ODTÜ Gelişme Dergisi, 44 (Ağustos), 2017, 187-222

Klasik üretim fonksiyonu bağlamında RTS ve EOS ilişkisi: Saf teorik bir analiz

Yalçın Pamuk
e-posta: ylcnpamuk@gmail.com

Özet

Ölçeğe göre getiriler (RTS) ve *ölçek ekonomileri (EOS)* kavramları genellikle birbiri ile karıştırılmaktadır. Bu kavramlar, birçok kaynakta *eşdeğer* ve hatta *eşanlamlı* olarak kullanılmaktadır. RTS ve EOS terimlerinin eşanlamlı olmadıkları açıktır, fakat bu kavramların eşdeğerliği konusunda aynı ölçüde netlik yoktur. RTS ve EOS'nin eşdeğer olup-olmadıkları ancak bir üretim fonksiyonu bağlamında analiz edilebilir. Kaynaklarda RTS ve EOS arasındaki ilişki genellikle homojen üretim fonksiyonları temelinde incelenmektedir. Buna karşılık, çağdaş iktisat biliminde yaygın olarak kullanılan klasik üretim fonksiyonu bağlamındaki çalışmaların yetersiz olduğu gözlenmektedir. Bu çalışma, literatürdeki söz konusu araştırma eksikliğinden doğmuştur. *Homotetik klasik üretim fonksiyonu bağlamında RTS ve EOS kavramları eşdeğerdir* önermesi matematiksel ve analitik olarak ispatlanmıştır.

Anahtar kelimeler: Ölçek, ölçeğe göre getiri, ölçek ekonomisi, homojen, homotetik, klasik üretim fonksiyonu.

1. Giriş

Ölçeğe göre getiriler (*retuns to scale, RTS)*, ölçek değişimi karşısında üretilen çıktının nispi değişimini ölçen *teknik* bir kavramdır. *Ölçek ekonomileri* (*economies of scale, EOS*) ya da aynı anlamda *içsel ölçek ekonomileri (internal EOS)* ise daha ziyade *finansal* bir terimdir ve firma ölçeğinin değişiminden dolayı sağlanan birim maliyet avantaj ya da dezavantajlarını ifade eder.[1] Ölçek büyürken, birim maliyet düşüşü sağlanması durumunda pozitif EOS'den, birim maliyet yükselişi meydana gelmesi durumunda negatif EOS'den bahsedilir. EOS, reel ya da parasal kaynaklı olabilir: Firmanın ölçeği büyüdükçe, aynı miktar *fiziksel* girdi ile elde edilen ürün miktarındaki artıştan kaynaklı birim maliyet azalışına reel EOS, girdi *fiyatlarındaki* düşüşten kaynaklı birim maliyet azalışına ise parasal EOS adı verilir. Diğer taraftan, dışsal ekonomiler *(external economies)*, firmanın mensup olduğu *endüstrinin* ve/veya içinde yerleşik bulunduğu *sanayi bölgesinin* büyümesinden dolayı sağladığı

[1] Her iki tanımdaki "ölçek" terimlerinden ne kastedildiği takip eden bölümlerde tartışılmaktadır.

maliyet avantaj ya da dezavantajlarıdır.[2] Benzer şekilde, dışsal ekonomiler de pozitif ya da negatif yönlü ve reel ya da parasal kaynaklı olabilir.

RTS ve EOS, genellikle birbiri ile karıştırılan iki kavramdır. Birçok kaynakta RTS ve EOS'nin *eşdeğer*[3] ve hatta *eşanlamlı* olarak kullanıldığı dikkat çekmektedir.[4] Bunda, her iki kavramın içerisinde de geçen "ölçek" (scale) teriminin payı büyüktür. RTS her zaman için *üretim* ölçeğine göre tanımlanırken, EOS hem üretim hem de *çıktı* ölçeğine göre tanımlanabilmektedir. Üretim ölçeğinin tanımı konusunda literatürde farklı görüşler ve belirsizlik söz konusudur. Bu nedenle, çalışmada alternatif bir üretim ölçeği tanımı yapılmaktadır.

RTS ve EOS'nin, benzeşmekle birlikte, eşanlamlı iki terim olmadığı açıktır. Ne var ki, eşdeğerlik konusunda aynı derecede bir açıklık söz konusu değildir. RTS-EOS eşdeğerliği, bu iki kavramın incelendiği üretim fonksiyonu platformunda anlam taşır. RTS ve EOS kavramları genellikle *homojen* üretim fonksiyonları çerçevesinde, üstelik de bazen üretim fonksiyonunun homojen olduğu dâhi belirtilmeksizin, *zımni* bir varsayımla incelenmektedir. Buna karşılık, günümüz iktisat biliminde yaygın bir kullanıma sahip olan *klasik* üretim fonksiyonu için RTS-EOS ilişkisinin kaynaklarda çok fazla yer almadığı gözlenmektedir.

Bu çalışma, bahsedilen literatür eksikliğinden doğan bir araştırmadır. *Homotetik klasik üretim fonksiyonu bağlamında RTS ve EOS kavramları eşdeğerdir* önermesinin matematiksel ve analitik olarak ispatlanması amaçlanmaktadır. Bu doğrultuda, hem dışsal (reel ve parasal) hem de içsel parasal EOS'nin[5] ve ayrıca

---

2 Burada, dışsal ekonomilerin, firmanın kendi iç faaliyetlerinden *bağımsız* olduğuna özellikle dikkat edilmelidir.

3 Eşdeğerlikten kasıt, ölçeğe göre artan (sabit, azalan) getirilerin mevcut olduğu üretim bölgelerinde, eşanlı olarak pozitif (sabit, negatif) ölçek ekonomilerinin gerçekleşiyor olmasıdır.

4 RTS ve EOS kavramlarının *eşanlamlı* olarak kullanıldığı bazı tanımlar aşağıda verilmiştir (Alıntılardaki italik vurgular aslından aynen aktarılmıştır):
"Firma, kullandığı girdileri orantılı bir şekilde genişlettikçe, LAC eğrisi düşüyorsa (yükseliyorsa), bu durumda pozitif (negatif) EOS'yi tecrübe ediyor demektir, aynı zamanda ölçeğe göre artan (azalan) getiri diye de adlandırılır" (Ayers ve Collinge, 2005: 204).
"Çıktı arttıkça uzun dönem ortalama maliyetler düştüğünde EOS (ya da ölçeğe göre artan getiriler) mevcuttur" (Begg vd., 1997: 109).
"Bir firmanın ölçeğindeki artış daha düşük bir birim maliyete yol açtığında, ölçeğe göre artan getiri ya da EOS var olduğunu söyleriz" (Case ve Fair, 1994: 227).
"Çıktı arttıkça (azaldıkça), LAC azaldığında (arttığında), üretimin pozitif (negatif) EOS davranışı sergilediğini söyleriz. Aynı zamanda, ölçeğe göre artan (azalan) getiri olduğu da söylenir" (Colander, 2006: 233).
"Üretim miktarı arttıkça, uzun dönem ortalama toplam maliyet düşüyorsa *ölçeğe göre artan getiri* (EOS olarak da bilinir) vardır" (Krugman ve Wells, 2012: 322-3).
"… üç olası durum söz konusudur: *Ölçeğe göre artan, azalan* ya da *sabit getiriler*. (İlk iki terim aynı zamanda, *EOS* ve *negatif EOS* diye de adlandırılır)" (Prager, 1993: 194).
"*Ölçeğe göre artan getiri* (aynı zamanda *EOS* olarak da adlandırılır), tüm girdilerdeki bir artış, çıktı seviyesinde daha yüksek oranlı bir artışa yol açtığında ortaya çıkar (Samuelson ve Nordhaus, 2010: 111).
"Olumsuz EOS alternatif olarak ölçeğe göre azalan verimler biçiminde de ifade edilebilir" (Seyidoğlu, 2006: 189).

5 Parasal ekonomilerin olmadığı varsayımı, girdi fiyatlarının sabit olduğu varsayımı ile eşdeğerdir.

öğrenme ekonomileri gibi uzun dönem ortalama maliyet eğrisini (LAC) kaydıran diğer etkenlerin olmadığı varsayılarak, sadece *içsel reel* ölçek ekonomileri ile ölçeğe göre getiriler arasındaki *teknik* ilişki analiz edilmektedir.

2. Literatür incelemesi

RTS ve EOS kavramlarının teorik gelişimine dair yaptıkları detaylı inceleme sonucu Tone ve Sahoo (2003), bu iki terimin, birbirinin yerine kullanılmasına izin vermeyecek şekilde farklı nedensel faktörlere sahip olduklarını ortaya koymuşlardır. Bu iktisatçılara göre, RTS *üretim birimi* kavramı ve EOS de *firma* kavramı ile ilişkilidir.[6] Çalışmalarında, bu iki farklı terimi eşanlamlı olarak kullanma eğiliminin, firma kavramının bir üretim birimine daraltılmasından kaynaklandığını savunmuşlar ve bunu neoklasik iktisadın konuları basitleştirmesine ilişkin tipik bir örnek olarak göstermişlerdir.

Analitik olarak RTS bölgelerinin birbirinden ayırt edilmesini sağlayan *teknik olarak optimal kontur* (*TOC*), ilk olarak Frisch (1965)[7] tarafından tanımlanmış gibi gözükmektedir (Truett ve Truett, 1990: 418). Frisch (1965), ayrıca, ölçek esnekliği (passus katsayısı) ile maliyet esnekliğinin birbirinin çarpmaya göre tersi olduğunu göstererek, nokta bazlı[8] (pointwise) olarak ele alındığında RTS ile EOS arasında bir çelişki olmadığını ispat etmiştir. Ferguson (1969) da ölçek (negatif ölçek) ekonomilerinin ölçeğe göre artan (azalan) getirilere nokta bazlı eşdeğerliğini kanıtlamıştır. Levenson ve Solon (1971), *ufuk eğrisi* (*horizon line*) diye adlandırdıkları TOC'un grafiksel olarak nasıl türetilebileceğini açıklamışlardır. Truett ve Roberts (1973), kontur ve eş ürün eğrileri arasındaki ilişkileri matematiksel olarak incelemişlerdir. Homotetik klasik üretim fonksiyonları için, TOC'un bir eş ürün eğrisi ile çakıştığını, dolayısıyla fonksiyonun bir sabit optimal ölçeğe (COS) sahip olduğunu kanıtlamışlardır.

Sandmo (1970), özellikle, lisans üstü seviyesi için, geleneksel U biçimli LAC'nin, RTS'nin birbirini artan, sabit ve azalan şeklinde takip eden aşamalarını yansıttığına ilişkin matematiksel bir kanıt sunmak amacıyla, Frisch'in (1965) analizinin bir sadeleştirmesini yapmıştır. Forsund (1971), Sandmo'nun (1970), matematiksel kanıtı türetme yolunun *sabit* bir ölçek esnekliğini ima ettiğini, yani sadece *homojen* fonksiyonlar için geçerli olduğunu belirtti. Oysa, ortalama maliyet eğrisinin U biçimli olması için üretim fonksiyonunun homojen *olmaması* gerektiği eleştirisini yöneltti. İlaveten, Frisch'in (1965) analizine sadık kalarak, ölçek

---

6 Tone ve Sahoo'ya (2003) göre, klasik iktisatta, firma, ölçek etkilerine katkıda bulunabilen (yani, çıktı miktarı arttıkça birim maliyeti düşürebilen) organizasyon, yönetim, öğrenme vs. gibi pek çok kabiliyet boyutunu içeren bir üretim varlığını temsil eder. Oysa, neoklasik yaklaşımda, bir girdi setini homojen tek bir çıktıya dönüştüren tek boyutlu (üretim) *teknik bir birim*dir (King ve Yanochik, 2013: 78).

