

**Manyetik alan Ortamında Isı Konveksiyonu: Sayısal
Benzetimi ve Kontrolü**

Proje No: 105M044

Doç.Dr. Hakan I. Tarman

OCAK 2009
ANKARA

ÖNSÖZ

Özellikle metalurji konusunda kontrol sağlayan manyetik alan uygulamaları teknolojik olarak önemli bir araç haline gelmiştir. Bu konu deneysel olduğu kadar sayısal ve teorik açıdan ele alınıp incelenmektedir. Bu çalışmada, çeşitli sayısal yaklaşımlar geliştirilerek manyetik alan ile ısı konvektif akış arasındaki etkileşim incelenmeye çalışılmıştır. Bu proje, çalışma grubumuzun bu konuda bilgi birikimi sağlaması ve insan kaynağı yetiştirilmesi için bir başlangıç oluşturmuştur. Proje, bu konuda yapılan yayınlarımız yanında biri tamamlanmış olarak iki doktora öğrencisinin yetişmesine yol açmıştır. Bu çalışma, proje desteğiyle kurulan hesaplama alt yapısı sayesinde, proje ile başlayan ve süresi içinde yapılanlarla sınırlı kalmadan halen devam etmektedir.

Bu proje TÜBİTAK tarafından 105M044 nolu proje olarak desteklenmiştir. Desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkürü bir borç biliriz.

İÇİNDEKİLER

| | | |
|-----|---|----|
| | Önsöz | 2 |
| | Tablo listesi | 4 |
| | Şekil listesi | 5 |
| | Öz | 7 |
| | Abstract | 9 |
| 1. | Giriş | 11 |
| 2. | Temel Denklemler | 14 |
| 3. | Sayısal Yöntem | 15 |
| 4. | Sayısal Benzetim Sonuçları | 20 |
| | 4. 1. İki Boyutlu Durağan Akışlar | 21 |
| | 4. 2. Zamana bağlı akışlar | 26 |
| 5. | Karhunen-Loeve (KL) Ayrışımı | 28 |
| 6. | Manyeto-Konvektif Akışın KL (Statik) Analizi | 32 |
| 7. | Düşük Boyutlu Model Sistemin Formülasyonu | 40 |
| 8. | Manyeto-Konvektif Akışın KL (Dinamik) Analizi | 44 |
| 9. | Kontrol Problemi Formülasyonu | 54 |
| 10. | Düşük Boyutlu Kontrol Problemi Formülasyonu | 59 |
| 11. | İteratif Çözüm Yöntemleri | 63 |
| 12. | Gelecek Çalışmalar | 64 |
| | Kaynakça | |

TABLO LİSTESİ

| | | |
|---|--|----|
| 1 | Q_c , $Ra = 10000$, $Ra = 30000$ ve $Ra = 50000$. | 22 |
| 2 | Nu ve λ , $Pr = 0.05$, $\Gamma = 3:1.5$ (Güray, 2007), $\Gamma = 6:3$ (Mössner, 1999). | 23 |
| 3 | Konvektif akışa geçişte kritik Ra_c ve dalga numarası ζ_c değerleri. | 25 |
| 4 | Simetri grup elemanları | 29 |
| 5 | İlk 5 asal değer in açılara göre dağılımı. Karşılaştırmayı mümkün kılmak için asal değer λ_k toplam içindeki büyüklüğüne göre verilmiştir, yani $\lambda_k / \sum_k \lambda_k$. Kıvrık parantez içindeki dalga numaraları $\{m,n,q\}$ her bir KL baz ailesini tanımlamaktadır ve verilen tekrar sayısı kadar üye KL baz fonksiyonunu içerir. Örneğin, $\chi = 90^\circ$ açılı değerindeki $\{0,1,1\}$ KL baz ailesi verilen tekrar sayısı 4 kadar üye içerir, yani, $\{(0,1,1), (0,-1,1), (1,0,1), (-1,0,1)\}$. Bu, kullanılan simetri grubunun bir sonucudur. Bunun yanında $\chi = 30^\circ$ açılı değerindeki $\{0,1,1\}$ KL baz ailesi verilen tekrar sayısı 2 kadar üye içerir, yani, $\{(0,1,1), (0,-1,1)\}$. Burada, (m,n,q) ve $(-m,-n,q)$ KL baz çifti, birbirinin kompleks eşleniğidir. | 32 |
| 6 | En enerjetik KL elemanlarının zamana bağlı evriminin $a(t) = a \exp(2\pi i(\omega t + \tau))$, büyüklük $ a $ ve frekans ω değerlerinin açılara göre dağılımı. | 38 |
| 7 | İlk beş hız KL asal değerleri | 44 |
| 8 | İlk beş sıcaklık KL asal değerleri | 45 |
| 9 | KL yapılarının, Şekil 20-21'de kullanılan sıralaması. | 46 |

ŞEKİL LİSTESİ

| | | |
|----|--|----|
| 1 | Akış geometrisi, Ω . | 13 |
| 2 | Nu ve Q, Pr = 0.05 ($\Gamma = 3 : 1.5$). | 21 |
| 3 | Ra = 300000, Pr = 0.05 parametre değerlerinde Q = 1100'den 1700 değerine ani artış sonucunda akışın yeniden organize olmasını t = 0, 35, 45 zaman dilimlerinde gösteren eş sıcaklık eğrileri. | 22 |
| 4 | Logaritmik ölçekte Nu - (Ra/Q) ^{0.5} bağıntısı. | 24 |
| 5 | Nu ve Ra, Pr = 0.1, ($\Gamma = 1.95 : 1.9$) | 26 |
| 6 | Açılara göre Nu ve Ra. Burada Pr = 0.1, Q = 100, $\Gamma = 1.95 : 1.9$. Eğri ile gösterilen değerler (Clever, 1989) çalışmasından alınmıştır. | 27 |
| 7 | Tablo 5'deki asal değerlerin açılara göre logaritmik ölçekte dağılımı. | 33 |
| 8 | $\chi = 0^\circ$ açı değerinde (0,1,1) KL baz elemanının yapısı ve zaman evrimi. | 35 |
| 9 | $\chi = 0^\circ$ açı değerinde (1,0,1) KL baz elemanının yapısı ve zaman evrimi. | 36 |
| 10 | $\chi = 0^\circ$ açı değerinde (1,1,1) KL baz elemanının yapısı ve zaman evrimi. | 37 |
| 11 | $\chi = 0^\circ$ açı değerinde (1,-1,1) KL baz elemanının yapısı ve zaman evrimi. | 37 |
| 12 | Tablo 6'da sıralanan büyüklük ve frekans bulgularının açı değerlerine göre değişimi. Açı değerleri sıralaması Tablo 6'daki gibidir. | 39 |
| 13 | KL baz elemanları (1,1,1) ve (1,-1,1) arasında büyüklük değerlerine göre bir karşılaştırma. | 39 |
| 14 | $\mathbf{k} = (1,0,q)$ endeksli KL yapıları $\mathbf{U}^k(z)$, $\Theta^k(z)$. | 48 |
| 15 | $\mathbf{k} = (1,1,q)$ endeksli KL yapıları $\mathbf{U}^k(z)$, $\Theta^k(z)$. | 48 |
| 16 | $\mathbf{k} = (0,0,q)$ endeksli KL yapıları $\mathbf{U}^k(z)$, $\Theta^k(z)$. | 49 |
| 17 | $\mathbf{k} = (1,0,q)$ endeksine karşılık indüklenmiş manyetik alan yapısı $\mathbf{b}^k(z)$. | 49 |
| 18 | $\mathbf{k} = (1,1,q)$ endeksine karşılık indüklenmiş manyetik alan yapısı $\mathbf{b}^k(z)$. | 50 |
| 19 | $\mathbf{k} = (0,0,q)$ endeksine karşılık indüklenmiş manyetik alan yapısı $\mathbf{b}^k(z)$. | 50 |
| 20 | Dinamik sistemin Ra = 800 ve Pr = 0.1 parametre değerlerinde sayısal çözümümüyle elde edilen iki buyutlu sarmallardan oluşan sade konvektif rejim. Bu rejimde aktif olan KL yapıları Tablo 9 sıralamasıyla gösterilmiştir. | 51 |
| 21 | Dinamik sistemin Ra = 1000 ve Pr = 0.1 parametre değerlerinde sayısal çözümümüyle elde edilen periyodik sade konvektif rejim. Bu rejimde daha fazla sayıda aktif olan KL yapıları Tablo 9 sıralamasıyla gösterilmiştir. | 51 |
| 22 | İki boyutlu sarmallardan oluşan durağan akış rejimi (Şekil 20), manyetik alan uygulanmasıyla, seçilmiş bir açılım katsayısının $a(m=1, n=0, q=1)(t)$ zaman evriminde görüldüğü gibi hareketsiz (kondüktif) rejime kademeli | 52 |

| | | |
|----|--|----|
| | olarak geçmektedir. | |
| 23 | Periyodik akış rejimi (Şekil 21), manyetik alan uygulanmasıyla, seçilmiş bir açılım katsayısının $a(m=1, n=0, q=1)(t)$ zaman evriminde görüldüğü gibi sönümlenmektedir. | 52 |
| 24 | İki boyutlu sarmallardan oluşan durağan akış rejimi (Şekil 20), çeşitli uygulama açısı ve şiddetlerde manyetik alan uygulanmasıyla, seçilmiş bir açılım katsayısının $a(m=1, n=0, q=1)(t)$ enerjisinin zaman evrimi. | 53 |

ÖZET

Isı konveksiyonu ile uygulanan manyetik alan arasındaki etkileşim, jeofizik ve astrofizik dalları ile beraber, döküm ve kristalleşme konuları gibi metalurji dalının ilgi alanına da girmektedir. Manyetik alan, eriyik içindeki konveksiyon akışını engellediği gibi akışın manyetik alan yönünde tekrar organize olmasını sağlar. Bu akışı etkileme yeteneği, endüstriyel işlemlerde teknik öneme sahiptir. Bu çalışmada, yerçekimi ve manyetik alan ortamında alttan ısıtılan iki iletken levha arasında bulunan elektrik iletken bir yatay sıvı tabakasında oluşan üç boyutlu Boussinesq (Rayleigh-Benard) ısı konveksiyonu akışının sayısal benzetimi, spektral elemanlar yöntemiyle yapılmıştır. Kullanılan sayısal metodun temel özellikleri, levhalar arası yönde varyasyonel (zayıf) formülasyon kullanımı ve karmaşık çapraz ağ kullanımı gerektirmeyen bir yaklaşım olarak basınç değişkeninin açılımında kullanılan daha düşük boyutlu modal formdaki polinomlar haricinde diğer değişkenler için tekrar ölçeklendirilmiş Legendre-Lagrange polinom enterpolant kullanımınıdır. Bu işlemler sırasında, düşük manyetik Prandtl sayısı limitinde mevcut olan hız ile indüklenmiş manyetik alan arasındaki bir bağıntı kullanılmıştır. Tipik olarak düşük ısıl Prandtl sayısı değerine sahip olmalarının yanında sıvı metaller ve eriyikler bu limit değerine sahiptirler. Fiziksel olarak, bu durum, dışarıdan uygulanan manyetik alan konvektif hareketleri etkiler iken indüklenmiş manyetik alanın hiç bir etkisi olmadığı anlamına gelmektedir. Sonuç olarak, indüklenmiş manyetik alan sadece hız tarafından belirlenen bir değişken durumuna düşer. Elde edilen sayısal model uygulanan manyetik alanın etkilerini incelemek için kullanılmıştır.

Geniş uygulama alanları bulması sebebiyle, kontrol metodlarının akışkanlar mekaniğine uygulanması son yıllarda önem kazanmıştır. Gerçek-zaman akış kontrolü büyük miktarda bilgisayar hafızası ve zamanı gerektirdiğinden, etkili sayısal teknikler kullanımı önemlidir. Bu teknikler arasında, düşük boyutlu model geliştirme önemli yer tutmaktadır. Bu, ilgili akışın uygun bir şekilde betimlenmesini ve parametrik ifadesini gerektirir. Karhunen-Loeve (KL) ayrıştırma tekniği, akış veri tabanı kullanılarak akışı enerji normunda en iyi betimleyen baz fonksiyonlarının

türetilmesinde kullanılmaktadır. Bu baz fonksiyonları daha sonra akışın düşük boyutlu bir modelinin elde edilmesinde kullanılır. Bu çalışmada, KL ayrıştırma tekniği manyeto-konvektif akışın düşük boyutlu bir modelinin çıkarılmasında kullanılmıştır. Bu model, Rayleigh-Benard (RB) konvektif akışın KL tabanlı bir modeline manyetik alan etkileri eklenerek elde edilmiştir. Bu, akış ile endüklenmiş manyetik alan arasındaki bağıntı kullanılarak mümkün olmaktadır. İlgili KL baz fonksiyonlarının türetilmesi amacıyla RB konvektif akışı oluşturan bir veri tabanı sayısal olarak üretilmiştir. Boussinesq denklemlerinin sayısal çözümünü içeren bu veri tabanı KL baz fonksiyonlarını türetmek için kullanılmış ve daha sonra bu denklemlerin Galerkin yaklaşımıyla adi diferansiyel genlik denklem sistemine indirgenmesinde kullanılmıştır. KL baz fonksiyonlarının türetilmesinde, mümkün olduğunca fazla akış karakterini bu fonksiyonlara geçirmek amacıyla akış simetrisi kullanılmıştır. Elde edilen genlik denklemleri, her bir KL baz fonksiyonunun referans parametre değerlerinde taşıdığı fiziksel karakter ve akış enerjisi göz önüne alınarak kısaltılmıştır. Manyetik alan ile konvektif akışın ilişkisinden doğan Lorentz kuvveti genlik denklem sistemine eklenmiştir. Bu kısaltılmış ve değiştirilmiş genlik denklemler sistemi, bir akış parametre aralığında dinamiği incelemek amacıyla sayısal olarak çözülmüştür. Bu düşük boyutlu modelin, manyetik alanın konvektif akışı engelleyici biçimdeki etkilerini içerdiği gösterilmiştir.

Düşük boyutlu modelin kullanıldığı en iyi (optimal) kontrol problemi formüle edilmiştir. Bu problemde manyetik alan şiddeti ve uygulama açısı kontrol değişkenleri olarak seçilmiştir. Problemin iteratif çözümüne yönelik algoritma ve çözüm yöntemleri belirtilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Manyetik Alan, Isı Konveksiyonu, Karhunen-Loeve Ayrışımı.*

ABSTRACT

The interaction between thermal convection and magnetic field is of interest in geophysical and astrophysical problems as well as in metallurgical processes such as casting or crystalization. A magnetic field may act in such a way to damp the convective velocity field in the melt or to reorganize the flow aligned with the magnetic field. This ability to manipulate the flow field is of technological importance in industrial processes. In this work, a direct numerical simulation of three-dimensional Boussinesq (Rayleigh-Benard) convection in a horizontal layer of electrically conducting fluid confined between two perfectly conducting horizontal plates heated from below in a gravitational and magnetic field is performed using a spectral element method. The main features of the numerical technique are the variational (weak) formulation in the wall-to-wall direction and the use of rescaled Legendre-Lagrangian polynomial interpolants in expanding the flow variables except the pressure for which a modal expansion in terms of lower order polynomials is used to avoid the complicated staggered grid approach. In the process, we exploit the quasi-steady relationship between the velocity and the induced magnetic field obtained under the low magnetic Prandtl number limit. Besides typically having low thermal Prandtl number, the liquid metals or melts are characterized by this limit. This corresponds to the physical situation that while the induced magnetic field hardly interacts with convection, the ambient homogeneous magnetic field affects the convective motions. As a consequence, the induced magnetic field can be viewed as a slaved variable, prescribed by the velocity field. The numerical model is then used to study the effects of imposing magnetic field.

Control methods for fluid dynamics have attracted substantial interest in recent years due to their wide ranging applications. Since real-time flow control requires large amounts of computer-time and memory, it is very important to have efficient computational schemes. Among such schemes, reduced order models play an important role. This requires a suitable representation and parametrization of the underlying flow field. Karhunen-Loeve (KL) decomposition technique is used to

construct a set of basis functions from a flow database providing an optimal representation of the flow field in energy norm. These basis functions are subsequently used to construct a reduced order model of the flow dynamics. In this work, we also propose a KL based reduction scheme in order to formulate a reduced order model of a magneto-convective flow. This model is obtained from a KL based model of Rayleigh-Benard (RB) convection by adding the effect of a magnetic field. This is made possible by exploiting the quasi-steady relationship between the velocity and the induced magnetic field. For the purpose of constructing KL basis functions, a database representing RB convection flow field is numerically generated. The resulting database is used to generate a KL basis, that is, in turn, used to reduce the Boussinesq equations to a system of amplitude equations by a Galerkin projection. In the generation of the KL basis, flow symmetries are fully exploited in order to pass as much flow character on to the basis functions. The resulting amplitude equations are truncated based on the physical character attached to as well as the amount of flow energy carried along each KL basis functions at the reference flow parameter values. The Lorentz force, resulting from the interaction of convection with the magnetic field, is then included in the amplitude equations. The further reduced and modified amplitude equations are then numerically integrated to explore the dynamics in a range of flow parameter values. The effect of a magnetic field in such a way to inhibit the convective motions is shown to be exhibited in the solutions of the reduced model.

An optimal control problem formulation incorporating the reduced order model is presented. This problem uses the magnitude and the angle of the externally imposed magnetic field as the control variables. An algorithm and solution techniques towards iterative numerical solution of the problem are also presented.

Key Words: *Magnetic Field, Thermal Convection, Karhunen-Loeve Decomposition.*

1 Giriş

Isı konveksiyonu ve manyetik alan arasındaki etkileşim, manyeto-konveksiyon, astrofizik ve jeofizik gözlemlerini takiben uzun bir süreden beri incelenmektedir. Güneş üstündeki kara noktaların ve gezegen katmanlarındaki eriyik akışın dinamiği termal etkilere olduğu gibi güçlü manyetik kuvvetlere de dayanır. Manyeto-konveksiyon metal dökümü veya kristal üretimi gibi bazı endüstriyel işlemlerin de alanına dahildir (Davidson, 1999). Bu konuda ilk teorik çalışmalar, dışarıdan uygulanan homojen bir manyetik alanın ısı konveksiyonu hareketlerinin doğrusal kararlılığı üzerine olmuştur (Chandrasekhar, 1961). Uygulanan manyetik alanın bir kontrol parametresi olarak etkileri deneysel olarak da incelenmiştir (Nakagawa, 1957; Fauve, 1984).

Bu proje çalışmasında, manyeto-konveksiyon akışın sayısal benzetimi için sayısal bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntem kullanılarak elde edilen veri, manyetik alanın kontrol edilebilmesini sağlayan parametrelerin etkilerinin incelenmesinde kullanılabilir. Yerçekimi yönüne göre alttan ısıtılan sonsuz uzunlukta iki tabaka arasında bulunan elektrik iletken (manyetik olmayan) akışkan katman, ısı konveksiyonu ve dışardan uygulanmış manyetik alanın etkileşimini incelemek için en temel geometrik yapıdır. Model, 1 süreklilik, 3 momentum, 1 termal ve 4 manyetik alan denklemlerinden ibaret bir kısmi differansiyel denklemler sistemidir (Chandrasekhar, 1961). Momentum denklemleri, Boussinesq yaklaşımı kullanılarak Navier-Stokes denklemlerinden elde edilmiştir. Bu denklemlerde manyetik alanın etkisi Lorentz kuvvet terimi vasıtasıyla sağlanır. Temelde manyeto-konveksiyon dinamiği termal Prandtl sayısının, $Pr (= \nu/\kappa)$, manyetik Prandtl sayısına, $Pm (= \nu/\lambda)$, oranına dayanır. Sıvı veya eriyik metaller için manyetik Prandtl sayısı diğerine göre çok daha küçük bir değere sahiptir ($\kappa \ll \lambda$) öyle ki konveksiyon akışının indüklenmiş manyetik alan üzerine etkisi (Busse, 1981; Clever, 1989) çalışmalarında olduğu gibi yok varsayılabilir. Bu durum manyetik alan denklemlerini, durağan hidro-manyetik bir bağıntıya dönüştürür ve sonuç olarak sayısal benzetim için kullanılan modelin denklemlerinin çözümü için büyük kolaylık sağlanmış olur.

Bu çalışmada spektral elemanlar sayısal metodu kullanılmıştır. Denklemlerin çözülmesinde kullanılan teknikler, (Patera, 1984) ve (Schumack, 1991) tarafından temellendirilmiş ve (Guessous, 2004) tarafından Rayleigh-Benard ısı konveksiyonu problemine uygulanmıştır. Bu çalışma için, sayısal yöntemeye manyetik terimler ilave edilmiş ve hidro-manyetik denklemi de eşzamanlı çözülmüştür. Manyetik alanı kontrol eden alan şiddeti (Chandrasekhar sayısı, Q) ve uygulama açısının (χ) çeşitli değerlerinde elde edilen akış literatürde mevcut diğer çalışma sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen bulgular, konveksiyon hareketi ile manyetik alanın etkileşimi sonucu ortaya çıkan Lorentz kuvvetinin konvektif hareketleri engelleyici etkisi ve ayrıca konveksiyon hareketini karakterize eden uzunluk ölçeklerinde küçülme gibi bilinen olguları destekler niteliktedir.

(Chandrasekhar, 1961) linear teorisinde öngördüğü gibi durağan sarmal akış rejiminde χ açısı ile uygulanan manyetik alanın sadece yatay bileşeni etkilidir. Bu etki sarmalların manyetik alan yönü boyunca dizilmesi şeklindedir. Sarmalların linear olmayan özellikleri ise uygulanan manyetik alanın sadece dik bileşeninden etkilenmektedir. Sarmal akışın kararlılığını kaybedip geçiş yapılan yeni rejimlerde ise uygulanan manyetik alanın her iki bileşeni etkili olmaktadır. Ara açısal değerlerde uygulanan manyetik alanın ısı konvektif akış üzerindeki etkisine, dik ($\chi = 90^\circ$) ve yatay ($\chi = 0^\circ$) açısal değerlerdeki uygulama ile ulaşılabileceği düşünülebilir. (Busse, 1990) çalışmasında bahsedildiği gibi bu konvektif ısı iletimi ve periyodik rejime geçiş kritik değerlerinin tahmininde kısmen doğru olsa bile, ara açı değerlerinde akışı modelleyen kısmi diferansiyel denklemlerin yatay ve dik açısal değerlerine göre daha düşük simetri özelliklerine sahip olması manyetik alanın uygulama açısının bir kontrol parametresi olarak etkilerinin incelenmesini desteklemektedir.

Akış kontrolü metodları, yaygın uygulama alanı bulduğu için günümüzde büyük ilgi çekmektedir (Gad-el-Hak, 2000; Gunzburger, 2003). Gerçek zaman akış kontrolü büyük ölçüde bilgisayar zamanı ve hafızası gerektirmektedir ve bu yüzden efektif sayısal yöntemlere ihtiyaç vardır. Bu yöntemlerin arasında, düşük boyutlu model

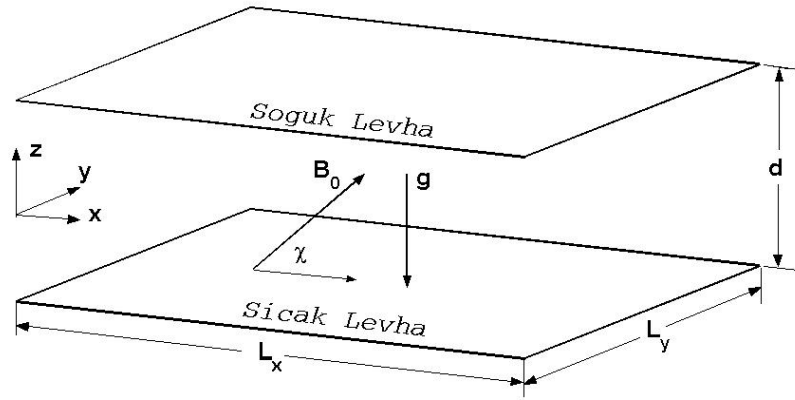
geliştirmek önemli bir yer tutmaktadır. Karhunen-Loeve (KL) ayrışım tekniği, ilgili akışı temsil eden bir veri bütününden, akışı enerji ölçeğinde en iyi bir şekilde karakterize eden yapılar (baz fonksiyonları) kümesi türetiminde kullanılır. Bu yapılar kullanılarak akışın nispeten düşük boyutlu dinamik bir modeli elde edilebilir (Sirovich, 1987; Lumley, 1970; Berkooz, 1993; Tarman, 2003). Bu projenin doğal bir uzantısı olarak, magneto-convection akışın düşük boyutlu bir modeli formüle edilmiştir. Bu model, KL baz fonksiyonları kullanılarak düşük boyutlu dinamik bir sisteme indirgenen sade (manyetik alan uygulanmayan) Rayleigh-Benard konveksiyon modeline manyetik alan eklenerek elde edilmiştir. Bu yaklaşım sade ısı konveksiyon akışının olduğu fonksiyon uzayını tanımlamak üzere elde edilen baz kullanılarak manyeto-konvektif akış model denklemlerinin Galerkin yaklaşımı ile bu uzaya yansıtılmasından ibarettir.

