

Klaster Cebirlerinde Kombinatoryal Metodlar

Proje No: 110T207

Doç.Dr. Ahmet İrfan Seven

ARALIK 2013
ANKARA

ÖNSÖZ

TÜBİTAK tarafından desteklenen 110T207 numaralı ve “Klaster cebirlerinde kombinatoriyal metodlar” başlıklı bu matematik projesi 2010-2013 yılları arasında Doç.Dr.Ahmet İrfan Seven tarafından Orta Doğu Teknik Üniversitesi’nde yürütülmüştür. Proje’de matematiğin temel objelerinden olan Kac-Moody Lie cebirlerine karşılık gelen klaster cebirlerinin temel kombinatoriyal özellikleri belirlenmiştir.

İÇİNDEKİLER

2. ÖNSÖZ
3. İÇİNDEKİLER
4. ÖZET
5. ABSTRACT
6. GİRİŞ
6. GENEL BİLGİLER
6. GEREÇ VE YÖNTEM
7. BULGULAR
8. Yayınlar, Sunumlar
8. SONUÇ
8. REFERANSLAR
9. EKLER

ÖZET

Klaster cebirleri (cluster algebras) önce matematiğin klasik bir alanı olan temsil teorisinde ortaya çıkmış ve daha sonra varlığı diğer farklı alanlarda da farkedilmiş bir matematiksel yapıdır. Bu projede, matematiğin temel objelerinden olan Kac-Moody Lie cebirlerine karşılık gelen klaster cebirlerini çalışmak için yeni kombinatoryal metodlar üretilmiş ve bu metodlar kullanılarak bu cebirlerin temel kombinatoryal özellikleri belirlenmiştir. Elde edilen sonuçlar, bu konular arasında yeni bağlantılar ortaya çıkarmış ve daha iyi anlaşılmasına katkıda bulunmuştur. Projede elde edilen sonuç ve araçlar klaster cebirleri ile ilgili açık hesaplamalar yapmaya imkan vermektedir. Bu yönüyle proje, klaster cebirleri teorisinde önemli bir boşluğu doldurmuştur. Projede elde edilen sonuçlar dört makale olarak yazılmış ve çeşitli uluslararası bilimsel toplantılarda sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Klaster cebirleri, mütasyon

ABSTRACT

Cluster algebras first appeared in representation theory, which is a classical area of mathematics. It has been observed that these algebras are also related to many different areas of mathematics. In this project, fundamental combinatorial properties of the cluster algebras which correspond to Kac-Moody Lie algebras have been established. The results of the project allow one to do explicit computations, which are needed very much in the theory of cluster algebras. The results of the project have been written as four research articles and presented in various international conferences.

Keywords: Cluster algebra, mutation

GİRİŞ

Temsil teorisi matematiğin klasik bir alanı olup evrendeki çeşitli fiziksel ve biyolojik sistemlerin simetri özelliklerini matematiksel olarak çalışmak için kullanılmaktadır. Bu teorinin en temel problemlerinden birisi, G. Lusztig tarafından geometrik olarak tanımlanmış olan, basit cebirsel gruplar ve temsilleri üzerindeki kanonik bazların somut olarak kurulmasıdır (FOMIN, 2002). Bu problemin çözümü için son on yıldaki en önemli gelişme, projenin konusu olan, klaster cebirleridir (cluster algebras) (FOMIN, 2003). Bu cebirler bir çeşit komutatif cebirlerdir; “klaster” (cluster) terimi, bu cebirleri üreten bir takım “klaster değişkenleri” nin, birbirinden ayrık olmak zorunda olmayan, ve eşit sayıda eleman içeren gruplara (klaster) ayrılmış olmasından dolayı kullanılmıştır. Klasterler özel bir çeşit rasyonel dönüşümle birbirlerine bağlıdır. Bu yapıyla klaster cebirleri, kanonik bazları somut olarak kurmak ve çalışmak için doğal bir ortam sağlamaktadır. Ayrıca bu cebirlerin matematiğin, Kac-Moody Lie cebirleri, Teichmüller teori, integre edilebilir sistemler gibi diğer temel konuları ile yakın bir şekilde bağlantılı olduğu gözlemlenmiştir.

GENEL BİLGİLER

Projenin çalışma konusu olan klaster cebirleri ile daha klasik bir konusu olan Kac-Moody Lie cebirlerinin (kombinatoryal) yapıları arasında özel bir benzerlik bulunmaktadır. Bu benzerliğin temel sebebi şudur: Kac-Moody Lie cebirleri (genelleştirilmiş) Cartan matrisleri tarafından tanımlanmaktadır [16]; klaster cebirleri de bu Cartan matrislerinin antisimetrik benzerleri tarafından tanımlanmaktadır. Ancak arada bir fark bulunmaktadır: bir klaster cebiri tek bir (antisimetrize) matris tarafından belirlenememekte, her bir klaster için bir matris gerekmesidir. Bu matrisler de, klasterler gibi, birbirlerine mutasyon denilen özel bir dönüşümle bağlıdır (FOMIN, 2002). Diğer bir ifadeyle bir klaster cebiri bir (antisimetrize) matris mutasyon sınıfı tarafından belirlenmektedir. Bu sınıfların bazıları, dolayısıyla tanımladıkları klaster cebirleri, Cartan matrisleri tarafından belirlenmektedir, bu cebirlere “döngüsüz” (acyclic) klaster cebirleri denmektedir.