7 Orijinal dilinde ilk olarak 1961'de yayınlanmıştır.

8 Matematikte, nokta bazlı niteleyicisi, belirli bir özelliğin bir f fonksiyonunun her bir $f(x)$ değerini dikkate alarak tanımlandığını işaret etmek için kullanılır.

esnekliğini bir fonksiyon, yani *değişken* olarak tanımladı ve değişken ölçek esnekliğine dair bir türetiliş yolu sundu. Bunun üzerine Sandmo (1971), ölçek esnekliğini bir katsayı değil, değişken olarak aldığı alternatif bir türetme yolu gösterdi. Hanoch (1975), RTS'ye ilişkin iki kavrama dikkat çekti. Bunlardan biri, orijinden çıkan ışın boyunca tüm girdilerdeki eş oranlı değişiklikler karşısında çıktıdaki nispi değişimdir: ölçek esnekliği. Diğeri ise, girdi fiyatları sabitken, genişleme yolu boyunca maliyetteki değişmelere göre çıktıdaki değişimdir: maliyet esnekliğinin çarpımsal tersi. Hanoch, belirli koşulları (bkz., 1975: 492-93) sağlayan bir üretim fonksiyonu için, genişleme yolu üzerindeki herhangi bir noktada her iki kavramın eşit ölçümler verdiğini ispatladı. Bununla birlikte, eğer üretim fonksiyonu homotetik değilse, genişleme yolları ışınlarla çakışmayacağı için, bu iki kavramın çıktıyla birlikte *değişim oranı* genellikle farklıdır. Yani, ölçek esnekliğinin, orijinden çıkan ışın üzerindeki çıktıyla birlikte oransal değişimi ve maliyet esnekliğinin çarpımsal tersinin genişleme yolu üzerindeki çıktıyla birlikte oransal değişimi aynı değildir. Gelles ve Mitchell (1996), sabit ya da sabit olmayan girdi maliyetleri durumunda, nokta bazlı RTS ve nokta bazlı EOS arasındaki ilişkiyi kanıtlayan matematiksel bir teknik sundular. King ve Yanochik (2013), Sandmo'yu (1970) takip ederek RTS ve EOS arasındaki nokta bazlı eşdeğerliğin matematiksel ispatını yapmış ve *yerel* pozitif EOS'nin sadece ölçeğin artan getirileri ile birlikte mevcut olacağını göstermişlerdir.

Bell (1988), homotetik olmayan (non-homothetic) üretim fonksiyonları için, pozitif ölçek ekonomilerinin mevcudiyetinin, ilgili üretim fonksiyonunun ölçeğe göre artan getirili olduğu anlamına gelmeyeceğini iddia etti (bkz., önerme 2, 332). Bunu göstermek için yaptığı grafiksel analizde, orijinden çıkan bir ışın boyunca girdiler iki katına çıkarılmasına rağmen, çıktının iki kattan daha az bir artış göstermesinden dolayı üretim fonksiyonunun ölçeğe göre azalan getirilere sahip olduğunu belirtti. Diğer taraftan, girdilerdeki değişiklik, girdi oranı optimal olarak (daha sermaye yoğun olacak şekilde değiştirilerek[9]) ayarlandığında, maliyet iki kattan daha az artarken, çıktının iki katına çıkarılabileceğini gösterdi: pozitif ölçek ekonomileri. Yani, ölçeğe göre azalan getirili bir üretim fonksiyonunun da pozitif ölçek ekonomileri sergileyebileceğini ima etti. Böylece Bell (1988: 332), ölçeğe göre (artan) getirilerin, (pozitif) ölçek ekonomileri için bir gerek şart olmadığını öne sürdü. Truett ve Truett (1990), Bell'in (1988), RTS olmadan da EOS'un gerçekleşebileceği iddiasını tartıştılar. Öncelikle, orijinal grafiğe Bell'in yeni optimal girdi oranını temsil eden orijinden çıkan bir ışın, bir kaç eş ürün eğrisi ve bir TOC eklediler. TOC'un ölçeğe göre getiri bölgelerini ayırt etme özelliğini kullanarak, Bell'in ölçeğe göre azalan getirilerin mevcut olduğunu iddia ettiği bölgede, aslında ölçeğe göre artan getirilerin geçerli olduğunu gösterdiler. Bu, aynı

[9] Genelde, yüksek hacimli üretimde, düşük hacimlidekinden farklı bir girdi bileşimi seçilir. Birim maliyet azalışları, çoğu zaman sermaye yoğun üretim tekniklerinin emek yoğun üretim teknikleri yerine ikame edilmesi vasıtasıyla gerçekleşir (Bell, 1988: 334).

zamanda ilgili üretim fonksiyonunun aslında ölçeğe göre *değişken* getirili olduğu anlamına gelir. Böylece, Truett ve Truett (1990), klasik üretim fonksiyonunun EOS'yi (negatif EOS'yi) türetmek için en azından ilgili çıktı aralığının bir bölümü boyunca nokta bazlı ölçeğe göre artan (azalan) getiriler sergilemek zorunda olduğunu ortaya koydular (King ve Yanochik, 2013: 75). Bell (1990), Truett ve Truett'e (1990) verdiği cevapta, giriş ve orta seviyedeki iktisat ders kitaplarındaki, ışın boyunca hareketlere odaklanarak, ölçeğe göre değişken getirili üretim fonksiyonlarına özgü meseleleri ihmal ettiğini kabul etmiştir.

3. Ölçeğe göre getiriler

RTS, *üretim ölçeğine* (*scale of production*) göre tanımlanır. Bu nedenle, öncelikle üretim ölçeği ve üretim ölçeği değişiminin ne anlama geldiğinin incelenmesi yararlı olacaktır.

3.1. Üretim ölçeği

Bir işletmenin faaliyet (üretim) ölçeği, kullandığı çeşitli girdilerin miktarı ile tanımlanır (Baumol ve Blinder, 1986: 129). Buna göre, eğer q kadar çıktı, *teknik olarak etkin*[10] bir şekilde $(x_1, \dots, x_n)$ girdi bileşimi ile üretilebiliyorsa, bu durumda üretim ölçeğinin $(x_1, \dots, x_n)$ girdi bileşimi olduğu düşünülebilir. Ancak bilindiği üzere, iktisatta belirli bir çıktı miktarı, birbirinden farklı ve teknik olarak etkin pek çok girdi bileşimi ile üretilebilir. Ölçek, bu girdi bileşimlerinin hepsini kapsamalıdır. O halde, üretim ölçeği, bir firmanın belirli bir çıktı seviyesinin üretiminde kullandığı teknik olarak etkin tüm girdi bileşimlerinin bir kümesidir. Buna göre, $\mathbf{x}$ girdi vektörü $[\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)]$ ve q, çıktı olmak üzere, bir $f(\mathbf{x}) = q$ üretim fonksiyonu için, q birim malın üretiminde kullanılan, teknik olarak etkin tüm $(x_1, \dots, x_n)$ girdi bileşimleri, aynı bir s ölçeğini temsil eder.

Grafiksel analiz için, iki faktörlü $f(L, K) = q$ üretim fonksiyonunu alalım. İki faktörlü analizde ölçek, tam da bir *eş ürün*[11] eğrisine denk gelir.

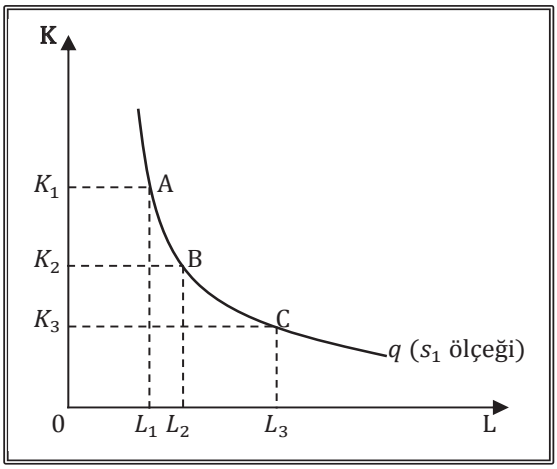
Eş ürün eğrilerinin, Şekil 1'deki gibi orijine göre düzgünce dışbükey olmasını sağlayan matematiksel koşulların sağlandığı varsayımı altında, q eş ürün eğrisi üzerindeki $A(L_1, K_1)$, $B(L_2, K_2)$ ve $C(L_3, K_3)$ girdi bileşimlerinin her biri ayrı ayrı q birim çıktının teknik olarak etkin bir şekilde üretimini sağladıkları için, aynı s_1 ölçeğini temsil ederler.

---

[10] İstihdam edilen girdilerin minimum, üretilen çıktının maksimum olması kastedilmektedir (Tone ve Sahoo, 2003: 171).

[11] Eş ürün eğrisi, aynı miktar çıktı üretilmesini sağlayan teknik olarak etkin girdi bileşimlerinin geometrik yeridir.

Şekil 1
Üretim Ölçeği



Kaynak: Yazar tarafından düzenlenmiştir.

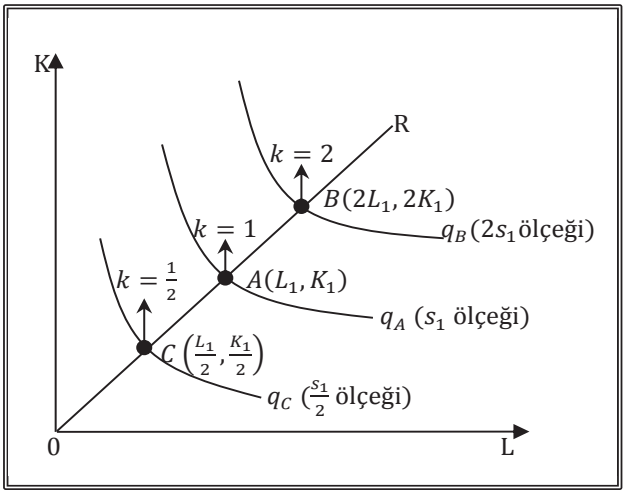
3.2. Ölçek değişimi

Frisch (1965: 121), ölçek değişimini, ele alınan başlangıç noktası dolaylarındaki bir oransal girdi değişimi ile tanımlamaktadır. $f(L,K) = q$ üretim fonksiyonunu alalım. Şekil 2'deki $A(L_1, K_1)$ başlangıç girdi bileşimi ile teknik olarak etkin bir şekilde q_A birim mal üretilebiliyor olsun: $f(L_1, K_1) = q_A$. Burada, $A(L_1, K_1)$ girdi bileşimi q_A eş ürün eğrisi üzerinde olduğundan s_1 ölçeğini temsil etmektedir.

Şimdi, (L_1, K_1) bileşiminin içerdiği girdi miktarlarını pozitif bir k parametresi ile çarpalım: (kL_1, kK_1).

- $k = 2$ iken, $B(2L_1, 2K_1)$ bileşimi elde edilir. Burada tüm girdiler iki katına çıktığından firmanın ölçeği de iki katına çıkmıştır: $s_1 \rightarrow 2s_1$.
- $k = \frac{1}{2}$ iken, $C\left(\frac{L_1}{2}, \frac{K_1}{2}\right)$ bileşimi elde edilir. Burada tüm girdiler yarıya düştüğünden firmanın ölçeği de yarıya inmiştir: $s_1 \rightarrow \frac{s_1}{2}$.

Şekil 2
Üretim Ölçeği Değişimi



Kaynak: Eaton ve Eaton (1988), 199.

Görüldüğü üzere, k'nın her bir değeri için yeni bir girdi bileşimi elde edilmektedir ve bu girdi bileşimleri, girdi oranı (K_1/L_1) sabit kaldığı için[12], orijinden çıkan bir OR ışını boyunca hareket etmektedir.[13] Yeni girdi bileşimlerinin OR ışını üzerindeki konumu ise sadece k parametresinin değerine göre belirlenmektedir. Yani, her k değişiminde, sırasıyla yeni bir girdi bileşimi ve eş ürün eğrisi (ölçek) oluşmaktadır. Bu durum, matematiksel olarak, $f(kL_1, kK_1) = q_X$ fonksiyonunda, L_1 ve K_1 sabit olduğu için, q_X'in sadece k tarafından belirlendiği şeklinde ifade edilir. O halde, $f(kL_1, kK_1) = q_X$ fonksiyonu, L/K oranı sabitken yeni bir fonksiyon olarak,

$s(k) = q$ şeklinde sadeleştirilebilir. (1)

(1) numaralı eşitlik, ölçek faktörü k iken, üretim ölçeğinin $s(k)$ olduğunu ve $s(k)$ ölçeğinin de q kadar çıktı ürettiğini ifade eder. Görüldüğü üzere, ölçek artık Şekil 1'deki gibi bir sabit (s_1) değil, $s(k)$ fonksiyonu şeklinde bir değişkendir. Bu durumda, Şekil 2'deki s_1 ölçeği $s(1)$, $\frac{s_1}{2}$ ölçeği $s(\frac{1}{2})$ ve $2s_1$ ölçeği de $s(2)$ simgeleriyle gösterilebilir.

---

12 Neoklasik iktisat teorisi, (RTS analizinde) sabit faktör oranlarını zorunlu kılmaktadır (Tone ve Sahoo, 2003: 166).

13 Orijinden çıkan OR ışını, K/L girdi bileşiminin sabit olduğu noktaların geometrik yeridir. Her bir ışın bir üretim faaliyeti ya da sürecine karşılık gelir (Solberg, 1982: 270).