KL baz fonksiyonları kullanılarak elde edilen düşük boyutlu akış modeli üzerinde manyetik kontrol kullanan çalışmalar literatürde mevcuttur (Park, 2002; Ravindran, 2005). Bu çalışmalarda KL baz fonksiyonlarının elde edilmesinde manyetik alan şiddetinde dahil olduğu çeşitli parametre değerlerinde elde edilen sayısal akış çözümleri bir karışım akış veri tabanı oluşturacak şekilde bir araya getirilmiştir. Bu şekilde elde edilen KL baz fonksiyonlarının manyetik alan şiddetini belirleyen parametrelerinde dahil olduğu çeşitli parametre değerlerinde başarılı bir dinamik model oluşturma yeteneğinin sınırlarını belirleyen bir çalışma yazarın bilgisi dahilinde literatürde mevcut değildir. Daha önceki çalışmamızda (Tarman, 2003) Ra sayısının bir referans değerinde elde edilen KL baz fonksiyonlarının, geçiş bölgesini tarayan bir Ra sayısı kesitinde başarılı bir dinamik model oluşturduğu gösterilmiştir. Buradan hareketle ve konvektif akışkan olarak eriyik metal kullanan bu çalışmamızda, manyetik alan denklemlerinin durağan hidro-manyetik bir bağıntıya dönüşmesi avantajını kullanarak, manyetik alan etkisi altındaki konvektif akışın düşük boyutlu bir modelinin oluşturulmasında manyetik bir alan etkisinde olmayan ($Q=0$) konvektif akış veri tabanından elde edilen KL baz fonksiyonları kullanılmıştır. Bu model, projenin kısıtlı zaman çerçevesi içinde yapılan sayısal denemelerde başarılı olmuş ve bu çalışma bir konferansta sunulmuştur (Tarman, 2008). Ancak, bu modelin

kontrol probleminde kullanımı öncesinde geçiş bölgesini kapsayan Ra ve Q parametre değerlerinde doğrulanması bir ek çalışma içerisinde sürmektedir.

2 Temel Denklemler

Yüksekliği d kadar olan, iki tam iletken levha arasındaki sıvı alttan ısıtılır ve büyüklüğü B_0 olan manyetik alan xz -düzleminde x -yönü ile χ açısı yapacak şekilde uygulanır.



Şekil 1: Akış geometrisi, Ω .

Ölçeklendirilmiş denklemler; kütle korunumu, momentum korunumu, termal enerji ve hidro-manyetik denklemleri şöyledir (Chandrasekhar, 1961):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \quad (1a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0, \quad (1b)$$

$$\partial \vec{u} / \partial t = \vec{u} \times \vec{\omega} - \vec{\nabla} \Pi + \text{Pr Ra } \Theta \vec{e}_z + \text{Pr } \nabla^2 \vec{u} + Q \text{Pr} ((\cos \chi \vec{e}_x + \sin \chi \vec{e}_z) \cdot \vec{\nabla}) \vec{b}, \quad (1c)$$

$$\partial \Theta / \partial t + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \Theta = \vec{e}_z \cdot \vec{u} / 2 + \nabla^2 \Theta, \quad (1d)$$

$$\nabla^2 \vec{b} = -((\cos \chi \vec{e}_x + \sin \chi \vec{e}_z) \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}, \quad (1e)$$

burada, \vec{e}_x , \vec{e}_y ve \vec{e}_z , x , y , ve z yönlerindeki birim vektörleri, Θ konvektif sıcaklık, Π toplam basınç terimi ve $\vec{\omega}$ girdap, $\vec{u} = (u, v, w)$ hız, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ indüklenmiş manyetik alan vektörleridir. Kullanılan ölçekler, d , tabakalar arasındaki sıcaklık farkı ΔT , B_0 , termal difüzyon zamanı d^2/κ 'dır. Ölçeklendirilmiş toplam manyetik alan şöyle tanımlanmıştır:

$$\bar{\mathbf{B}} = (\cos \chi \bar{e}_x + \sin \chi \bar{e}_z) + (\kappa/\lambda) \bar{\mathbf{b}}. \quad (2)$$

Burada, κ ve λ termal ve manyetik difüzyon sabitidir. $\kappa \ll \lambda$ özelliğine sahip iletken bir akışkanda (örneğin, eriyik metal) indüklenmiş manyetik alan $\bar{\mathbf{b}}$, dışarıdan uygulanan manyetik alan B_0 ile karşılaştırıldığında önemsizdir ve durağan hidromanyetik (1e) bağıntıyla akış hızı $\bar{\mathbf{u}}$ tarafından belirlenir.

Temel parametreler, Rayleigh (Ra), Chandrasekhar (Q) ve Prandtl (Pr) sayılarıdır:

$$Ra = g\Delta T d^3 \alpha / \kappa \nu, \quad Q = B_0^2 d^2 / \rho \mu \nu \lambda, \quad Pr = \nu / \kappa. \quad (3)$$

Burada, μ manyetik geçirgenlik, α termal genleşme, ν kinematik vizkozite katsayıları ve ρ akışkanın referans yoğunluğudur. Akış, yatay/dikey ayrıtları oranı $\Gamma(L_x/d, L_y/d)$ olan yatay yönlerde periyodik bir kutu geometrisi içinde oluşmaktadır (bkz. Şekil 1). Bu sebeple, tüm fiziksel değişkenler yatay x ve y yönlerinde periyodik sınır koşulları ile tamamlanmıştır. Dikey z yönü sınırlarında elektriksel olarak tam iletken, katı levhalar düşünüldüğünde $\bar{\mathbf{u}}$ için homojen Dirichlet sınır koşulları ve indüklenmiş manyetik alan, $\bar{\mathbf{b}}$ için tam iletken sınır koşulları kullanılmıştır:

$$\bar{\mathbf{u}} = \Theta = 0 \quad \text{ve} \quad \partial b_x / \partial z = \partial b_y / \partial z = b_z = 0. \quad (4)$$

Sayısal yönteme uygunluğu dolayısıyla, aşağıdaki formülasyonda d ölçeği $d/2$ ile değiştirilmiştir. Bunun sonucu olarak temel parametreler $Ra_h = Ra/8$, $Q_h = Q/4$ şeklinde ve dikey sınırlar $z = \pm 1$ olarak değiştirilmiştir.

3 Sayısal Yöntem

Bu ve sonraki kısımda sunulan çalışma, (Güray, 2006; 2007) yayınlarına konu olmuştur.

Değişkenler yatay yönde Fourier seri açılımıyla tanımlanır:

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \Theta \\ \bar{b} \\ \Pi \end{bmatrix} (x, y, z, t) = \sum_m \sum_n \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\Theta} \\ \hat{b} \\ \hat{\Pi} \end{bmatrix} (m, n, z, t) \exp[i(\zeta_m x + \eta_n y)], \quad (5)$$

$\zeta_m = 2\pi m/s_x$, $\eta_n = 2\pi n/s_y$, x ve y yönünde dalga numaralarıdır. N_x , N_y , x ve y yönündeki sayısal ağ nokta sayısı olup, m , n endeksleri $1 - N_x/2 \leq m \leq N_x/2$ ve $1 - N_y/2 \leq n \leq N_y/2$ aralığında değişir. $s_x (= L_x/d/2)$, $s_y (= L_y/d/2)$ katmanın x ve y yönündeki ölçeklendirilmiş boyutlarıdır, böylece $\Gamma(s_x/2, s_y/2)$.

\hat{u} , $\hat{\Theta}$ ve \hat{b} , herhangi bir (ζ_m, η_n) dalga numarası çifti için, z yönünde ortonormal Lagrange-Legendre polinomları, $\bar{h}_j(z)$, cinsinden $N_z + 1$ noktada seri toplamı olarak yazılır:

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\Theta} \\ \hat{b} \end{bmatrix} (m, n, z, t) = \sum_{j=0}^{N_z} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\Theta} \\ \bar{b} \end{bmatrix} (m, n, z_j, t) \cdot \bar{h}_j(z) \equiv \begin{bmatrix} \bar{u}_j \\ \bar{\Theta}_j \\ \bar{b}_j \end{bmatrix} \bar{h}_j. \quad (6)$$

Burada, $\bar{h}_j(z) = h_j(z)/\sqrt{\varpi_j}$ ve

$$h_j(z) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{N_z} \frac{(z - z_k)}{(z_j - z_k)} = -\frac{(1 - z^2) P'_{N_z}(z)}{N_z(N_z + 1) P_{N_z}(z_j)(z - z_j)}. \quad (7)$$

Diğer değişkenlerden farklı olarak, basınç terimi, $\hat{\Pi}$, z yönünde, indirgenmiş bir ağ yerine, iki terim düşük Legendre polinomları $P_j(z)$ cinsinden yazılmıştır:

$$\hat{\Pi}(m, n, z, t) = \sum_{j=1}^{N_z-1} \bar{\Pi}(m, n, j, t) \cdot P_{j-1}(z) \equiv \bar{\Pi}_j P_{j-1}. \quad (8)$$

z_j ve ϖ_j sırasıyla Legendre-Gauss-Lobatto noktaları ve onların Gauss-kuadratür ağırlık değerleridir.

Akışın zaman değişkenine göre çözümü ikinci dereceden bir yöntem olan Adams Bashford-Crank Nicolson (AB2-CN) ile gerçekleştirilmiştir. Buyant ve manyetik

kuvvetlerin ve doğrusal olmayan terimlerin zaman ötelemesi AB2 ile basınç ve difüzyon terimlerinin ise CN ile sağlanarak elde edilmiştir:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{u}}^{n+1} = 0, \quad (9a)$$

$$(\text{Pr} \nabla^2 - 2/\Delta t) \bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \bar{\nabla} \Pi^{n+1} + \bar{\mathbf{g}}^n, \quad (9b)$$

$$(\nabla^2 - \Delta t) \Theta^{n+1} = \mathbf{f}^n, \quad (9c)$$

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{b}}^{n+1} = -((\cos \chi \bar{\mathbf{e}}_x + \sin \chi \bar{\mathbf{e}}_z) \cdot \bar{\nabla}) \bar{\mathbf{u}}^{n+1}. \quad (9d)$$

Burada

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}^n = & -3(\bar{\mathbf{u}} \times \bar{\boldsymbol{\omega}} + \text{PrRa}_h \Theta \bar{\mathbf{e}}_z + Q_h \text{Pr}((\cos \chi \bar{\mathbf{e}}_x + \sin \chi \bar{\mathbf{e}}_z) \cdot \bar{\nabla}) \bar{\mathbf{b}})^n + (\bar{\mathbf{u}} \times \bar{\boldsymbol{\omega}} + \\ & \text{PrRa}_h \Theta \bar{\mathbf{e}}_z + Q_h \text{Pr}((\cos \chi \bar{\mathbf{e}}_x + \sin \chi \bar{\mathbf{e}}_z) \cdot \bar{\nabla}) \bar{\mathbf{b}})^{n-1} + \bar{\nabla} \Pi^n - (\text{Pr} \nabla^2 + 2/\Delta t) \bar{\mathbf{u}}^n, \end{aligned} \quad (10a)$$

ve

$$\mathbf{f}^n = -3(\bar{\mathbf{e}}_z \cdot \bar{\mathbf{u}}/2 - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \Theta)^n + (\bar{\mathbf{e}}_z \cdot \bar{\mathbf{u}}/2 - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \Theta)^{n-1} - (\nabla^2 + 2/\Delta t) \Theta^n. \quad (10b)$$

Harici terimler bulunduğundan, $t = 0$ için Euler yöntemi kullanılmıştır.

Zaman yönünde çözümlenmiş denklemler (9), akış değişkenlerinin uzaysal yönlerdeki açılımları (5, 6, 8) yerine konduktan sonra varyasyonel bir yöntem olan, Galerkin uygulamasıyla her bir (ζ, η) dalga numarası çifti için matrix denklemlerine indirgenmiştir:

$$i\zeta D_{ji} \bar{\mathbf{u}}_j^{n+1} + i\eta D_{ji} \bar{\mathbf{v}}_j^{n+1} + E_{ji} \bar{\mathbf{w}}_j^{n+1} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq N_z - 1, \quad (11a)$$

$$H_{ij} \bar{\mathbf{u}}_j^{n+1} = +i\zeta D_{ij} \bar{\Pi}_j^{n+1} + B_{ij} \bar{\mathbf{g}}_{1j}^n, \quad 1 \leq i, j \leq N_z - 1, \quad (11b)$$

$$H_{ij} \bar{\mathbf{v}}_j^{n+1} = +i\eta D_{ij} \bar{\Pi}_j^{n+1} + B_{ij} \bar{\mathbf{g}}_{2j}^n, \quad 1 \leq i, j \leq N_z - 1, \quad (11c)$$

$$H_{ij} \bar{\mathbf{w}}_j^{n+1} = -E_{ij} \bar{\Pi}_j^{n+1} + B_{ij} \bar{\mathbf{g}}_{3j}^n, \quad 1 \leq i, j \leq N_z - 1, \quad (11d)$$

$$H_{ij}^\Theta \bar{\Theta}_j^{n+1} = B_{ij} \bar{\mathbf{f}}_j^n, \quad 1 \leq i, j \leq N_z - 1, \quad (11e)$$

$$H_{ij}^b \bar{\mathbf{b}}_{xj}^{n+1} = -(i\zeta B_{ij} + C_{ij}) \bar{\mathbf{u}}_j^{n+1}, \quad 0 \leq i, j \leq N_z, \quad (11f)$$

$$H_{ij}^b \bar{\mathbf{b}}_{yj}^{n+1} = -(i\zeta B_{ij} + C_{ij}) \bar{\mathbf{v}}_j^{n+1}, \quad 0 \leq i, j \leq N_z, \quad (11g)$$

$$H_{ij}^b \bar{\mathbf{b}}_{zj}^{n+1} = -(i\zeta B_{ij} + C_{ij}) \bar{\mathbf{w}}_j^{n+1}, \quad 1 \leq i, j \leq N_z - 1. \quad (11h)$$

Burada,

$$\mathbf{H} = -(\text{Pr} \mathbf{A} + (\text{Pr} k^2 + 2/\Delta t) \mathbf{B}), \quad (12a)$$

$$H^\ominus = -(A + (k^2 + 2/\Delta t)B), \quad (12b)$$

$$H^b = -(A + k^2B), \quad (12c)$$

$k^2 = \zeta^2 + \eta^2$, ve

$$A_{ij} = \int_{-1}^1 \bar{h}'_i \bar{h}'_j dz = \sum_{k=0}^{N_z} \varpi_k \bar{h}'_i(z_k) \bar{h}'_j(z_k), \quad (13a)$$

$$B_{ij} = \int_{-1}^1 \bar{h}_i \bar{h}_j dz = \sum_{k=0}^{N_z} \varpi_k \bar{h}_i(z_k) \bar{h}_j(z_k) = \delta_{ij}, \quad (13b)$$

$$C_{ij} = \int_{-1}^1 \bar{h}_i \bar{h}'_j dz = \sum_{k=0}^{N_z} \varpi_k \bar{h}_i(z_k) \bar{h}'_j(z_k), \quad (13c)$$

$$D_{ij} = \int_{-1}^1 \bar{h}_i P_{j-1} dz = \sum_{k=0}^{N_z} \varpi_k \bar{h}_i(z_k) P_{j-1}(z_k) = \sqrt{\varpi_i} P_{j-1}(z_i), \quad (13d)$$

$$E_{ij} = \int_{-1}^1 \bar{h}'_i P_{j-1} dz = \sum_{k=0}^{N_z} \varpi_k \bar{h}'_i(z_k) P_{j-1}(z_k). \quad (13e)$$

Matrix (11) denklemlerinde i, j indeks aralıkları sınır koşulları göz önüne alınarak seçilmiştir. Homojen Dirichlet sınır koşulları (4),

$$\bar{u}_0 = \bar{u}_{N_z} = \bar{\Theta}_0 = \bar{\Theta}_{N_z} = \bar{b}_{z_0} = \bar{b}_{z_{N_z}} = 0. \quad (14)$$

gereği, (11a,b,c,d,e,h) denklemlerinde i, j aralıkları $1 \leq i, j \leq N_z - 1$ olarak, diğer taraftan indüklenmiş manyetik alanın yatay bileşenlerinin, \bar{b}_x, \bar{b}_y , z yönündeki sınır koşulları (4) Neumann tipi olduğundan (11f,g) denklemlerinde i, j aralıkları $0 \leq i, j \leq N_z$ olarak alınır. Bu sayede homojen Neumann sınır şartları Galerkin uygulamasını takiben kısmi integral sonucu zayıf olarak sağlanmıştır.

(11b,c,d) deklemlerinin çözümü ile elde edilen üç akış bileşeni, (11a) denkleminde yerine konularak, basınç terimi için matrix denklemi:

$$S_{ij} \bar{\Pi}_j^{n+1} = -i\zeta D_{ji} H_{jk}^{-1} \bar{g}_{1k}^n - i\eta D_{ji} H_{jk}^{-1} \bar{g}_{2k}^n - E_{ji} H_{jk}^{-1} \bar{g}_{3k}^n, \quad 1 \leq i, j, k \leq N_z - 1, \quad (15)$$

elde edilir. Burada,

$$S = -(k^2 D^T H^{-1} D + E^T H^{-1} E). \quad (16)$$

Akış denklemleri (1) ve homojen sınır koşulları (4) altında, Π , b_x , b_y değişkenlerindeki bir sabite kadar olan belirsizlik, (11f,g) ve (15) matrix denklemlerine yansımıştır. S_{ij} , $1 \leq i, j \leq N_z - 1$ ve H_{ij}^b , $0 \leq i, j \leq N_z$ matrisleri, $k^2 = 0$ durumu için tekildir (corank = 1). Bu belirsizlik sonucu oluşan tekillik, $m = n = 0$ için

$$\bar{\Pi}(m, n, j = 1, t) = \bar{b}_x(m, n, z = 0, t) = \bar{b}_y(m, n, z = 0, t) = 0 \quad (17)$$

ek şartları ile giderilmiştir.

Etkin çözüm için gerekli olan katsayı matrislerinin (12), H, H^\ominus, H^b , tersi, B'nin (13b) birim matris olması sebebiyle bir çeşit ayrıştırma yöntemi ile elde edilir:

$$A = F G F^{-1} \quad (18)$$

F'deki kolonlar A simetrik matrisinin asal vektörlerini içerir. G bu asal vektörlere karşılık gelen asal değerleri sırasıyla bulunduran diyagonal matristir. Böylece

$$H^{-1} = -F \left(\text{Pr} G + \left(\text{Pr} k^2 + 2/\Delta t \right) I \right)^{-1} F^{-1}, \quad (19a)$$

$$H^{\ominus-1} = -F \left(G + \left(k^2 + 2/\Delta t \right) I \right)^{-1} F^{-1}, \quad (19b)$$

$$H^{b-1} = -F \left(G + k^2 I \right)^{-1} F^{-1}, \quad (19c)$$

tanımlanır. $k^2 = 0$ iken gerçekleşen tekil durum yukarıda giderilmişti.

Her bir zaman adımında doğrusal olmayan terimlerin hesaplanması için değişkenlerin değerleri Fourier uzayından, gerçek uzaya aktarılmakta, bu işlemlerin sonunda doğrusal ve doğrusal olmayan tüm değerler Fourier uzayına taşınmaktadır. Ancak doğrusal olmayan terimlerin bu şekilde gerçek uzayda elde edilmesi ve tekrar Fourier uzayına taşınması beraberinde hatalar getirir. Bu hatalar Fourier uzayında değişkenlerin büyük dalga numaralarında; bu sebepten, herhangi bir zaman adımında, 2/3 kuralı uygulanmıştır. $|m| > N_x/3$ ve $|n| > N_y/3$ dalga numaraları için değişken vektörleri sıfırlanır. Diğer bir deyişle bu koşulu sağlayan dalga numaraları elenir, filtreleme gerçekleştiği gibi işlem süresi de kısalmır.

4 Sayısal Benzetim Sonuçları

Tüm sayısal deneylerde $N_x = N_y = N_z = 16$ sayısal ağı kullanılmıştır. $N_z = 16$, z yönündeki adım sayısını temsil eder, z yönünde, sınır noktalarının da dahil olduğu 17 nokta kullanılmıştır. Legendre-Gauss-Lobatto noktaları olarak seçilen bu noktalar sınırlara yakın alanlarda sıklaşarak çözünürlüğü artırır. $N_z = 16$, Nusselt sayısının $Nu < 3$ olduğu durumlar için yeterli çözünürlük sağlamaktadır yani termal sınır tabaka derinliğinde $\delta_\Theta = 1/2 Nu$, $N_z = 16$ için en az 3 nokta bulunmaktadır (Grötzbach, 1983). Zaman aralığı $0.002 < \Delta t < 0.005$ olarak kullanılmıştır. Zaman adımından kaynaklanan kararsızlıkları önlemek için, konveksiyon akışının yüksek enerji barındırdığı durumlarda zaman adımını küçültmek gerekmektedir.

Sayısal çözüm sırasında, her yöndeki ortalama kinetik enerji büyüklükleri ve konvektif ısı transferi ölçüğü olan Nusselt sayısı, Nu , her bir zaman ötelemesinde takip edildi. İki boyutlu durağan bir akışın benzetimi, hareketin olmadığı üçüncü boyut yönündeki kinetik enerji $E \leq 10^{-6}$ kriterine göre elde edildi. Konveksiyon akışın varlığı Nu sayısı ile karakterize edilir: akış olmadığı durumlarda $Nu = 1$ 'dir ve akış varlığında $Nu > 1$ olur. Bu sayı, matematiksel olarak, levhalara yakın bölgelerdeki sıcaklık gradyanı cinsinden tanımlanır:

$$Nu = 1 + 2 \left| \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)_{\text{wall}} \right|. \quad (20)$$

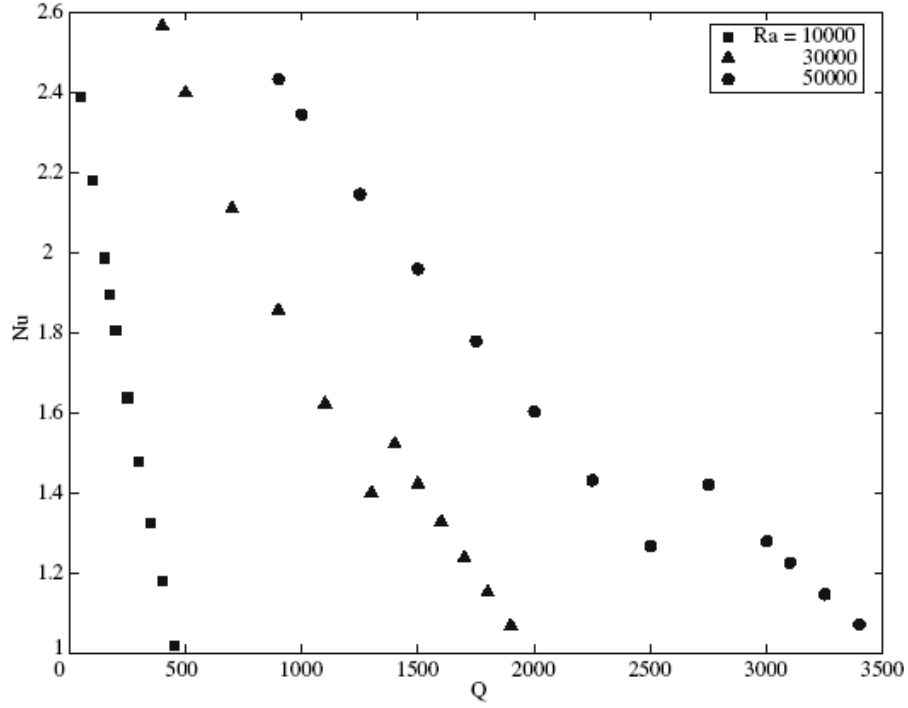
Burada, Θ 'nın konvektif akış sebebiyle oluşan sıcaklık dağılımını temsil ettiği hatırlanmalıdır. Başlangıç koşulu olarak sıfır hız değerleri kullanılmış ve sıcaklık için küçük rastlantısal (random) değerler atanmıştır. Daha sonraki sayısal çözümler, bir önceki çözüm sırasında olgunlaştırılmış akış değişkenlerini ilk değer olarak kullanmıştır. Akış rejiminin kararlılığını test etmek için sayısal çözümleme başlamadan önce ilk sıcaklık değerlerine küçük rastlantısal değerler eklenmiştir. İlk olarak, sadece termal konveksiyon ($Q = 0$) için veri üretilmiştir. Sonuçların doğruluğu diğer bir çalışmayla karşılaştırılarak onaylanmıştır. Örneğin, $Ra = 2000$, $Pr = 0.71$ ve $L_x = L_y = 4\pi/3.117$ durumu için; $16 \times 16 \times 8$ 'lik bir ağ ile $Nu = 1.211$ olarak

hesaplanmıştır. (Clever, 1974) tarafından aynı parametrelerle, $Nu = 1.212$ olarak elde edilmiştir. Bu ve diğer test işlemleri sonucu sayısal çözümleme işleminin sağlıklı çalıştığı kontrol edilmiştir.