Yukarıda bahsettiğimiz döngüsüz klaster cebirlerinin ve sınıflarının somut kombinatoryal özelliklerinin açık bir şekilde belirlenmesi en temel problemlerden biridir. Proje bu problemlerin çözümüne temel katkılarda bulunmuştur. Bu bağlamda, döngüsüz klaster cebirlerinin matrislerinin lineer cebirsel özellikleri ile bu matrisleri temsil eden grafların temel yapısal özellikleri ortaya çıkarılmıştır (SEVEN, 2012; 2014). Burada geliştirilen metodlar kullanılarak farklı klaster cebirleri kombinatoryal olarak karakterize edilmiştir (SEVEN, 2013; 2013).

GEREÇ VE YÖNTEM

Bilindiği gibi, Kac-Moody Lie cebirleri teorisindeki en önemli araçlardan biri bu cebirleri tanımlayan Cartan matrislerini temsil eden bir çeşit graflardır (Dynkin grafları). Benzer bir şekilde klaster cebirlerini tanımlayan antisimetrize matrisler de (yönlü) graflarla temsil edilebilir ve yukarıda bahsedilen mutasyon operasyonu graflar

üzerinde bir operasyon olarak görülebilir (FOMIN, 2003). Bu da klaster cebirlerinin önemli bir kombinatoryal yönünü oluşturmaktadır.

Projede geliştirilen ve kullanılan temel metod, döngüsüz klaster cebirleri için, mütasyon operasyonunu graflar üzerinde tanımlanmış fonksiyonlara genelleştirmek olmuştur. Bu bağlamda döngüsüz klaster cebirlerinin kombinatoryal içerikli “admissible quasi-Cartan companion” fonksiyonlarına sahip oldukları gösterilmiştir (SEVEN, 2014); bu fonksiyonlar Cartan matrislerini genelleştiren bir çeşit simetrize matrisler olarak da görülebilir. Bu özellik döngüsüz klaster cebirleri için çok temel bir kombinatoryal özelliktir.

Projede kullanılan diğer bir temel metod da antisimetrik matrisleri temsil eden grafların yapılarının lineer-cebirselle özellikler ile yorumlanmasıdır. Bu bağlamda derecesi (rank) üç olan döngüsüz klaster cebirleri ile sonlu tipe sahip temel katsayılı klaster cebirleri kombinatoryal olarak karakterize edilmiştir (SEVEN, 2012; 2013).

BULGULAR

Projede elde edilen temel sonuçlar dört kısımda özetlenebilir:

1. Derecesi üç olan döngüsüz klaster cebirlerinin mütasyon sınıfları, “admissible” Cartan eşleniği fonksiyonları kullanılarak açık bir şekilde karakterize edilmiştir.

Bu kısımda elde edilen sonuçlar [4] no’lu makale olarak yazılmıştır. Makale bu raporun eklerinde bulunmaktadır. Detaylar için bu makaleye bakınız.

2. Derecesi üç olan klaster cebirleri sınıflandırılmıştır. Bu amaçla 3x3 antisimetrize matrislerin mütasyon sınıflarını temsil eden kanonik bir temsilci kümesi ortaya çıkarılmıştır.

Bu kısımda elde edilen sonuçlar [5] no’lu makale olarak yazılmıştır. Makale bu raporun eklerinde bulunmaktadır. Detaylar için bu makaleye bakınız.

3. Fomin-Zelevinsky’nin [3]’deki temel bir varsayımı ispatlanarak sonlu tipe sahip temel katsayılı cebirlerinin, kendilerini belirleyen antisimetrize matris sınıflarının sonlu olma özelliği ile karakterize edildiği gösterilmiştir.

Bu kısımda elde edilen sonuçlar [6] no’lu makale olarak yazılmıştır. Makale bu raporun eklerinde bulunmaktadır. Detaylar için bu makaleye bakınız.

4. Döngüsüz klaster cebirlerinin mütasyon sınıflarındaki her bir antisimetrize matrisin kanonik bir simetrize matris eşleniği olduğu gösterilmiştir. Bu eşlenikler Cartan matrislerini genelleştiren bir çeşit simetrize matrisler olarak da görülebilir.

Bu kısımda elde edilen sonuçlar [7] no'lu makale olarak yazılmıştır. Makale bu raporun eklerinde bulunmaktadır. Detaylar için bu makaleye bakınız.

