{\partial G}{\partial z} - \chi\frac{\partial G}{\partial \chi} \right) \tag{72}$$

şeklinde dönüşmeye devam ederken elektrik alan

$$E_i = \epsilon_{ijk}\partial_j A_k = \epsilon_{ijk}\partial_j \left(z\partial_k\chi - \chi\partial_k z \right) \to E_i \tag{73}$$

aynı kalır. Sonuç olarak $p_\Phi = 0$ limiti alındığı sürece, $V(x)$'i değişmez bırakan simetriler, fiziksel özgürlük derecelerini korur.

7.5 Noktasal operatör

Üstte tanımladığımız operatörün, x ve y noktalarının sonsuzda alındığı hali teorinin manyetik akı simetrisinin davranışı hakkında bize bilgi verse de (Kovner ve Rosenstein , 1994), yerel olarak tanımlanabilecek ve Hamiltonian'a eklenebilecek bir operatör geliştirmek için noktasal limitini tekrar ele alalım. Bu limitte

$$V(x) = \lim_{y\to x} e^{i\Phi(x)} \exp\left(\int_y^x iA_i dx^i \right) e^{-i\Phi(y)} \tag{74}$$

operatörü bire gitmesine rağmen, manyetik akı simetrisinin incelenebileceği bir operatör türetilmesinde yol gösterici olabilir. Böyle bir operatörün dönel simetrik genellemesi yazılmak istenirse, bu operatörün Δx kadar boyundaki bir parçasıyla işe başlanabilir. Bu limitte:

$$\begin{aligned} V =& \lim_{y\to x} e^{i\Phi(x)} \exp\left(iA_i\Delta x^i \right) e^{-i\Phi(y)} \\ \approx& [1 + i\Phi(x)][1 + iA_i\Delta x_i][1 - i\Phi(y)] \\ \approx& 1 + i\Phi(x) - i\Phi(y) + iA_i\Delta x_i + \Phi(x)A_i\Delta x_i - A_i\Delta x_i\Phi(y) \\ =& 1 + i[\Phi(x) - \Phi(y)] + A_i\Delta x_i[i + \Phi(x) - \Phi(y)] \\ =& 1 + i[\Phi(y) + \Delta x_i\partial_i\Phi(y) - \Phi(y)] + A_i\Delta x_i[i + \Phi(y) + \Delta x_i\partial_i\Phi(y) - \Phi(y)] \end{aligned} \tag{75}$$

Son satırda $\Phi(x)$ alanları için $x = y$ noktası civarında Taylor açılımı yaptık. Bu açılımı kullanarak, $V \equiv 1 + V^i\Delta x_i$ olacak şekilde V_i operatörlerini:

$$V_i \approx i(\partial_i \Phi + A_i) \tag{76}$$

olarak tanımlayabiliriz. Bu da, beklenen şekilde eşdeğişkin türev operatörüne benzer bir yapıdadır. Operatörün bu limitinin alanlar üzerinde etkisi hesaplanırsa, öncelikle A_i alanı sadece kanonik χ ve z alanlarına bağlı olduğunda, bu operatör altında değişmez:

$$[V_i(x), A_j(y)] = 0 \tag{77}$$

Elektrik alanın sadece χ ve z'nin fonksiyonu olduğunu ve $E_i = \epsilon_{ijk}\partial_j A_k$ olarak tanımlandığı hatırlanırsa,

$$[V_i(x), E_j(y)] = i\,[\partial_i \Phi(x) + A_i(x), E_j(y)] = 0 \tag{78}$$

bulunur. Manyetik alan ise, elektromanyetik limitti A_i ile kanonik bağlı olduğundan (denklem 60)

$$\begin{aligned}
[V_i(x), B_j(y)] &= i\,[\partial_i \Phi(x) + A_i(x), B_j(y)] = i\,[\partial_i \Phi(x), B_j(y)] + i\,[A_i(x), B_j(y)] \\
&= i\,[\partial_i \Phi(x), B_j(y)] - \delta(x-y)\delta_{ij}
\end{aligned} \tag{79}$$

elde edilir. Diğer taraftan Φ ile manyetik alan arasındaki bağıntı denklem 35'deki gibi olduğundan, manyetik yük ile yoğunluğu ile komütasyonu ise sıfır verir:

$$\begin{aligned}
[V_i(x), \partial_k B_k(y)] &= i\,[\partial_i \Phi(x) + A_i(x), \partial_k B_k(y)] \\
&= i\,[\partial_i \Phi(x), \partial_k B_k(y)] + i\,[A_i(x), \partial_k B_k(y)] \\
&= i\,[\partial_i \Phi(x), p_\Phi(y)] + i\partial_k^y\,[A_i(x), B_k(y)] \\
&= -\partial_i^x \delta(x-y) - \partial_k^y \delta(x-y)\delta_{ik} = 0
\end{aligned} \tag{80}$$

Bu sonuç sadece elektromanyetik limit olan $p_\Phi = 0$ durumunda değil, genel durumda da geçerlidir. Diğer taraftan, çizgisel operatörden noktasal operatöre geçiş, $V_i(x)$'i değişmez bırakan jeneratörü etkilemez, yani

$$C = \int d^3x \left(p_z \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial \chi} - p_\chi \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial z} + 2p_\Phi \left[G[z,\chi] - \left(z\frac{\partial G[z,\chi]}{\partial z} + \chi \frac{\partial G[z,\chi]}{\partial \chi} \right) \right] \right) \tag{81}$$

operatörü, elektrik ve manyetik alanın olduğu gibi, $V_i(x)$'in de bir simetrisidir.

Bu bölümde eldeki Abelyen teorinin simetri özellikleri incelenmiş, bu operatörlerin çeşitli fiziksel objelere etkileri komütatörler hesaplanarak bulunmuş; manyetik akı simetrisinin bazı özelliklerini taşıyabileceği öne sürülen bir operatörü değişmez bırakan simetriler bulunmuş ve bu yeni simetrilerin de fiziksel operatörleri değişmez bıraktığı gösterilmiştir. Bu şekilde proje önerisi kapsamında belirtilen Amaç (1) - İş Paketi (1) tamamlanmıştır.

8. Abelyen olmayan teori

Raporun kalan kısmında teorinin Abelyen olmayan limiti incelenip, Amaç (2-3) - İş Paketi (2-3) kapsamında Abelyen olmayan teoriye geçmeyi sağlayacak tedirgemeler kullanılacak ve bulunan teoride sicim çözümleri aranacaktır. Bu bölümde Ilhan ve Kovner (2013) makalesindeki teoride kullanılan tedirgemenin Φ alanından etkilenmediği, statik alan çözümlerinin değişmediği; ve son olarak Φ alanına dinamik verilmesinin de bu sonucu bozmadığı gösterilmiştir.