4.1 İki Boyutlu Durağan Akışlar

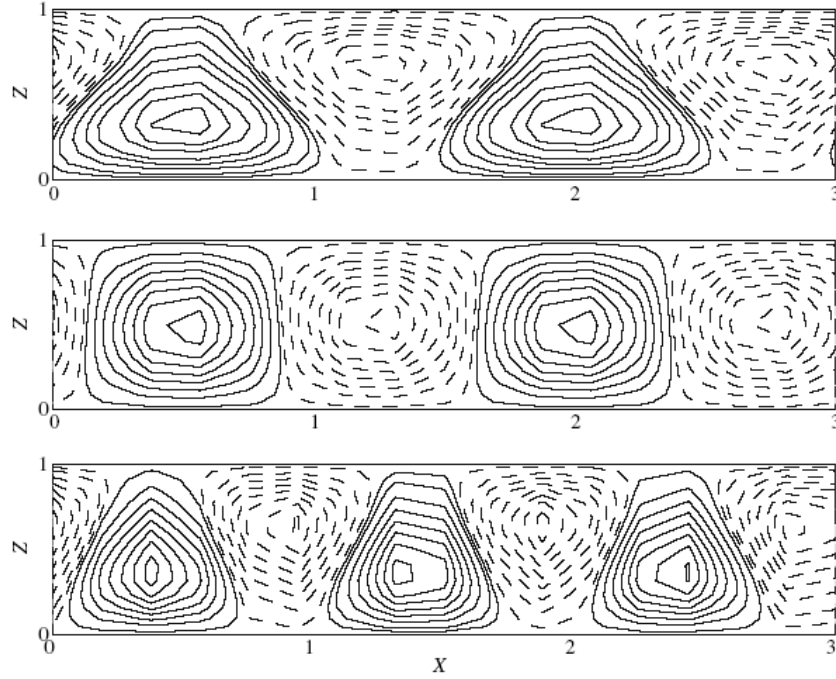
Bu alt başlık altında, $Pr = 0.05$ olan eriyik metal bir sıvı kullanılmıştır. Katmanın yatay boyutları, derinlikle ölçeklendirilmiş haliyle $\Gamma = 3:1.5$ olarak alınmış ve aksi belirtilmediği sürece akışa dikey yönde ($\chi = 90^\circ$) manyetik alan uygulanmıştır. Burada dikey yönde manyetik alanın olağan R-B akışı üzerindeki etkileri, manyetik alanın şiddetini, Q kademeli olarak artırılarak gözlenmiştir. Bu artışla akış gittikçe sönümlenir, karmaşık akış yerini periyodik akışa, daha büyük manyetik alan uygulandığında periyodik akış yerini durağan akışa bırakır. Kritik bir değerde Q_c , konveksiyon akışı tamamen son bulur (Busse, 1981). Şekil 2’de manyetik alan şiddetindeki artışla, azalan ısı transferi oranı Nu gösterilmiştir. Bu şekildeki tüm eğriler, iki boyutlu sarmal akış rejimini temsil etmektedirler. Burada, Q arttıkça, $Nu = 1$ ile karakterize edilen konvektif akışın başladığı kritik Ra değerleri artmaktadır. Bu durum, (Chandrasekhar, 1961) teorik çalışmasında ve (Nakagawa, 1957) deneylerinde de ortaya çıkmıştır.

$Ra = 30000$ ve $Ra = 50000$ durumlarının sırası ile $Q = 1300$ ve $Q = 2500$, noktalarında, Nu değerinde ani değişim gözlemlenmektedir. Manyetik alan şiddetindeki artışla, akış bu noktalarda yeniden yapılanır. x yönünde bulunan paralel sarmalların sayısında bir artış veya başka bir deyişle sarmalların dalga boyunda, λ düşüş görülür. Örneğin yukarda belirtilmiş noktalarda dalga boyu, λ , 1.5 iken 1’e gerilemiştir. Öte yandan, akışın yeniden yapılanması, sarmal sayısındaki artış, ısı geçişi oranını, Nu aniden yükseltmiştir, kısaca konveksiyon ısı geçişi daha verimli bir hale gelmiştir.



Şekil 2: Nu ve Q, Pr = 0.05 ($\Gamma = 3 : 1.5$).

Şekil 3’de Q değerindeki artış sebebiyle akışın dalga boyunu azaltarak yeniden organize oluşu görülmektedir. Burada, Q=1100 değerinde seyreden akış aniden Q=1700 değerine çıkıldığında ($t=0$), akışın kinetik enerjisi $t=35$ süresince düşer ve $t=45$ civarında akış yeniden organize olmuştur. Bu olgu, akışın yatay hareketleri azaltıp dikey hareketleri artırarak dikey manyetik alan altında oluşan Joule sönümlenmesini azaltması olarak açıklanmaktadır (Burr, 2001). Yatay dalga boyundaki azalma sonucu ısı transferi kabiliyetinin artması (Grötzbach, 1982), Şekil 2’de Nu sayısındaki ani artış olarak görülmektedir.



Şekil 3: $Ra = 300000$, $Pr = 0.05$ parametre değerlerinde $Q = 1100$ 'den 1700 değerine ani artış sonucunda akışın yeniden organize olmasını $t = 0, 35, 45$ zaman dilimlerinde gösteren eş sıcaklık eğrileri.

Tablo 1'de, her bir durum için, konveksiyon akışının başladığı manyetik alan büyüklüklerini temsil eden, kritik Chandrasekhar sayıları, Q_c , $Nu = 1$ eksenine en yakın iki noktanın üzerinden geçen doğrunun, bu eksen ile kesiştiği noktalardan elde edilmiştir. Sonuçların (Chandrasekhar, 1961)'deki Şekil 39 ile olan karşılaştırmaları tabloda gösterilmiştir. Görüldüğü gibi, bu çalışmada elde edilen değerler, kaynaktakilerle çok yakındır. Doğrusal yakınsamanın daha fazla noktayla yapılması, bu farkları daha da azaltacaktır.

| | $Ra = 10000$ | $Ra = 30000$ | $Ra = 50000$ |
|-----------------------|----------------|--------------|--------------|
| | $Q_c (Nu = 1)$ | | |
| (Chandrasekhar, 1961) | 464.4 | 1986.5 | 3549.0 |
| (Güray, 2007) | 464 | 1987 | 3551 |
| Dalga boyu, λ | 1.5 | 1.0 | 1.0 |

Tablo 1: Q_c , $Ra = 10000$, $Ra = 30000$ ve $Ra = 50000$.

Çalışmanın bu kısmından elde edilen sonuçlar, diğer bir çalışmada (Mössner, 1999) benzer bir modelle elde edilen bulgularla da karşılaştırılmıştır. Kullanılan boyutlar, burada kullanılanın iki katı olarak alınmıştır ($\Gamma = 6:3$) ve yatay sınırlar yalıtkan levhalarla kapalıdır. Tablo 2’de, Nu değerleri ve karşılık gelen sarmal dalga boyları, λ verilmiştir. (Mössner, 1999)’da kullanılan dalga boyları x ve y sınırlarındaki duvarların etkisiyle bu çalışmaya göre daha büyüktür. Bu duvarlar, akış üzerinde sürtünme etkisi oluştururlar ve akış manyetik alanın sönmülendirici etkisinin yanı sıra sürtünmeye de maruz kalır. Bunlara ek olarak, katmanı z yönünde sınırlayan levhalar elektrik akımını geçirmeyecek türden dahil edilmiştir. Levhalardan geçemeyen akım akışkan tabakasında bu levhalara yakın yerlerde devamlılık sağlayarak bir döngü oluştururlar. Sonuç olarak, akım çizgilerinin bu şekilde oluşturduğu kısa devre durumu yüksek şiddette Lorentz kuvvetlerine ve konveksiyon ısı geçişi miktarında bir miktar azalmaya sebep olur. Tablo 2’de görüldüğü üzere, Nu değerleri, $Ra = 50000$ ve $Q = 2500$ durumu haricinde bu çalışmada bulunan değerlerden daha küçüktür. Bu çalışmada yatay yönde daha küçük boyutlar kullanıldığından, fazladan bir sarmal oluşmamıştır. Bundan dolayı (Mössner, 1999)’daki sayısal benzetimde, $Ra = 50000$ ve $Q = 2500$ durumu için daha küçük dalga boyları edilmiş ve daha yüksek ısı geçişi sağlanmıştır.

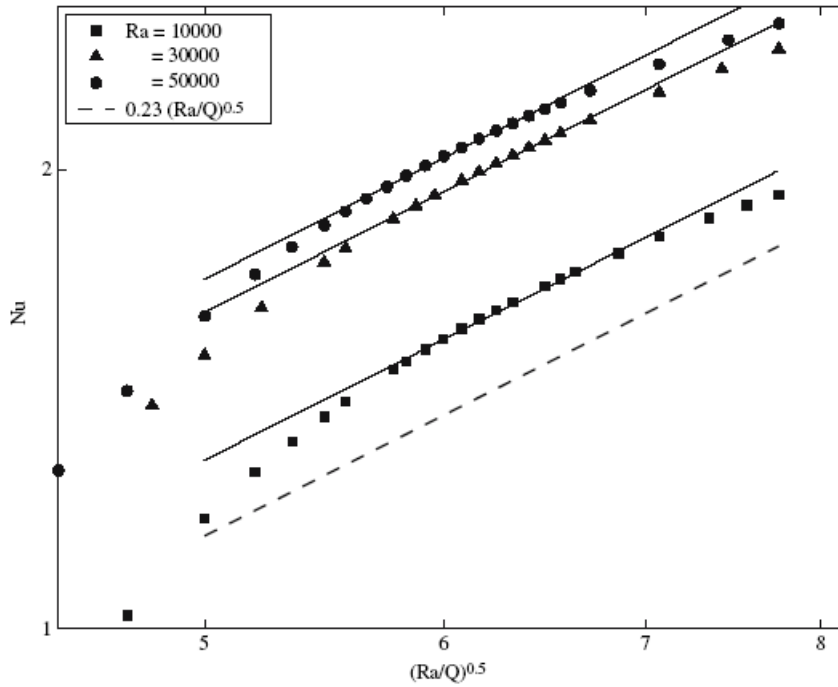
| | | Nu | | dalga boyu, λ | |
|------------|----------|----------------|---------------|-----------------------|---------------|
| | | (Möβner, 1999) | (Güray, 2007) | (Möβner, 1999) | (Güray, 2007) |
| Ra = 30000 | Q = 400 | 2,19 | 2,56 | 2 | 1.5 |
| | Q = 900 | 1,57 | 1,86 | 2 | 1.5 |
| Ra = 50000 | Q = 900 | 2,25 | 2,43 | 2 | 1.5 |
| | Q = 2500 | 1,33 | 1,27 | 1.2 | 1.5 |

Tablo 2: Nu ve λ , $Pr = 0.05$, $\Gamma = 3:1.5$ (Güray, 2007), $\Gamma = 6:3$ (Möβner, 1999).

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, ayrıca, deneysel bir çalışmada (Aurnou, 2001) elde edilen korelasyon ile de karşılaştırılmıştır. Bu çalışmada (Aurnou, 2001), $\Gamma = 8:8$ boyutlarındaki konveksiyon tankında kullanılan sıvı galyum ($Pr = 0.023$) ile yapılan deneylerde, $25 < Ra/Q < 60$ aralığında

$$Nu = 0.23(Ra/Q)^{0.5 \pm 0.03} \quad (21)$$

korelasyon bağıntısı elde edilmiştir.



Şekil 4: Logaritmik ölçekte $Nu - (Ra/Q)^{0.5}$ bağıntısı.

Bu çalışmada elde edilen ekış verileri kullanılarak Nu ve $(Ra/Q)^{0.5}$ değişkenleri arasında bu bağıntının (21) varlığı Şekil 4’de görülmektedir. (Aurnou, 2001)’de sadece $Q = 670$ değerinde gösterilen bu bağıntı, Şekil 4’de geçerlilik sınırları içindeki çeşitli Ra ve Q değerlerinde gösterilmiştir. Bağıntı katsayısının Ra değişkenine zayıf bir şekilde bağlı olduğuda görülmektedir.

Konvektif akışa geçiş kritik Ra değerleri, Ra_c , ve geçişte elde edilen sarmalların dalga numarası, ζ_c , Tablo 3’te görüldüğü gibi verilen bir Q değerinde manyetik alanın uygulama açısı arttıkça artmaktadır. Bu çalışmada kullanılan geometri parametresi

$\Gamma = 1.95 : 1.9$ sebebiyle dalga numarası $\zeta = 2\pi/1.95 = 3.2$ olarak ortaya çıkmaktadır. Tablo 3, bu şartlar altında, kalitatif olarak ele alınmalıdır.

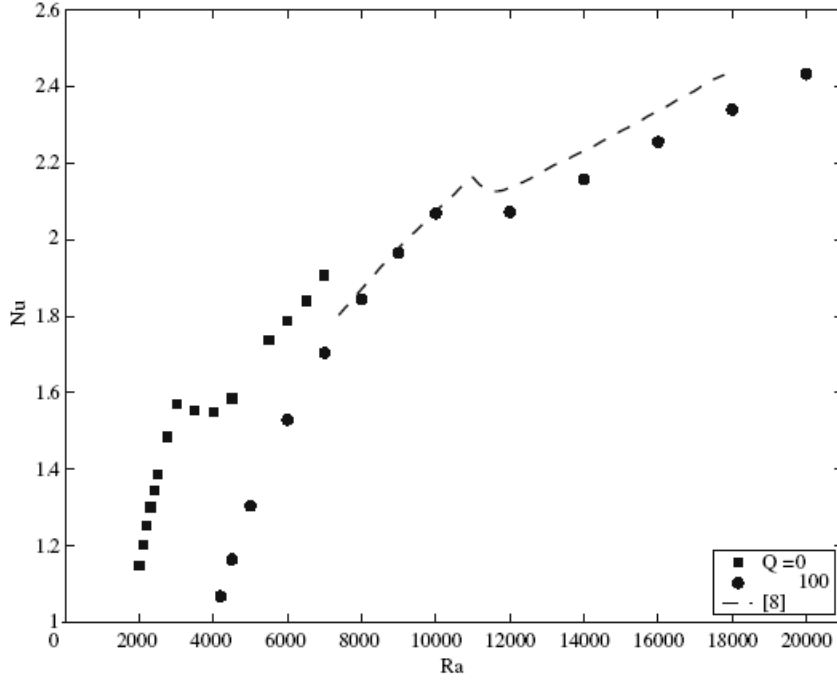
| | Q = 0 | Q = 100 | | | |
|---------------------------------------|-------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| | | $\chi = 30^\circ$ | $\chi = 45^\circ$ | $\chi = 60^\circ$ | $\chi = 90^\circ$ |
| ζ_c (Busse, 1990) | 3.12 | 3.45 | 3.68 | 3.86 | 4.01 |
| $Ra_c, \zeta = 3.2$ (Güray, 2006) | 1746 | 2327 | 2846 | 3434 | 3998 |
| $Ra_c, \zeta = \zeta_c$ (Busse, 1990) | 1708 | 2281 | 2800 | 3291 | 3757 |

Tablo 3: Konvektif akışa geçişte kritik Ra_c ve dalga numarası ζ_c değerleri.

Konvektif akışın başlamasındaki bu gecikme manyetik alanın dikey bileşeninin artması ile ilgili olduğu ortaya çıkmaktadır. Bu literatürde (Chandrasekhar, 1961; Busse, 1990; Burr, 2002) bilinen olguya göre uygulanan manyetik alanın sarmallar boyunca uzanan yatay bileşeninin akışa hiçbir etkisi olmamaktadır. Yatay bileşen sadece sarmallar kararlılığını kaybetmek üzere iken etkili olabilmektedir.

4.2 Zamana bağlı akışlar

Son olarak bu bölümde, z yönünde sabit manyetik alan şiddeti altında sönmümlendirilmiş akış içerisinde yer alan ısı geçişinin, Ra değerine bağlı olarak değişimi ele alınmıştır. Akışın gerçekleşeceği katmanın yatay boyutları $\Gamma = 1.95 : 1.9$ olarak seçilmiş ve (Clever, 1989)'nin sonuçlarıyla karşılaştırabilmek için $\chi = 90^\circ$, $Pr = 0.1$ ve $Q = 100$ olarak alınmıştır.

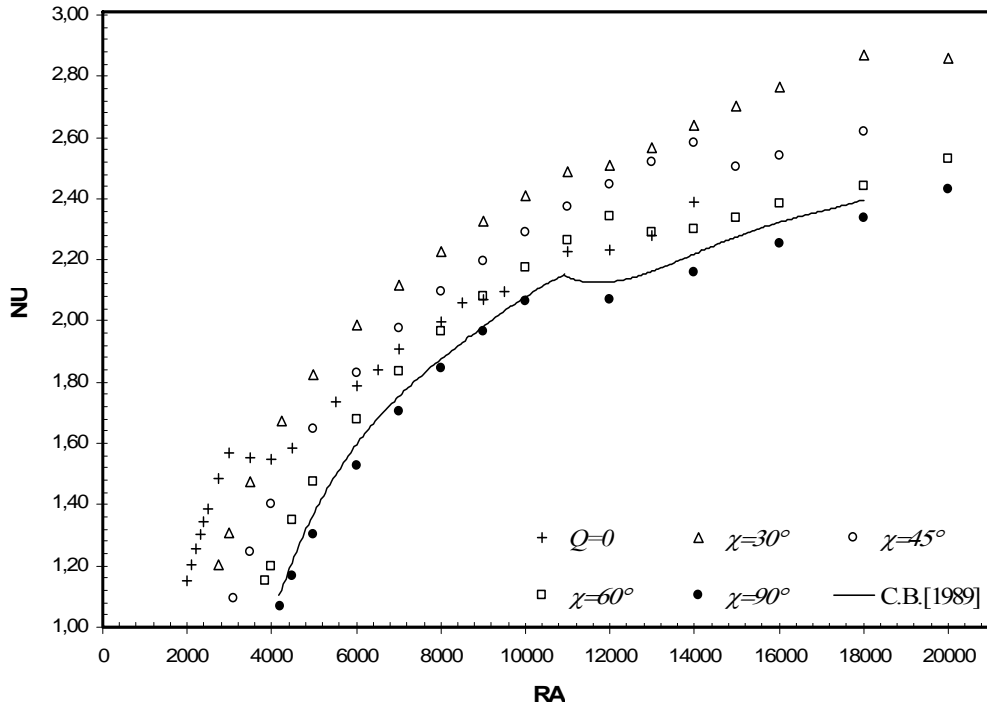


Şekil 5: Nu ve Ra, Pr = 0.1, ($\Gamma = 1.95 : 1.9$)

Şekil 5'teki eğrilerde görülen ani düşme durağan sarmallardan oluşan iki boyutlu akıştan bu sarmallar boyunca hareketli dalgaların oluşturduğu periyodik rejime geçişi belirtmektedir. Bu geçiş kritik Ra değeri, manyetik alanın uygulanması $Q = 100$ ile birlikte $Q = 0$ durumuna göre daha ileriye ötelenmiştir. Yani periyodik akışa geçişte de manyetik alan, sarmallardan oluşan iki boyutlu rejimin kararlılığını artırıcı bir rol oynamaktadır. Kesik çizgilerden oluşan eğri, (Clever, 1989) çalışmasında elde edilmiş sonuçları göstermektedir. Bu çalışmada kullanılan daha düşük derecedeki sayısal benzetim sebebiyle beklenen hata, Şekil 5'deki karşılaştırmada özellikle periyodik rejimde ortaya çıkmaktadır. Bu çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlar daha yüksek yaklaşıklık içermektedir.

Periyodik rejiminde, manyetik alan şiddeti ve uygulama açısı akışı daha etkili bir şekilde etkilerler. (Busse, 1990)'da belirtildiği gibi uygulanan manyetik alanın yatay bileşeni, periyodik rejimin başlangıcının gecikmesinde dikey bileşene göre daha etkilidir. Bu durağan sarmal akış rejimindeki etkileşimin tam tersi durumundadır. $\chi = 90^\circ$, Pr = 0.1 ve $Q = 100$ durumunda, (Clever, 1989)'da hesaplanan durağan

sarmal akışın kararlılığını kaybedip sarmallar üzerinde hareketli dalganın yer aldığı periyodik akış rejimine geçiş $10000 < Ra_c$ kritik değerinde oluşmaktadır. Bu çalışmada hesaplanan ve Şekil 5'te görülen eğride ani düşüşe denk gelen kritik Ra değeriyle uyum halindedir. Diğer açılarda elde edilen geçiş değerleri Şekil 6'da görülmektedir. Bu verilere göre periyodik rejime geçiş kritik Ra değeri, $\chi = 60^\circ$ için $12000 < Ra_c$, $\chi = 45^\circ$ için $14000 < Ra_c$ ve $\chi = 30^\circ$ için $18000 < Ra_c$ olmaktadır. Bu duruma göre, durağan sarmal akış rejiminin kararlılığı manyetik alanı uygulama açısı azaldıkça daha geniş bir Ra değer aralığında korunmaktadır.



Şekil 6: Açılara göre Nu ve Ra. Burada $Pr = 0.1$, $Q = 100$, $\Gamma = 1.95:1.9$. Eğri ile gösterilen değerler (Clever, 1989) çalışmasından alınmıştır.

5 Karhunen-Loeve (KL) Ayırışımı

KL işlemi sonucu, sayısal veya deneysel olarak elde edilmiş bir veri topluluğu (ensemble), bu veri topluluğunu enerji cinsinden en iyi karakterize eden, fonksiyon uzayında birbirine dik yapılara veya baz fonksiyonlarına ayırıştırılabilir (Sirovich,

1987; Lumley, 1970; Berkooz, 1993). Bu baz fonksiyonları, çekirdeği iki-noktalı korelasyon tensörü

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle V_i(\mathbf{x}, t) V_j(\mathbf{x}', t) \rangle \quad (22)$$

olan integral denkleminin

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Psi^k(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \lambda_k \Psi^k(\mathbf{x}) \quad (23)$$

asal fonksiyonlarıdır $\{\Psi^k(\mathbf{x})\}$. Burada, \mathbf{V} , incelediğimiz ısı konveksiyonu problemdeki sıcaklık Θ ve/veya hız \mathbf{u} gibi fiziksel anlamı olan bir değişkeni belirtmektedir. Üç boyuta işaret etmesi bakımından \mathbf{k} endeksi üç bileşenli bir endeks vektörüdür. $\langle \cdot \rangle$ topluluk ortalaması operatörünü temsil etmektedir. Akış ergodik kabul edilirse, topluluk ortalaması, istatistiksel olarak durağan zaman ve/veya homojen koordinat yönünde ortalama alınmasına denk düşer.

Hilbert-Schmidt teorisi, (23) integral denkleminin çözümü olarak sayılabilir sonsuz sayıda, fonksiyon uzayında birbirine dik ve bu uzayın bir bazını oluşturan asal fonksiyonların varlığını garantiler. Böylece bu uzayın herhangi bir elemanı $\mathbf{V}(\cdot, t)$, bu baz cinsinden, modal açılım şeklinde

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \sum_k a_k(t) \Psi^k(\mathbf{x}) \quad (24)$$

yazılabilir ve açılım katsayıları topluluk ortalaması operatörü altında birbirine diktir

$$\langle a_k(t) a_l^*(t) \rangle = \lambda_k \delta_{kl} \quad (25)$$

Akışı belirten \mathbf{V} değişkenine göre, herbir asal değer, λ_k , akışın fonksiyon uzayında asal fonksiyon Ψ^k yönündeki ortalama enerjisini gösterir.