Özetle, k parametresi, girdi oranı veri iken, yeni bir girdi bileşimi ve dolayısıyla yeni bir eş ürün eğrisi (ölçek) tanımlayan pozitif bir sayıdır ve *ölçek faktörü* (*scale factor*) olarak adlandırılır (bkz., Eaton ve Eaton, 1988: 199-200). Ölçekteki artış, başlangıç girdi miktarlarının sabit olduğu durumda, k'daki bir artış olarak betimlenebilir (Sandmo, 1970: 150). Genel olarak, ölçek faktörü her değiştiğinde üretim ölçeği, orijinden çıkan bir ışın boyunca değişir.

Üretim ölçeği değişimi, RTS kavramının temelini oluşturur. Buna göre, RTS terimi, tüm girdilerin kullanım seviyesinde oransal bir değişikliğin (üretim ölçeği değişikliği) çıktı üzerindeki etkisine göndermede bulunur (Bell, 1988: 331). RTS, bir üretim fonksiyonu bağlamında *global* ya da *yerel* olarak tanımlanabilir.

3.3. RTS: Global tanım

Bir üretim fonksiyonu için, üretim ölçeği artırıldıkça, eğer çıktı *her zaman için* daha yüksek (eşit, daha az) bir oranda yükseliyorsa, ilgili üretim fonksiyonunun, global olarak (baştan sona), ölçeğe göre artan (sabit, azalan) getirilere sahip olduğu söylenir. Ölçek değişimi sırasında girdi artışları *oransal* olarak gerçekleştiği için, RTS, her zaman için, Şekil 2'deki gibi orijinden çıkan bir ışın (OR) boyunca tanımlanır.

Matematiksel olarak ifade etmek gerekirse, $f(\mathbf{x}) = q$ üretim fonksiyonu, $k > 0$ ve her x_i için eğer,

- $f(k\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x})$ ise, global olarak ölçeğe göre sabit,
- $f(k\mathbf{x}) > kf(\mathbf{x})$ ise, global olarak ölçeğe göre artan ve
- $f(k\mathbf{x}) < kf(\mathbf{x})$ ise, global olarak ölçeğe göre azalan getiriler özelliğine sahiptir (Jehle ve Reny, 2011: 133).

$f(k\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x})$ ifadesinde $f(\mathbf{x}) = q$ olduğundan, $f(k\mathbf{x}) = kq$ yazılabilir. Bu da, tüm girdiler (böylece ölçek) k katına çıkarıldığında, çıktının da k katına yükseleceği anlamına gelir. Benzer şekilde, $f(k\mathbf{x}) > kq$ ve $f(k\mathbf{x}) < kq$ durumları da, ölçek k katına çıktığında, çıktının sırasıyla k kattan daha çok ve daha az artacağını anlatır. O halde $f(\mathbf{x}) = q$ üretim fonksiyonunda,

- Ölçek k katına çıktığında, çıktı da k katına yükseliyorsa, global olarak ölçeğe göre sabit,
- Ölçek k katına çıktığında, çıktı k kattan daha fazla artıyorsa, global olarak ölçeğe göre artan,
- Ölçek k katına çıktığında, çıktı k kattan daha az artıyorsa, global olarak ölçeğe göre azalan getiriler mevcuttur.

3.3.1. Homojen üretim fonksiyonları

Eğer, bütün k'lar $(k > 0)$ için,

$$f(k\mathbf{x}) = k^{\varepsilon} f(\mathbf{x}) \tag{2}$$

ise, $f(\mathbf{x}) = q$ fonksiyonu, ε. dereceden *homojen* (*homogeneous*) olarak adlandırılır (Jehle ve Reny, 2011: 561). Özel olarak, $\varepsilon = 1$ ise, $f(\mathbf{x})$ *doğrusal* (*linear*) homojen ismini alır. $f(\mathbf{x}) = q$ olduğundan denklem (2),

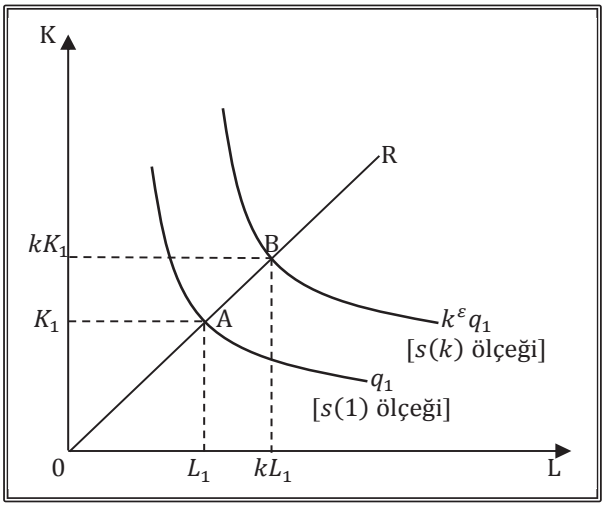
$$f(k\mathbf{x}) = k^{\varepsilon}\, q \quad \text{şeklinde de yazılabilir.} \tag{2'}$$

Buna göre, homojen üretim fonksiyonlarının en önemli özelliği, üretim ölçeği artarken, çıktının *düzenli* bir değişme sergilemesidir. Örneğin, ölçek k katına çıktığında çıktı her seferinde k^{ε} katına çıkar.

Denklem (2')'nü sağlayan $f(\mathbf{x}) = q$ homojen üretim fonksiyonunun iki girdili versiyonu olan $f(L, K) = q$'yu ele alalım. $A(L_1, K_1)$ girdi bileşimi ile [üretim ölçeği $s(1)$ iken] q_1 kadar çıktı üretilmektedir. L_1 ve K_1 girdileri, her ikisi birden k oranında arttırılıp $\mathrm{B}(kL_1, kK_1)$ girdi bileşimine ulaşıldığında [üretim ölçeği $s(k)$'ya yükseldiğinde], çıktı da her seferinde k^{ε} kadar oransal bir değişim gösterir (bkz., Şekil 3). Bu nedenledir ki, f fonksiyonunun eş ürün eğrileri, tek bir eş ürün eğrisinin *sürüklenen* versiyonları şeklindedir (Donduran, 2013: 115).

Şekil 3

Eş Ürün Eğrileri



Kaynak: Yazar tarafından düzenlenmiştir.

3.3.2. RTS ve homojenite ilişkisi

$f(\mathbf{x}) = q$, ε. dereceden homojen üretim fonksiyonunu alalım. $f(k\mathbf{x}) = k^{\varepsilon} f(\mathbf{x})$ eşitliğinde,

- $\varepsilon = 1$ ise, $f(k\mathbf{x}) = k\, f(\mathbf{x})$
- $\varepsilon > 1$ ise, $f(k\mathbf{x}) > k\, f(\mathbf{x})$
- $\varepsilon < 1$ ise, $f(k\mathbf{x}) < k\, f(\mathbf{x})$

olmak zorundadır. O halde, $f(\mathbf{x}) = q$ üretim fonksiyonunun homojenlik derecesi (ε), ilgili fonksiyonun sahip olduğu ölçeğe göre getiri türüne dair bir ölçüt olarak kullanılabilir:

- $\varepsilon = 1$ ise, yani f 1. dereceden homojense, ölçeğe göre sabit,
- $\varepsilon > 1$ ise, yani f 1'den daha büyük dereceden homojense, ölçeğe göre artan,
- $\varepsilon < 1$ ise, yani f 1'den daha küçük dereceden homojense, ölçeğe göre azalan getiriye sahiptir.

Burada özellikle dikkat edilmesi gereken şey, ε'nun *sabit* olduğudur.[14] Yani, f üretim fonksiyonu *global olarak* (baştan sona) sabit bir dereceden homojendir ve dolayısıyla ölçeğe göre sadece *bir tür* getiriye sahiptir. Oysa, gerçek üretim süreçlerinin, homojen üretim fonksiyonları sonucunu doğurması, aşırı derecede olasılık dışıdır (Tone ve Sahoo, 2003: 169).

3.4. RTS: yerel tanım

Bir işletmeye ait üretim fonksiyonu; aynı zamanda, hem ölçeğe göre artan, hem ölçeğe göre sabit, hem de ölçeğe göre azalan getirilere sahip olabilir. Açıktır ki, böyle bir durumda üretim fonksiyonu homojen olamaz (Bulmuş, 1998: 133). Bundan dolayı, homojen olmayan üretim fonksiyonları için de *noktasal* olarak RTS'nin türünü belirlemeye yönelik bir *yerel* ölçüte ihtiyaç vardır.

3.4.1. Passus katsayısı

$f(\mathbf{x}) = q$ bir üretim fonksiyonu olmak üzere, *passus katsayısı* (*passus coefficient*), Frisch (1965: 65-78) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır (Forsund, 1971: 259): [15]

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{df(\mathbf{x})}{dk}\frac{k}{f(\mathbf{x})} \tag{3}$$

Burada, $\varepsilon(\mathbf{x})$'in, değeri *üretim ölçeğine* bağlı bir fonksiyon, yani bir *değişken* olduğuna dikkat çekmek önemlidir. $f(\mathbf{x}) = q$ olduğundan (3) numaralı denklem,

---

[14] ε, aynı zamanda *çıktının ölçek esnekliği* olarak da bilinir: $\varepsilon = \frac{\Delta q}{\Delta k}\frac{k}{q}$.

[15] Simgeler değiştirilmiştir.

$\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{dq}{dk}\frac{k}{q}$ şeklinde de yazılabilir.[16] (3′)

Bir *noktada* tanımlanan passus katsayısı, tüm girdilerde (dolayısıyla ölçekte) %1'lik bir artış sonucu meydana gelen *anlık* yüzdelik çıktı değişimini ifade eder. Diğer bir deyişle, tüm girdiler (dolayısıyla ölçek) %1 oranında arttırıldığında çıktı $\%\varepsilon(\mathbf{x})$ kadar değişir. O halde,

- $\varepsilon(\mathbf{x}) > 1$ ise, ölçek %1 oranında arttırıldığında çıktı %1'den daha fazla artar: Yerel olarak ölçeğe göre *artan* getiri,
- $\varepsilon(\mathbf{x}) = 1$ ise, ölçek %1 oranında arttırıldığında çıktı da %1 artar: Yerel olarak ölçeğe göre *sabit* getiri,
- $\varepsilon(\mathbf{x}) < 1$ ise, ölçek %1 oranında arttırıldığında çıktı %1'den daha az artar: Yerel olarak ölçeğe göre *azalan* getiri söz konusu olur.

Bu nedenledir ki, passus katsayısı[17] RTS'nin *yerel* tanımıdır.

3.4.2. Passus denklemi

Lemma 1: *Passus denklemi* (*passus equation*), passus katsayısının bir diğer ölçüm şeklini ifade eder: $\varepsilon(\mathbf{x}) = \left[\frac{df(\mathbf{x})}{dk}\frac{k}{f(\mathbf{x})}\right] = \left[\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{x_i}{q} = \frac{MP_s}{AP_s}\right]$.

İspat: Forsund (1971: 260), Frisch'i (1965: 65-78) esas alarak, passus denkleminin kısa bir türetiliş yolunu sunmaktadır:

$f(\mathbf{x}) = q$ üretim fonksiyonunda i. girdi faktörü, $x_i = kx_i^0$ olarak tanımlanmaktadır. Burada x_i^0 veri başlangıç faktör noktasıdır. Böylece, $f(\mathbf{x}) = q$ fonksiyonu, $f(k\mathbf{x^0}) = q$ şeklinde yazılabilir. $f(k\mathbf{x^0}) = q$ üretim fonksiyonunun k ölçek faktörüne göre türevini alalım.[18]

$$\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^0 = \frac{dq}{dk} \tag{4}$$

(4) numaralı denklemde elde edilen $\frac{dq}{dk}$ değerini (3')'nde ikame edelim.

---

[16] Burada, çıktının ölçek esnekliği tanımının *nokta bazlı* ve ölçekteki değişikliklerin *marjinal* olması dikkate değerdir:
$\varepsilon(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta k}\frac{k}{q} = \frac{dq}{dk}\frac{k}{q}$

[17] Frisch (1965: 121), passus katsayısını ölçekteki bir artışla birlikte, üretim miktarının ne kadar arttığını işaret eden bir alet olarak tanımlamaktadır. Passus katsayısı literatürde "üretim esnekliği" (Johnson, 1913: 507), "fonksiyon katsayısı" (Carlson, 1939: 17) gibi isimlerle de anılmaktadır (Hanoch, 1975: 492). Truett ve Truett (1990: 413) ise "nokta ölçek esnekliği" olarak adlandırmaktadır.