$O(3)$ simetrisini kırmanın değişik yolları olsa da, daha önce bulunmuş çözümlerdeki olası değişimleri incelemek için Ilhan ve Kovner (2013) tarafından yapıldığı şekilde, z'nin boşluk beklenti değerini 1'e sabitleyen bir tedirgeme seçerek işe başlanabilir:

$$L = \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - 2g^2\Lambda^2(z-1)^2 \tag{82}$$

$O(3)$ simetrisine ek olarak, bu tedirgeme, global ayar simetrisini de kısmen kırar ve

$$\chi \to \chi - \frac{dG(z)}{dz} \tag{83}$$

kısmını geride bırakır. Diğer taraftan yerel

$$p_\Phi = 0 \tag{84}$$

simetrisi için bir şart getirmez. Bu simetri, Abelyen limitte elektromanyetizmanın etkin teorisi olduğu için korunması gerekirken, tam Abelyen olmayan $Z(N)$ simetrik teoride ise serbest olması gerekir. Ancak burada elde edilen teori bu iki limit arasında bir durum olduğu için bu simetrinin nasıl değerlendirilmesi gerektiği net değildir.

Böyle bir tedirgeme eklenmesi sonucu elde edilen teoride, topolojik yük taşıyan

$$\phi^a(x) = \frac{r^a}{r}f(r) \tag{85}$$

gibi durumlar sonlu enerjiye sahip olamaz. Yükler, $2+1$ boyutta olduğu gibi, bir sicim ile ayrılmış çiftler şeklinde bulunabilirler. Bu sebeple amaç, bu tedirgeme altında ötelenme değişmezi sicim benzeri çözümler aramaktır. Böyle çözümler, ayrık yük-antiyük durumları arasında doğrusal bir renk hapsi oluşmasını sağlar.

8.1 Durağan Sicim Çözümleri

Renk hapisli durumları incelemek için, 3 yönünü, sonsuz ayrık durağan yüklerin ayrılma yönü olarak kabul edelim. Böyle bir durumda sicim çözümleri aranırken, 3 yönünde ötelenme değişmezliği seçilebilir. Elektromanyetik tensörün

$$F^{\mu\nu} = g\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}[\epsilon^{abc}\phi_a\partial_\alpha\phi_b\partial_\beta\phi_c + (n\cdot\partial)n_\alpha\partial_\beta\Phi] \tag{86}$$

şeklinde olduğu kullanılır ve 3 yönünde öteleme değişmezliğine sahip durağan çözümler ele alınırsa, sıfırdan farklı elektromanyetik alan olarak sadece bir bileşen kalır:

$$F^{03} = g\epsilon^{03ij}[-2\partial_j\chi\partial_i z + n_i\partial_j\partial_0\Phi] = 2g\epsilon^{ij}\partial_j\chi\partial_i z \tag{87}$$

bu durumda kinetik terimden hareket denklemlerine gelen katkı hesaplanırsa:

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2F^{03}F_{03} \tag{88}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= -8g^2\left(\epsilon_{ij}\partial_j\chi\partial_i z\right)^2 \\ &= -8g^2\left[\partial_2\chi\partial_1 z - \partial_1\chi\partial_2 z\right]^2 \end{aligned} \tag{89}$$

bulunur. Bu durumda z varyasyonu sonucu

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta z}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= -16g^2\left[\partial_2\chi\partial_1 z - \partial_1\chi\partial_2 z\right]\left[\partial_2\chi\partial_1\delta - \partial_1\chi\partial_2\delta\right] \\ &= -16g^2\left[\partial_2\left(\left[\partial_2\chi\partial_1 z - \partial_1\chi\partial_2 z\right]\partial_1\chi\right) - \partial_1\left(\left[\partial_2\chi\partial_1 z - \partial_1\chi\partial_2 z\right]\partial_2\chi\right)\right] \\ &= -16g^2\left[\partial_2\left[\partial_2\chi\partial_1 z - \partial_1\chi\partial_2 z\right]\partial_1\chi - \partial_1\left[\partial_2\chi\partial_1 z - \partial_1\chi\partial_2 z\right]\partial_2\chi\right] \end{aligned} \tag{90}$$

elde edilir. 3 yönünde durağan çözümler arandığı için x_1, x_2 düzleminin polar kordinatlarda tanımlanması daha uygun olur. Bu kordinatlarda r ve θ, x_1, x_2 düzlemindeki kutupsal kordinatları tanımlar. Dik açılı sistemdeki türevler, kutupsal kordinatlardaki türevlere bilinen şekilde bağlıdır:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \tag{91}$$

Bu kordinatlara geçilirse:

$$\begin{aligned} &\partial_2\chi\partial_1 z - \partial_1\chi\partial_2 z \\ &= \left[\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\chi\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)z - \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\chi\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)z\right] \\ &= \frac{1}{r}\left(\partial_r z\partial_\theta\chi - \partial_r\chi\partial_\theta z\right) \end{aligned} \tag{92}$$

olduğundan, z varyasyonu

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta z}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= -16g^2\left[\partial_2\left[\partial_2\chi\partial_1 z - \partial_1\chi\partial_2 z\right]\partial_1\chi - \partial_1\left[\partial_2\chi\partial_1 z - \partial_1\chi\partial_2 z\right]\partial_2\chi\right] \\ &= -16g^2\left[\partial_2\left[\frac{1}{r}\left(\partial_r z\partial_\theta\chi - \partial_r\chi\partial_\theta z\right)\right]\partial_1\chi - \partial_1\left[\frac{1}{r}\left(\partial_r z\partial_\theta\chi - \partial_r\chi\partial_\theta z\right)\right]\partial_2\chi\right] \\ &= \frac{16g^2}{r}\left(\partial_r\left[\frac{1}{r}\left(\partial_r z\partial_\theta\chi - \partial_r\chi\partial_\theta z\right)\right]\partial_\theta\chi - \partial_r\chi\partial_\theta\left[\frac{1}{r}\left(\partial_r z\partial_\theta\chi - \partial_r\chi\partial_\theta z\right)\right]\right) \end{aligned} \tag{93}$$

verir. Benzer şekilde χ varyasyonunu hesaplamak için $z \leftrightarrow \chi$ değişimini yapıp, işareti değiştirmek yeterli olur. Diğer taraftan Φ denklemi hesaplanırsa

$$\partial_0\partial_k F_{ij}\epsilon^{ij0k} = 0 \tag{94}$$

bulunur. Bu denklem, sıfırdan farklı F_{ij} olmadığı için aynen sağlanır. Kalan denklemler Φ alanından etkilenmediği için kalan denklemler Ilhan ve Kovner (2013) makalesinde bulunanlarla aynıdır ve aynı çözümleri sağlarlar. Bütünlük açısından bu hesap aşağıda tekrar edilecektir.