Akışın yatay koordinatlara göre periyodik olması dolayısıyla, asal fonksiyonlar bu koordinatlara göre

$$\Psi^k(\mathbf{x}) \equiv \Psi^q(m, n; \mathbf{x}) = \Phi^k(z) \exp\left(2\pi i \left(m x/s_x + n y/s_y\right)\right) \quad (26)$$

şeklinde yazılır. Burada $\mathbf{k}=(m,n,q)$ endeks vektörü ve q ise sayma endeksidir. Böylece, integral denklemi (23), her bir $|m|<\frac{1}{2}N_x$ ve $|n|<\frac{1}{2}N_y$ endeks değerinde $\Phi_i^k(z)\equiv\Phi_i^q(m,n;z)$ için çözülmek üzere,

$$s_x s_y \int_{-1}^1 dz' \hat{R}_{ij}(m,n;z,z') \Phi_j^q(m,n;z') = \lambda(m,n) \Phi_i^q(m,n;z) \quad (27)$$

şeklini alır. İntegral denkleminin (23) çekirdeğinin oluşturulması topluluk ortalaması operasyonu içerdiğinden, akışı oluşturan veri topluluğu, fonksiyon uzayını ne kadar kapsayıcı olursa elde edilen baz fonksiyonları akışı en iyi şekilde temsil edebilirler. Bu sebeple eldeki akış veri tabanı, akış model denlemlerini ve geometrisini sağlayan ve grup oluşturan simetri bağıntıları kullanılarak çoğaltılmıştır. Örneğin, manyetik alan içermeyen ($Q=0$) ısıl konveksiyon model denklemleri kare tabanlı bir geometride Tablo 4'deki simetri grup bağıntılarını sağlarlar (Tarman, 2003):

| | Simetri Grup Elemanları | Etkisi |
|----------------|-------------------------|------------------------------------|
| Birim | I | $\{u, v, w, \theta, x, y, z\}$ |
| 90° dönüş | R | $\{-v, u, w, \theta, -y, x, z\}$ |
| 180° dönüş | R ² | $\{-u, -v, w, \theta, -x, -y, z\}$ |
| 270° dönüş | R ³ | $\{v, -u, w, \theta, y, -x, z\}$ |
| Yatay yansıma | F | $\{-u, v, w, \theta, -x, y, z\}$ |
| Çapraz yansıma | FR | $\{v, u, w, \theta, y, x, z\}$ |
| Yatay yansıma | FR ² | $\{u, -v, w, \theta, x, -y, z\}$ |
| Çapraz yansıma | FR ³ | $\{-v, -u, w, \theta, -y, -x, z\}$ |
| Dik yansıma | Z | $\{u, v, -w, -\theta, x, y, -z\}$ |

Tablo 4: Simetri grup elemanları

Simetri grup elemanları kullanılarak, bu model denklemlerden elde edilen akış veri topluluğu 16 kat çoğaltılabilir:

$$\mathbf{G} \equiv \{I, R, R^2, R^3, F, FR, FR^2, FR^3\} \times \{I, Z\} \quad (28)$$

Bunun sonucu olarak elde edilen asal değerler en fazla 8 kez tekrarlanmış (degenerate) olarak ve asal fonksiyonlar orta-düzlem $z = 0$ etrafında aynı ve aksi simetrik olarak ortaya çıkarlar:

$$\lambda_{(\pm m, \pm n, q)} = \lambda_{(\pm m, \mp n, q)} = \lambda_{(\pm m, \pm n, q)} = \lambda_{(\pm m, \mp n, q)} \quad (29)$$

Simetri bağıntılarını yapılarında taşıyan KL baz fonksiyonları eşlenik (complex conjugate) çiftler halinde biraraya getirilerek, akışın, gerçek ve fiziksel akış birimleri \mathbf{V}^k cinsinden yazılmasını sağlarlar

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{V}^k = \sum_{\mathbf{k}} \{a_{\mathbf{k}}(t) \Psi^{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) + a_{\mathbf{k}^*}(t) \Psi^{\mathbf{k}^*}(\mathbf{x})\}. \quad (30)$$

Bu açılımda endeks \mathbf{k} oluşturulan çiftleri $\{\mathbf{k}, \mathbf{k}^*\}$ saymaktadır:

$$\mathbf{k} = (m, n, q) \quad \text{ve} \quad \mathbf{k}^* = (-m, -n, q). \quad (31)$$

Burada

$$\Psi^{\mathbf{k}^*} = (\Psi^{\mathbf{k}})^*, \quad a_{\mathbf{k}^*} = a_{\mathbf{k}}^* \quad (32)$$

ve açılım katsayısı

$$a_{\mathbf{k}} = (\Psi^{\mathbf{k}}, \mathbf{v})_{\mathbf{x}} = \int \sum_i V_i(\mathbf{x}, t) (\Psi_i^{\mathbf{k}}(\mathbf{x}))^* d\mathbf{x}. \quad (33)$$

$(\cdot)^*$ eşlenik operasyonunu ve $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{x}}$ fonksiyon uzayında iç çarpımı göstermektedir.

Aşağıda uygulanan KL analizi, iki başlık altında sunulacaktır. Birinci başlıkta analiz, 3. kısımda geliştirilen sayısal benzetim yoluyla çeşitli parametre değerlerinde üretilen akış veri tabanının, yine bu veri tabanı kullanılarak yukarıdaki yöntemle elde edilen KL baz fonksiyonları doğrultusunda izdüşümüne bakılarak ve KL baz fonksiyonlarının taşıdığı fiziksel özellikler göz önüne alınarak yapılacaktır. Bunu, KL statik analizi olarak adlandıracacağız. Diğer başlıkta, öncelikle, $Q = 0$ seçilerek elde edilen ısı konveksiyon akış veri tabanının ayrıştırılması sonucu üretilen KL baz fonksiyonları, temel kısmi diferansiyel denklem sisteminden oluşan model denklemlerin (1) Galerkin yaklaşımıyla daha düşük boyutlu bir adi diferansiyel

denklemlerine indirgenmesi için kullanılacaktır. Elde edilen sistem, Lorentz teriminin eklenmesiyle sayısal olarak çözümlenerek, manyetik alanın etkisi altındaki ısı konveksiyon hareketinin model analizi yapılacaktır. Bunu, KL dinamik analizi olarak adlandıracağız.

6 Manyeto-Konvektif Akışın KL (Statik) Analizi

Manyetik alan etkisindeki ısı konveksiyonu akışını modelleyen denklemler (1 ve 4), 3. kısımda geliştirilen metodla sayısal olarak çözümlenerek, $Pr = 0.1$, $Ra = 16000$, $Q = 100$ ve çeşitli açı değerlerinde $\chi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ akış veri toplulukları oluşturulmuştur. Sayısal çözümleme kare tabanlı bir geometride $s_x = s_y = s = 3.9/2$, $32 \times 32 \times 32$ çözünürlük kullanılarak, $\Delta t = 10^{-4}$ zaman adımıyla gerçekleştirilmiştir. Elde edilen rejim periyodik rejim olarak adlandırılan ve sarmallar üzerinde hareketli dalgalardan ibarettir. Bu akışı oluşturan hız $[u, v, w]$ ve sıcaklık Θ veri toplulukları birlikte kullanılarak $\mathbf{V} \equiv [u, v, w, \Theta](\mathbf{x}, t)$, KL baz fonksiyonları $\bar{\Psi}^k(z; x, y)$ elde edilerek, akış bileşenlerinin açılımı

$$V_j(\mathbf{x}, t) = \sum_k a_k(t) \phi_j^k(z) \exp(2\pi i(m x/s_x + n y/s_y)) \quad j=1,2,3,4 \quad (34)$$

sağlanmıştır. Burada, KL baz fonksiyonları dalga numaraları $\mathbf{k} = (m, n, q)$ endeks vektörü ile belirtilen Fourier açılımları ile verilmiştir:

$$\bar{\Psi}^k(z; x, y) = \bar{\phi}^k(z) \exp(2\pi i(m x/s_x + n y/s_y)). \quad (35)$$

KL baz fonksiyonları, akışın, sınır şartları ve solenoidal karakteri gibi özelliklerini sağladıkları gibi her biri akışın bağımsız bir özelliğini enerji ölçeğinde en iyi dağılımla taşırlar.

Model denklemlerin simetri özellikleri manyetik alanın uygulandığı yatay ($\chi = 0^\circ$), ara ($\chi = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$) ve dikey ($\chi = 90^\circ$) açı değerlerine göre farklılık gösterirler. Yatay açı değerinde $\mathbf{G} \equiv \{I, FR^2\} \times \{I, Z\}$, ara açı değerlerinde

$\mathbf{G} \equiv \{I, FR^2\}$ ve dikey açı değerinde ise $\mathbf{G} \equiv \{I, R, R^2, R^3, F, FR, FR^2, FR^3\}$ simetri grupları kullanılmıştır. Bunun sonucu olarak elde edilen asal değerler değişik kez tekrarlanmış olarak ve asal fonksiyonlar orta-düzlem $z=0$ etrafında aynı ve aksi simetrik olarak ortaya çıkarlar. Elde edilen ilk beş asal değer her bir açı için toplamaları bire tamamlanmış olarak Tablo 5’de sunulmuştur:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $\chi = 0^\circ$ | {0,1,1} 2 0.379e+0 | {1,0,1} 2 0.302e-1 | {1,1,1} 4 0.289e-1 | {1,2,1} 4 0.487e-2 | {0,2,1} 2 0.385e-2 |
| $\chi = 15^\circ$ | {0,1,1} 2 0.366e+0 | {1,0,1} 2 0.338e-1 | {1,1,1} 4 0.327e-1 | {1,2,1} 4 0.527e-2 | {0,2,1} 2 0.383e-2 |
| $\chi = 30^\circ$ | {0,1,1} 2 0.335e+0 | {1,1,1} 4 0.421e-1 | {1,0,1} 2 0.419e-1 | {1,2,1} 4 0.592e-2 | {0,2,1} 2 0.459e-2 |
| $\chi = 45^\circ$ | {0,1,1} 2 0.295e+0 | {1,1,1} 4 0.533e-1 | {1,0,1} 2 0.507e-1 | {0,2,1} 2 0.598e-2 | {1,2,1} 4 0.567e-2 |
| $\chi = 60^\circ$ | {0,1,1} 2 0.253e+0 | {1,1,1} 4 0.653e-1 | {1,0,1} 2 0.601e-1 | {0,2,1} 2 0.867e-2 | {2,1,1} 4 0.557e-2 |
| $\chi = 75^\circ$ | {0,1,1} 2 0.226e+0 | {1,1,1} 4 0.721e-1 | {1,0,1} 2 0.661e-1 | {0,2,1} 2 0.104e-1 | {2,1,1} 4 0.828e-2 |
| $\chi = 90^\circ$ | {0,1,1} 4 0.604e-1 | {1,1,1} 4 0.583e-1 | {0,1,2} 4 0.475e-1 | {0,1,3} 4 0.316e-1 | {1,1,2} 4 0.139e-1 |

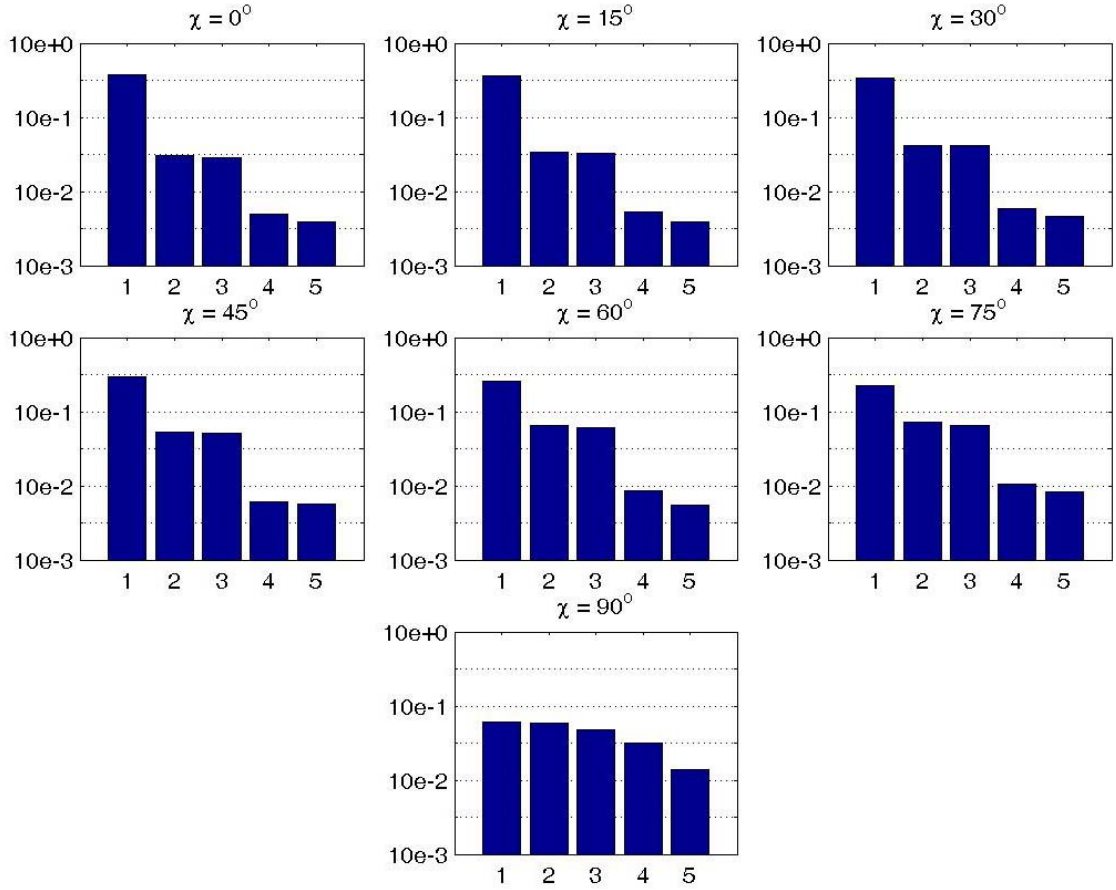
Tablo 5: İlk 5 asal değerın açılara göre dağılımı. Karşılaştırmayı mümkün kılmak için asal değer λ_k toplam içindeki büyüklüğüne göre verilmiştir, yani $\lambda_k / \sum_k \lambda_k$.

Kıvrık parantez içindeki dalga numaraları $\{m,n,q\}$ her bir KL baz ailesini tanımlamaktadır ve verilen tekrar sayısı kadar üye KL baz fonksiyonunu içerir.

Örneğin, $\chi = 90^\circ$ açı değerindeki $\{0,1,1\}$ KL baz ailesi verilen tekrar sayısı 4 kadar üye içerir, yani, $\{(0,1,1), (0,-1,1), (1,0,1), (-1,0,1)\}$. Bu, kullanılan simetri grubunun bir sonucudur. Bunun yanında $\chi = 30^\circ$ açı değerindeki $\{0,1,1\}$ KL baz ailesi verilen

tekrar sayısı 2 kadar üye içerir, yani, $\{(0,1,1), (0,-1,1)\}$. Burada, (m,n,q) ve $(-m,-n,q)$ KL baz çifti, birbirinin kompleks eşleniğidir.

Tablo 5'deki asal değerlerin açılara göre dağılımı Şekil 7'de logaritmik ölçekte gösterilmektedir.



Şekil 7: Tablo 5'deki asal değerlerin açılara göre logaritmik ölçekte dağılımı.

Şekil 7'de görüldüğü gibi açının büyümesiyle akış enerjisi görünen ilk beş KL baz elemanı arasında daha adil olarak paylaşılmaktadır. Akış enerjisi paylaşımına daha çok elemanın katılması, ortaya çıkan akış dinamiğinin daha karmaşık linear olmayan

bir yapıda olmasını sağlar. Girişte bahsedildiği gibi sarmalların linear olmayan özelliklerinin uygulanan manyetik alanın sadece dik bileşeninden etkilendiği bilinmektedir. Bunun yanında yatay ve yataya yakın ara açılarda tek bir eleman akış dinamiğini baskın olarak yönlendirmektedir.

KL baz elemanlarının herbiri bağımsız bir özelliğini taşıdıkları akışın aynı zamanda fiziksel yapı taşlarını oluştururlar. Akışın zaman evrimini incelemek için en yüksek akış enerjisi taşıyan ilk üç KL baz elemanının temsil ettiği fiziksel yapılar ve bu yapıların zaman evrimini göz önüne alacağız. Süreklilik denklemi (1a) üç hız bileşenini birbirine bağladığından hız vektörü aslında iki değişken v ve η tarafından temsil edilebilmektedir (Yıldırım, 2007). Bu değişkenler, akışı şöyle:

$$\bar{u} = \bar{\delta} v + \bar{\epsilon} \eta, \quad (36)$$

oluşturur, burada $\bar{\delta}$ ve $\bar{\epsilon}$ operatörleri

$$\bar{\delta} v \equiv \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times v \bar{e}_z), \quad \bar{\epsilon} \eta \equiv \bar{\nabla} \times \eta \bar{e}_z \quad (37)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımlama altında KL baz elemanları Ψ_j^k , $j=1,2,3$, şeklinde:

$$\Psi_j^k(\mathbf{x}) = \delta v^k(\mathbf{x}) + \epsilon \eta^k(\mathbf{x}) \quad (38)$$

yazılır ve bunun sonucunda

$$v^k(\mathbf{x}) = v^k(z) \exp\left(2\pi i \left(\frac{mx}{s_x} + \frac{ny}{s_y}\right)\right). \quad (39)$$

$$\eta^k(\mathbf{x}) = \eta^k(z) \exp\left(2\pi i \left(\frac{mx}{s_x} + \frac{ny}{s_y}\right)\right). \quad (40)$$

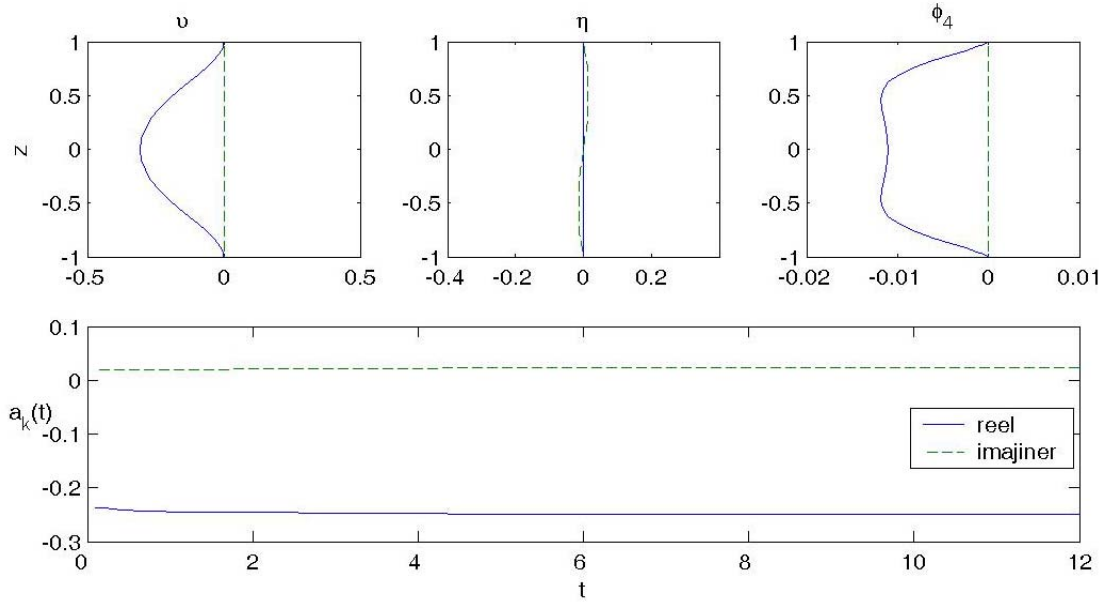
formunu alırlar. Karışmayacağını umarak $v^k(\mathbf{x})$, $v^k(z)$ ve $\eta^k(\mathbf{x})$, $\eta^k(z)$ için aynı semboller kullanılmıştır. Burada, $(m, n) \neq (0, 0)$, $\alpha = 2\pi/s$ için

$$v^k(z) = \frac{\phi_3^k(z)}{\alpha^2(m^2 + n^2)} \quad \text{ve} \quad \eta^k(z) = \frac{(\nabla \times (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)^k)_3(z)}{\alpha^2(m^2 + n^2)} \quad (41)$$

yani $v^k(z)$ değişkeni akışın dikey bileşeni w ile ilintiliyken, $\eta^k(z)$ değişkeni ise akışın dikey girdap bileşeni $(\nabla \times \mathbf{u})_3$ ile ilintilidir. Aşağıda, KL baz elemanının temsil

ettiği fiziksel yapı, $v^k(z)$ ve $\eta^k(z)$ profilleri ile ve bu yapının zaman evrimi, ilgili açılım katsayısı $a_k(t)$ ile gösterilecektir.

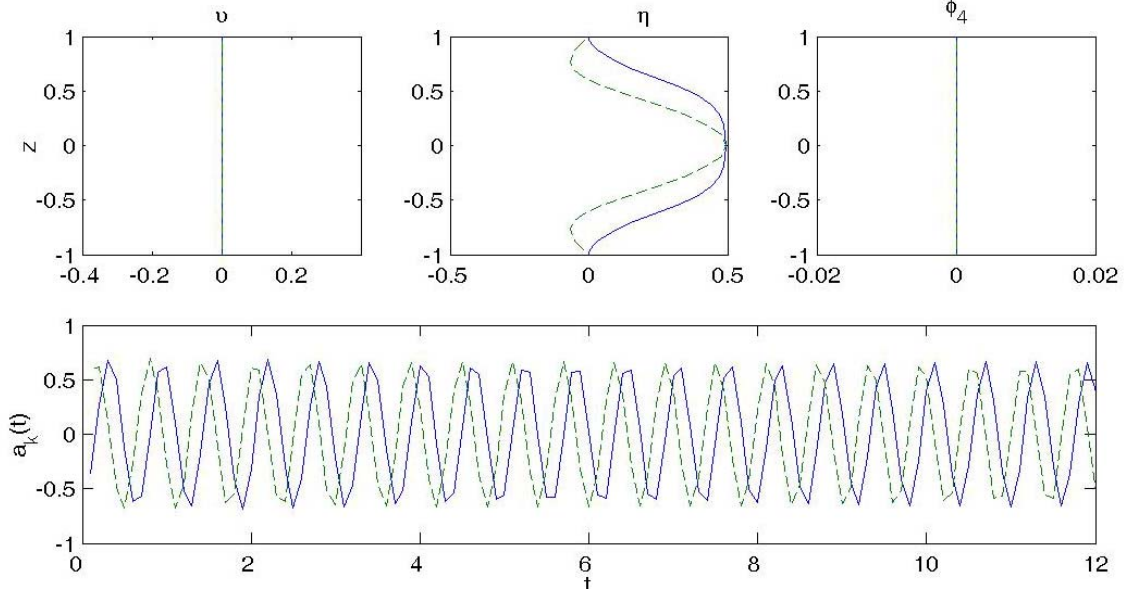
Bütün açı değerlerinde aynı tipik yapı ve zaman evrimi temsil edildiğinden, $\chi = 0^\circ$ açı değerindeki ilk üç KL baz elemanı incelenecektir. İlk enerjetik KL baz elemanı (0,1,1) ile ilgili yapı Şekil 8’de gösterilmektedir.



Şekil 8: $\chi = 0^\circ$ açı değerinde (0,1,1) KL baz elemanının yapısı ve zaman evrimi.

Bu KL baz elemanı dikey girdap bileşeni olmaması ve yatay yönlerde sadece y değişkenine bağlı olması sebebiyle, yatay x yönünde uzayıp giden sarmal yapıyı temsil etmektedir. Bu yapının seçilen parametre ($Pr = 0.1$, $Ra = 16000$, $Q = 100$) değerlerinde elde edilen rejimde evrimi $a_k(t)$ eğrisinde görüldüğü gibi, zaman t değişkeninden bağımsızdır. KL baz elemanının termal akış değişkeniyle ilintili dördüncü bileşeninin $\phi_4(z)$ hız bileşenlerine göre daha zayıf olması düşük Pr rejimiyle ilgilidir. Bu rejimde viskoz difüzivitenin termal difüziviteye göre daha düşük olması sebebiyle hız değişkeni levhaların sınırlayıcı etkisini daha az hissetmekte ve bu yüzden daha serbest ve enerjetiktir.

İkinci enerjetik KL baz elemanı (1,0,1) ile ilgili yapı Şekil 9’de gösterilmektedir.