[18] Eşitliğin sol yanındaki $f(k\mathbf{x^0}) = f(kx_1^0, \ldots, kx_n^0)$ bir bileşke fonksiyondur ve türevi zincir kuralıyla alınır:
$\frac{df(k\mathbf{x^0})}{dk} = \sum_{i=1}^{n} \frac{df(k\mathbf{x^0})}{dkx_i^0}\frac{dkx_i^0}{dk}$
$\frac{dkx_i^0}{dk} = x_i^0$ dır ve $\frac{df(k\mathbf{x^0})}{dkx_i^0} = \frac{df(\mathbf{x})}{dx_i} = f_i$ şeklinde gösterilirse,
$\frac{df(k\mathbf{x^0})}{dk} = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^0$ bulunur.

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^0 \frac{k}{q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i k x_i^0}{q} \tag{5}$$

Denklem (5)'te $kx_i^0 = x_i$ ve $q = f(\mathbf{x})$'tir. $f(\mathbf{x})$'e kısaca f dersek passus denklemi,

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i x_i}{f} \text{ olarak elde edilir.} \tag{6}$$

Görüldüğü üzere, passus denklemine göre, passus katsayısı her bir girdinin çıktı esneklikleri toplamıdır. Diğer taraftan, (6) nolu passus denklemi,

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{x_i}{q} \text{ şeklinde yazılabilir.} \tag{6'}$$

(6')'nde $\sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{df(\mathbf{x})}{dx_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dq}{dx_i} = MP_s$ ve $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{q} = \frac{1}{AP_s}$ olduğundan passus denklemi aynı zamanda,

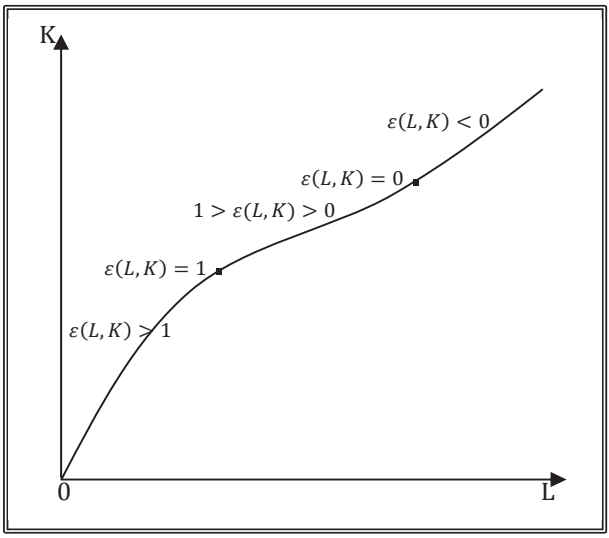
$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{MP_s}{AP_s}\text{'dir.} \tag{6''}$$

Burada, MP_s ve AP_s sırasıyla, ölçeğin marjinal ve ortalama ürünüdür.

4. Regular ultra passum yasası

İlk olarak Frisch (1965: 120) tarafından tanımlanan *regular ultra passum yasası* (*regular ultra passum law, RUPL*), faktör diyagramında rastgele *yükselen* bir eğri boyunca dışa doğru hareket ettikçe, passus katsayısı $\varepsilon(L, K)$'nın, 1'den daha yüksek değerlerden başlayıp, 1'den daha düşük ve sonunda 0'dan daha düşük bir değere doğru düzenli bir şekilde *azalacağına* dair bir üretim yasasıdır (bkz., Şekil 4). İleride görüleceği üzere, sahip olduğu bu özellikten dolayı S biçimli toplam ürün ve U biçimli birim maliyet eğrisi türeten bu tür bir fonksiyonlar sınıfına, *klasik* üretim fonksiyonu adı verilmektedir (bkz., Truett ve Roberts, 1973: 976). Klasik üretim fonksiyonları, *homotetik* (*homothetic*) olabilir ya da olmayabilirler. RTS ve EOS ilişkisi homotetik ve homotetik olmayan klasik üretim fonksiyonları için ayrı ayrı incelenecektir.

Şekil 4
İki Faktörlü Durumda Passus Katsayısının
Değişimi: Regular Ultra Passum Yasası



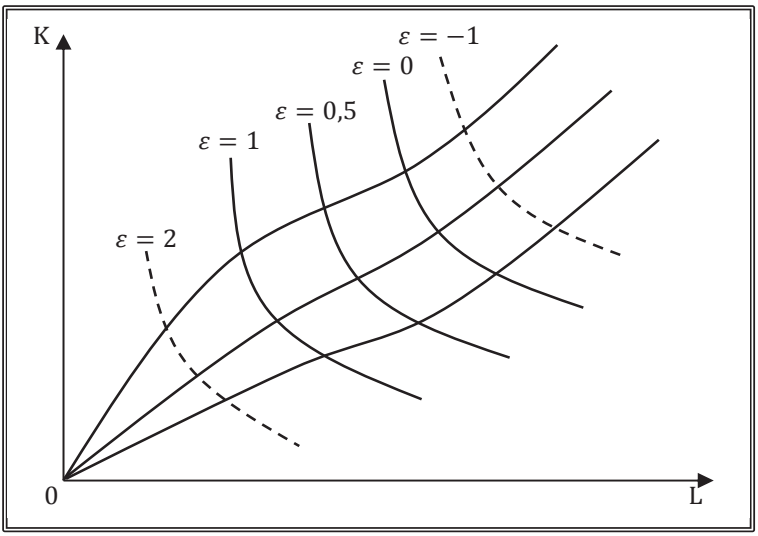
Kaynak: Frisch (1965), 121.

5. Kontur eğrileri

Şekil 5'teki gibi, orijinden çıkarak yükselen bir kaç eğriyi birlikte ele alalım. Bu eğrilerin her biri üzerinde, RUPL gereği, aynı $\varepsilon(L,K)$ değerini içeren noktalar mevcuttur. Farklı yükselen eğriler boyunca, aynı $\varepsilon(L,K)$ değerini içeren noktaların geometrik yeri bir *kontur* (*contour*) eğrisi oluşturur. Aynı kontur eğrisi üzerinde $\varepsilon(L,K)$ sabit olduğundan, bir kontur eğrisi ε ile simgelenebilir.

Frisch'e (1965: 121) göre, iki faktörlü durumda kontur eğrileri Şekil 5'teki gibi aşağı doğru eğimlidirler.

Şekil 5
İki Faktörlü Durumda Kontur Eğrileri



Kaynak: Frisch (1965), 122.

5.1. Kontur eğrisi denklemi

İki faktörlü analizde, matematiksel olarak bir kontur eğrisi, iki kere türevlenebilir olan $f(L,K) = q$ üretim fonksiyonu için,

$$f(kL, kK) = k^{\varepsilon} f(L,K) \tag{7}$$

eşitliğini sağlayan (L,K) ikililerinin geometrik yeridir (Truett ve Roberts, 1973: 976).

Denklem (7)'nin k'ya göre türevini alalım.

$$\frac{df(kL,kK)}{dk} = \varepsilon k^{\varepsilon-1} f(L,K) \tag{8}$$

(8)'deki $f(kL,kK)$ bileşke fonksiyonuna zincir kuralı uygulanırsa,

$$\frac{df(kL,kK)}{dkL} L + \frac{df(kL,kK)}{dkK} K = \varepsilon k^{\varepsilon-1} f(L,K) \text{ yazılabilir.} \tag{9}$$

(9) numaralı denklemi, $k = 1$'de değerlendirelim (ya da $k \to 1$ için limitini alalım).

$$\frac{df(L,K)}{dL} L + \frac{df(L,K)}{dK} K = \varepsilon f(L,K) \tag{10}$$

Denklem (10)'da $\frac{df(L,K)}{dL} = f_L, \frac{df(L,K)}{dK} = f_K$ şeklinde kısaltılırsa, iki faktörlü durum için kontur eğrisi denklemi,

$$f_L L + f_K K = \varepsilon\, f(L,K) \tag{11}$$

ya da $f(L,K) = q$ ikame edilerek,

$$f_L L + f_K K = \varepsilon q \quad \text{şeklinde elde edilir.} \tag{11'}$$

5.2. Kontur eğrisinin eğimi

Bir kontur eğrisinin eğimi, ε sabit tutulurken, (11) numaralı kontur eğrisi denkleminin toplam diferansiyeli alınarak bulunabilir (Truett ve Roberts, 1973: 976):

$$f_{LL}LdL + f_L dL + f_{KL}KdL + f_{LK}LdK + f_{KK}KdK + f_K dK = \varepsilon f_L dL + \varepsilon f_K dK \tag{12}$$

(12) numaralı eşitlikte içinde dK çarpanı olan terimleri eşitliğin solunda, dL çarpanı olanları sağında toplayıp, her iki tarafı da çarpan parantezine alalım.

$$dK[f_{LK}L + f_{KK}K + (1-\varepsilon)f_K] = -dL[\, f_{LL}L + (1-\varepsilon)f_L + f_{KL}K]$$

Ve buradan kontur eğrisinin eğimi,

$$\left.\frac{dK}{dL}\right|_{\varepsilon} = -\frac{f_{LL}L + (1-\varepsilon)f_L + f_{KL}K}{f_{LK}L + f_{KK}K + (1-\varepsilon)f_K} \quad \text{bulunur.} \tag{13}$$

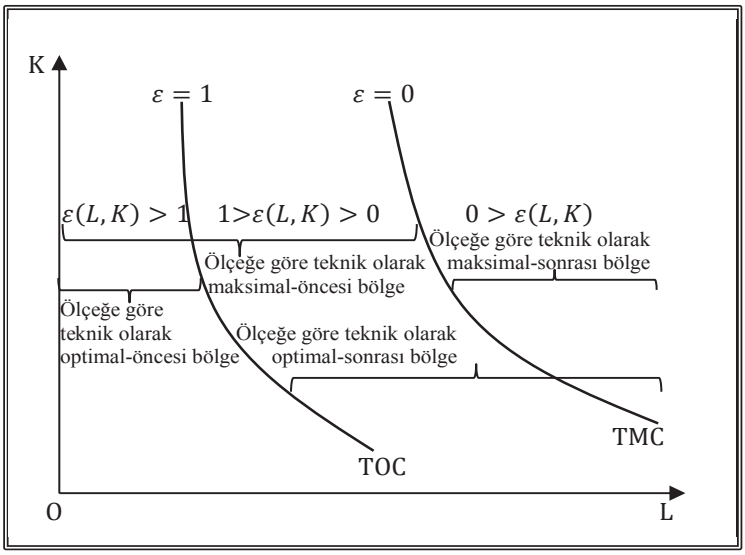
6. Teknik olarak optimal ve maksimal kontur

RUPL çerçevesinde ε kontur eğrilerinin nasıl dağıldığı bilindiğine göre, herhangi bir girdi bileşiminden başlayarak, ölçek değişimi karşısında çıktı miktarının nasıl değişeceği konusunda sonuç çıkarılabilir.

Şekil 6'daki $\varepsilon = 1$ kontur eğrisi, ortalama getirilerin maksimize edileceği ya da (herhangi bir nispi faktör fiyatı için) ortalama maliyetin minimize edileceği anlamında, teknik olarak optimal noktaların geometrik yeridir ve *teknik olarak optimal kontur* (*technically optimal contour, TOC*) olarak adlandırılır (bkz., Truett ve Roberts, 1973: 976).

- TOC eğrisinin güney batısındaki bölgede $\varepsilon(L,K) > 1$'dir ve üretim ölçeğindeki bir artış bu bölgede teknik anlamda artan ortalama getiriler sağlar. Bundan dolayı, bu bölge, *ölçeğe göre teknik olarak optimal-öncesi (pre-optimal) bölge* ya da, kısaca *optimal-öncesi bölge* olarak adlandırılır.
- TOC eğrisinin kuzey doğusundaki bölgede $\varepsilon(L,K) < 1$'dir. Burada, üretim ölçeğindeki bir artışla birlikte teknik anlamda tüm girdiler için *azalan* ortalama getiriler elde edilir. Bu bölge, bundan dolayı *ölçeğe göre teknik olarak optimal-sonrası (post-optimal) bölge* ya da, kısaca *optimal-sonrası bölge* olarak adlandırılır.

Şekil 6
TOC, TMC eğrileri ve RTS



Kaynak: Frisch (1965), 123.

$\varepsilon = 0$ kontur eğrisi, *teknik olarak maksimal kontur* (*technically maximal contour, TMC*) olarak adlandırılır. Zira, $\varepsilon = 0$ durumunda, ürün miktarı en büyük değerine ulaşmıştır.