Sicime dik düzlemde döngüsel simetrik çözümler arandığı için, bu özellikleri taşıyan alanlar için basit bir tahminde bulunulabilir. Burada alanlar

$$\chi(x) = \chi(\theta) = \theta(x), \quad z(x) = z(r) \tag{95}$$

şeklinde seçilebilir. Bu varsayımda, sicim çözümünün döngüsünü χ alanı sağlarken, z alanı radyal profili verir. Burada kullanılan r ve θ, sicime dik düzlemdeki kutupsal kordinatlara karşılık gelir. Bu durumda χ hareket denklemleri:

$$0 = \frac{16g^2}{r}\left(\partial_r\left[\frac{1}{r}\left(\partial_r z\partial_\theta\chi - \partial_r\chi\partial_\theta z\right)\right]\partial_\theta z - \partial_r z\partial_\theta\left[\frac{1}{r}\left(\partial_r z\partial_\theta\chi - \partial_r\chi\partial_\theta z\right)\right]\right) \tag{96}$$

şeklinde olup aynen sağlanırken, z denklemi:

$$\frac{1}{4}\frac{16g^2}{r}\left(\partial_r\left[\frac{1}{r}\left(\partial_r z\right)\right]\right) = 4g^2\Lambda^2(z-1) \tag{97}$$

şeklindedir. Bu denklem, $z(r) = z(r^2)$ olmak üzere

$$4z'' = \Lambda^2(z-1) \tag{98}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin basit olmayan bir çözümünü bulmak için z'nin sonsuzda boşluk beklenen değeri olan 1'e gitmesini beklerken, sicimin merkezinde düzgün bir çözüm için $z(0) = z_0$'ın sonlu bir değer alması şart koşulabilir. Bu sınır değerlerle verilen diferansiyel denklemin çözülmesi kolaydır ve:

$$z(r^2) = 1 - (1 - z_0)\exp\left[-\frac{\Lambda r^2}{2}\right] \tag{99}$$

olarak bulunur. Sonuçları etkilemeyecek şekilde sabiti $z_0 = -1$ seçerek kalan bölümlerdeki hesaplar basitleştirilebilir. Bu şekilde elde edilen radyal terim, bir sicimden beklenen bazı özellikleri taşır. Sicimin sonlu ve sıfırdan farklı enerjiye sahip belli bir yarıçapı olup, z alanı bu yarıçap dışına çıkınca hızlı bir şekilde boşluk değeri olan 1'e gider. Sicim gerginliğini hesaplamak için birim kesitteki enerji yoğunluğunu kullanılabilir. Bulunan z ve χ çözümlerini elektromanyetik tensör tanımında kullanılırsa, sıfırdan farklı tek bileşen olan 3 yönündeki elektrik alan:

$$F^{03} = 2g\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}z = 4\Lambda g \exp\left(-\frac{\Lambda r^2}{2}\right) \tag{100}$$

olarak bulunur. Sicim gerginliği ise:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{2}\int E_i^2 dx^2 = \frac{1}{2}\int \left[4\Lambda g \exp\left(-\frac{\Lambda r^2}{2}\right)\right]^2 r dr d\theta = \frac{1}{2}\int 16\Lambda^2 g^2 \exp\left(-\Lambda r^2\right) r dr 2\pi \\ &= 8\pi\Lambda^2 g^2 \int \exp\left(-\Lambda r^2\right) d\left(r^2\right) = 8\pi\Lambda g^2\end{aligned} \tag{101}$$

olarak hesaplanır. Bu çözümde dikkat çeken bir nokta, sicim dışında çözümlerin sıfıra üstel yerine, daha hızlı bir Gaussian şeklinde sıfıra gitmesidir. Bu sonucun kaynağı, sonlu enerjiye sahip yük çözümleri bulabilmek için standart kinetik terim yerine kullanılmak durumunda kalınan 4 türevli kinetik terimdir.

8.2 Z(N) Tedirgeme

Üstte verilen tedirgeme sadece $O(3)$ simetrisini $O(2)$'ye kıran bir terim içermektedir ve sicim çözümlerine sahiptir. Asıl amaç $Z(N)$ simetrik bir teori olduğu için bu simetriyi kıracak bir terim daha eklemek gerekir. Bu amaçla modele bir simetrinin üstüne kalan simetriyi de kıran bir terim eklenir. Burada da $O(2)$ simetrisi ϕ alanları tarafından oluşturulduğu için Ilhan ve Kovner (2013) tarafından kullanılan tedirgemenin seçilmesi uygun olur:

$$L = \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - 2g^2\Lambda^2(z-1)^2\left[1-\mu\left(\psi^N + \psi^{*N}\right)\right] \tag{102}$$

Kalan $O(2)$ simetrisini $Z(N)$'e kıracak bu tedirgeme, yüksüz elektromanyetik teoriyi elde etmek için eklenen Φ alanına bağlı olmadığı için, daha önce Ilhan ve Kovner (2013) tarafından bulunan çözümler geçerliliklerini korurlar. Tekrar etmek gerekirse, alanların tanımının $\psi = \sqrt{1-z^2}e^{i\chi}$ olduğu düşünülürse, bu Lagragian

$$L = \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - 2g^2\Lambda^2(z-1)^2\left[1 - 2\mu(1-z^2)^{N/2}\cos N\chi\right] \tag{103}$$

olarak da yazılabilir. En basit şekilde sicim çözümü bulmak için, eklenen terimin bir tedirgeme olduğunu düşünerek $\mu \ll 1$ limiti ele alınırsa potansiyel, en düşük değerini $z = 1$'de alır. Hareket denklemleri daha öncekine benzer şekilde elde edilebilir. Φ denklemi değişmediği için çözüme bir etkide bulunmaz:

$$\begin{aligned}\frac{\delta L}{\delta\Phi} &= \frac{\delta}{\delta\Phi}\left[\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right] \\ &= \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta\Phi}F^{\mu\nu} \\ &= \frac{g}{2}F_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta\Phi}\left[\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(-2\partial_\beta\chi\partial_\alpha z + n_\alpha\partial_\beta\partial_0\Phi)\right] \\ &= \partial_0\partial_\beta\left[n_\alpha F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\right] = 0\end{aligned} \tag{104}$$