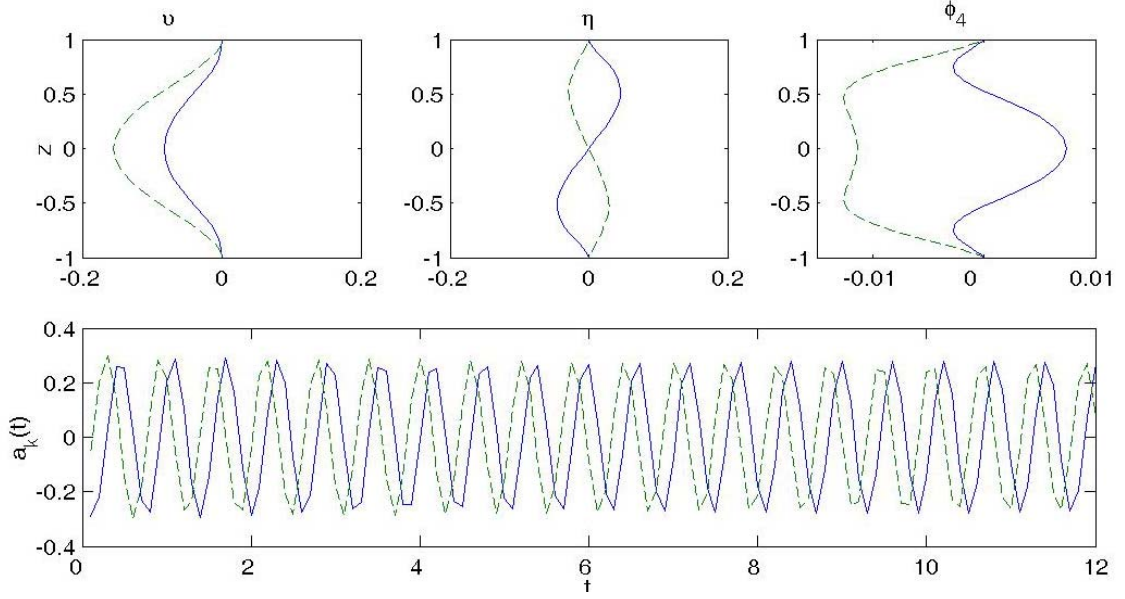
Şekil 9: $\chi = 0^\circ$ açılı değerinde (1,0,1) KL baz elemanının yapısı ve zaman evrimi.

Bu eleman, dikey girdap bileşeni olan en enerjetik yapı olması sebebiyle durağan sarmallardan oluşan rejimden, periyodik akış rejimine geçişte gözlemlenen akışın üç boyutluluk kazanması özelliğini taşımaktadır. Bu rejime geçişte dikey girdap bileşeninin önemli bir rol oynadığı bilinmektedir (Busse, 1972). Bunun yanında dikey hız bileşeninin yokluğu, bu elemanın alt ve üst tabakalar arası konvektif ısı iletimine katkı yapmadığını gösterir. Konvektif ısı iletimi kazanımını ($Nu > 1$) gösteren Nu sayısı $Nu = 1 + \langle w \theta \rangle$ şeklinde yazılabilir (Busse, 1985). Yani bu yapı akış enerjisini kullandığı halde konvektif ısı iletimine katkı yapmaz ve bu yüzden parazit bir yapıdır. Bu yapının zaman evrimi, periyodik rejimi karakterize eden ve sarmallar üzerinde yayılan dalgalarla ilintilidir ve yapının periyodik rejimde önemli rol oynadığı savını desteklemektedir. Diğer bir özellik, evriminin, sadece fazın zamana bağlı değişmesinden ibaret olduğudur, yani $a(t) = |a| \exp(2\pi i(\omega t + \tau))$ ve $|a|$ zamana bağlı olmayan sabit bir değere sahiptir. Akış $\mathbf{k} = (1,0,1)$ için oluşturulduğunda

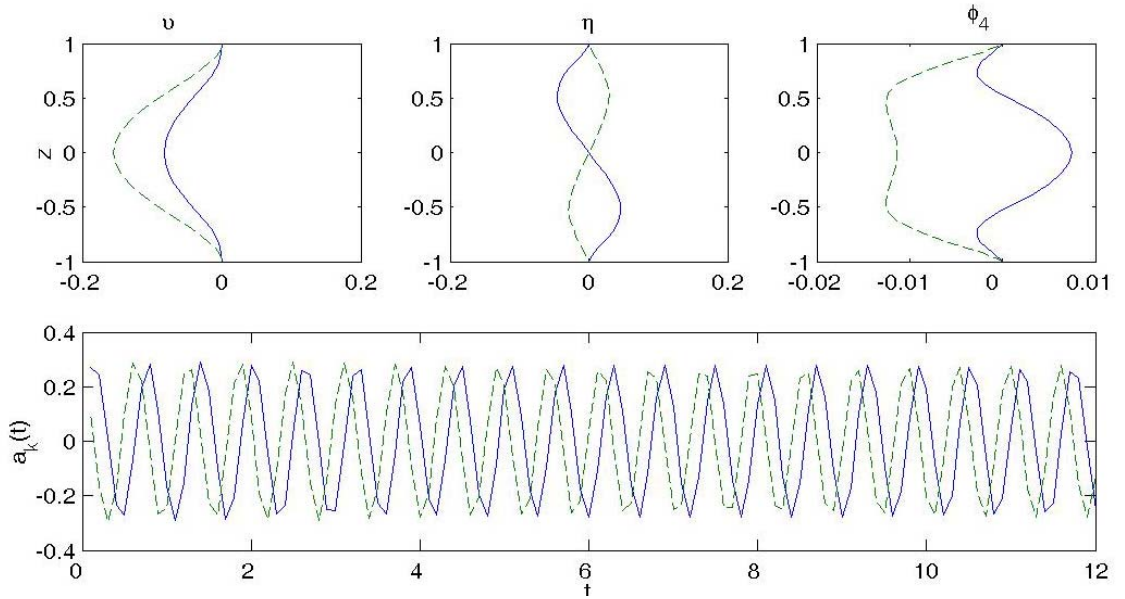
$$a_k(t) \Psi^k(\mathbf{x}) = \phi^k(z) |a_k| \exp(2\pi i(x/s + \omega t + \tau)), \quad (42)$$

bu evrimin x yönünde zamana bağlı ötelenme yani dalga yayılımı şeklinde olduğu görülür (Yıldırım, 2007).

Üçüncü enerjetik KL baz elemanı (1,1,1) ve (1,-1,1) çifti ile ilgili yapı Şekil 10 ve 11’de gösterilmektedir.



Şekil 10: $\chi = 0^\circ$ açı değerinde (1,1,1) KL baz elemanının yapısı ve zaman evrimi.



Şekil 11: $\chi = 0^\circ$ açı değerinde (1,-1,1) KL baz elemanının yapısı ve zaman evrimi.

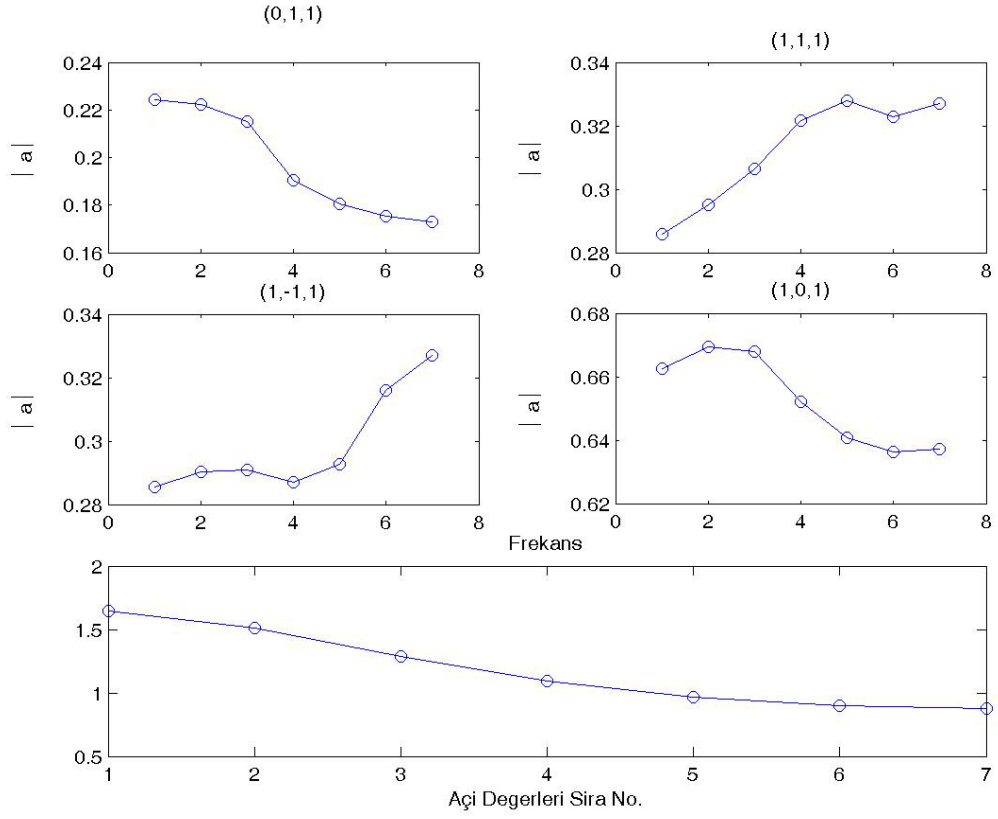
Bu iki yapı da rejimin üç boyutluluğu ve dalga yayılımıyla ilintilidir. Evrimleri sadece fazın zamana bağlı değişmesinden ibarettir.

Yapıların zaman evrimlerindeki $|a|$ ve ω değerleri Tablo 6’de sunulmuştur:

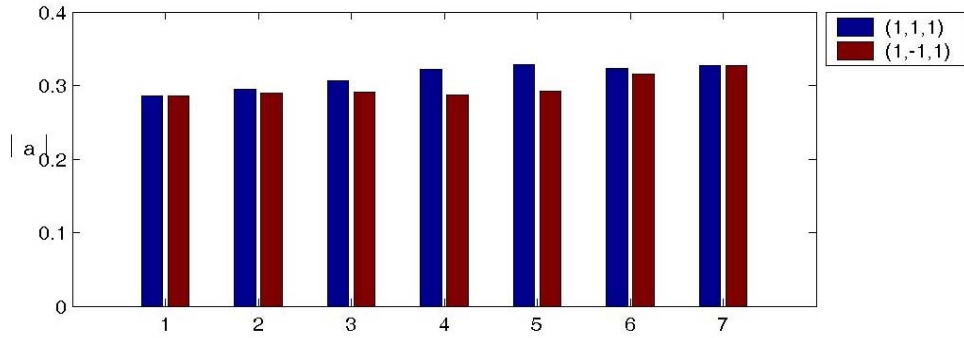
| | (0,1,1) | (1,0,1) | (1,1,1) | (1,-1,1) |
|----------------------|--------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| 1. $\chi = 0^\circ$ | $ a = 0.2244$ $\omega = 0$ | 0.6628 1.6450 | 0.2857 1.6453 | 0.2855 1.6449 |
| 2. $\chi = 15^\circ$ | 0.2221 0 | 0.6698 1.5121 | 0.2950 1.5132 | 0.2903 1.5112 |
| 3. $\chi = 30^\circ$ | 0.2150 0 | 0.6683 1.2836 | 0.3065 1.2849 | 0.2909 1.2823 |
| 4. $\chi = 45^\circ$ | 0.1903 0 | 0.6524 1.0959 | 0.3217 1.0972 | 0.2871 1.0947 |
| 5. $\chi = 60^\circ$ | 0.1803 0 | 0.6409 0.9685 | 0.3279 0.9704 | 0.2927 0.9665 |
| 6. $\chi = 75^\circ$ | 0.1752 0 | 0.6365 0.8987 | 0.3227 0.8992 | 0.3160 0.8983 |
| 7. $\chi = 90^\circ$ | 0.1731 0 | 0.6375 0.8763 | 0.3270 0.8763 | 0.3270 0.8763 |

Tablo 6: En enerjetik KL elemanlarının zamana bağlı evriminin $a(t) = |a| \exp(2\pi i(\omega t + \tau))$, büyüklük $|a|$ ve frekans ω değerlerinin açılara göre dağılımı.

Tablo 6’deki değerler Şekil 12’de grafik halinde sunulmuştur. Şekilde görüldüğü gibi büyüklük ve frekans değerlerinin değişiminde $\chi = 45^\circ$ (4. sıra) açı değeri bir dönüm noktası oluşturmaktadır. Bu açı öncesi ve sonrasında değerler değişik eğilim içindedir. Ayrıca Şekil 13’de (1,1,1) ve (1,-1,1) KL elemanlarının açılım katsayısı büyüklüklerinin açı değerlerine göre değişimi karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Ara açı değerlerinde sergilenen bu davranışın işaret ettiği fiziksel olgu inceleme aşamasındadır.



Şekil 12: Tablo 6’da sıralanan büyüklük ve frekans bulgularının açı değerlerine göre değişimi. Açı değerleri sıralaması Tablo 6’daki gibidir.



Şekil 13: KL baz elemanları (1,1,1) ve (1,-1,1) arasında büyüklük değerlerine göre bir karşılaştırma.

7 Düşük Boyutlu Model Sistemin Formülasyonu

Manyetik alanın etkisi altında Rayleigh-Benard konvektif akışını modelleyen denklemlerin (1 ve 4), 3. kısımda geliştirilen sayısal çözüm metodu kullanılarak, akış

dinamiğinin yeterince zengin bir kesitini verebilen seçilmiş parametre değerlerinde $\{Ra^0, Pr^0, Q=0, s_x = s_y = s\}$ çözümlenmesiyle elde edilen akış veri topluluğunu gözönüne alalım. Bu akışı oluşturan hız $v = [u, v, w](x, t)$ ve sıcaklık $\theta = [\theta](x, t)$ veri toplulukları ayrı ayrı kullanılarak, hız $U_j(m, n, q; z)$, $j=1,2,3$ ve sıcaklık $\Theta(m, n, q; z)$ KL baz fonksiyonları elde edilip, dolayısıyla, akış bileşenlerinin açılımda

$$u_j(x, t) = \sum_k a_k(t) U_j^k(z) \exp(2\pi i(m x / s_x + n y / s_y)), \quad (43)$$

$$\theta(x, t) = \sum_k c_k(t) \Theta^k(z) \exp(2\pi i(m x / s_x + n y / s_y)), \quad (44)$$

kullanılabilir. Burada, hız ve sıcaklık KL baz fonksiyonları dalga numaraları $\mathbf{k} = (m, n, q)$ endeks vektörü ile belirtilen Fourier açılımları ile verilmiştir:

$$U^k(z; x, y) = U^k(z) \exp(2\pi i(m x / s_x + n y / s_y)) \quad (45)$$

$$\Theta^k(z; x, y) = \Theta^k(z) \exp(2\pi i(m x / s_x + n y / s_y)). \quad (46)$$

KL baz fonksiyonları, akışın, sınır şartları ve solenoidal karakteri gibi özelliklerini sağladıkları ve her biri akışın bağımsız bir özelliğini enerji ölçeğinde en iyi dağılımla taşıdıkları için Galerkin metodu vasıtasıyla düşük boyutlu bir model sistemi elde edilmesinde kullanılabilir. Ayrıca, KL baz fonksiyonlarının solenoidal karakteri, Galerkin metodunun uygulanmasıyla basınç değişkenini içeren gradyan teriminin VII düşmesini sağlar. Bu ve sonraki kısma konu olan çalışma, “8th. World Congress on Computational Mechanics, Venice, Italy, June 2008” kongresinde sunulmuştur (Tarman, 2008).

Düşük boyutlu dinamik modeli oluşturmak için, öncelikle akışın yaklaşık bir açılımı

$$u \approx u_s = \sum_{k \in S} a_k(t) U^k(z; x, y), \quad (47)$$

$$\theta \approx \theta_s = \sum_{k \in S} c_k(t) \Theta^k(z; x, y), \quad (48)$$

KL baz fonksiyonlarının fiziksel önemine göre seçilmesiyle elde edilir. Burada, S seçilmiş KL baz fonksiyonlarının endeks kümesidir. Bu yaklaşık açılımın, manyeto-konvektif model denklemlerini

$$\text{Res}_u(u, \theta; \mathbf{b}) \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \left\{ \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla \Pi + \text{Pr Ra}_h \theta \mathbf{e}_z + \text{Pr} \nabla^2 \mathbf{u} + Q_h \text{Pr} (\mathbf{e}_z \cdot \nabla) \mathbf{b} \right\} = 0, \quad (49)$$

$$\text{Res}_\theta(u, \theta) \equiv \frac{\partial \theta}{\partial t} - \left\{ -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta + \frac{1}{2} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{u} + \nabla^2 \theta \right\} = 0, \quad (50)$$

Galerkin metoduyla sağlamaya zorlanmasıyla

$$\left(\mathbf{U}^k(z; x, y), \text{Res}_u(\mathbf{u}_s, \theta_s; \mathbf{b}_s) \right)_x = 0, \quad (51)$$

$$\left(\Theta^k(z; x, y), \text{Res}_\theta(\mathbf{u}_s, \theta_s) \right)_x = 0, \quad (52)$$

açılım katsayılarının $a_k(t)$ ve $c_k(t)$ zaman evrimini modelleyen dinamik sistem

$$\frac{d}{dt} a_k = \text{FU}_k(a_i, c_j), \quad (53a)$$

$$\frac{d}{dt} c_k = \text{FT}_k(a_i, c_j), \quad (53b)$$

her bir $\mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{j} \in S$ için elde edilir. Burada, yarı-yükseklik büyüklüğüne dayanan Chandrasekhar sayısı $Q_h = \frac{1}{4} Q$ (bknz. 2. kısım) kullanılmıştır.

Dinamik sistemi oluşturan

$$\text{FU}_k \equiv \text{Ra}_h \text{Pr} \text{PU}(\mathbf{k}; \mathbf{i}) c_i + \text{Pr} \text{DU}(\mathbf{k}; \mathbf{i}) a_i + \text{NU}(\mathbf{k}; \mathbf{i}, \mathbf{j}) a_i a_j + Q_h \text{Pr} \text{MU}(\mathbf{k}; \mathbf{i}) a_i, \quad (54a)$$

$$\text{FT}_k \equiv \text{PT}(\mathbf{k}; \mathbf{i}) a_i + \text{DT}(\mathbf{k}; \mathbf{i}) c_i + \text{NT}(\mathbf{k}; \mathbf{i}, \mathbf{j}) a_i c_j. \quad (54b)$$

katsayılar, endeks vektörlerinin açılımlarını $\mathbf{k} = (k_1, k_2, q_k)$, $\mathbf{i} = (i_1, i_2, q_i)$, $\mathbf{j} = (j_1, j_2, q_j)$ kullanarak, şöyle tanımlanır:

$$\text{PU}(\mathbf{k}; \mathbf{i}) = \left(\mathbf{U}^k(z; x, y), \Theta^i(z; x, y) \mathbf{e}_z \right)_x, \quad (55a)$$

$$\text{PT}(\mathbf{k}; \mathbf{i}) = \left(\Theta^k(z; x, y), \frac{1}{2} \mathbf{U}_3^i(z; x, y) \right)_x, \quad (55b)$$

$$\text{DU}(\mathbf{k}; \mathbf{i}) = \left(\mathbf{U}^k(z; x, y), \Delta \mathbf{U}^i(z; x, y) \right)_x, \quad (55c)$$

$$\text{DT}(\mathbf{k}; \mathbf{i}) = \left(\Theta^k(z; x, y), \Delta \Theta^i(z; x, y) \right)_x, \quad (55d)$$

$$\text{MU}(\mathbf{k}; \mathbf{i}) = \left(\mathbf{U}^k(z; x, y), [\mathbf{e}_z \cdot \nabla] \mathbf{b}^i(z; x, y) \right)_x, \quad (55e)$$

$k_1 = i_1, k_2 = i_2$, ve

$$NU(\mathbf{k}; \mathbf{i}, \mathbf{j}) = (\mathbf{U}^k, \mathbf{U}^i \times (\nabla \times \mathbf{U}^j))_x, \quad (55f)$$

$$NT(\mathbf{k}; \mathbf{i}, \mathbf{j}) = (\Theta^k, -(\mathbf{U}^i \cdot \nabla) \Theta^j)_x, \quad (55g)$$

$k_1 = i_1 + j_1$, $k_2 = i_2 + j_2$. Doğrusal olmayan terim katsayısı $NU(\mathbf{k}; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ hesaplanırken, üçlü bağıntının

$$NU(\mathbf{k}; \mathbf{i}, \mathbf{j}) + NLIN(-\mathbf{i}; -\mathbf{k}, \mathbf{j}) + NLIN(-\mathbf{j}; \mathbf{i}, -\mathbf{k}) = 0, \quad (56)$$

sağlandığı doğrulanmıştır. Burada $-\mathbf{k} = (-k_1, -k_2, q_k)$.

Lorentz teriminin (55e) hesaplanması özel ilgi gerektirmektedir. Hız KL açılımının (47), indüklenmiş manyetik alan \mathbf{b} ile konvektif akışı \mathbf{u} bağlayan bağıntıda

$$\nabla^2 \mathbf{b} = -(\mathbf{e}_z \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (57)$$

yerine konmasıyla

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \gamma^2 \right] \mathbf{b}^k(z) = -\frac{d}{dz} \mathbf{U}^k(z) \quad (58)$$

elde edilir. Burada $\mathbf{b}^k(z; x, y) = \mathbf{b}^k(z) \exp(2\pi i(mx/s_x + ny/s_y))$ ve $\gamma = \frac{2\pi}{s} \sqrt{m^2 + n^2}$.

Elde edilen denklemin (58) her bir $\mathbf{U}^k(z) = (U_1^k, U_2^k, U_3^k)(z)$ asal fonksiyonuna karşılık gelen indüklenmiş manyetik alan değişkeni $\mathbf{b}^k = (b_1^k, b_2^k, b_3^k)(z)$ için, sınır şartları

$$\frac{db_1^k}{dz} = \frac{db_2^k}{dz} = b_3^k = 0 \quad z = \mp 1. \quad (59)$$

kullanılarak çözülmesi gerekmektedir.

Bu denklemin (58-59) çözümünde, indüklenmiş manyetik alanın $b_1^k(z)$ ve $b_2^k(z)$ bileşenleri için Neumann sınır şartlarını (59) kendinden sağlayan Legendre-Hermit polinomları, $b_3^k(z)$ bileşeni ve $\mathbf{U}^k(z)$ için Legendre-Lagrange polinomları kullanılmıştır:

$$b_i^k(z) = \sum_{j=0}^{N_z} b_i^k(z_j) L_j^{(i)}(z) \equiv b_{i,j}^k L_j^{(i)}, \quad (60a)$$

$$U_i^k(z) = \sum_{j=0}^{N_z} U_i^k(z_j) L_j^{(3)}(z) \equiv U_{i,j}^k h_j, \quad i=1,2,3. \quad (60b)$$

Burada, j endeksi $1 \leq j \leq N_z - 1$ aralığında değişirken,

$$L_j^{(1,2)}(z) = \begin{cases} \left\{ \frac{1+z}{2} + \left(\frac{1}{2} + h'_0(1) \right) \left(\frac{1-z^2}{2} \right) \right\} h_0(z) & \text{for } j=0 \\ \left(\frac{1-z^2}{1-z_j^2} \right) h_j(z) & \text{for } j \neq 0, N_z, \\ \left\{ \frac{1-z}{2} + \left(\frac{1}{2} - h'_{N_z}(-1) \right) \left(\frac{1-z^2}{2} \right) \right\} h_{N_z}(z) & \text{for } j=N_z \end{cases} \quad (61)$$

ve $L_j^{(3)}(z) = h_j(z)$. Bu açılımlar, diferansiyel denklemde (58) yerine konduğunda, matrix denklemleri

$$H_{ij}^{b_1} b_{1j}^k = F_{ij} U_{1j}^k, \quad 0 \leq i, j \leq N_z, \quad (62a)$$

$$H_{ij}^{b_2} b_{2j}^k = F_{ij} U_{2j}^k, \quad 0 \leq i, j \leq N_z, \quad (62b)$$

$$H_{ij}^{b_3} b_{3j}^k = F_{ij} U_{3j}^k, \quad 1 \leq i, j \leq N_z - 1, \quad (62c)$$

elde edilir. Burada,

$$\mathbf{H}^{b_1} = \mathbf{H}^{b_2} = \mathbf{E}^{(1,2)} - \gamma^2 \mathbf{I}, \quad (63a)$$

$$\mathbf{H}^{b_3} = \mathbf{E}^{(3)} - \gamma^2 \mathbf{I}, \quad (63b)$$

$$E_{ij}^{(\ell)} = \frac{d^2}{dz^2} (L_j^{(\ell)}(z)) \Big|_{z=z_i}, \quad \ell=1,2,3, \quad (63c)$$

$$F_{ij} = -\frac{d}{dz} (h_j(z)) \Big|_{z=z_i}. \quad (63d)$$

Ayrıca, akış denklemleri (49, 57) ve homojen Neumann sınır koşulları (59) altında, b_x , b_y değişkenlerinde bir sabite kadar olan belirsizlik vardır. Bu belirsizlik $\mathbf{k} = (m=0, n=0, q)$ endeks vektörü değerinde

$$b_1^k(z=0) = b_2^k(z=0) = 0 \quad (64)$$

ek şartları ile giderilmiştir.