- TMC eğrisinin güney batısında $\varepsilon(L,K) > 0$'dır. Burada, üretim ölçeği artarken, ürün miktarı da *artacaktır*. Bu bölge, bundan dolayı *ölçeğe göre teknik olarak maksimal-öncesi (pre-maximal) bölge* olarak adlandırılır.
- TMC eğrisinin kuzey doğusunda $\varepsilon(L,K) < 0$'dır. Burada ürün miktarı, üretim ölçeği artarken, *azalacaktır*. Bu bölge, bundan dolayı *ölçeğe göre teknik olarak maksimal-sonrası (post-maximal) bölge* olarak adlandırılır.

7. Ölçek ekonomileri

RTS kavramında her zaman için üretim ölçeği esas alınmasına karşın, EOS kaynaklarda hem üretim ölçeğine hem de *çıktı ölçeğine*[19] (scale of output) göre tanımlanabilmektedir. Örneğin, Colander (2006: 233), EOS'yi üretim ölçeğine göre tanımlamaktadır:

"EOS, *tüm girdiler* (emek, toprak ve sermaye) birlikte arttırıldığında ortaya çıkan maliyet tasarruflarıdır".

[19] "Çıktı ölçeği" terimi Lancaster'dan (1974: 108) alınmıştır.

Buna karşılık, örneğin, McKenzie ve Lee (2006: 226), EOS tanımında çıktı ölçeğini temel almaktadırlar:

> "*Çıktı* arttıkça (azaldıkça), LAC azaldığında (arttığında), üretimin pozitif (negatif) EOS davranışı sergilediğini söyleriz ".

Ancak, EOS teknikten ziyade *finansal* bir kavram olduğundan, çıktı ölçeğine göre tanımlanması daha uygundur. Bu görüş, King ve Yanochik (2013: 77) tarafından da vurgulanmıştır:

> "RTS ve EOS doğaları gereği iki farklı ölçek fikrini içerirler. RTS durumunda *tüm girdilerde* eş oranlı bir değişimi düşünürüz. EOS'de ise *çıktıdaki* bir değişimi dikkate alırız".

Buna göre, EOS terimi, esasen ortalama maliyetler ve çıktı ölçeği arasındaki ilişkiye göndermede bulunur (Lancaster, 1974: 108). EOS, bir maliyet fonksiyonu bağlamında *global* ya da *yerel* olarak tanımlanabilir.

7.1. EOS: global tanım

Bir toplam maliyet fonksiyonu için, çıktı ölçeği arttıkça, eğer birim maliyet *her zaman için* düşüyorsa (sabit kalıyorsa, yükseliyorsa), ilgili maliyet fonksiyonunun, global olarak (baştan sona), pozitif EOS (sabit EOS, negatif EOS) sergilediği söylenir. Girdi fiyatları sabitken, $f(\mathbf{x}) = q$ homojen üretim fonksiyonundan türetilen bir toplam maliyet fonksiyonu bu tür bir özelliğe sahiptir.

Tıpkı, RTS'nin global olarak çıktının ölçek esnekliğine (ε) göre tanımlandığı gibi, EOS de çıktının maliyet esnekliğine (κ) göre tanımlanır. Toplam maliyet esnekliği, çıktıdaki değişim karşılığında, toplam maliyetteki (C) oransal değişmenin, çıktıdaki oransal değişmeye oranıdır (Gould ve Ferguson, 1980: 197):

$$\kappa = \frac{\Delta C}{\Delta q}\frac{q}{C} \tag{14}$$

Buna göre, çıktı %1 oranında arttırıldığında toplam maliyet her zaman için $\%\kappa$ kadar değişir. O halde,

- $\kappa < 1$ ise, çıktı %1 oranında arttığında toplam maliyet %1'den daha az artar. Bu da uzun dönem birim maliyetin $\left(LAC = \frac{C}{q}\right)$ düşmesi anlamına gelir: Toplam maliyet fonksiyonu global olarak pozitif EOS özelliğine sahiptir.
- $\kappa = 1$ ise, çıktı %1 oranında arttığında toplam maliyet de %1 artar. Bu da LAC'nin sabit kalması anlamına gelir: Toplam maliyet fonksiyonu global olarak sabit EOS özelliğine sahiptir.
- $\kappa > 1$ ise, çıktı %1 oranında arttığında toplam maliyet %1'den daha fazla artar. Bu da LAC'nin yükselmesi anlamına gelir: Toplam maliyet fonksiyonu global olarak negatif EOS özelliğine sahiptir.

7.2. EOS: Yerel tanım

EOS'nin yerel tanımı, bir maliyet fonksiyonunun genelindeki değil, belirli bir *noktasındaki* EOS türünü ifade eder. Yerel EOS, çıktı ölçeğinin bir fonksiyonu şeklinde tanımlanan, çıktının maliyet esnekliği (ya da toplam maliyet esnekliği) değişkeni ile ölçülür:

$$\kappa(q) = \frac{dC}{dq}\frac{q}{C} \qquad (14')$$

Ayrıca, $\frac{dC}{dq} = LMC$ ve $\frac{q}{C} = \frac{1}{LAC}$ olduğundan,

$$\kappa(q) = \frac{LMC}{LAC}\text{'dir.} \qquad (14'')$$

Toplam maliyet esnekliği yerel olarak, çıktıdaki %1'lik bir artış sonucu meydana gelen *anlık* yüzdelik toplam maliyet değişimini ifade eder. Diğer bir deyişle, q, %1 oranında arttırıldığında C, $\%\kappa(q)$ kadar değişir. O halde,

- $\kappa(q) < 1$ ise, çıktı %1 oranında arttığında toplam maliyet %1'den daha az artar. Bu da LAC'nin düşmesi anlamına gelir: Yerel olarak pozitif EOS,
- $\kappa(q) = 1$ ise, çıktı %1 oranında arttığında toplam maliyet de %1 artar. Bu da LAC'nin sabit kalması anlamına gelir: Yerel olarak sabit EOS,
- $\kappa(q) > 1$ ise, çıktı %1 oranında arttığında toplam maliyet %1'den daha fazla artar. Bu da LAC'nin yükselmesi anlamına gelir: Yerel olarak negatif EOS söz konusu olur.

Pozitif ve negatif EOS bölgeleri genellikle LAC'nin minimum olduğu noktaya göre ayırt edilir. LAC'nin azalmakta olduğu $[\kappa(q) < 1\,]$ minimum noktaya kadarki kısmı pozitif EOS bölgesi, LAC'nin sabit olduğu $[\kappa(q) = 1\,]$ minimum nokta sabit EOS noktası, LAC'nin artmakta olduğu $[\kappa(q) > 1\,]$ minimum noktadan sonraki kısmı ise negatif EOS bölgesidir.

8. Homotetik klasik üretim fonksiyonu durumu

Homotetik (homothetic) fonksiyon[20], 1. dereceden (doğrusal) homojen olan bir fonksiyonun monotonik transformasyonudur[21] (Varian, 1992: 18).

$f(\mathbf{x}) = q$, 1. dereceden homojen bir üretim fonksiyonu ve $h(q) = Q$, $[h'(Q) > 0]$ pozitif monotonik transformasyon ise, $Q = h(q) = h[f(\mathbf{x})] = hof(\mathbf{x})$ bileşkesi bir homotetik üretim fonksiyonudur.

$f(\mathbf{x}) = q$ doğrusal homojen üretim fonksiyonunun iki girdili versiyonu olan $f(L, K) = q$'yu ele alalım. f fonksiyonu için, $A(L_1, K_1)$ girdi bileşimiyle [üretim

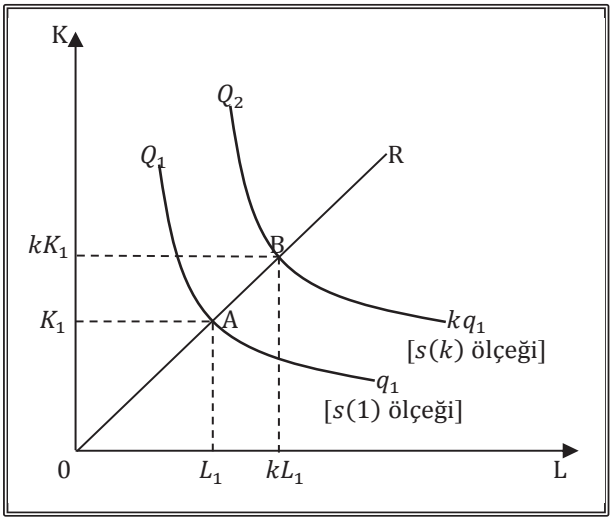
[20] Homotetik terimi, ilk olarak Ronald Shephard tarafından ortaya konulmuştur (Hanoch, 1975: 492).

[21] Eğer h, kesin artan bir fonksiyonsa, yani $q_1 > q_2$ iken $h(q_1) > h(q_2)$ ise, h'nin bir pozitif monotonik transformasyon olduğu söylenir (Varian, 1992: 18).

ölçeği $s(1)$ iken] q_1 kadar çıktı elde ediliyorken, üretim ölçeği k katına yükseltildiğinde [$s(k)$ olduğunda], çıktı da k katına çıkar (kq_1). Bu durum, Şekil 7'de q_1 eş ürün eğrisinin kq_1 şeklinde dışa doğru kayması şeklinde gösterilmiştir.

Buna karşılık, $hof(L, K) = Q$ homotetik üretim fonksiyonu için, $A(L_1, K_1)$ girdi bileşimiyle [üretim ölçeği $s(1)$ iken] Q_1 kadar çıktı elde ediliyorken, ölçek k katına yükseltildiğinde [$s(k)$ olduğunda], çıktı Q_2'ye çıkmıştır ($Q_2 > Q_1$). Bu durum, Şekil 7'de (q_1 eş ürün eğrisi ile çakışık olan) Q_1 eş ürün eğrisinin dışa doğru kayarak (kq_1 eş ürün eğrisi ile çakışık olan) Q_2 konumuna gelmesi şeklinde gösterilmiştir.

Şekil 7
Eş Ürün Eğrileri



Kaynak: Yazar tarafından düzenlenmiştir.

Sonuç olarak, f'nin doğrusal homojen olduğu durumda $h[f(\mathbf{x})] = Q$ transformasyonu sadece eş ürün eğrilerini "yeniden adlandırır", şekillerini değiştirmez (Truett ve Roberts, 1973: 981). Böylece, doğrusal homojen f üretim fonksiyonu ile homotetik hof üretim fonksiyonunun eş ürün eğrileri *çakışıktır*, diğer bir deyişle hof, f ile aynı eş ürün eğrilerini kullanır, fakat içerilen çıktı miktarları her iki fonksiyon için farklı olabilir (bkz., Varian, 1992: 18).

8.1. RUPL ve ürün eğrileri

Şekil 8'in (A) panelinde $hof(L,K) = Q$ homotetik klasik üretim fonksiyonuna ilişkin sayısız eş ürün eğrisinden, OR ışını üzerinde M ve T noktalarından geçen sadece ikisi, Q_m ve Q_t verilmiştir. Ölçek değişimi OR ışını boyunca gerçekleşir. RUPL gereği, OR ışını üzerinde 1'den büyük değerlerden başlayan $\varepsilon(L,K)$, gittikçe azalarak M noktasında 1 ve T noktasında da 0 değerini almış olsun. Şeklin (B) paneli, ölçek değişimi karşısında, çıktıdaki marjinal ve ortalama değişimi göstermektedir. $hof(L,K) = Q$ üretim fonksiyonu, Şeklin (C) panelinde, $s(k) = Q$ biçiminde ifade edilmiştir. Panel (C), ölçek değişimi karşısında toplam çıktıdaki değişimi sergilemektedir.