Bilindiği gibi her simetrize matris, bir bilineer formun bir baza göre temsili olarak görülebilir. Projede elde edilen eşlenik matrisleri de (Kac-Moody Lie cebirlerinde kullanılan) Cartan formlarının belli bazlara göre temsilcisi olarak görülebilir. Bu bazların temel kombinatoryal özelliklerinin ortaya çıkarılması bu projenin doğal bir devamı olacaktır. Böyle bir çalışmada, projede geliştirilen metodlar çok temel bir rol oynayacaktır.

Yayınlar

[4],[5],[6] ve [7] no'lu referanslar proje kapsamında (proje yürütücüsü tarafından) yazılmış makalelerdir. (Makaleler bu raporun eklerinde bulunmaktadır.)

Sunumlar

Projede elde edilen sonuçlar proje yürütücüsü tarafından aşağıdaki uluslararası konferanslarda sunulmuştur.

1. On the interaction of Representation Theory with Geometry and Combinatorics, Hausdorff Center for Mathematics, Bonn, Almanya, Ocak 2011
2. ICRA XV, International Conference on Representations of Algebras, Bielefeld, Almanya, Ağustos 2012
3. M. Auslander Distinguished Lectures and International Conference on Representations of Algebras, Massachusetts, ABD, Nisan 2013

SONUÇ

Projede, matematiğin temel konularından olan klaster cebirlerini somut bir şekilde çalışmak için yeni kombinatoryal metodlar üretilmiştir. Bu bağlamda yeni kavramlar ("c-vector companion", "admissible cut" gibi) tanımlanmış olup, bu kavram ve metodlarla klaster cebirlerinin bazı temel problemleri çözülmüş ve bu cebirlerin matematiğin diğer bir temel konusu olan Kac-Moody Lie cebirleri ile yeni bağlantıları ortaya çıkarılmıştır.

Projenin sonuçları uluslararası saygın dergilerde yayınlanmış olup ayrıca yine uluslararası konferanslarda sunulmuştur. Sonuç olarak proje başarılı olmuştur.

REFERANSLAR

1. FOMIN S., Zelevinsky A., Cluster Algebras I, J. Amer. Math. Soc. 15 no:2, 497-529 (2002)
2. FOMIN S., Zelevinsky A., Cluster Algebras II, Invent. Math. 12, 335-380 (2003)
3. FOMIN S., Zelevinsky A., Cluster Algebras IV, Compos. Math. 143 (1) (2007) 112–164.
4. SEVEN A., Mutation classes of 3×3 generalized Cartan matrices. Highlights in Lie algebraic methods, 205–211, Progr. Math., 295, Birkhäuser/Springer, New York, 2012.
5. SEVEN A., Mutation classes of skew-symmetrizable 3×3 matrices. Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013), no. 5, 1493–1504..
6. SEVEN A., Mutation classes of finite type cluster algebras with principal coefficients. Linear Algebra Appl. 438 (2013), no. 12, 4584–4594.
7. SEVEN A., Cluster algebras and symmetric matrices, to appear in Proc.Amer.Math.Soc. (2014)

EKLER

Proje kapsamında yazılan makaleler [4], [5], [6], [7].

TÜBİTAK
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU

Proje Yürütücüsü:	Doç. Dr. AHMET İRFAN SEVEN
Proje No:	110T207
Proje Başlığı:	Klaster Cebirleri Teorisinde Kombinatoryal Metodlar
Proje Türü:	Araştırma
Proje Süresi:	36
Araştırmacılar:	
Danışmanlar:	
Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi:	ORTA DOĞU TEKNİK Ü. FEN F. MATEMATİK B.
Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri:	01/11/2010 - 01/11/2013
Onaylanan Bütçe:	78948.0
Harcanan Bütçe:	40947.57
Öz:	<p>Klaster cebirleri (cluster algebras) önce matematiğin klasik bir alanı olan temsil teorisinde ortaya çıkmış ve daha sonra varlığı diğer farklı alanlarda da farkedilmiş bir matematiksel yapıdır. Bu projede, matematiğin temel objelerinden olan Kac-Moody Lie cebirlerine karşılık gelen klaster cebirlerini çalışmak için yeni kombinatoryal metodlar üretilmiş ve bu metodlar kullanılarak bu klaster cebirlerinin temel kombinatoryal özellikleri belirlenmiştir. Elde edilen sonuçlar, bu konular arasında yeni bağlantılar ortaya çıkarmış ve daha iyi anlaşılmasına katkıda bulunmuştur. Projede elde edilen sonuç ve araçlar klaster cebirleri ile ilgili açık hesaplamalar yapmaya imkan vermektedir. Bu yönüyle proje, klaster cebirleri teorisinde önemli bir boşluğu doldurmuştur. Projede elde edilen sonuçlar dört makale olarak yazılmış ve çeşitli uluslararası bilimsel toplantılarda sunulmuştur.</p>
Anahtar Kelimeler:	Klaster cebirleri, mütasyon
Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu Mu?:	Hayır