8 Manyeto-Konvektif Akışın KL (Dinamik) Analizi

Bu bölümde, düşük boyutlu modeli manyetik bir alan etkisinde test etmek için sade konvektif akışı belirten bir veri topluluğu türetilmiştir. Bu veri topluluğu, Rayleigh-

Benard konvektif akışını modelleyen model denklemlerin (1 ve 4), 3. kısımda geliştirilen sayısal yöntemle $Ra = 30000$, $Pr = 0.1$, $Q = 0$ parametre değerlerinde ve $\Gamma = 2:2$ oranına sahip geometride, $24 \times 24 \times 24$ çözünürlük ve $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ zaman adımı ile çözümlenerek elde edilmiştir. Bu akış, karmaşık hareketlerin henüz başladığı bir rejimde bulunmaktadır. İki-noktalı korelasyon tensörü (22) oluşturularak, KL asal fonksiyonları $U^k(z)$ ve $\Theta^k(z)$, bazı $k = (m, n, q)$ endeks değerleri için integral denklemi (27) çözümlenerek elde edilmiştir. Her bir $U^k(z)$ asal fonksiyonuna karşılık gelen indüklenmiş manyetik alan değişkeni $b^k(z)$, (37-38) denklemi çözümlenerek elde edilmiştir. Temel asal fonksiyonlar $U^k(z)$, $\Theta^k(z)$ ve $b^k(z)$, Şekil 14-19'da gösterilmiştir. Bu şekillerde asal fonksiyonların yapılarında taşıdıkları orta-düzlem $z=0$ etrafındaki simetri görülmektedir. Ayrıca sayma sayısı q arttıkça asal fonksiyonlar artan kıvrımsal yapıya sahip olmaktadır ve bu asal fonksiyonların q arttıkça yapılarında akışın daha küçük ölçekli bileşenlerini taşıdıklarını göstermektedir.

En çok akış enerjisi taşıyan beş KL yapısı, asal değerleriyle gösterilen enerji içeriklerine göre sıralanarak Tablo 7 ve 8'de enerji tümüne yüzde katkısı ile gösterilmiştir. Tablo 8'deki ilk sıcaklık asal değerinin yüksekliği, ortalama sıcaklık bileşeninden kaynaklanmaktadır.

| Sıra | $\{m, n, q\}$ | Tekrar | % |
|------|---------------|--------|-----|
| 1 | $\{1, 0, 1\}$ | 4 | 7.9 |
| 2 | $\{1, 1, 1\}$ | 4 | 3.4 |
| 3 | $\{1, 0, 2\}$ | 4 | 2.7 |
| 4 | $\{1, 0, 3\}$ | 4 | 2.0 |
| 5 | $\{1, 1, 2\}$ | 4 | 1.0 |

Tablo 7: İlk beş hız KL asal değerleri

| Sıra | { m,n,q } | Tekrar | % |
|------|-----------|--------|------|
| 1 | { 0,0,1 } | 1 | 53 |
| 2 | { 1,0,1 } | 4 | 7.2 |
| 3 | { 1,1,1 } | 4 | 2.2 |
| 4 | { 2,0,1 } | 4 | 0.24 |
| 5 | { 2,1,1 } | 8 | 0.16 |

Tablo 8: İlk beş sıcaklık KL asal değerleri

Burada, KL asal değerinin tekrar sayısı (degeneracy), her bir KL yapısının simetrikler dolayısıyla ait olduğu yapı ailesi içindeki üye sayısını vermektedir. Örneğin, tekrar sayısı 4 olan {1,0,1} ailesinde $\{(1,0,1);(0,1,1);(-1,0,1);(0,-1,1)\}$ üyeleri bulunmaktadır.

Düşük boyutlu dinamik sistemi oluşturacak olan KL yapılarının seçiminde

$$S = \left\{ (m,n,q) \mid \sqrt{m^2 + n^2} < 2 \text{ and } 1 \leq q \leq 4 \right\} \quad (65)$$

kriteri kullanılmıştır. Bu kriter kullanılarak, akışın simetri yapısını tam olarak karakterize eden ve akışın yatay yönlerdeki yönbağımsızlığını (isotropicity) gözönüne alan bir KL yapıları havuzu oluşturulması amaçlanmıştır. KL yapılarının enerji içeriklerinin en iyi dağılıma sahip olma özelliği, bu yapıların türetildiği referans parametre değerlerinde $\{Ra^0, Pr^0, s_x = s_y = s\}$ gerçekleşmesine karşın, bu dağılım (Tablo 7-8) seçilme kriterinin (65) oluşturulmasında etkili olmuştur. Elde edilen düşük boyutlu dinamik modelin farklı parametre değerlerine karşılık gelen rejimlerin incelenmesinde kullanılması amaçlanmaktadır.

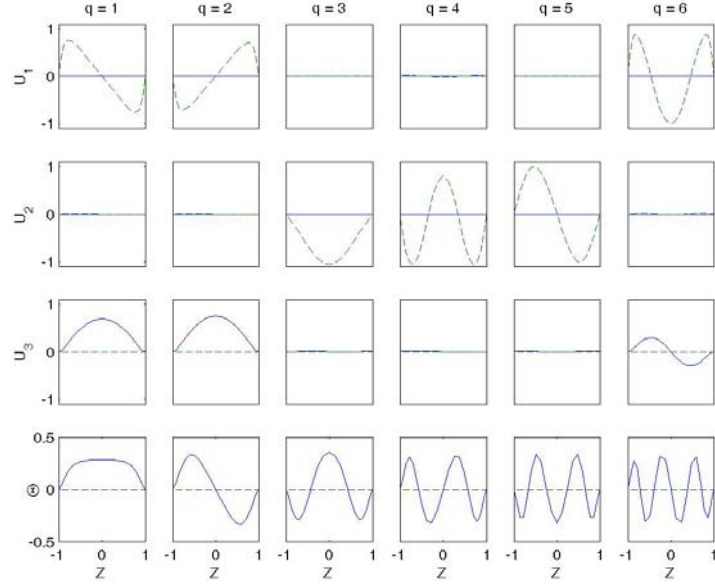
| Sıra | (m,n,q) | Sıra | (m,n,q) |
|------|------------|------|------------|
| 1 | (1,0,1) | 11 | (1,1,2) |
| 2 | (0,1,1) | 12 | (1,-1,2) |
| 3 | (1,0,2) | 13 | (1,1,3) |
| 4 | (0,1,2) | 14 | (1,-1,3) |
| 5 | (1,0,3) | 15 | (1,1,4) |
| 6 | (0,1,3) | 16 | (1,-1,4) |
| 7 | (0,1,4) | 17 | (0,0,1) |
| 8 | (1,0,4) | 18 | (0,0,2) |
| 9 | (1,1,1) | 19 | (0,0,3) |
| 10 | (1,-1,1) | 20 | (0,0,4) |

Tablo 9: KL yapılarının, Şekil 20-21’de kullanılan sıralaması.

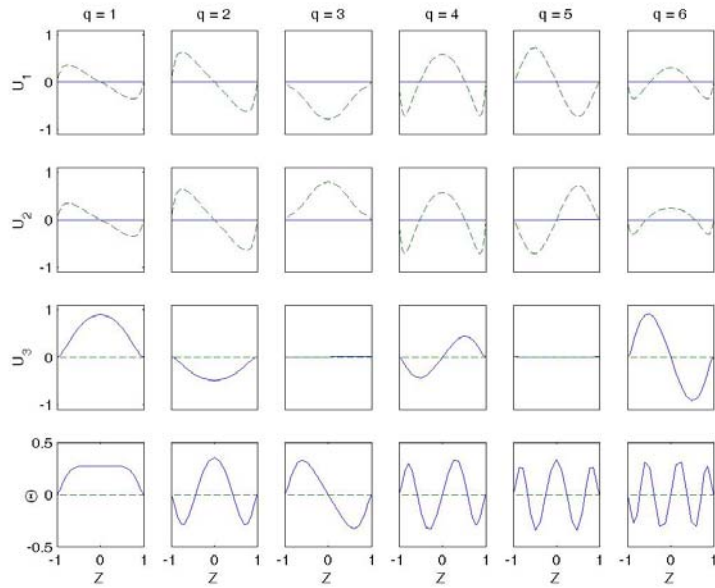
Elde edilen düşük boyutlu dinamik model sistemin (53) zaman değişkeninde sayısal olarak çözülmesiyle elde edilen sonuç, manyetik alanın konvektif akış üzerindeki beklenen etkileri ile kalitatif olarak karşılaştırılarak test edilmiştir. Sonuçlar Şekil 20-24’de gösterilmektedir. Bu şekillerdeki KL yapılarının sıralaması Tablo 9’da gösterildiği gibidir. Bu ilk test sonuçları, KL yapıları temeline dayanarak kurulan düşük boyutlu dinamik model sistem kullanılarak, manyetik alanın konvektif akış üzerindeki beklenen etkilerinin kalitatif olarak benzetiminin mümkün olduğunu göstermiştir. Burada uygulanan manyetik alanın açısı $\chi=90^\circ$ ’dır. Elde edilen rejimlerin literatürde elde edildiği parametre değerlerinin çok altındaki değerlerde (Şekil 20-21’deki $Ra=800$ ve $Ra=1000$ değerleri gibi) elde edilmesi, dinamik sistemi bu test aşamasında oluşturan KL yapılarının yetersiz sayıda seçilmesinin etkisi olmuştur. Az sayıda KL yapısının katıldığı bir dinamik sistemde yeterli yitirgenlik oluşmadığı için sistemde biriken enerji yüksek parametre değerlerinde oluşması beklenen rejimlerin daha küçük parametre değerlerine çekilmesine sebep olur. Genel

olarak elde edilen kalitatif sonuçlar, sistemin daha iyileştirilerek ileriye dönük kullanımını desteklemektedir.

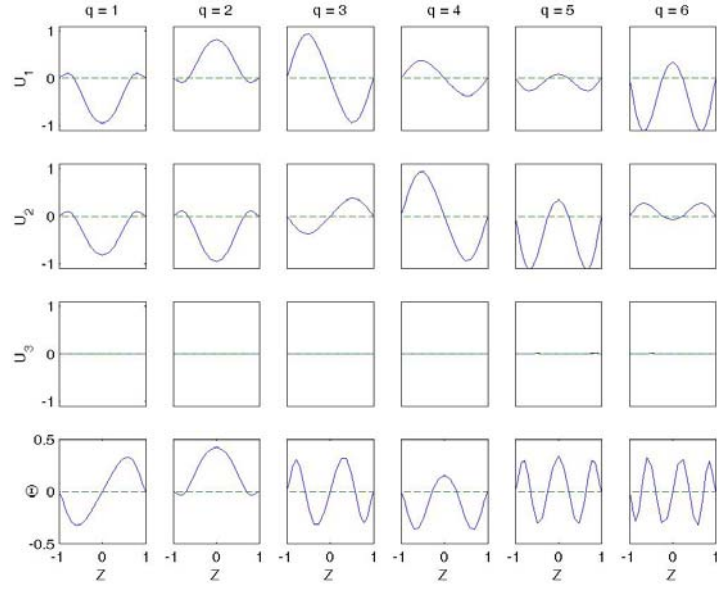
Diğer bir test çalışmasında, dinamik model (53) çeşitli manyetik alan uygulama açısı χ değerlerinde ve şiddetinde, Şekil 20’de gösterilen iki boyutlu durağan sarmalardan oluşan rejimde sayısal olarak çözülmüştür. Elde edilen zaman evrimi Şekil 24’de görülmektedir ve kalitatif olarak beklenen sonuçla örtüşmektedir. Uygulama açısı dik açıya doğru artarken uyulanan manyetik alanın etkisinde artmaktadır. Bu literatürde bilinen manyetik alanın yatay bileşeninin sarmal akış üzerinde etkisinin olmadığı ve sadece iki boyutlu sarmalların diziliş yönünü etkilediği olgusuyla örtüşmektedir. $\chi = 0^\circ$ açısıyla uygulanan manyetik alanın etkisi olarak görünen enerjideki azalmanın sayısal çözümlenmeyle ortaya çıkan yapay bir olgu (numerical artifact) olduğu düşünülmektedir. Bu, düşük boyutlu dinamik modelin (53), ana modelin temel özelliklerini taşıdığını ve sayısal bir laboratuvar olarak test amaçlı kullanılabilceğini desteklemektedir.



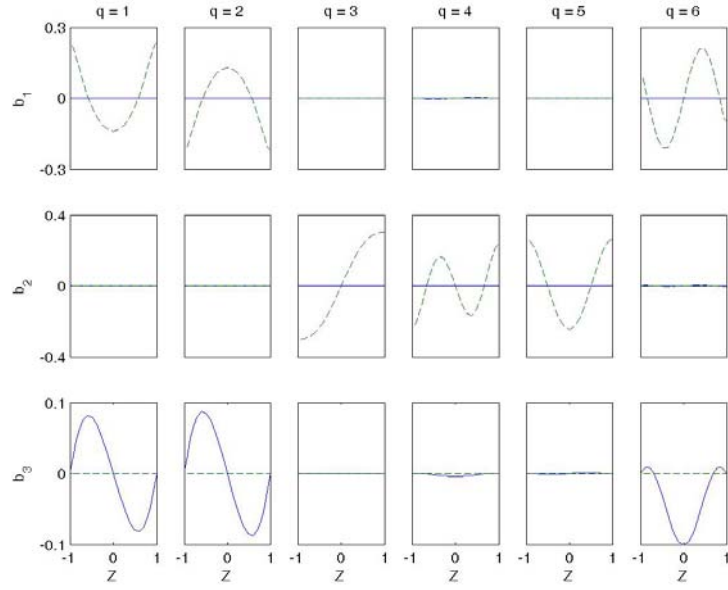
Şekil 14: $k = (1, 0, q)$ endeksli KL yapıları $U^k(z)$, $\Theta^k(z)$.



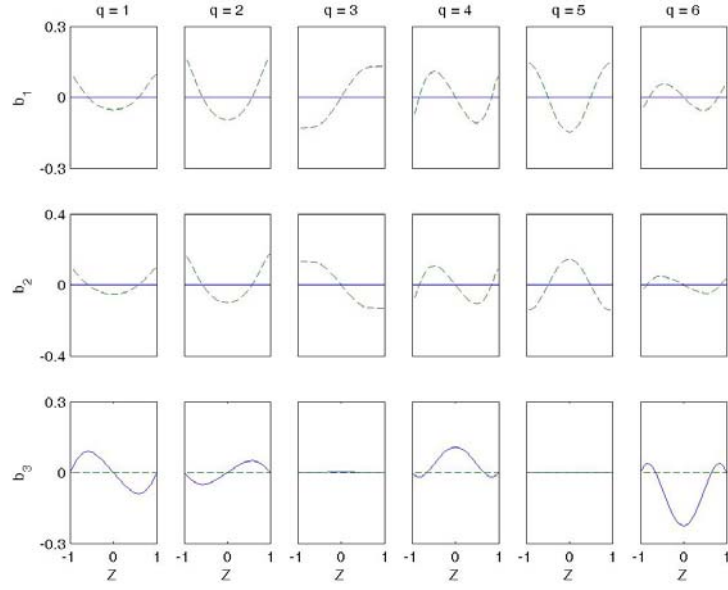
Şekil 15: $k = (1, 1, q)$ endeksli KL yapıları $U^k(z)$, $\Theta^k(z)$.



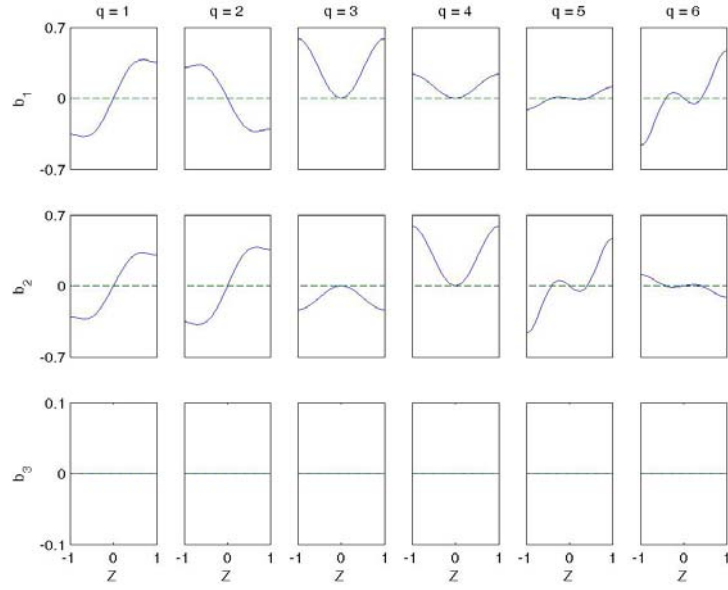
Şekil 16: $\mathbf{k} = (0, 0, q)$ endeksli KL yapıları $\mathbf{U}^k(z)$, $\Theta^k(z)$.



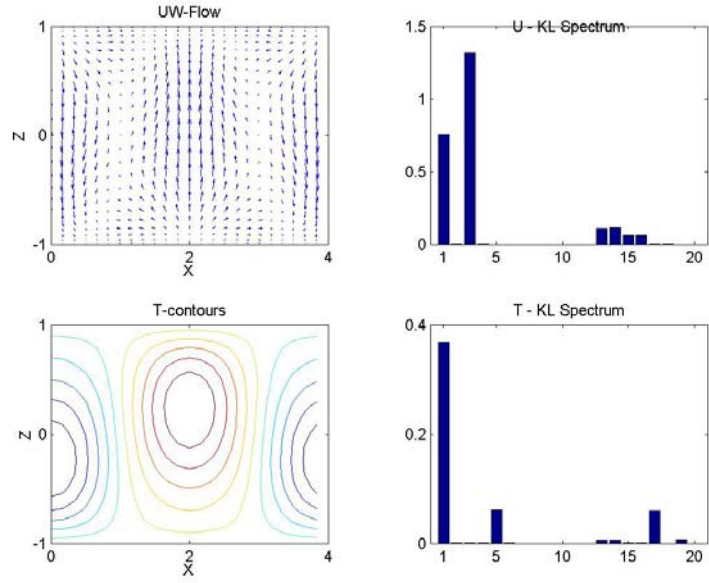
Şekil 17: $\mathbf{k} = (1, 0, q)$ endeksine karşılık indüklenmiş manyetik alan yapısı $\mathbf{b}^k(z)$.



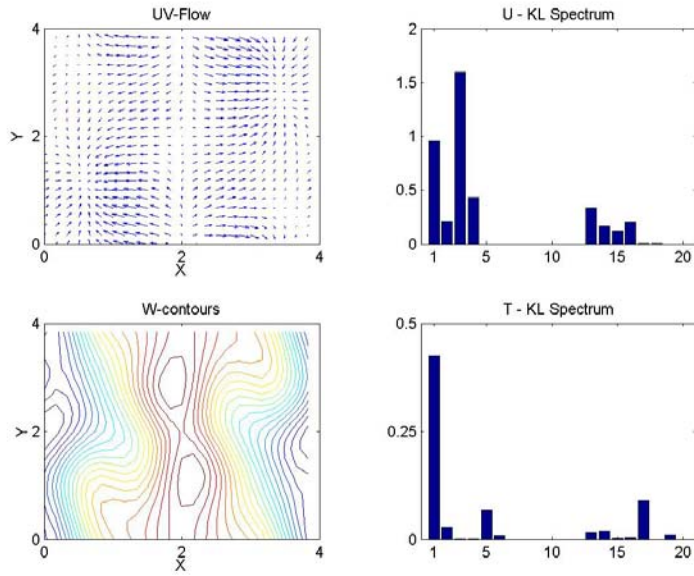
Şekil 18: $\mathbf{k} = (1, 1, q)$ endeksine karşılık indüklenmiş manyetik alan yapısı $\mathbf{b}^k(z)$.



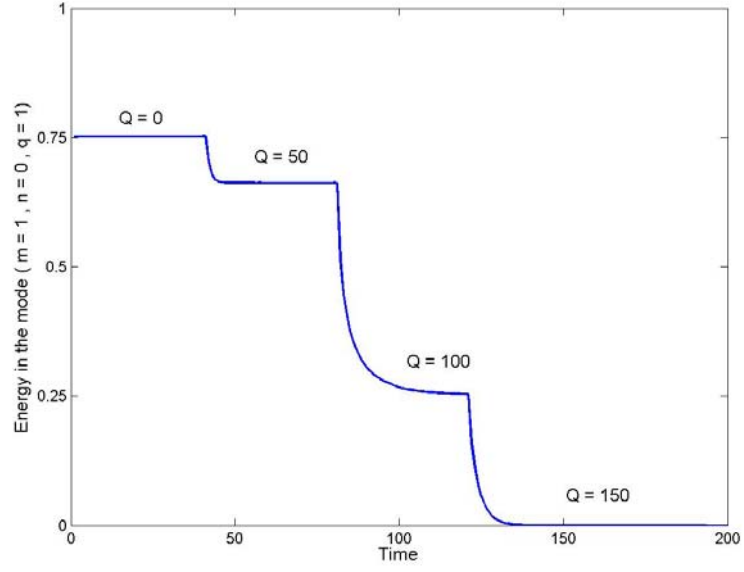
Şekil 19: $\mathbf{k} = (0, 0, q)$ endeksine karşılık indüklenmiş manyetik alan yapısı $\mathbf{b}^k(z)$.



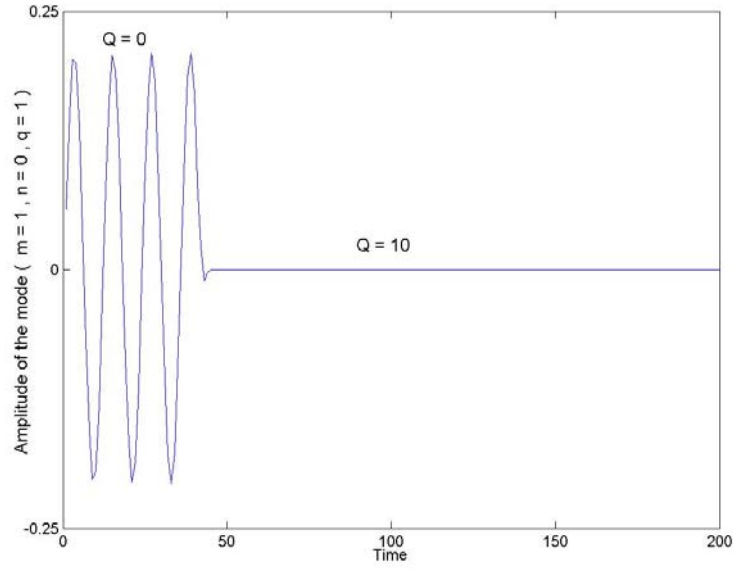
Şekil 20 : Dinamik sistemin $Ra = 800$ ve $Pr = 0.1$ parametre değerlerinde sayısal çözümüyle elde edilen iki buyutlu sarmallardan oluşan sade konvektif rejim. Bu rejimde aktif olan KL yapıları Tablo 9 sıralamasıyla gösterilmiştir.



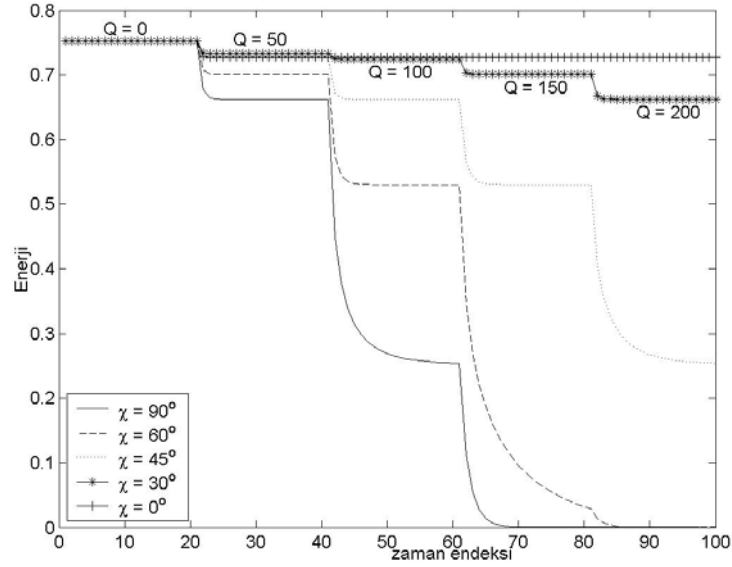
Şekil 21 : Dinamik sistemin $Ra = 1000$ ve $Pr = 0.1$ parametre değerlerinde sayısal çözümüyle elde edilen periyodik sade konvektif rejim. Bu rejimde daha fazla sayıda aktif olan KL yapıları Tablo 9 sıralamasıyla gösterilmiştir.