OR ışını üzerinde,

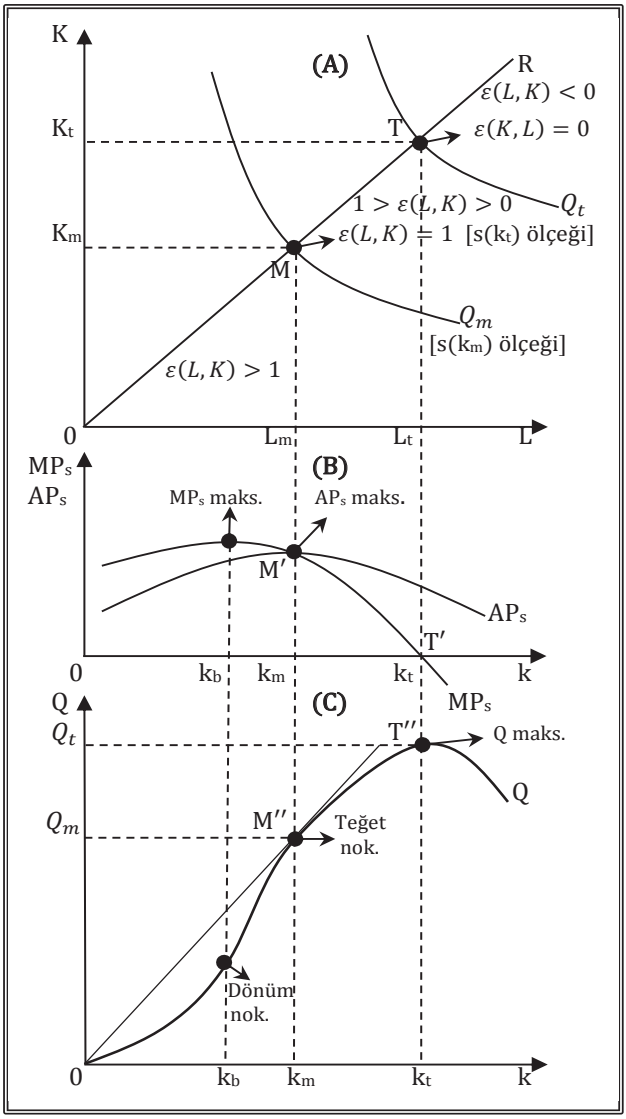
- OM aralığında $\varepsilon(L,K) > 1$'dir (Panel A). $\varepsilon(L,K) = \frac{MP_s}{AP_s} > 1$ ise, $MP_s > AP_s$'dir. Marjinal ve ortalama değerler arasındaki evrensel ilişki[22] gereği, $MP_s > AP_s$ iken AP_s artandır (Panel B). Marjinal ve toplam değerler arasındaki evrensel ilişki[23] gereği, MP_s'nin maksimum olduğu $s(k_b)$ ölçeğine kadar toplam çıktı (Q) *hızlanarak* artan, sonrasında *yavaşlayarak* artandır (Panel C).
- M noktasında, $\varepsilon(L,K) = 1$'dir (Panel A). $\varepsilon(L,K) = \frac{MP_s}{AP_s} = 1$ ise, M' noktasında $MP_s = AP_s$'dir ve bu durumda AP_s sabittir (Panel B). $MP_s = AP_s$ olması ise, orijinden M'' noktasına çizilen ışın ile M'' noktasının teğetinin çakışması anlamına gelir (Panel C).
- MT aralığında $1 > \varepsilon(L,K) > 0$'dır (Panel A). $1 > \frac{MP_s}{AP_s} > 0$ ise, $AP_s > MP_s > 0$'dır. $MP_s < AP_s$ olduğundan AP_s azalandır. AP_s, M' noktasına kadar artan ve bu noktadan sonra azalan olduğu için M' noktasında maksimumdur (Panel B). MP_s pozitif ve azalan olduğundan Q yavaşlayarak artmaya devam eder (Panel C).

---

22 Marjinal ve ortalama değer arasındaki evrensel kural şöyle işler:
Marjinal değer ortalama değerden büyükse, ortalama değer yükselir.
Marjinal değer ortalama değere eşitse, ortalama değer değişmez, sabit kalır.
Marjinal değer ortalama değerden küçükse, ortalama değer azalır.

23 Marjinal ve toplam değer arasındaki evrensel kural şöyle işler:
Marjinal değer pozitif ise toplam değer artar.
Marjinal değer pozitif ve artan ise, toplam değer *hızlanarak* artar.
Marjinal değer pozitif ve azalan ise, toplam değer *yavaşlayarak* artar.
Marjinal değer sıfır ise toplam değer sabit kalır.
Marjinal değer negatif ise toplam değer azalır.

Şekil 8
RUPL'dan ürün eğrilerinin türetilişi



Kaynak: Yazar tarafından düzenlenmiştir.

- T noktasında $\varepsilon(L,K)$ =0'dır (Panel A). $\varepsilon(L,K) = \frac{MP_s}{AP_s} = 0$ ise, $MP_s = 0$'dir (Panel B, T′ noktası) ($AP_s \neq 0$). $MP_s = 0$ iken, Q değişmez, sabit kalır (Panel C, T″ noktası).

- T noktasının ötesinde $\varepsilon(L,K) < 0$'dır (Panel A). $\varepsilon(L,K) = \frac{MP_s}{AP_s} < 0$ ise, $MP_s < 0 < AP_s$'dır. $MP_s < AP_s$ olduğundan AP_s azalmaya devam eder (Panel B). $MP_s < 0$ olduğundan Q azalır. Q, T$''$ noktasına kadar artan ve sonrasında azalan olduğu için T$''$ noktasında maksimumdur (Panel C).

Görüldüğü üzere, homotetik klasik üretim fonksiyonu, RUPL gereği, S biçiminde toplam ürün eğrisi türetir (bkz., Panel C).

8.2. Konturlar ve eş ürün eğrileri arasındaki ilişki

Lemma 2: $f(L,K) = q$ doğrusal homojen üretim fonksiyonu ve h pozitif monotonik transformasyon fonksiyonu olmak üzere, $hof(L,K) = Q$ fonksiyonunun tanım kümesindeki her (L,K) girdi bileşimi için, hof'un eş ürün eğrileri ile hof'a ilişkin konturların eğimleri eşittir.

İspat: $f(L,K) = q$ üretim fonksiyonu doğrusal homojense,

$f(kL,kK) = kf(L,K)$ eşitliğini sağlar. (15)

(15)'in k'ya göre türevi alınırsa [(7), (8), (9), (10) ve (11) adımlarındaki yol izlenerek],

$f_L L + f_K K = q$ elde edilir. (16)

(16) numaralı eşitlik, doğrusal homojen bir üretim fonksiyonuna ilişkin eş ürün eğrisinin denklemidir ve

$f(L,K) = f_L L + f_K K = q$ şeklinde yazılabilir. (17)

(17) numaralı denkleme ilişkin eş ürün eğrisinin eğimini bulalım. Bunun için, $f(L,K) = q$ eşitliğinin toplam diferansiyelini alalım.

$f_L dL + f_K dK = dq$

Eş ürün eğrisi üzerinde hareket edildikçe, çıktı miktarında bir değişiklik olmayacağı $(dq = 0)$ için,

$f_L dL + f_K dK = 0$'dır.

Buradan,

$f_K dK = -f_L dL$

ve böylece eğim

$\left.\frac{dK}{dL}\right|_{dq=0} = -\frac{f_L}{f_K}$ olarak bulunur. (18)

Şimdi, $f(L,K) = q$ doğrusal homojen üretim fonksiyonunu kullanarak, $Q = h[f(L,K)] = hof(L,K)$ homotetik klasik üretim fonksiyonunu türetelim. Burada h

pozitif monotonik transformasyondur. $hof(L,K) = Q$, $f(L,K) = q$ ile *biçim* olarak aynı eş ürün eğrilerini paylaştığı için herhangi bir noktada hof'un eğimi f'nin eğimine eşit olacaktır. Bu, matematiksel olarak da gösterilebilir: $hof(L,K) = Q$ fonksiyonuna ilişkin eş ürün eğrisinin eğimi (18) numaralı eşitlik gereğince,

$\frac{dK}{dL} = -\frac{(hof)_L}{(hof)_K}$'dır.

Zincir kuralına göre $(hof)_L = h_q f_L$ ve $(hof)_K = h_q f_K$ olduğundan hof fonksiyonuna dair eş ürün eğrisinin eğimi de,

$\frac{dK}{dL} = -\frac{h_q f_L}{h_q f_K} = -\frac{f_L}{f_K}$'dır ve

$$\left.\frac{dK}{dL}\right|_{dQ=0} = -\frac{f_L}{f_K} \text{ yazılır.} \tag{19}$$

Şimdi de, hof homotetik klasik üretim fonksiyonuna dair bir kontur eğrisinin eğimini hesaplayalım. Bunun için yapılması gereken, (13) numaralı kontur eğrisinin eğimi denkleminde bireysel f fonksiyonu yerine bileşik hof fonksiyonunu ikame etmektir:

$$\left.\frac{dK}{dL}\right|_{\varepsilon} = -\frac{(hof)_{LL}L+(1-\varepsilon)(hof)_L+(hof)_{KL}K}{(hof)_{LK}L+(hof)_{KK}K+(1-\varepsilon)(hof)_K} \tag{20}$$

(20) numaralı eşitlikte,

$$(hof)_{LL} = \left(h_q f_L\right)_L = h_{qq} f_L f_L + f_{LL} h_q$$

$$(hof)_L = h_q f_L$$

$$(hof)_{KL} = \left(h_q f_K\right)_L = h_{qq} f_L f_K + f_{KL} h_q$$

$$(hof)_{LK} = \left(h_q f_L\right)_K = h_{qq} f_K f_L + f_{LK} h_q$$

$$(hof)_{KK} = \left(h_q f_K\right)_K = h_{qq} f_K f_K + f_{KK} h_q$$

$$(hof)_K = h_q f_K$$

olduğundan,

$$\left.\frac{dK}{dL}\right|_{\varepsilon} = -\frac{\left(h_{qq} f_L^2 + f_{LL} h_q\right)L+(1-\varepsilon)h_q f_L+\left(h_{qq} f_L f_K + f_{KL} h_q\right)K}{\left(h_{qq} f_K f_L + f_{LK} h_q\right)L+\left(h_{qq} f_K^2 + f_{KK} h_q\right)K+(1-\varepsilon)h_q f_K} \text{ yazılabilir.} \tag{21}$$

(21)'de K ve L'leri parantez içlerine dağıtalım.

$$\left.\frac{dK}{dL}\right|_{\varepsilon} = -\frac{h_{qq} f_L^2 L + f_{LL} h_q L+(1-\varepsilon)h_q f_L + h_{qq} f_L f_K K + f_{KL} h_q K}{h_{qq} f_K f_L L + f_{LK} h_q L + h_{qq} f_K^2 K + f_{KK} h_q K+(1-\varepsilon)h_q f_K} \tag{22}$$

(22)'de pay ve paydayı h_q, f_L ve f_K parantezlerine alalım.

$$\left.\frac{dK}{dL}\right|_{\varepsilon} = -\frac{h_q(f_{LL}L+f_{KL}K)+f_L[h_{qq}f_LL+(1-\varepsilon)h_q+h_{qq}f_KK]}{h_q(f_{LK}L+f_{KK}K)+f_K[h_{qq}f_LL+h_{qq}f_KK+(1-\varepsilon)h_q]} \quad (23)$$

(23)'de pay ve paydadaki köşeli parantez içindeki terimler sadeleşir ve $f_{LL}L + f_{KL}K = f_{LK}L+f_{KK}K = 0$ olduğundan,[24]

$$\left.\frac{dK}{dL}\right|_{\varepsilon} = -\frac{f_L}{f_K} \text{ bulunur.} \quad (24)$$

Bu da, homotetik klasik üretim fonksiyonu hof'a ilişkin konturların, yine hof'un eş ürün eğrileriyle *çakıştığını* gösterir (bkz., Şekil 9).

8.3. Doğrusal genişleme yolu

Lemma 3: Lemma 2'nin, yani homotetik klasik üretim fonksiyonlarında konturlarla eş ürün eğrilerinin çakışmasının genel sonucu, veri girdi fiyat oranı için *genişleme yolunun*[25] (*isocline* ya da *expansion path, EP*) orijinden çıkan bir *ışın* olmasıdır.

İspat: hof'u, buradan itibaren $H(L,K) = Q$ ya da kısaca H şeklinde gösterelim ve Lemma 2'yi yeniden ele alalım:

$$\left.\frac{dK}{dL}\right|_{\varepsilon} = \left.\frac{dK}{dL}\right|_{dQ=0}$$

$$-\frac{H_{LL}L+(1-\varepsilon)H_L+H_{KL}K}{H_{LK}L+H_{KK}K+(1-\varepsilon)H_K} = -\frac{H_L}{H_K} \quad (25)$$

(25)'te içler dışlar çarpımı yapalım.

$$H_{LL}LH_K + (1-\varepsilon)H_LH_K + H_{KL}KH_K = H_{LK}LH_L + H_{KK}KH_L + (1-\varepsilon)H_KH_L \quad (26)$$

(26)'da $(1-\varepsilon)H_LH_K$ değerlerini sadeleştirelim ve içinde L çarpanı olan terimleri eşitliğin sol tarafında, K çarpanı olanları da sağ tarafında toplayıp, çarpan parantezine alalım.

$$L(H_{LL}H_K - H_{LK}H_L) = K(H_{KK}H_L - H_{KL}H_K)$$

Buradan,

$$\frac{H_{LL}H_K-H_{LK}H_L}{H_{KK}H_L-H_{KL}H_K} = \frac{K}{L} \text{ elde edilir.} \quad (27)$$

Diğer taraftan, veri girdi fiyat oranı (P_L/P_K) seviyesinde, $H(L,K) = Q$ fonksiyonunun genişleme yolu üzerindeki noktalar,

---

24 f fonksiyonu 1. dereceden homojen olduğu için, f'nin K ve L'ye göre 1. sıradan kısmi türevleri ilgili faktörün marjinal verimine eşittir $(f_L = MP_L, f_K = MP_K)$. Böylece, f fonksiyonunun bütün 2. sıradan kısmi türevlerinin değeri sıfırdır $(f_{LL} = f_{KL} = f_{LK} = f_{KK} = 0)$.