Kalan denklemler de değişmediği için, Ilhan ve Kovner (2013) tarafından bulunan çözümler değişmez. Bütünlük açısından bu sonucu da elde edelim. Eklenen tedirgemenin etkisinin sadece açısal etkiyi sağlayan χ alanından olduğunu varsayarak, z alanının daha önceki gibi radyal olduğu durumun yanı sıra:

$$z(x) = z(r) \tag{105}$$

χ alanının daha önce bulunduğu şekilde $\chi_0(x) = \theta$ olmak üzere

$$\chi(x) = \chi_0(x) + \chi_1(x) = \theta + f(r)\sin N\theta \tag{106}$$

olduğunu varsayılırsa, kinetik terimden χ denklemine gelen katkı sol taraftan

$$16g^2{z'}^2 f N^2 \sin N\theta = 4Ng^2\Lambda^2(z-1)^2\mu(1-z^2)^{N/2}\sin N\theta \tag{107}$$

şeklindedir. Bu denklemin f için çözümü

$$f(r^2) = \frac{\Lambda^2(z-1)^2\mu(1-z^2)^{N/2}}{4{z'}^2 N} \tag{108}$$

olup, z'nin açık ifadesi yerine koyulursa f

$$f(r^2) = \frac{\mu}{N}\left[1-\left(1-2\exp\left(-\frac{\Lambda r^2}{2}\right)^2\right)\right]^{N/2} \tag{109}$$

olarak bulunur. Bu çözüm, daha önce bulunan z çözümüyle beraber ikinci dereceden z denklemi de çözer. Böylece tedirgeme çözümünü tutarlı bir şekilde sağlandığını gösterilmiş olur. Sonuç olarak dolanımı veren χ alanının açık ifadesi

$$\chi = \theta + \frac{\mu}{N}\left[1 - \left(1 - 2\exp\left(-\frac{\Lambda r^2}{2}\right)^2\right)\right]^{N/2} \sin N\theta \tag{110}$$

olarak bulunur. Böylece sicim çözümlerinin daha önceki gibi var olduğu, $Z(N)$ tedirgemesi sonucu χ alanının açısal modulasyona yol açtığı gösterilmiş olur.

Sonuç olarak, Φ alanının eklenmesi sonucunda elde edilen ve yüksüz elektromanyetik teori ile eşdeğer olan yeni teorinin simetrilerinin $Z(N)$'e kırılması sonucu elde edilen Abelyen olmayan etkin teoride, daha önce bulunmuş sicim çözümlerinin aynen korunduğu gösterilmiş oldu. Φ alanı hareket denklemlerine sadece zaman türevi içeren ifadelerle girdiği için, kendi denklemi aynen sağlanır ve diğer denklemlere bir etkisi olmaz. Bu sonuçlar, en temel çözümler olan durağan alanlara dayandığı için, daha genel çözümler bulmak için bu şartı gevşetmenin sonuçları incelenebilir.

8.3 Diğer çözüm arayışları

Bu bölümde, daha genel çözümler bulma gayesiyle, Φ alanından ziyade Ilhan ve Kovner tarafından kullanılan $\Theta = \partial_0\Phi$ alanının durağan olması şartı kullanılacak. Teorinin her noktasında Φ alanı yerine bu terimin zaman türevinin bulunması, dinamik alanın bu şekilde tanımlanmasının da incelenmesini önermektedir. Bu durumda her ne kadar elde edilen teori standart elektromanyetik teoriden farklılaşsa da, Abelyen olmayan limitte zaten bu sonuç beklendiğinden bu değişikliğin sonuçları da incelenecek. Modeldeki sadece bir alana kısmi dinamik vermek çok gerçekçi olmasa da, daha genel durumları incelemeden önce bu basit yaklaşımın oluşturacağı sonuçları görmek açısından faydalıdır.

Bu yaklaşımda, elektromanyetik alanın sıfırdan farklı yeni bileşenleri vardır:

$$\begin{aligned} F^{03} &= 2\epsilon^{ij}\partial_j\chi\partial_i z \\ F^{13} &= \partial_2\Theta \\ F^{23} &= -\partial_1\Theta \end{aligned} \tag{111}$$

Bunlar hareket denklemlerinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4e^2}\partial_\alpha\left[F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta\chi\right]-\frac{4}{e^2}\Lambda^2(z-1)=0\\
&\frac{1}{4e^2}\partial_\alpha\left[F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta z\right]=0\\
&\partial_0\partial_k F_{ij}\epsilon^{ij0k}=0
\end{aligned}\tag{112}$$

bulunur. Son denklem:

$$\partial_0\partial_k F_{ij}\epsilon^{ij0k}=0\tag{113}$$

veya

$$\partial_0\partial^2\Theta=0\tag{114}$$

şeklindedir. Bu denklem de daha önceki olduğu gibi aynen sağlandığı için yeni bir çözüm olmadığı sonucuna varılır. Diğer iki denkleme de katkı gelmediği için bu durumda da önceki bölümde bulunan sicim çözümlerinin geçerliliklerini korudukları sonucuna varılır.

8.4 Dinamik Φ

Şimdi Φ'nin daha genel olarak dinamik olduğu durumu ele alalım. Bu alanın diğer alanlara göre hafif olduğunu varsayılabilir. Bu yaklaşımda hareket denklemleri daha önce oldukları gibi:

$$\begin{aligned}
&\partial_\alpha F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta\chi-16\Lambda^2(z-1)=0\\
&\partial_\alpha F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta z=0\\
&\partial_0\partial_k F_{ij}\epsilon^{ij0k}=0
\end{aligned}\tag{115}$$

şeklindedir. Son denklem de

$$\partial_0\left(\partial_1^2+\partial_2^2\right)\Theta=0\tag{116}$$

olarak bulunur. Bu denklemin çözümü, c bir sabit olmak üzere

$$\partial^2\Theta=c\tag{117}$$

şeklindedir. Buradaki sabitin sıfırdan farklı olması Poisson denklemine karşılık gelir. Bu denklemin çözümleri değiştirilmiş Bessel fonksiyonları olup, bunlardan ilki kordinat merkezinde, diğeri ise sonsuzda düzgün davranmadıkları için uygun bir alan konfigurasyonuna karşılık gelmezler. Bu sebeple sadece sabitin sıfır olduğu durum fiziksel olarak düzgün davranan bir duruma karşılık gelir. Bu durumda ise Laplace operatörünün özellikleri gereği en yüksek ve en düşük değerlerin sadece sınır noktalarda olduğu düşünülür ve sonsuzda alanların sıfıra gitmesi gerektiği hesaba katılırsa, sabit Φ alanından başka bir çözüm olmadığı bulunur. Yani, eklenen Φ alanının, statik limitte daha önce bulunan çözümlere bir etkisi yoktur.