Şekil 22: İki boyutlu sarmallardan oluşan durağan akış rejimi (Şekil 20), manyetik alan uygulanmasıyla, seçilmiş bir açılım katsayısının $a(m = 1, n = 0, q = 1)(t)$ zaman evriminde görüldüğü gibi hareketsiz (kondüktif) rejime kademeli olarak geçmektedir.



Şekil 23: Periyodik akış rejimi (Şekil 21), manyetik alan uygulanmasıyla, seçilmiş bir açılım katsayısının $a(m = 1, n = 0, q = 1)(t)$ zaman evriminde görüldüğü gibi sönümlenmektedir.



Şekil 24: İki boyutlu sarmallardan oluşan durağan akış rejimi (Şekil 20), çeşitli uygulama açısı ve şiddetlerde manyetik alan uygulanmasıyla, seçilmiş bir açılım katsayısının $a(m=1, n=0, q=1)(t)$ enerjisinin zaman evrimi.

9 Kontrol Problemi Formülasyonu

Bu kısımda, belirli Rayleigh ve Prandtl parametre değerlerinde oluşan ısı konveksiyonu hareketinin uygulanan manyetik alan yardımıyla bastırılması probleminin optimal kontrol problemi olarak formülasyonu sunulmaktadır. Önceki kısımda sunulan sayısal testler sırasında uygulanan manyetik alan şiddeti basamaklı bir şekilde değiştirilerek akış üzerindeki etkileri oluşturulan düşük boyutlu sistem üzerinde gösterilmiştir. Bu olgunun optimal kontrol problemi olarak formülasyonunda manyetik alan şiddeti ve uygulama açısı zamana bağlı birer fonksiyon olarak ele alınarak konveksiyon akışını en iyi bastıran zamana bağlı değişim profillerinin elde edilmesi amaçlanmaktadır. Bu sebeple aşağıdaki amaç fonksiyonu en iyi çözüm için kullanılacaktır:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \, dt + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \int_0^T Q(t)^2 \, dt + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \int_0^T \left(\frac{dQ}{dt} \right)^2 \, dt + \frac{1}{2} \varepsilon_3 \int_0^T \left(\frac{d\chi}{dt} \right)^2 \, dt. \quad (66)$$

Burada son üç terim kontrol fonksiyonlarının çözüm uzayını problemin kararlılığını artırıcı yönde kısıtlayan düzenleme (regularization) görevini görmektedir.

Katsayılar, ε_1 , ε_2 ve ε_3 , düzenleme miktarını ayarlayan seçilmiş ceza (penalty) parametreleridir.

Optimal kontrol problemi akışın evrimini belirleyen denklemler ile birlikte şöyle yazılır (Gunzburger, 2003):

Amaç fonksiyonunu

$$J(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \, dt + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \int_0^T Q(t)^2 \, dt + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \int_0^T \alpha^2 \, dt + \frac{1}{2} \varepsilon_3 \int_0^T \beta^2 \, dt \quad (67)$$

en küçük değerine ulaşmasını akış denklemlerinin

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (68a)$$

$$\partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \text{Pr Ra } \theta \mathbf{e}_z + \text{Pr } \nabla^2 \mathbf{u} + Q \text{Pr} ((\mathbf{e}_x \cos \chi + \mathbf{e}_z \sin \chi) \cdot \nabla) \mathbf{b}, \quad (68b)$$

$$\partial \theta / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = \frac{1}{2} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{u} + \nabla^2 \theta, \quad (68c)$$

$$\nabla^2 \mathbf{b} = -((\mathbf{e}_x \cos \chi + \mathbf{e}_z \sin \chi) \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (68d)$$

ve yatay x, y yönlerinde periyodik, dikey yöndeki ($z = \pm 1$)

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \theta = 0 \quad \text{ve} \quad \partial b_x / \partial z = \partial b_y / \partial z = b_z = 0 \quad (68e)$$

sınır şartlarının yönlendirmesinde sağlayan profillerin

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha(t) \quad \text{ve} \quad \frac{d\chi}{dt} = \beta(t) \quad (69)$$

belirlenmesi.

Amaç fonksiyonu en küçük değer probleminde gradyanın ∇J

$$\delta J(\alpha, \beta) = J(\alpha + \delta\alpha, \beta + \delta\beta) - J(\alpha, \beta) = \int_0^T (\nabla_{\alpha} J \delta\alpha + \nabla_{\beta} J \delta\beta) dt \quad (70)$$

hesaplanması gerekmektedir. Bunun için katım (adjoint) değişkenleri \mathbf{v} , τ , ζ , q , R ve S kullanılarak amaç fonksiyonu tekrar yazılır:

$$\begin{aligned}
J(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \, dt + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \int_0^T Q(t)^2 \, dt + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \int_0^T \alpha^2 \, dt + \frac{1}{2} \varepsilon_3 \int_0^T \beta^2 \, dt \\
&- \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \left[\partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla P - \text{Pr Ra } \theta \mathbf{e}_z - \text{Pr } \nabla^2 \mathbf{u} - Q \text{Pr} ((\mathbf{e}_x \cos \chi + \mathbf{e}_z \sin \chi) \cdot \nabla) \mathbf{b} \right] d\Omega \, dt \\
&- \int_0^T \int_{\Omega} \tau \left[\partial \theta / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta - \frac{1}{2} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{u} - \nabla^2 \theta \right] d\Omega \, dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega} \zeta \cdot \left[\nabla^2 \mathbf{b} + ((\mathbf{e}_x \cos \chi + \mathbf{e}_z \sin \chi) \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] d\Omega \, dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot [\nabla \cdot \mathbf{u}] d\Omega \, dt + \int_0^T R(t) \left[\frac{dQ}{dt} - \alpha(t) \right] dt + \int_0^T S(t) \left[\frac{d\chi}{dt} - \beta(t) \right] dt.
\end{aligned}$$

Amaç fonksiyonu değişimi δJ şu şekilde yazılır:

$$\begin{aligned}
\delta J(\alpha, \beta) &= \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \, dt + \varepsilon_1 \int_0^T Q \delta Q \, dt + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \int_0^T \alpha \delta \alpha \, dt + \varepsilon_3 \int_0^T \beta \delta \beta \, dt \\
&- \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \left[\partial \delta \mathbf{u} / \partial t + (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} + \nabla \delta P - \text{Pr } \nabla^2 \delta \mathbf{u} - \delta Q \text{Pr} ((\mathbf{e}_x \cos \chi + \mathbf{e}_z \sin \chi) \cdot \nabla) \mathbf{b} \right. \\
&- Q \text{Pr} \delta \chi ((-\mathbf{e}_x \sin \chi + \mathbf{e}_z \cos \chi) \cdot \nabla) \mathbf{b} - Q \text{Pr} ((\mathbf{e}_x \cos \chi + \mathbf{e}_z \sin \chi) \cdot \nabla) \delta \mathbf{b} - \text{Pr Ra } \delta \theta \mathbf{e}_z \left. \right] d\Omega \, dt \\
&- \int_0^T \int_{\Omega} \tau \left[\partial \delta \theta / \partial t + (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \theta + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \theta - \frac{1}{2} \mathbf{e}_z \cdot \delta \mathbf{u} - \nabla^2 \delta \theta \right] d\Omega \, dt \\
&- \int_0^T \int_{\Omega} \zeta \cdot \left[\nabla^2 \delta \mathbf{b} + (\delta \chi (-\mathbf{e}_x \sin \chi + \mathbf{e}_z \cos \chi) \cdot \nabla) \mathbf{u} + ((\mathbf{e}_x \cos \chi + \mathbf{e}_z \sin \chi) \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} \right] d\Omega \, dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot [\nabla \cdot \delta \mathbf{u}] d\Omega \, dt + \int_0^T R(t) \left[\frac{d\delta Q}{dt} - \delta \alpha(t) \right] dt + \int_0^T S(t) \left[\frac{d\delta \chi}{dt} - \delta \beta(t) \right] dt.
\end{aligned}$$

Kısmi integrasyon sonucunda

$$\begin{aligned}
\delta J(\alpha, \beta) = & \int_0^T \delta \alpha [\varepsilon_2 \alpha - R] dt + \int_0^T \delta \beta [\varepsilon_3 \beta - S] dt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \left[\partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{u} - \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla q + \text{Pr} \nabla^2 \mathbf{v} - \tau \nabla \theta + \frac{1}{2} \tau \mathbf{e}_z \right. \\
& + \left. ((\mathbf{e}_x \cos \chi + \mathbf{e}_z \sin \chi) \cdot \nabla) \zeta \right] d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Omega} \delta \theta \left[\partial \tau / \partial t + \text{Pr} \text{Ra} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau + \nabla^2 \tau \right] d\Omega dt \\
& - \int_0^T \int_{\Omega} \delta \mathbf{b} \cdot \left[\nabla^2 \zeta + Q \text{Pr} ((\mathbf{e}_x \cos \chi + \mathbf{e}_z \sin \chi) \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Omega} \delta P (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\Omega dt \\
& + \int_0^T \delta Q \left(\int_{\Omega} [\text{Pr} \mathbf{v} \cdot ((\mathbf{e}_x \cos \chi + \mathbf{e}_z \sin \chi) \cdot \nabla) \mathbf{b}] d\Omega + \varepsilon_1 Q - dR/dt \right) dt \\
& + \int_0^T \delta \chi \left(\int_{\Omega} [Q \text{Pr} \mathbf{v} \cdot ((-\mathbf{e}_x \sin \chi + \mathbf{e}_z \cos \chi) \cdot \nabla) \mathbf{b} - \bar{\zeta} \cdot ((-\mathbf{e}_x \sin \chi + \mathbf{e}_z \cos \chi) \cdot \nabla) \mathbf{u}] d\Omega - dS/dt \right) dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada kullanılan ilk ve sınır değerler şöyledir:

$$\tau(\mathbf{x}, T) = R(T) = S(T) = 0, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, T) = \mathbf{0} \quad (71a)$$

$$\mathbf{v}(x, y, z = \pm 1, t) = \mathbf{0}, \quad \tau(x, y, z = \pm 1, t) = 0 \quad (71b)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} (\zeta \cdot \mathbf{e}_x) \right|_{z=\pm 1} = \left. \frac{\partial}{\partial z} (\zeta \cdot \mathbf{e}_y) \right|_{z=\pm 1} = (\zeta \cdot \mathbf{e}_z)_{z=\pm 1} = 0. \quad (71c)$$

Ayrıca yatay x ve y yönlerinde periyodik sınır koşulları kullanılmıştır. Yukarıdaki denklem sonucunda katım değişkenlerinin sağlaması gereken denklemler

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (72a)$$

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla q + \text{Pr} \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T + \tau \nabla \theta - \mathbf{u} - \frac{1}{2} \tau \mathbf{e}_z - ((\mathbf{e}_x \cos \chi + \mathbf{e}_z \sin \chi) \cdot \nabla) \zeta \quad (72b)$$

$$\partial \tau / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau = -\nabla^2 \tau - \text{Pr} \text{Ra} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z, \quad (72c)$$

$$\nabla^2 \zeta = -Q \text{Pr} ((\mathbf{e}_x \cos \chi + \mathbf{e}_z \sin \chi) \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (72d)$$

$$\frac{dR}{dt} = \varepsilon_1 Q + \text{Pr} \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot ((\mathbf{e}_x \cos \chi + \mathbf{e}_z \sin \chi) \cdot \nabla) \mathbf{b}] d\Omega, \quad (72e)$$

$$\frac{dS}{dt} = Q \text{Pr} \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot ((-\mathbf{e}_x \sin \chi + \mathbf{e}_z \cos \chi) \cdot \nabla) \mathbf{b} - \bar{\zeta} \cdot ((-\mathbf{e}_x \sin \chi + \mathbf{e}_z \cos \chi) \cdot \nabla) \mathbf{u}] d\Omega \quad (72f)$$

ve gradyan

$$\nabla_{\alpha} J = \varepsilon_2 \alpha - R \quad \text{ve} \quad \nabla_{\beta} J = \varepsilon_3 \beta - S \quad (73)$$

olarak bulunur. Duyarlılık denklemleri ise

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{u} = 0 \quad (74a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} + (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} = -\nabla \delta P + \text{Pr Ra } \delta \theta \mathbf{e}_z + \delta Q \text{Pr} ((\mathbf{e}_x \cos \chi + \mathbf{e}_z \sin \chi) \cdot \nabla) \mathbf{b} \\ + Q \text{Pr} \delta \chi ((-\mathbf{e}_x \sin \chi + \mathbf{e}_z \cos \chi) \cdot \nabla) \mathbf{b} + Q \text{Pr} ((\mathbf{e}_x \cos \chi + \mathbf{e}_z \sin \chi) \cdot \nabla) \delta \mathbf{b} - \text{Pr} \nabla^2 \delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (74b)$$

$$\frac{\partial \delta \theta}{\partial t} + (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \theta + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \theta = \frac{1}{2} \mathbf{e}_z \cdot \delta \mathbf{u} + \nabla^2 \delta \theta \quad (74c)$$

$$\nabla^2 \delta \mathbf{b} = -(\delta \chi (-\mathbf{e}_x \sin \chi + \mathbf{e}_z \cos \chi) \cdot \nabla) \mathbf{u} - ((\mathbf{e}_x \cos \chi + \mathbf{e}_z \sin \chi) \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} \quad (74d)$$

$$\frac{d\delta Q}{dt} = \delta \alpha(t), \quad \frac{d\delta \chi}{dt} = \delta \beta(t) \quad (74e)$$

ilgili ilk ve sınır şartları

$$\delta \theta(\mathbf{x}, 0) = \delta Q(0) = \delta \chi(0) = 0, \quad \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} \quad (74f)$$

$$\mathbf{v}(x, y, z = \pm 1, t) = \mathbf{0}, \quad \tau(x, y, z = \pm 1, t) = 0 \quad (74g)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} (\zeta \cdot \mathbf{e}_x) \right|_{z=\pm 1} = \left. \frac{\partial}{\partial z} (\zeta \cdot \mathbf{e}_y) \right|_{z=\pm 1} = (\zeta \cdot \mathbf{e}_z)_{z=\pm 1} = 0. \quad (74h)$$

ile birlikte bu şekilde yazılır. Ayrıca yatay x ve y yönlerinde periyodik sınır koşulları kullanılmıştır.

En iyi çözümü veren kontrol değişkenlerinin bulunması işlemi birbiriyle bağlantılı doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünü gerektirmektedir. Böyle bir işlemsel yükün altından kalkmak için iteratif yaklaşım izlenmesi gereken en uygun yoldur. Böyle bir yaklaşımın ana hatlarını şöyle sıralayabiliriz:

0. Kontrol değişkenlerinin ilk tahmini değerleriyle $\alpha^{(0)}(t)$, $\beta^{(0)}(t)$ başla ve $m = 0, 1, 2, \dots$ için;
1. $\alpha^{(m)}(t)$, $\beta^{(m)}(t)$ değerlerine karşılık gelen durum değişkenleri $\mathbf{u}^{(m)}$, $\theta^{(m)}$, $\mathbf{b}^{(m)}$ bulunması için (68-69) denklemlerini sayısal olarak çözümle;
2. Katım değişkenleri $\mathbf{v}^{(m)}$, $\tau^{(m)}$, $\zeta^{(m)}$, $q^{(m)}$, $R^{(m)}$ ve $S^{(m)}$ bulunması için (71-72) denklemlerini sayısal olarak çözümle;
3. Gradyan $\nabla_\alpha J = \varepsilon_2 \alpha^{(m)} - R^{(m)}$ ve $\nabla_\beta J = \varepsilon_3 \beta^{(m)} - S^{(m)}$ değerlerini elde et;
4. Hesaplanan değerleri kullanarak adım $\delta \alpha^{(m)}$, $\delta \beta^{(m)}$ değerlerini belirle;

5. Tahmini değerleri $\alpha^{(m+1)} = \alpha^{(m)} + \delta\alpha^{(m)}$ ve $\beta^{(m+1)} = \beta^{(m)} + \delta\beta^{(m)}$ yenile;
6. Yukarıdaki işlemleri tatminkar bir yakınsamaya kadar tekrarla.

10 Düşük Boyutlu Kontrol Problemi Formülasyonu

Yukarıda formülasyonu sunulan en iyi kontrol değişkenlerine ulaşmak için doğrusal olmayan ve farklı ölçekteki çok miktarda bileşen ve değişkenden oluşan birbiriyle bağlantılı kısmi diferansiyel denklem sisteminin defalarca çözülmesi gerekmektedir. Bu önemli miktarda sayısal çözümleme yükü getirmektedir. Fiziksel problemin ana hatlarını daha düşük serbestlik derecesinde taşıyan Karhunen-Loeve baz fonksiyonları kullanılarak kontrol problemine düşük boyutlu bir yaklaşımla bu çözümleme yükünün azaltılması bu kısımda ele alınmıştır.

Amaç fonsiyonumuzu (66) KL baz fonksiyonları açılımını (47-48) kullanılarak tekrar şöyle yazabiliriz:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{D}} a_{\mathbf{k}}^2(t) dt + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \int_0^T Q(t)^2 dt + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \int_0^T \left(\frac{dQ}{dt} \right)^2 dt + \frac{1}{2} \varepsilon_3 \int_0^T \left(\frac{d\chi}{dt} \right)^2 dt. \quad (75)$$

Bu formulasyona uygun olarak akış denklemlerinin düşük boyutlu modeli

$$\begin{aligned} \frac{da_{\mathbf{k}}}{dt} = & Ra \Pr \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{D}} PU(\mathbf{k}; \mathbf{i}) c_{\mathbf{i}} + \Pr \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{D}} DU(\mathbf{k}; \mathbf{i}) a_{\mathbf{i}} + \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{D}} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{D}} NU(\mathbf{k}; \mathbf{i}, \mathbf{j}) a_{\mathbf{i}} a_{\mathbf{j}} \\ & + \frac{1}{2} Q \Pr \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{D}} ((1 + \cos 2\chi) Mhx(\mathbf{k}; \mathbf{i}) + \sin 2\chi Mhz(\mathbf{k}; \mathbf{i})) a_{\mathbf{i}} \quad , \quad (76a) \\ & + \frac{1}{2} Q \Pr \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{D}} (\sin 2\chi Mvx(\mathbf{k}; \mathbf{i}) + (1 - \cos 2\chi) Mvz(\mathbf{k}; \mathbf{i})) a_{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

$$\frac{dc_{\mathbf{k}}}{dt} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{D}} PT(\mathbf{k}; \mathbf{i}) a_{\mathbf{i}} + \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{D}} DT(\mathbf{k}; \mathbf{i}) c_{\mathbf{i}} + \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{D}} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{D}} NT(\mathbf{k}; \mathbf{i}, \mathbf{j}) a_{\mathbf{i}} c_{\mathbf{j}} \quad , \quad (76b)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha(t), \quad \frac{d\chi}{dt} = \beta(t), \quad (76c)$$

(bknz. 7. kısım ve (53-55)) kullanılarak katım değişkenleri $v_{\mathbf{k}}$, $\tau_{\mathbf{k}}$, R ve S ile birlikte amaç fonsiyonu tekrar yazılır:

$$\begin{aligned}
J(\alpha, \beta) = & \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{D}} a_{\mathbf{k}}^2(t) dt + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \int_0^T Q(t)^2 dt + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \int_0^T \alpha^2 dt + \frac{1}{2} \varepsilon_3 \int_0^T \beta^2 dt \\
- \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{D}} \int_0^T v_{\mathbf{k}} & \left[\frac{da_{\mathbf{k}}}{dt} - Ra \Pr \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{D}} PU(\mathbf{k}; \mathbf{i}) c_{\mathbf{i}} - \Pr \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{D}} DU(\mathbf{k}; \mathbf{i}) a_{\mathbf{i}} - \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{D}} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{D}} NU(\mathbf{k}; \mathbf{i}, \mathbf{j}) a_{\mathbf{i}} a_{\mathbf{j}} \right. \\
& - \frac{1}{2} Q \Pr \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{D}} ((1 + \cos 2\chi) Mhx(\mathbf{k}; \mathbf{i}) + \sin 2\chi Mhz(\mathbf{k}; \mathbf{i})) a_{\mathbf{i}} \\
& \left. - \frac{1}{2} Q \Pr \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{D}} (\sin 2\chi Mvx(\mathbf{k}; \mathbf{i}) + (1 - \cos 2\chi) Mvz(\mathbf{k}; \mathbf{i})) a_{\mathbf{i}} \right] dt \\
- \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{D}} \int_0^T \tau_{\mathbf{k}} & \left[\frac{dc_{\mathbf{k}}}{dt} - \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{D}} PT(\mathbf{k}; \mathbf{i}) a_{\mathbf{i}} - \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{D}} DT(\mathbf{k}; \mathbf{i}) c_{\mathbf{i}} - \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{D}} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{D}} NT(\mathbf{k}; \mathbf{i}, \mathbf{j}) a_{\mathbf{i}} c_{\mathbf{j}} \right] dt \\
& + \int_0^T R(t) \left[\frac{dQ}{dt} - \alpha(t) \right] dt + \int_0^T S(t) \left[\frac{d\chi}{dt} - \beta(t) \right] dt.
\end{aligned}$$

Burada, 7. kısımdan farklı olarak kullandığımız notasyon ve terimler şöyledir:

Manyetik alan değişkeni $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ iki bileşen

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{bh}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{bv}(\mathbf{x}, t). \quad (77)$$

şeklinde yazılmıştır. Her bir bileşen

$$\nabla^2 \mathbf{bh} = -\cos \chi (\mathbf{e}_x \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (78a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{bv} = -\sin \chi (\mathbf{e}_z \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (78b)$$

denklemlerini sağlamaktadır, böylece (68d) sağlanır. Yatay yönlerdeki periyodik sınır şartları ve KL baz açılımına uygunluk göz önüne alınarak

$$\mathbf{bh}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} bh_{\mathbf{k}}(t) \mathbf{Bh}^{\mathbf{k}}(\mathbf{x}), \quad (79a)$$

$$\mathbf{bv}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} bv_{\mathbf{k}}(t) \mathbf{Bv}^{\mathbf{k}}(\mathbf{x}), \quad (79b)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\mathbf{Bh}^{\mathbf{k}}(z; x, y) = \mathbf{Bh}^{\mathbf{k}}(z) \exp(2\pi i (mx/s_x + ny/s_y)), \quad (80a)$$

$$\mathbf{Bv}^{\mathbf{k}}(z; x, y) = \mathbf{Bv}^{\mathbf{k}}(z) \exp(2\pi i (mx/s_x + ny/s_y)). \quad (80b)$$

$\mathbf{Bh}^{\mathbf{k}}(z)$ ve $\mathbf{Bv}^{\mathbf{k}}(z)$ fonksiyonları

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \gamma^2 \right] \mathbf{Bh}^{\mathbf{k}}(z) = -\frac{2\pi i m}{s_x} \mathbf{U}^{\mathbf{k}}(z), \quad (81a)$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \gamma^2 \right] \mathbf{Bv}^k(z) = -\frac{d}{dz} \mathbf{U}^k(z), \quad (81b)$$

denklemleri $z = \pm 1$ noktalarında sınır şartları

$$\frac{d\mathbf{Bh}_x^k}{dz} = \frac{d\mathbf{Bh}_y^k}{dz} = \mathbf{Bh}_z^k = 0, \quad (82a)$$

$$\frac{d\mathbf{Bv}_x^k}{dz} = \frac{d\mathbf{Bv}_y^k}{dz} = \mathbf{Bv}_z^k = 0, \quad (82b)$$

kullanılarak her bir $\mathbf{k} = (m, n, q)$ endeks vektörü için 7. kısımdaki gibi çözümler elde edilmiştir. Burada ayrıca

$$bh_k(t) = a_k(t) \cos \chi, \quad (83a)$$

$$bv_k(t) = a_k(t) \sin \chi, \quad (83b)$$

olarak tanımlanmıştır. Böylece, katsayılar, endeks vektörlerinin açılımlarını $\mathbf{k} = (k_1, k_2, q_k)$, $\mathbf{i} = (i_1, i_2, q_i)$, kullanarak, şöyle tanımlanır:

$$\mathbf{Mhx}(\mathbf{k}; \mathbf{i}) = \left(\mathbf{U}^k(z; x, y), [\mathbf{e}_x \cdot \nabla] \mathbf{Bh}^i(z; x, y) \right)_x, \quad (84a)$$

$$\mathbf{Mhz}(\mathbf{k}; \mathbf{i}) = \left(\mathbf{U}^k(z; x, y), [\mathbf{e}_z \cdot \nabla] \mathbf{Bh}^i(z; x, y) \right)_x, \quad (84b)$$

$$\mathbf{Mvx}(\mathbf{k}; \mathbf{i}) = \left(\mathbf{U}^k(z; x, y), [\mathbf{e}_x \cdot \nabla] \mathbf{Bv}^i(z; x, y) \right)_x, \quad (84c)$$

$$\mathbf{Mvz}(\mathbf{k}; \mathbf{i}) = \left(\mathbf{U}^k(z; x, y), [\mathbf{e}_z \cdot \nabla] \mathbf{Bv}^i(z; x, y) \right)_x, \quad (84d)$$

$k_1 = i_1$, $k_2 = i_2$. Burada, yarı-yükseklik büyüklüğüne dayanan Chandrasekhar sayısı Q ve Rayleigh sayısı Ra (bknz. 2. kısım) kullanılmıştır.