25 Genişleme yolu, her bir çıktı düzeyini minimum maliyetle üreten girdi bileşimlerinin geometrik yeridir.

$$MRTS = -\frac{dK}{dL} = \frac{H_L}{H_K} = \frac{P_L}{P_K} \tag{28}$$

eşitliğini sağlar. Bu durumda, P_L/P_K sabit olduğundan $MRTS = H_L/H_K$ da sabittir. O halde genişleme yolunun eğimi, $MRTS = H_L/H_K$ sabit $[d(H_L/H_K) = 0]$ iken, dK/dL'ye eşittir. Bu değeri elde etmek için H_L/H_K kesrinin toplam diferansiyelini alalım.

$$d\left(\frac{H_L}{H_K}\right) = \left(\frac{H_{LL}H_K - H_{KL}H_L}{H_K^2}\right)dL + \left(\frac{H_{LK}H_K - H_{KK}H_L}{H_K^2}\right)dK$$

$d\left(\frac{H_L}{H_K}\right) = 0$ olduğundan,

$$-\left(\frac{H_{LK}H_K - H_{KK}H_L}{H_K^2}\right)dK = \left(\frac{H_{LL}H_K - H_{KL}H_L}{H_K^2}\right)dL \text{ ve}$$

$$\sigma = \left.\frac{dK}{dL}\right|_{d\left(\frac{H_L}{H_K}\right)=0} = \frac{H_{LL}H_K - H_{KL}H_L}{H_{KK}H_L - H_{LK}H_K} \text{ bulunur.} \tag{29}$$

Burada, σ genişleme yolunun eğimini simgelemektedir. Homotetik fonksiyonlar için $H_{KL} = H_{LK}$ olduğundan[26], (29)'un sağ ucundaki ifade (27)'nin sol tarafındaki ifadeye eşittir. O halde, (27)'yi (29)'da ikame edebiliriz.

$$\sigma = \left.\frac{dK}{dL}\right|_{d\left(\frac{H_L}{H_K}\right)=0} = \frac{K}{L} \tag{30}$$

Burada, $\frac{K}{L}$ orijinden çıkan bir ışının eğimine eşittir. Böylece, (30) numaralı eşitlik $H(L, K) = Q$ fonksiyonuna ilişkin konturların, eş ürün eğrileri ile çakışması halinde, veri bir girdi fiyat oranı (P_L/P_K) için genişleme yolunun orijinden geçen bir doğru, diğer deyişle *ışın* olduğunu gösterir.[27]

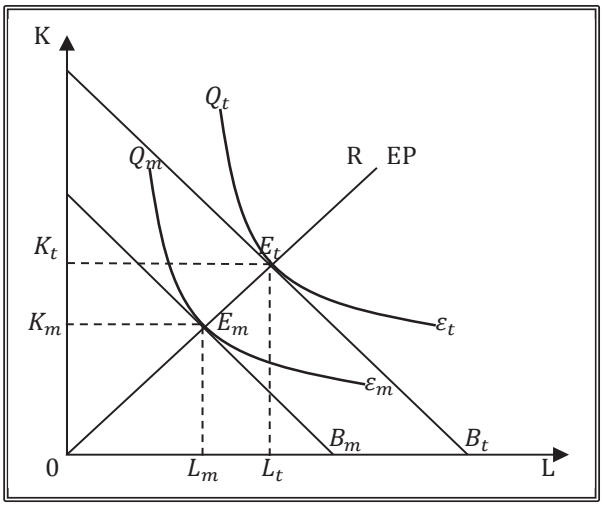
Şekil 9, H homotetik klasik üretim fonksiyonunun, birbiri ile çakışan sınırsız sayıdaki kontur ve eş ürün eğrilerinden sadece ikişer tanesini göstermektedir. ε_m ve ε_t kontur eğrileri ile sırasıyla Q_m ve Q_t eş ürün eğrilerinin çakıştığı durumda, B_m ve B_t bütçe doğrularının eğimi ile temsil edilen veri nispi fiyat seviyesi için, EP genişleme yolu da OR ışını ile çakışmaktadır. Genişleme yolunun bu şekilde orijinden geçen bir doğru olması, bir üretim süreci boyunca RTS ve EOS'nin birbiri ile *ilişkilendirilebilmesini* mümkün kılar.

---

26 Örneğin, $H = A^2L^{2\alpha}K^{2\beta}$ (bkz., Chiang, 1999: 405) homotetik fonksiyonu için,
$H_{KL} = A^2 2\alpha L^{2\alpha-1} 2\beta K^{2\beta-1}$ ve
$H_{LK} = A^2 2\alpha L^{2\alpha-1} 2\beta K^{2\beta-1}$ dir.

27 Homojen üretim fonksiyonları için de genişleme yolu orijinden çıkan bir ışındır (bkz., Chiang, 1999: 402-03).

Şekil 9
Genişleme Yolunun Doğrusal Olması

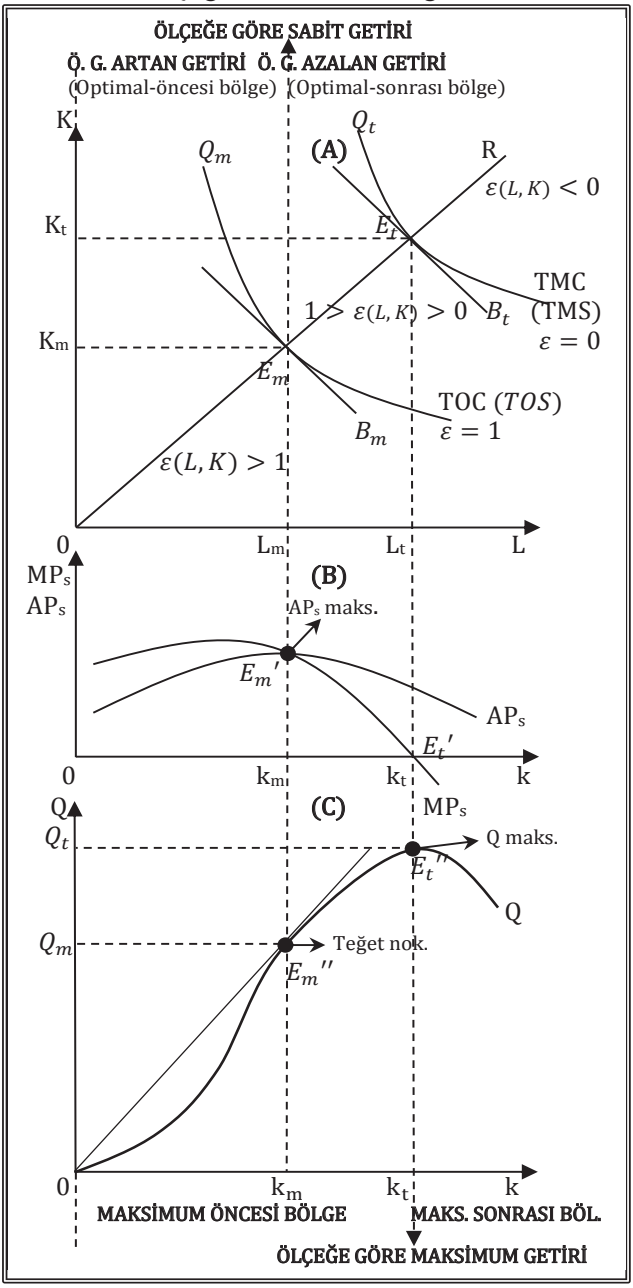


Kaynak: Yazar tarafından düzenlenmiştir.

8.4. Ölçeğe göre getiri bölgeleri

Homotetik klasik üretim fonksiyonlarında kontur ve eş ürün eğrilerinin çakışması aynı zamanda TOC ve TMC'nin de H fonksiyonuna ait birer eş ürün eğrisi ile çakıştığı anlamına gelir. Şekil 10'un (A) panelinde, H fonksiyonuna ilişkin TOC ile çakışan Q_m eş ürün eğrisinin temsil ettiği $s(k_m)$ ölçeği, aynı zamanda *teknik olarak optimal ölçektir* (*technical optimal scale, TOS*). Benzer şekilde, TMC ile çakışan Q_t eş ürün eğrisinin temsil ettiği $s(k_t)$ ölçeği de, aynı zamanda *teknik olarak maksimal ölçektir* (*technically maximal scale, TMS*) (bkz., Frisch, 1965: 122-23). Böylece, orijinden çıkan bir OR ışını boyunca, TOC ve TMC'nin, OR ışınını kesim noktaları esas alınarak ölçeğe göre hem optimal-öncesi ve sonrası hem de maksimal-öncesi ve sonrası getiri bölgeleri birbirinden net bir şekilde ayrılabilir:

Şekil 10
Ölçeğe Göre Getiri Bölgeleri



Kaynak: Yazar tarafından düzenlenmiştir.

Buna göre, girdi fiyat oranı veri iken ($B_m \parallel B_t$),

- $\varepsilon(L,K) > 1$ olduğu $0 - s(k_m)$ ölçek aralığı (yani, TOS'a kadar), ölçeğe göre teknik olarak optimal-öncesi bölgedir ve bu bölgede ölçeğe göre *artan* getiriler geçerlidir.
- $\varepsilon = 1$ olduğu $s(k_m)$, yani teknik olarak optimal ölçekte (TOS), ölçeğe göre (bir anlık[28]) *sabit* getiriler geçerlidir.
- $0 < \varepsilon(L,K) < 1$ olduğu $s(k_m) - s(k_t)$ ölçek aralığı (yani, TOS ile TMS arası), ölçeğe göre teknik olarak optimal-sonrası bölgedir ve bu bölgede ölçeğe göre *azalan* getiriler geçerlidir.

Diğer taraftan,

- $\varepsilon(L,K) > 0$ olduğu $0 - s(k_t)$ ölçek aralığı (yani, TMS'ye kadar), ölçeğe göre teknik olarak maksimal-öncesi bölgedir.
- $\varepsilon = 0$ olduğu $s(k_t)$, yani teknik olarak maksimal ölçekte (TMS), ölçeğe göre *maksimum* getiri elde edilir.
- $\varepsilon(L,K) < 0$ olduğu $s(k_t)$ sonrası ölçek aralığı, ölçeğe göre teknik olarak maksimal-sonrası bölgedir.

8.5. RTS-EOS ilişkisi

Ölçeğe göre getiri bölgeleri, daha önce de belirtildiği gibi, orijinden çıkan bir ışın boyunca incelenir. Pozitif ve negatif EOS aralıkları ise, LAC eğrisinin minimum noktası referans alınarak belirlenir. LAC, ilgili fonksiyonun genişleme yolundan elde edilir. Zira, genişleme yolu, her zaman ilgili çıktı miktarını *minimum* maliyetle üreten girdi bileşimlerini içerir. O halde, bir üretim fonksiyonu bağlamında RTS ile EOS'nin ilişkilendirilebilmesi için, ilgili üretim fonksiyonunun genişleme yolunun da orijinden çıkan bir ışın olması gerekir. Diğer bir deyişle, RTS kavramı, sadece doğrusal genişleme yollarına sahip olan üretim fonksiyonlarına uygulandığında, açık bir şekilde maliyetlerle (dolayısıyla EOS kavramı ile) ilişkilendirilebilir (Bassett, 1969: 190). Bu tür bir özellik, yalnızca homojen ve homotetik üretim fonksiyonlarında mevcuttur. Klasik üretim fonksiyonları homojen olamazlar ama homotetik olabilirler. Buna karşılık, homotetik olmayan klasik üretim fonksiyonları da vardır. O nedenledir ki, klasik üretim fonksiyonu bağlamında RTS-EOS ilişkisi, homotetik-homotetik olmayan ayrımına gidilerek incelenmelidir.

Lemma 4: $H(\mathbf{x}) = Q$ homotetik klasik üretim fonksiyonu çerçevesinde, passus katsayısı ile toplam maliyet esnekliği ters orantılıdır. Yani, $\varepsilon(\mathbf{x}) > 1$ iken $\kappa(Q) < 1$; $\varepsilon(\mathbf{x}) = 1$ iken $\kappa(Q) = 1$ ve $\varepsilon(\mathbf{x}) < 1$ iken $\kappa(Q) > 1$'dir.