Bu bölümde Amaç (2-3) - İş Paketi (2-3) kapsamında, Abelyen olmayan tedirgeme için, Φ alanı tanımlanmadan önce elektromanyetik teori ile eşdeğer olmayan Ilhan ve Kovner (2013) makalesinde bulunan tedirgemenin ve durağan z,χ alanları içeren sonuçların statik veya dinamik Φ alanından etkilenmediğini ve daha önce elde edilen sicim çözümlerinin yeni teoride de var olduğu gösterilmiş ve bütünlük açısından bu sonuçlar tekrar elde edilmiştir. Bir sonraki bölümde daha genel dinamik sicim çözümlerinin nasıl elde edilebileceği tartışarak raporu sonlandıracağız.

9. Dinamik Sicim Çözümleri

Üstte elde edilen sonuçlar proje önerisinde belirtilen amaçları ve iş paketlerini esasen tamamlar. Eldeki teorinin Abelyen limitindeki simetrileri incelenip, manyetik akı simetrisi için düzen parametresi özellikleri taşıyan 't Hooft çizgi operatörü bulundu. Abelyen olmayan limite geçmeyi sağlayan tedirgeme kullanılarak en basit sicim çözümlerinin daha önce bulunanlarla aynı olduğunu ve yeni Φ alanından etkilenmediği gösterildi. Bu aşamada proje önerisinde belirtilen amaçlara sadık kalarak çalışmayı bir sonraki aşamaya taşımanın yolu, bulunan sicim çözümlerini genellemek, yani statik olmayan ve sonlu ayrık yükler arasındaki sicim çözümlerini bulmaya çalışmaktır. Bu probleme tutarlı bir şekilde yaklaşabilmek için ise öncelikle Abelyen limitin özellikleri biraz daha incelenmelidir. Eldeki teorinin bir sınırlayıcı özelliği yüklü durumları içermemesidir. Dinamik sicimlerin incelenebilmesi ise yüklerin düzgün tanımını gerektirmektedir. Şimdi yüklü durumlara nasıl geçilebileceğini anlamaya çalışalım.

9.1 Radyal özgürlük derecesi

Başlangıçtaki formülasyonda, üç ϕ alanının radyal kısmı sabit tutulmuş, böylece yüksüz elektromanyetizma elde edilmişti. Bu limitte, solitonun yani teorinin kuantumlanmış elektrik yüklerinin morötesinde doğrusal olarak sonsuza giden enerjisi vardı. Şimdi, Lagrange fonkisyonunda ufak bir değişiklik yaparak sonlu enerjili soliton çözümleri arayalım. Lagrange yoğunluğu

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 \tag{118}$$

aynı kalırken alanlar daha öncekine benzer şekilde tanımlıdır. Tek fark, daha önce sonsuza götürülen λ'nın artık sonlu değerler almasına izin verilmesidir. Bu değişiklik, daha önce sabit kalan ϕ alanlarının radyal kısmının dinamik olmasına sağlar. Radyal kısma karşılık gelen ρ alanı, daha önce yapılan tanımlara doğal bir şekilde eklenir:

$$\phi_3 \equiv z, \qquad \phi_1 + i\phi_2 \equiv \sqrt{\rho^2 - z^2} e^{i\chi} \tag{119}$$

$$
\begin{aligned}
\phi_1 &= \sqrt{\rho^2 - z^2}\cos\chi \\
\phi_2 &= \sqrt{\rho^2 - z^2}\sin\chi
\end{aligned}
\tag{120}
$$

Bu durumda elektromanyetik alan

$$
\begin{aligned}
F^{\mu\nu} &= \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{abc}\phi_a\partial_\alpha\phi_b\partial_\beta\phi_c \\
&= 2\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}[\phi_1\partial_\alpha\phi_2\partial_\beta\phi_3 + \phi_2\partial_\alpha\phi_3\partial_\beta\phi_1 + \phi_3\partial_\alpha\phi_1\partial_\beta\phi_2]
\end{aligned}
\tag{121}
$$

olur. Aşağıdaki hesapta $f = \sqrt{\rho^2 - z^2}$ tanımı kullanılarak ifadeler basitleştirilecektir. Bu tanımları kullanarak, elektromanyetik alana ϕ terimlerinden gelen katkı

$$
\begin{aligned}
F_1^{\mu\nu} &= 2\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left[f\cos\chi\partial_\alpha\left(f\sin\chi\right)\partial_\beta z + f\sin\chi\partial_\alpha z\partial_\beta\left(f\cos\chi\right) + z\partial_\alpha\left(f\cos\chi\right)\partial_\beta(f\sin\chi)\right] \\
&= 2\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left[f\cos\chi\partial_\beta z\left[\partial_\alpha f\sin\chi + f\partial_\alpha\sin\chi\right] + f\sin\chi\partial_\alpha z\left[\partial_\beta f\cos\chi + f\partial_\beta\cos\chi\right]\right. \\
&\left.+ z\left(f\partial_\alpha f\cos\chi\partial_\beta\sin\chi + f\partial_\beta f\sin\chi\partial_\alpha\cos\chi\right)\right] \\
&= 2\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left[f\cos\chi\partial_\beta z\left[\partial_\alpha f\sin\chi + f\cos\chi\partial_\alpha\chi\right] - f\sin\chi\partial_\beta z\left[\partial_\alpha f\cos\chi - f\sin\chi\partial_\alpha\chi\right]\right. \\
&\left.+ z\left(f\partial_\alpha f\cos^2\chi\partial_\beta\chi + f\partial_\alpha f\sin^2\chi\partial_\beta\chi\right)\right] \\
&= 2\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left[f^2\partial_\alpha\chi\partial_\beta z + f\partial_\alpha f z\partial_\beta\chi\right] \\
&= 2\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left[\left(\rho^2 - z^2\right)\partial_\alpha\chi\partial_\beta z - \left(\rho\partial_\beta\rho - z\partial_\beta z\right)z\partial_\alpha\chi\right] \\
&= 2\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left(\rho^2\partial_\beta z - z\rho\partial_\beta\rho\right)\partial_\alpha\chi \\
&= 2\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\rho\left(\rho\partial_\beta z - z\partial_\beta\rho\right)\partial_\alpha\chi
\end{aligned}
\tag{122}
$$