Önceki kısımdaki benzer işlemler sonucunda katım değişkenlerinin sağlaması gereken denklemler, her bir $\mathbf{k} \in \mathbf{D}$ için

$$\begin{aligned} & \frac{dv_k}{dt} + a_k + \text{Pr} \sum_{i \in \mathbf{D}} \mathbf{DU}(\mathbf{i}; \mathbf{k}) v_i + \sum_{i \in \mathbf{D}} \sum_{j \in \mathbf{D}} \mathbf{NU}(\mathbf{j}; \mathbf{i}, \mathbf{k}) a_i v_j + \sum_{i \in \mathbf{D}} \sum_{j \in \mathbf{D}} \mathbf{NU}(\mathbf{i}; \mathbf{k}, \mathbf{j}) v_i a_j \\ & + \frac{1}{2} Q \text{Pr} \sum_{i \in \mathbf{D}} \left((1 + \cos 2\chi) \mathbf{Mhx}(\mathbf{i}; \mathbf{k}) + \sin 2\chi \mathbf{Mhz}(\mathbf{i}; \mathbf{k}) \right) v_i + \sum_{i \in \mathbf{D}} \sum_{j \in \mathbf{D}} \mathbf{NT}(\mathbf{i}; \mathbf{k}, \mathbf{j}) \tau_i c_j, \quad (85a) \\ & + \frac{1}{2} Q \text{Pr} \sum_{i \in \mathbf{D}} \left(\sin 2\chi \mathbf{Mvx}(\mathbf{i}; \mathbf{k}) + (1 - \cos 2\chi) \mathbf{Mvz}(\mathbf{i}; \mathbf{k}) \right) v_i + \sum_{i \in \mathbf{D}} \mathbf{PT}(\mathbf{i}; \mathbf{k}) \tau_i = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d\tau_k}{dt} + Ra \Pr \sum_{i \in \mathbf{D}} PU(\mathbf{i}; \mathbf{k}) v_i + \sum_{i \in \mathbf{D}} DT(\mathbf{i}; \mathbf{k}) \tau_i + \sum_{i \in \mathbf{D}} \sum_{j \in \mathbf{D}} NT(\mathbf{j}; \mathbf{i}, \mathbf{k}) a_i \tau_j = 0, \quad (85b)$$

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} - \varepsilon_1 Q - \frac{1}{2} \Pr \sum_{k \in \mathbf{D}} v_k \sum_{i \in \mathbf{D}} ((1 + \cos 2\chi) Mhx(\mathbf{k}; \mathbf{i}) + \sin 2\chi Mhz(\mathbf{k}; \mathbf{i})) a_i \\ - \frac{1}{2} \Pr \sum_{k \in \mathbf{D}} v_k \sum_{i \in \mathbf{D}} (\sin 2\chi Mvx(\mathbf{k}; \mathbf{i}) + (1 - \cos 2\chi) Mvz(\mathbf{k}; \mathbf{i})) a_i = 0 \end{aligned}, \quad (85c)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} - Q \Pr \sum_{k \in \mathbf{D}} v_k \sum_{i \in \mathbf{D}} (-\sin 2\chi Mhx(\mathbf{k}; \mathbf{i}) + \cos 2\chi Mhz(\mathbf{k}; \mathbf{i})) a_i \\ - Q \Pr \sum_{k \in \mathbf{D}} v_k \sum_{i \in \mathbf{D}} (\cos 2\chi Mvx(\mathbf{k}; \mathbf{i}) + \sin 2\chi Mvz(\mathbf{k}; \mathbf{i})) a_i = 0 \end{aligned}, \quad (85d)$$

ilk şartlar

$$v_k(t=T) = \tau_k(t=T) = 0 \quad \text{ve} \quad R(t=T) = S(t=T) = 0 \quad (85e)$$

ile birlikte bulunur. Bu arada, gradyan

$$\nabla_{\alpha} J = \varepsilon_2 \alpha - R \quad \text{ve} \quad \nabla_{\beta} J = \varepsilon_3 \beta - S \quad (86)$$

olarak bulunur. Duyarlılık denklemleri ise, her bir $\mathbf{k} \in \mathbf{D}$ için

$$\begin{aligned} \frac{d\delta a_k}{dt} = Ra \Pr \sum_{i \in \mathbf{D}} PU(\mathbf{k}; \mathbf{i}) \delta c_i + \Pr \sum_{i \in \mathbf{D}} DU(\mathbf{k}; \mathbf{i}) \delta a_i \\ + \sum_{i \in \mathbf{D}} \sum_{j \in \mathbf{D}} NU(\mathbf{k}; \mathbf{i}, \mathbf{j}) (a_i \delta a_j + a_j \delta a_i) \\ + \frac{1}{2} Q \Pr \sum_{i \in \mathbf{D}} ((1 + \cos 2\chi) Mhx(\mathbf{k}; \mathbf{i}) + \sin 2\chi Mhz(\mathbf{k}; \mathbf{i})) \delta a_i \\ + \frac{1}{2} \delta Q \Pr \sum_{i \in \mathbf{D}} ((1 + \cos 2\chi) Mhx(\mathbf{k}; \mathbf{i}) + \sin 2\chi Mhz(\mathbf{k}; \mathbf{i})) a_i \\ + Q \Pr \delta \chi \sum_{i \in \mathbf{D}} (-\sin 2\chi Mhx(\mathbf{k}; \mathbf{i}) + \cos 2\chi Mhz(\mathbf{k}; \mathbf{i})) a_i \\ + \frac{1}{2} Q \Pr \sum_{i \in \mathbf{D}} (\sin 2\chi Mvx(\mathbf{k}; \mathbf{i}) + (1 - \cos 2\chi) Mvz(\mathbf{k}; \mathbf{i})) \delta a_i \\ + \frac{1}{2} \delta Q \Pr \sum_{i \in \mathbf{D}} (\sin 2\chi Mvx(\mathbf{k}; \mathbf{i}) + (1 - \cos 2\chi) Mvz(\mathbf{k}; \mathbf{i})) a_i \\ + Q \Pr \delta \chi \sum_{i \in \mathbf{D}} (\cos 2\chi Mvx(\mathbf{k}; \mathbf{i}) + \sin 2\chi Mvz(\mathbf{k}; \mathbf{i})) a_i \end{aligned} \quad (87a)$$

$$\frac{d\delta c_k}{dt} = \sum_{i \in \mathbf{D}} PT(\mathbf{k}; \mathbf{i}) \delta a_i - \sum_{i \in \mathbf{D}} DT(\mathbf{k}; \mathbf{i}) \delta c_i - \sum_{i \in \mathbf{D}} \sum_{j \in \mathbf{D}} NT(\mathbf{k}; \mathbf{i}, \mathbf{j}) (c_j \delta a_i + a_i \delta c_j) \quad (87b)$$

$$\frac{d\delta Q}{dt} = \delta \alpha(t), \quad \frac{d\delta \chi}{dt} = \delta \beta(t) \quad (87c)$$

ilgili ilk şartlar

$$\delta a_k(t=0) = \delta c_k(t=0) = 0 \quad \text{ve} \quad \delta Q(t=0) = \delta \chi(t=0) = 0 \quad (87d)$$

ile birlikte bu şekilde yazılır.

Bu probleme iteratif yaklaşımın ana hatlarını şöyle sıralayabiliriz:

0. Kontrol değişkenlerinin ilk tahmini değerleriyle $\alpha^{(0)}(t)$, $\beta^{(0)}(t)$ başla ve $m = 0,1,2,\dots$ için;
1. $\alpha^{(m)}(t)$, $\beta^{(m)}(t)$ değerlerine karşılık gelen durum değişkenleri a_k , c_k bulunması için (76) denklemlerini sayısal olarak çözümüle;
2. Katım değişkenleri v_k , τ_k , R ve S bulunması için (85) denklemlerini sayısal olarak çözümüle;
3. Gradyan $\nabla_\alpha J^{(m)} = \varepsilon_2 \alpha^{(m)} - R^{(m)}$, $\nabla_\beta J^{(m)} = \varepsilon_3 \beta^{(m)} - S^{(m)}$ değerlerini elde et;
4. Hesaplanan değerleri kullanarak adım $\delta\alpha^{(m)}$, $\delta\beta^{(m)}$ değerlerini belirle;
5. Tahmini değerleri $\alpha^{(m+1)} = \alpha^{(m)} + \delta\alpha^{(m)}$ ve $\beta^{(m+1)} = \beta^{(m)} + \delta\beta^{(m)}$ yenile;
6. Yukarıdaki işlemleri tatminkar bir yakınsamaya kadar tekrarla.

11 İteratif Çözüm Yöntemleri

Yukarıdaki iteratif yaklaşımlarda en iyi çözüme doğru adım değerlerinin $\delta\alpha^{(m)}$, $\delta\beta^{(m)}$ belirlenmesi için çeşitli hesaplama teknikleri mevcuttur. Bu çalışmada bu tekniklerden ikisi üzerinde durmaktayız: Conjugate Gradient ve Quasi Newton metodları (Fletcher, 1981; Nocedal & Wright, 1999).

Conjugate Gradient metodu, adım değerlerini

$$\begin{bmatrix} \delta\alpha^{(m)}(t) & \delta\beta^{(m)}(t) \end{bmatrix} = -\rho \mathbf{d}^{(m)}(t) \equiv -\rho \begin{bmatrix} \mathbf{d}_\alpha^{(m)}(t) & \mathbf{d}_\beta^{(m)}(t) \end{bmatrix}$$

en iyi çözüm yönü (conjugate direction) $\mathbf{d}^{(m)}$ ve bu yöndeki en iyi adım uzunluğu ρ kullanarak hesaplar. İlk adımda, bu yön

$$\mathbf{d}^{(0)}(t) = \nabla J^{(0)}(t) \equiv \begin{bmatrix} \nabla_\alpha J^{(0)} & \nabla_\beta J^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \alpha^{(0)} - R^{(0)} & \varepsilon_3 \beta^{(0)} - S^{(0)} \end{bmatrix}$$

olarak alınır. İkinci iterasyondan itibaren $m \geq 1$ ise bu yön

$$\mathbf{d}^{(m)}(t) = \nabla J^{(m)}(t) + \gamma^{(m)} \mathbf{d}^{(m-1)}(t)$$

olarak hesaplanır. Burada katsayı

$$\gamma^{(m)} = \int_0^T \{(\nabla_{\alpha} J^{(m)})^2 + (\nabla_{\beta} J^{(m)})^2\} dt \Big/ \int_0^T \{(\nabla_{\alpha} J^{(m-1)})^2 + (\nabla_{\beta} J^{(m-1)})^2\} dt$$

şeklinde hesaplanır. En iyi adım uzunluğu ρ ise $\mathbf{d}^{(m)}$ yönünde amaç fonksiyonu $J([\alpha^{(m)} \quad \beta^{(m)}] - \rho \mathbf{d}^{(m)})$, ρ değişirken en küçük değerini alacak şekilde

$$\rho = \frac{\int_0^T \sum_{k \in \mathbf{D}} a_k \delta a_k dt + \varepsilon_1 \int_0^T Q \delta Q dt + \varepsilon_2 \int_0^T \alpha d_{\alpha} dt + \varepsilon_3 \int_0^T \beta d_{\beta} dt}{\int_0^T \sum_{k \in \mathbf{D}} \delta a_k \delta a_k dt + \varepsilon_1 \int_0^T \delta Q \delta Q dt + \varepsilon_2 \int_0^T d_{\alpha} d_{\alpha} dt + \varepsilon_3 \int_0^T d_{\beta} d_{\beta} dt}$$

olarak hesaplanır. Bu denklemdeki δa_k , δQ değerleri duyarlılık denklemlerinin (87) $\delta \alpha = d_{\alpha}^{(m)}(t)$ ve $\delta \beta = d_{\beta}^{(m)}(t)$ kullanılarak sayısal olarak çözülmesiyle elde edilir.

Quasi Newton metodu, Newton metodu

$$\Delta^{(m)} = [\delta \alpha^{(m)}(t) \quad \delta \beta^{(m)}(t)] = -(\mathbf{H}^{(m)})^{-1} \nabla J^{(m)}$$

temeli üzerine kurulmuştur. Burada \mathbf{H} Hessian matrisini göstermektedir. Quasi Newton metodunda, alternatif olarak Hessian matrisinin tersi \mathbf{H}^{-1} yaklaşık olarak \mathbf{B} her adımda bir önceki adım değeri kullanılarak hesaplanır. Böylece m. iterasyonda

$$\Delta^{(m)} = -\rho \mathbf{B}^{(m)} \nabla J^{(m)}$$

hesaplanır ve sonraki aşama için de

$$\mathbf{B}^{(m+1)} = \mathbf{B}^{(m)} + \frac{\Delta^{(m)} (\Delta^{(m)})^T}{(\Delta^{(m)})^T \mathbf{G}^{(m)}} - \frac{\mathbf{B}^{(m)} \mathbf{G}^{(m)} (\mathbf{G}^{(m)})^T \mathbf{B}^{(m)}}{(\mathbf{G}^{(m)})^T \mathbf{B}^{(m)} \mathbf{G}^{(m)}}$$

hesaplanır. Burada

$$\mathbf{G}^{(m)} = \nabla J^{(m+1)} - \nabla J^{(m)}$$

ve ρ en iyi adım uzunluğunu göstermektedir.

12 Gelecek Çalışmalar

Proje süresi içinde tamamlanamayan ama halen süren veya planlanan çalışmalar bu kısımda özetlenmiştir.

8. (ve 10.) kısımda oluşturulan dinamik modelin (53) (ve (76), $\alpha(t) \equiv 0$, $\beta(t) \equiv 0$) Ra ve Q sayılarına bağlı olarak parametrik analiz çalışmaları halen sürmektedir. Bu çalışmada, dinamik sistemlerin parametrik sayısal analizinde önemli bir araç olan bifurkasyon analizi (Mei, 2000; Govaerts, 2000; Doedel 1997) kullanılmaktadır. Burada hedeflenen, (47) ve (48) açılımlarında kullanılan KL baz elemanlarının sistemin dinamiğine olan etkilerini sistematik olarak incelemek ve en etkili baz elemanlarını (determining modes, D veya S endeks kümesi) belirlemektir. Elde edilen bu baz seti ve sonucunda oluşturulan dinamik model, uygulanan manyetik alanın etkileri ile baz fonksiyonlarının taşıdığı fiziksel özellikleri eşleştirmede ve sağlıklı sonuçlar çıkarmada efektif olarak kullanılacaktır.

Ayrıca, 9., 10. ve 11. kısımlarda formüle edilen optimal kontrol probleminin gelecek aşaması olan sayısal çözümlene ve deneylere, kontrol problemi içindeki kullanımı 10. kısımda formüle edilen düşük boyutlu modelin, önceki paragrafta bahsedilen parametrik analiz ile geçerliliği test edilmesiyle, başlanacaktır. Kontrol problemi üzerindeki sayısal deneylerde, aşağıdaki konuların test edilmesi planlanmaktadır:

1. Kontrol probleminin değişik senaryolarının denenmesi:
 - a. Sabit bir uygulama açısı altında $\chi = \chi^*$, manyetik alan büyüklüğü ile kontrol : $\beta(t) \equiv 0$.
 - b. Sabit bir manyetik büyüklük $Q = Q^*$ altında, uygulama açısı ile kontrol : $\alpha(t) \equiv 0$.
 - c. Hem manyetik büyüklük ve hem de uygulama açısı ile kontrol.
2. Bu denemeler sırasında uygun ceza (penalty) parametrelerinin ε_1 , ε_2 ve ε_3 belirlenmesi.
3. Kontrol değişkenlerinin $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ çeşitli ilk profilleri ile problemin çözüm tekliğinin sayısal olarak test edilmesi.
4. İki iteratif yaklaşımın, Conjugate Gradient ve Quasi-Newton, en kısa yoldan çözüme ulaştırma yeteneğinin sayısal olarak denenmesi.

Kaynakça

- Aurnou, J.M., Olson, P.L., Experiments on Rayleigh-Benard convection, magneto-convection and rotating magneto-convection in liquid gallium, *J. Fluid Mech.* 430:283-307, (2001).
- Berkooz, G., Holmes, P. and Lumley, J.L., The Proper Orthogonal Decomposition in the analysis of turbulent flows, *Annual Review Fluid Mechanics*, **25**, 539, (1993).
- Burr, U., Müller, U., Rayleigh-Benard convection in liquid metal layers under the influence of a vertical magnetic field, *Phys. Fluids* 13, 11 (2001).
- Burr, U., Müller, U., Rayleigh-Benard convection in liquid metal layers under the influence of a horizontal magnetic field, *J. Fluid Mech.* 453:345-369, (2002).
- Busse, F.H., The oscillatory instability of convection rolls in a low Prandtl number fluid, *J. Fluid Mech.*, **52**, 97-112, (1972).
- Busse, F.H., Clever, R.M., Stability of convection rolls in the presence of a vertical magnetic field. *Phys. Fluids*, 25(6):931–935, (1981).
- Busse, F.H., Transition to turbulence in Rayleigh-Benard convection, In *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, Ed. H.L.Swinney ve J.P.Gollub, İkinci Baskı, Springer-Verlag, (1985).
- Busse, F.H., Clever, R.M., Finite amplitude convection in the presence of an inclined magnetic field, *Eur. J. Mech., B/Fluids*, **9**, (3), 225, (1990).
- Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and hydromagnetic instability*, Clarendon Press, (1961).
- Clever, R.M., Busse, F.H., Transition to time dependent convection. *J. Fluid Mech.*, 65(part 2):625–645, (1974).
- Clever, R.M., Busse, F.H., Nonlinear oscillatory convection in the presence of a vertical magnetic field. *J. Fluid Mech.*, 201:507–523, (1989).
- Davidson, P., MHD in material processing, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 31, 273, (1999).
- Doedel, E.J., Champneys, A.R., Fairgrieve, T.F., Kuznetsov, Y.A., Sandstede, B., Wang, X.J., *AUTO97: Continuation and Bifurcation Software for ODEs*, (1997).
- Fauve, S., Laroche, C., Libchaber, A., Perrin, B., Chaotic phases and magnetic order in a convective fluid, *Phys. Rev. Lett.*, 52, 1774–1777, (1984).
- Fletcher, R., *Practical Methods of Optimization*, Wiley, 1981.
- Gad-el-Hak, M., *Flow control : passive, active, and reactive flow management*, Cambridge, New York, Cambridge University Press, (2000).
- Govaerts, W., *Numerical Methods for Bifurcations of Dynamical Equilibria*, SIAM, (2000).
- Grötzbach, G., Direct numerical simulation of laminar and turbulent Benard convection, *J. Fluid Mech.* 119, 27–53, (1982).

- Grötzbach, G., Spatial resolution requirements for direct numerical simulation of the Rayleigh–Benard convection. *J. Comp. Phys.*, 49, 241–264, (1983).
- Guessous, L., A Pseudo-spectral numerical scheme for the simulation of steady and oscillating wall-bounded flows. *Numerical Heat Transfer*, 45(Part B):135–157, (2004).
- Gunzburger, M.D., *Perspectives in Flow Control and Optimization*, SIAM, (2003).
- Güray, E., *A Study of Natural Convection in Molten Metal under a Magnetic Field*, (Doktora Tezi), Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Ankara, (2006).
- Güray, E. and Tarman, H.I., Thermal Convection in the presence of a Vertical Magnetic Field, *ACTA Mechanica*, 194 (1-4) 33-46 (2007).
- Lumley, J.L., *Stochastic Tools in Turbulence*, Academic Press, New York, (1970).
- Mei, Z., *Numerical Bifurcation Analysis for Reaction-Diffusion Equations*, Springer, (2000).
- Mössner, R., Ulrich, M., A numerical investigation of three dimensional magneto convection in rectangular cavities. *Int. J. Heat Mass Transfer.*, 42:1111–1121, (1999)
- Nakagawa, Y., Experiments on the inhibition of thermal convection by a magnetic field. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 240, 108–113 (1957).
- Nocedal, J. And Wright, S.J., *Numerical Optimization*, Springer, (1999).
- Park, H.M. ve Jung, W.S., Numerical solution of optimal magnetic suppression of natural convection in magneto-hydrodynamic flows by empirical reduction of modes, *Computers & Fluids*, 31, p.309, 2002.
- Patera, A.T., A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion. *J. Comp. Phys.*, 54:468–488, (1984).
- Ravindran, S.S., Real-time computational algorithm for optimal control of an MHD flow system, *SIAM J. Sci. Comput.*, 28(4):1369–1388, (2005).
- Schumack, M.R., Schultz, W.W., Boyd, J.P., Spectral method solution of the Stokes equations on nonstaggered grids. *J. Comp. Phys.*, 94:30–58, (1991).
- Sirovich, L., Turbulence and the dynamics of coherent structures, Parts 1-3, *Q. Appl. Math.*, 45, 561, (1987).
- Tarman, H.I., A Karhunen-Loeve based approach to numerical simulation of transition in Rayleigh-Benard convection, *Numerical Heat Transfer Part B*, 43 (6): 567-586, (2003).
- Tarman, H.I., Reduced Order Modeling of Thermal Convection under a Magnetic Field, *8th. World Congress on Computational Mechanics*, Venedik, İtalya, Haziran 2008.
- Yıldırım, C., Yarımabaş, D. and Tarman, H.I., Transitional Dynamics in Thermal Convection between Rigid Plates, *Journal of Vibration and Control*, 13: 1331-1342 (2007).

**TÜBİTAK
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU**

| |
|---|
| Proje No: 105M044 |
| Proje Başlığı: Manyetik alan Ortamında Isı Konveksiyonu: Sayısal Benzetimi ve Kontrolü |
| Proje Yürütücüsü ve Araştırmacılar: Doç.Dr. Hakan I. Tarman |
| Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi: Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Mühendislik Bilimleri Bölümü, Ankara |
| Destekleyen Kuruluş(ların) Adı ve Adresi: Tübitak, Atatürk Bulvarı 221, Kavaklıdere, Ankara |
| Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri: 01/09/2005 – 31/09/2008 |
| Öz (en çok 70 kelime) <p>Bu çalışmada, yerçekimi ve manyetik alan ortamında alttan ısıtılan iki iletken levha arasında bulunan elektrik iletken bir yatay sıvı tabakasında oluşan üç boyutlu Boussinesq (Rayleigh-Benard) ısı konveksiyonu akışının sayısal benzetimi, spektral elemanlar yöntemiyle yapılmıştır. Düşük manyetik Prandtl sayısı limitinde mevcut olan hız ile indüklenmiş manyetik alan arasındaki bir bağıntı kullanılmıştır. Tipik olarak düşük ısıl Prandtl sayısı değerine sahip olmalarının yanında sıvı metaller ve eriyikler bu limit değerine sahiptirler. Elde edilen sayısal model uygulanan manyetik alanın etkilerini incelemek için kullanılmıştır. Bu çalışmada, ayrıca, KL ayrıştırma tekniği manyeto-konvektif akışın düşük boyutlu bir modelinin çıkarılmasında kullanılmıştır. Bu düşük boyutlu modelin, manyetik alanın konvektif akışı engelleyici biçimdeki etkilerini içerdiği gösterilmiştir. Bu model kullanılarak manyetik alan şiddeti ve yönü kontrol değişkeni olacak şekilde akışı bastıran en iyi kontrol problemi formüle edilmiştir.</p> |
| Anahtar Kelimeler: Manyetik Alan, Isı Konveksiyonu, Karhunen-Loeve Ayrışımı. |
| Projeden Yapılan Yayınlar: <ul style="list-style-type: none">• Güray, E., <i>A Study of Natural Convection in Molten Metal under a Magnetic Field</i>, (Doktora Tezi), Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Ankara, (2006).• Güray, E. and Tarman, H.I., Thermal Convection in the presence of a Vertical Magnetic Field, <i>ACTA Mechanica</i>, 194 (1-4) 33-46 (2007).• Yıldırım, C., Yarımpabuç, D. and Tarman, H.I., Transitional Dynamics in Thermal Convection between Rigid Plates, <i>Journal of Vibration and Control</i>, 13: 1331-1342 (2007).• Tarman, H.I., Reduced Order Modeling of Thermal Convection under a Magnetic Field, <i>8th. World Congress on Computational Mechanics</i>, Venedik, İtalya, Haziran 2008. |