olarak hesaplanır. Φ katkısı da eklenirse

$$
F^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left[2\rho\left(\rho\partial_\beta z - z\partial_\beta\rho\right)\partial_\alpha\chi + (n\cdot\partial)n_\alpha\partial_\beta\Phi\right]
\tag{123}
$$

kalır. Burada $\rho \to$ sabit limitini alarak daha önce bulunan yüksüz elektromanyetik alanın elde edildiği kolayca gösterilebilir. Diğer taraftan, tanım gereği $F_{\mu\nu}$, aşağıdaki denklemi sağlar:

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu} =& J^\nu \\ =& \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu\left[2(\rho^2\partial_\beta z\partial_\alpha\chi + z\rho\partial_\alpha\rho\partial_\beta\chi) + (n\cdot\partial)n_\alpha\partial_\beta\Phi\right] \\ =& 6\rho\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu\rho\partial_\beta z\partial_\alpha\chi\end{aligned} \tag{124}$$

Burada beklendiği üzere sabit ρ daha önceki gibi yüklerin olmadığı teoriyi verir. Bu denklemin zaman bileşeni, sınır terim olup topolojik yüke karşılık gelir. Bu yeni tanımları takip ederek Lagrange fonksiyonundan hareket denklemlerini elde edelim.

$$\delta L = \int d^4x\left[\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} - \lambda\left(\rho^2 - v^2\right)\rho\delta\rho\right] \tag{125}$$

İlk olarak yeni gelen ρ katkısını hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\frac{\delta L}{\delta\rho(y)} &= \frac{1}{2}\int d^4xF_{\mu\nu}\frac{\delta F^{\mu\nu}(x)}{\delta\rho(y)} - \lambda\rho\left(\rho^2 - v^2\right) \\ &= \int d^4xF_{\mu\nu}\frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left[2\rho\delta\rho(x)\partial_\beta z - z\delta\rho(x)\partial_\beta\rho - z\rho\partial_\beta\delta\rho(x)\right]\partial_\alpha\chi}{\delta\rho(y)} - \lambda\rho\left(\rho^2 - v^2\right) \\ &= \int d^4xF_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left[2\rho\delta(x-y)\partial_\beta z - z\delta(x-y)\partial_\beta\rho - z\rho\partial_\beta\delta(x-y)\right]\partial_\alpha\chi - \lambda\rho\left(\rho^2 - v^2\right) \\ &= -\int d^4xF_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}z\rho\partial_\beta\delta(x-y)\partial_\alpha\chi + F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left(2\rho\partial_\beta z - z\partial_\beta\rho\right)\partial_\alpha\chi - \lambda\rho\left(\rho^2 - v^2\right) \\ &= \partial_\beta\left[F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}z\rho\partial_\alpha\chi\right] + F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left(2\rho\partial_\beta z - z\partial_\beta\rho\right)\partial_\alpha\chi - \lambda\rho\left(\rho^2 - v^2\right) \\ &= z\rho\partial_\beta F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha\chi + 3\rho F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta z\partial_\alpha\chi - \lambda\rho\left(\rho^2 - v^2\right)\end{aligned} \tag{126}$$

Diğer taraftan z denklemi:

$$\begin{aligned}\frac{\delta L}{\delta z(y)} &= \frac{1}{2}\int d^4xF_{\mu\nu}\frac{\delta F^{\mu\nu}(x)}{\delta z(y)} \\ &= \int d^4xF_{\mu\nu}\frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left(\rho^2\partial_\beta\delta z(x) - \delta z(x)\rho\partial_\beta\rho\right)\partial_\alpha\chi}{\delta z(y)} \\ &= \int d^4xF_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left(\rho^2\partial_\beta\delta(x-y) - \delta(x-y)\rho\partial_\beta\rho\right)\partial_\alpha\chi \\ &= -\partial_\beta\left(F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\rho^2\partial_\alpha\chi\right) - F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\rho\partial_\beta\rho\partial_\alpha\chi\end{aligned} \tag{127}$$

χ denklemi:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta L}{\delta \chi(y)} &= \frac{1}{2}\int d^4x F_{\mu\nu}\frac{\delta F^{\mu\nu}(x)}{\delta\chi(y)} \\
&= \int d^4x F_{\mu\nu}\frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left(\rho^2\partial_\beta z - z\rho\partial_\beta\rho\right)\partial_\alpha\chi}{\delta\chi(y)} \\
&= \int d^4x F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left(\rho^2\partial_\beta z - z\rho\partial_\beta\rho\right)\partial_\alpha\delta(x-y) \\
&= -\partial_\alpha\left[F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left(\rho^2\partial_\beta z - z\rho\partial_\beta\rho\right)\right]
\end{aligned}
\tag{128}
$$

olarak bulunurken, Φ denklemi daha önceki sonuç ile aynıdır.

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta L}{\delta \Phi(y)} &= \frac{1}{2}\int d^4x F_{\mu\nu}\frac{\delta F^{\mu\nu}(x)}{\delta\Phi(y)} \\
&= \frac{1}{2}\int d^4x F_{\mu\nu}\frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(n\cdot\partial)n_\alpha\partial_\beta\Phi(x)}{\delta\Phi(y)} \\
&= -\frac{1}{2}\partial_0\partial_\beta\left[F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}n_\alpha\right]
\end{aligned}
\tag{129}
$$

$\lambda \to \infty$ veya $\rho^2 \to v^2$, $v^2 = 1$ limitlerinde, yüksüz teorinin denklemlerinin bulunduğu gösterilebilir:

$$
\begin{aligned}
&\partial_\beta\chi\partial_\alpha\left(F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\right) = 0 \\
&\partial_\beta z\partial_\alpha\left(F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\right) = 0 \\
&\partial_0\partial_k\left(F_{ij}\epsilon^{ij0k}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{130}
$$

Elektromanyetik alanın bileşenlerini incelenirse,

$$
C_\mu \equiv \rho\partial_\mu z - z\partial_\mu\rho \tag{131}
$$

olmak üzere

$$
F^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left[2\rho C_\beta\partial_\alpha\chi + n_\alpha\partial_\beta\partial_0\Phi\right] \tag{132}
$$

bulunur. Bu durumda elektrik alan

$$
\begin{aligned}
E^i &= F^{i0} \\
&= 2\epsilon^{i0jk}\left(\rho^2\partial_k z - z\rho\partial_k\rho\right)\partial_j\chi \\
&= -2\rho\epsilon^{ijk}\left(\rho\partial_k z - z\partial_k\rho\right)\partial_j\chi = -2\rho\epsilon^{ijk}C_k\partial_j\chi
\end{aligned}
\tag{133}
$$

şeklindeyken manyetik alan

$$
\begin{aligned}
B_i &= -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk} \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon^{jk0m}\left[2\left[\left(\rho^2\partial_m z - z\rho\partial_m\rho\right)\partial_0\chi - \left(\rho^2\partial_0 z - z\rho\partial_0\rho\right)\partial_m\chi\right] + \partial_0\partial_m\Phi\right] \\
&= -2\rho\left[\left(\rho\partial_i z - z\partial_i\rho\right)\partial_0\chi - \left(\rho\partial_0 z - z\partial_0\rho\right)\partial_i\chi\right] - \partial_0\partial_i\Phi \\
&= -2\rho\left[C_i\partial_0\chi - C_0\partial_i\chi\right] - \partial_0\partial_i\Phi
\end{aligned}
\tag{134}
$$

olarak bulunur. Yani fiziksel operatörlerin tanımları, yüksüz duruma kıyasla

$$
\partial_\mu z \to \rho C_\mu \tag{135}
$$

olacak şekilde değişir. Buradan da, daha önceki gibi elektrik ve manyetik alanın Lorentz simetrisi altında tensör bileşenleri şeklinde dönüşlemeri şart koşulacaksa, $\rho C_\mu = \rho\left(\rho\partial_\mu z - z\partial_\mu\rho\right)$ alanının yüksüz teorideki $\partial_\mu z$ alanı gibi dönüşmesi gerektiği bulunur.

Hareket denklemleri ise çeşitli şekillerde yazılabilir

$$
\begin{aligned}
&\partial_0\partial_k\left[F_{ij}\epsilon^{ij0k}\right] = 0 \\
&\partial_\alpha\left[F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left(\rho^2\partial_\beta z - z\rho\partial_\beta\rho\right)\right] = \partial_\alpha\left[F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\rho C_\beta\right] = 0 \\
&\partial_\beta\left(F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\rho^2\partial_\alpha\chi\right) + F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\rho\partial_\beta\rho\partial_\alpha\chi = 0 \\
&z\rho\partial_\beta F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha\chi + 3\rho F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta z\partial_\alpha\chi - \lambda\rho\left(\rho^2 - v^2\right) = 0
\end{aligned}
\tag{136}
$$

veya türevleri açılırsa, bu denklemler

$$
\begin{aligned}
&\partial_0\partial_k\left[F_{ij}\epsilon^{ij0k}\right] = 0 \\
&\rho\left[\partial_\alpha F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}C_\beta + 3F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha\rho\partial_\beta z\right] = \rho\left[\partial_\alpha F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}C_\beta + 3F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha C_\beta\right] = 0 \\
&\rho\left[\partial_\beta F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\rho + 3F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta\rho\right]\partial_\alpha\chi = 0 \\
&\rho\left[\left(\partial_\beta F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}z + 3F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta z\right)\partial_\alpha\chi - \lambda\left(\rho^2 - v^2\right)\right] = 0
\end{aligned}
\tag{137}
$$

olarak yazılabilir. Bir diğer gösterim ise

$$
\begin{aligned}
&\partial_0\partial_k\left[F_{ij}\epsilon^{ij0k}\right]=0\\
&-2\partial_\alpha F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}C_\beta+3\partial_\alpha\left[F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}C_\beta\right]=0\\
&\left(-2\partial_\beta F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\rho+3\partial_\beta\left[F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\rho\right]\right)\partial_\alpha\chi=0\\
&\left(-2\partial_\beta F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}z+3\partial_\beta\left[F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}z\right]\right)\partial_\alpha\chi-\lambda\left(\rho^2-v^2\right)=0
\end{aligned}
\tag{138}
$$

şeklindedir. Burada ilk denklem daha önce olduğu gibi manyetik akı yoğunluğunun korunduğu süper-seçim sektörlerine işaret eder, yani

$$\partial_k B_k=0 \tag{139}$$

denkemi sağlanır. Alanların tanımı sayesinde bu bölümün en başında elde edilen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=J^\mu \tag{140}$$

denklemi de iki homojen olmayan Maxwell denklemini verirken, kalan denklem yani Faraday denklemi sağlanmaz:

$$\partial_0 B_k+(\partial\times E)_k\neq 0 \tag{141}$$

Bu denklemin sağlanmaması teoride manyetik akımların var olduğunu söyler. Bu denklemi de sağlayacak belli alan konfigurasyonları bulunabilse bile, dinamik alanların varlığı böyle bir yaklaşımı geçersiz kılar. Bu sebeple de teorinin Lorentz simetrisi de yoktur. Burada olması gereken, ρ denkleminin madde alanları için Klein-Gordon benzeri bir denklem vermesi ve kalan denklemlerin de kalan iki Maxwell denklemini sağlamasıdır. Abelyen olmayan teoride izin verilebilecek bu sonuç Abelyen teori çözümleride kabul edilemez.

Bu sonuçla, eldeki modelde dinamik sicim çözümlerini bulmak için gereken elektrik yüklerinin tanımının, $2+1$ boyuttakine benzer şekilde elde edilmesinin mümkün olmadığını göstermiş olduk. Teoride elektrik yüklerini tanımlamanın bir başka olası yolu, n alanını dinamik bir alan olarak tanımlamaktan geçebilir. Belli bir limitte Ilhan ve Kovner (2015) makalesinde kullanılan sabit vektöre karşılık gelen boşluk beklenen değerini veren böyle bir vektör alanının yüklü çözümlere yol vermesi mümkün olabilse de, elektromanyetik alanın etkin alanlar cinsinden ifadesini ararken geldiğimiz noktada, ilk olarak Φ alanını hesaba katıp daha sonra yeni bir alan daha eklemek hesapları kolaylaştırmak yerine zorlaştırabilir. Bu sebeple Abelyen olmayan limitte daha ayrıntılı çalışmalar yapılmadan önce Abelyen teorinin yüklü limitinin incelenmesinin daha önemli olduğu sonucuna varılır.

10. SONUÇ

Bu çalışmada, proje önerisi kapsamında amaçlanan tüm sonuçlara ulaşıp, programın devamı için yapılması gerekenleri belirledik. İlk olarak Ilhan ve Kovner (2015) tarafından geliştirilen ve yüksüz elektromanyetizmaya denk olduğu gösterilmiş olan teorinin özelliklerini inceleyip, fiziksel olarak önemli operatörlerin simetri jeneratörleri altındaki dönüşümlerini elde ettik. Başlangıçta elimizde olan simetri jeneratörlerinin, manyetik akı simetrisinin düzen parametresi olmaya aday bir operatorü değişmez bırakacak sekilde nasıl genelleştirilebileceğini gösterdik.

Bundan sonraki adımlarda ise, teoriyi önce $O(2)$'ye sonra da $Z(N)$'e kırarak, Ilhan ve Kovner (2013) makalesindeki sicim çözümlerinin bu teoride de var olduklarını gösterdik . Teoriye yeni eklenen Φ alanının, bu çözümler çerçevesinde bir rol oynamadığını ve Ilhan ve Kovner (2013) tarafından elde edilen sonuçların bu teoride de geçerli olduğunu gösterdik. Bu çözümlerin, en basit sicim çözümleri olan statik ve sonsuz ayrık yükler için geçerli olduğunu, ve daha genel çözümler elde etmek icin elektrik yüklerinin tutarlı bir şekilde tanımlanması gerektiğini not ettik. Projemizin son aşamasında ise, bu çözümleri bulmak için $2+1$ boyutta kullanılan yol olan, ϕ alanlarına radyal özgürlük derecesi verilmesinin çalışmadığını ve yüklü elektromanyetizmanın Lorentz simetrisine uygun sekilde tanımlanamayacağı gösterdik. Elektrik yüklerini tutarlı tanımlamak icin mevcut operatörlerin simetri özellikleri incelenmeli, gerekirse Lagrangian'a yeni terimler eklenmeli veya n vektörüne dinamik bir karakter sağlanmalıdır.

Amaçlar ve İş Paketleri

Bu proje kapsamında yapılmak istenenler, proje önerisinde 3 ayrı iş paketi ve bunlarla ilgili amaçlar halinde belirtilmişti. Bunların tamamını gerçekleştirdik:

1. İlk amacımız ve bununla bağıntılı iş paketi, teorinin Abelyen limitinin simetrilerini incelemek, fiziksel olarak önemli objelerin dönüşüm özelliklerini bulmaktı. Bunu 5. bölümde tamamladık.

2. İkinci ve üçüncü amaçlar (Abelyen teoriden Abelyen olmayan teoriye geçişi sağlayacak tedirgemeyi bulmak ve bu tedirgeme sonucu elde edilen teoride sicim çözümleri aramak), birbirleriyle iç içe olup, beraber ele alınmıştır. Öncelikle 8. bölümde $O(3) \to O(2)$ ve $O(2) \to Z(N)$

kırılmalarının ve bunlar sonucu elde edilen sonsuz ayrık durağan çözümlerinin Φ alanının varlığından etkilenmediklerini, Φ alanına dinamik verildiğinde de ayni durumun geçerli olduğunu gösterdik. Son olarak 9. bölümde ise, dinamik sicim çözümleri bulmak icin gerekli olan elektrik yüklerinin teoriye Lorentz simetrisiyle tutarlı bir şekilde eklenemeyeceklerini gösterdik.

Kaynakça

Gattringer, C. Lang, C. 2010. “Quantum Chromodynamics on the Lattice”, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag

Ilhan, I. B., Kovner, A. 2013. “Curious case of an effective theory”, Physical Review D, 88(12), 125004

Ilhan, I. B., Kovner, A. 2016. “Photons without vector fields”, Physical Review D, 93(2), 025015

Kovner, A., Rosenstein, B. 1994. “New look at QED4: the photon as a Goldstone boson and the topological interpretation of electric charge”, Physical Review D, 49(10), 5571-5581.

Kovner, A. 2000. “Confinement, magnetic Z(N) symmetry and low energy effective theory of gluodynamics” 1777-1825. At the Frontier of Particle Physics: Handbook of QCD (Cilt 3). Editor: Shifman, M. Singapore: World Scientific.

Lyons, L. 1985. “Quark search experiments at accelerators and in cosmic rays”, Physics Reports, 129(4), 225-284.

Mandelstam, S. 1976. “Vortices and quark confinement in non-Abelian gauge theories”, Physics Reports, 23(3), 245-249.

’t Hooft, G. 1981. “Topology of the gauge condition and new confinement phases in non-abelian gauge theories”, Nuclear Physics B, 190(3), 455-478.

’t Hooft, G. 1978. “On the phase transition towards permanent quark confinement”, Nuclear Physics B, 138(1), 1-25.

TÜBİTAK
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU

Proje Yürütücüsü:	Prof. Dr. ALTUĞ ÖZPİNECİ
Proje No:	117F203
Proje Başlığı:	3+1 Boyutta Manyetik Akı Simetrisi ve Bunun Renk Hapsine Etkisi
Proje Türü:	1002 - Hızlı Destek
Proje Süresi:	10
Araştırmacılar:	
Danışmanlar:	
Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi:	ORTA DOĞU TEKNİK Ü. FEN-EDEBİYAT F. FİZİK B.
Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri:	15/06/2017 - 15/06/2018
Onaylanan Bütçe:	28500.0
Harcanan Bütçe:	28000.0
Öz:	Bu proje kapsamında, yüksüz elektromanyetizmanın etkin bir modelinin çeşitli özelliklerini araştırdık. Ayar alanları kullanılmadan, Lorentz dönüşümleri altında kanonik olmayan dönüşümlere sahip alan- lar cinsinden ifade edilen bu modelin sahip olduğu simetrilerin fiziksel objelere etkilerini inceledik. Daha sonra bu modelin simetrilerini, Yang-Mills teorisinin düşük enerji limitini tanımlayacak Z(N)?e kıran bir tedirgeme altında, durağan ve sonsuz ayrık sicim çözümlerine sahip olduğunu gösterdik. Daha genel çözümler bulunması icin yapılması gerekenleri belirterek projeyi başarıyla tamamladık.
Anahtar Kelimeler:	Etkin Kuramlar, Elektromanyetizma, Simetriler, Renk Hapsi
Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu Mu?:	Hayır