İspat: Gould ve Ferguson (1980: 195-199), iki faktörlü (L,K) durum için passus katsayısı ve maliyet esnekliğinin matematiksel ilişkisini ortaya

[28] Bkz., Truett ve Truett, 1990: 414.

koymuşlardır. Bu matematiksel süreç daha genel olarak, n faktörlü duruma genişletilebilir:

$H(\mathbf{x}) = Q$ homotetik klasik üretim fonksiyonu için passus denklemi,

$\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} H_i \frac{x_i}{Q}$ şeklinde yazılabilir. (31)

P_i, x_i'nin fiyatı olmak üzere, (31)'in sağ tarafını $\frac{P_i}{P_i}$ ile çarpalım.

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{H_i}{P_i} \frac{x_i P_i}{Q} \quad (32)$$

(32)'de $\sum_{i=1}^{n} \frac{H_i}{P_i}$ ifadesi $1/LMC$'ye[29] ve $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i P_i}{Q}$ ifadesi de LAC'ye[30] eşittir. Buradan,

$\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{LMC} LAC = \frac{LAC}{LMC}$ olarak elde edilir. (33)

(33) ve ($14''$) birlikte ele alındığında,

$\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{\kappa(Q)}$ bulunur. (34)

Lemma 5: $H(\mathbf{x}) = Q$ homotetik klasik üretim fonksiyonu çerçevesinde, MP_s ile LMC ve AP_s ile de LAC ters orantılı olarak değişir. Biri artarken diğeri azalır ya da biri azalırken diğeri artar.

İspat: $\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{MP_s}{AP_s}$ ve $\kappa(Q) = \frac{LMC}{LAC}$ değerlerini (34)'te ikame edelim.

$\frac{MP_s}{AP_s} = \frac{LAC}{LMC}$ eşitliği elde edilir. (35)

Şimdi, $H(L, K) = Q$ homotetik klasik üretim fonksiyonu bağlamında, yukarıda elde edilen matematiksel sonuçları kullanarak, Şekil 8'deki üretim ilişkilerinden hareketle Şekil 11'de maliyet eğrilerini elde edelim ve EOS bölgelerini belirleyelim.[31]

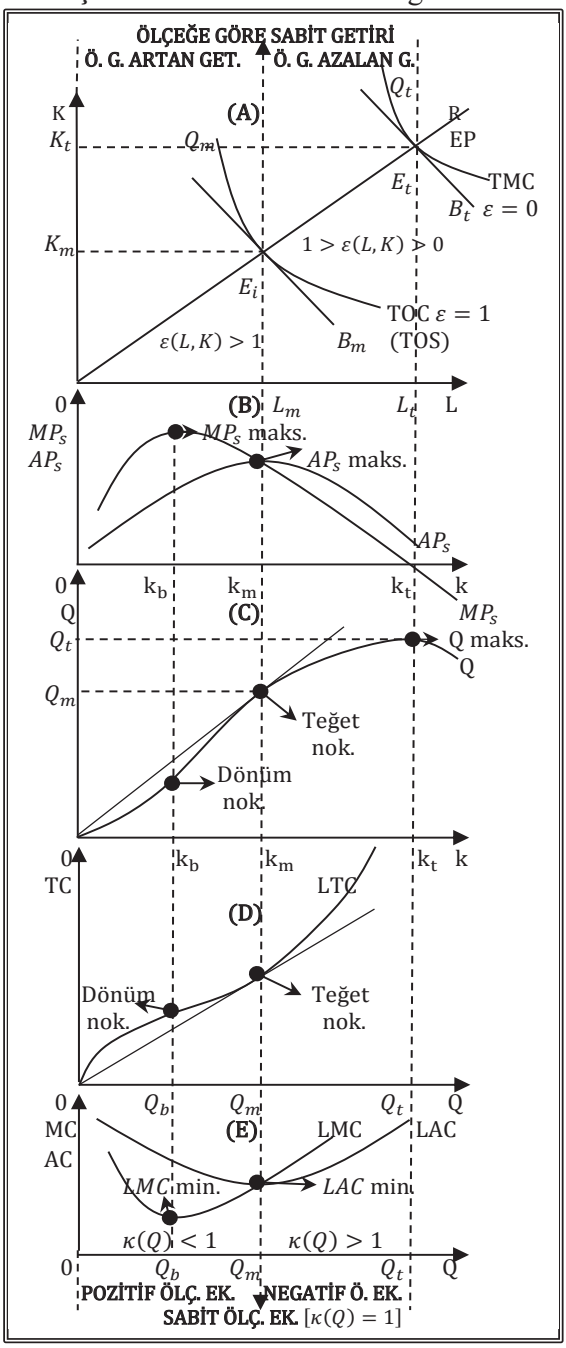
---

[29] $H_i = \frac{dH(\mathbf{x})}{dx_i} = \frac{dQ}{dx_i}$ olduğundan $\sum_{i=1}^{n} \frac{H_i}{P_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dQ}{P_i dx_i} = \frac{dQ}{dC} = \frac{1}{LMC}$'dir.

[30] $\sum_{i=1}^{n} x_i P_i = C$ ve $\frac{C}{Q} = LAC$'dir.

[31] Amaç, U biçimli LAC eğrisini elde etmek ve böylece EOS bölgelerini (pozitif-negatif) ayırt etmek olduğundan, maksimal ölçek (TMS) ve sonrası ihmal edilmiştir.

Şekil 11: RTS ve EOS Bölgeleri



Kaynak: Yazar tarafından düzenlenmiştir.

- Lemma 4'e göre, Şekil 11-Panel (A)'da $\varepsilon(L,K) > 1$ iken, Panel (E)'de $\kappa(Q) < 1$'dir. Yani, $\frac{LMC}{LAC} < 1$ ve $LMC < LAC$'dir. Bu, LMC eğrisinin LAC'nin *altında* seyredeceği anlamına gelir. Lemma 5 gereği MP_s ile LMC ters orantılı olduğuna göre, MP_s, $0 - s(k_b)$ ölçek aralığında arttığı için, LMC bu ölçek aralığına karşılık gelen $0 - Q_b$ çıktı aralığında *azalır*, maksimum olduğu $s(k_b)$ ölçeğine karşılık gelen Q_b çıktı seviyesinde *minimum* olur ve azalmaya başladığı $s(k_b) - s(k_m)$ ölçek aralığına karşılık gelen $Q_b - Q_m$ çıktı aralığında *artmaya* başlar (Panel B ve E). Yine Lemma 5'e göre, LAC de AP_s ile ters orantılıdır. LAC, AP_s'nin arttığı $0 - s(k_m)$ ölçek aralığına karşılık gelen $0 - Q_m$ çıktı aralığında *azalır* (Panel B ve E). Diğer taraftan, marjinal ve toplam değerler arasındaki evrensel ilişkiye göre, LMC, $0 - Q_b$ çıktı aralığında pozitif ve azalan olduğundan, LTC *yavaşlayarak artar*, $Q_b - Q_m$ çıktı aralığında pozitif ve artan olduğundan, LTC *hızlanarak artar* (Panel E ve D).
- Lemma 4'e göre, Panel (A)'da $\varepsilon = 1$ iken, Panel (E)'de $\kappa(Q) = 1$'dir. Yani, $\frac{LMC}{LAC} = 1$ ve $LMC = LAC$'dir. Bu, $s(k_m)$ (=TOS) ölçeğine karşılık gelen çıktı seviyesi Q_m'de LMC ve LAC eğrilerinin kesiştiği anlamına gelir (Panel E). Diğer taraftan, marjinal ve toplam değerler arasındaki evrensel ilişkiye göre, $LMC = LAC$ olduğu çıktı seviyesi Q_m için, orijinden çıkıp LTC eğrisine giden ışın ile LTC'nin ilgili çıktı seviyesindeki teğeti çakışır (Panel E ve D).
- Lemma 4'e göre, Panel (A)'da $\varepsilon(L,K) < 1$ iken, Panel (E)'de $\kappa(Q) > 1$'dir. Yani, $\frac{LMC}{LAC} > 1$ ve $LMC > LAC$'dir. Bu, LMC eğrisinin LAC'nin *üstünde* seyredeceği anlamına gelir. Lemma 5 gereği MP_s ile LMC ters orantılı olduğuna göre, MP_s, $s(k_m) - s(k_t)$ ölçek aralığında azaldığı için, LMC, karşılık gelen $Q_m - Q_t$ çıktı aralığında *artar*. Yine Lemma 5'e göre, LAC de AP_s ile ters orantılıdır. LAC, AP_s'nin azaldığı $s(k_m) - s(k_t)$ aralığına karşılık gelen $Q_m - Q_t$ aralığında *artar* (Panel B ve E). Diğer taraftan, marjinal ve toplam değerler arasındaki evrensel ilişkiye göre, LMC, $Q_m - Q_t$ çıktı aralığında pozitif ve artan olduğundan, LTC bu aralıkta *hızlanarak artmaya* devam eder (Panel E ve D).

Böylece, Şekil 11'e göre homotetik klasik üretim fonksiyonu için RTS-EOS ilişkisi aşağıdaki gibi genelleştirilebilir:

- $\varepsilon(\mathbf{x}) > 1$ iken (yani ölçeğe göre *artan* getiriler varken), $\kappa(Q) < 1$'dir (yani, LAC azalandır, diğer bir deyişle, *pozitif* EOS vardır).
- $\varepsilon(\mathbf{x}) = 1$ iken (yani ölçeğe göre *sabit* getiriler varken), $\kappa(Q) = 1$'dir (yani, LAC bir *anlık* yataydır, diğer bir deyişle, *sabit* EOS vardır).
- $\varepsilon(\mathbf{x}) < 1$ iken (yani ölçeğe göre *azalan* getiriler varken), $\kappa(Q) > 1$'dir (yani, LAC artandır, diğer bir deyişle, *negatif* EOS vardır).

9. Homotetik olmayan klasik üretim fonksiyonu durumu

Yukarıda da belirtildiği gibi, klasik üretim fonksiyonları homotetik olabilir de olmayabilir de. Eğer klasik üretim fonksiyonu homotetik değilse, genişleme yolu orijinden çıkan bir ışın olmaz.[32] Bu durumda, iki kavram birbiriyle ilişkilendirilemez ve dolayısıyla eşdeğerlikleri de söz konusu olmaz. Kısacası, homotetik olmayan klasik üretim fonksiyonu halinde RTS-EOS ilişkisi, *belirsizdir* (bkz., Truett ve Truett, 1990: 416-17).

10. Özet ve sonuç

Çeşitli kaynaklarda *eşanlamlı* olarak kullanılmalarına rağmen, RTS ve EOS aynı iki kavram olmadıkları gibi, çok özel koşulların bir araya gelmesi haricinde eşdeğer bile değildirler. RTS, *üretim* ölçeğini esas alır ve orijinden çıkan bir ışın boyunca tanımlıdır. Üretim ölçeği bu ışın üzerinde değiştikçe, oransal ölçek değişimi karşısında çıktının oransal değişimini ölçer. EOS ise, hem üretim hem de *çıktı* ölçeğini[33] esas alır ve bir genişleme yolu üzerinde tanımlıdır.[34] Ölçek değiştikçe, oransal çıktı değişimi karşısında, ilgili genişleme yolundan elde edilen toplam maliyetin oransal değişimini ölçer.

Maliyet minimizasyonu, genişleme yolu boyunca hareket etmeyi gerektirir. Genişleme yolları orijinden çıkar ve genelde eğrisel, istisnai olarak doğrusaldırlar. Bununla birlikte, RTS sadece orijinden çıkan bir ışın boyunca tanımlı olduğundan eğrisel bir genişleme yolu üzerinde işlemez. Dolayısıyla, eğrisel bir genişleme yolu üzerinde RTS ve EOS'nin yerel eşdeğerliği araştırılamaz. Genişleme yolunun, üzerinde RTS ve EOS'nin her ikisinin birden tanımlı olduğu tek biçimi orijinden geçen doğrudur. Ancak ve ancak, genişleme yolu orijinden çıkan bir ışın olduğunda,

- Ölçeğin oransal değişimi karşısında, ortaya çıkan oransal çıktı değişimi belirlenerek RTS,
- aynı oransal çıktı değişimi karşısında, (aynı oransal ölçek değişiminin neden olduğu) oransal maliyet değişimi belirlenerek de EOS, yerel olarak tespit edilebilir ve karşılaştırılabilir.

---

32 Homotetik olmayan üretim fonksiyonları için, genellikle genişleme yolunun, orijinden çıkan bir ışınla kesişmediğinin ispatı için bkz., Hanoch (1975).

33 Bu çalışmada çıktı ölçeği tercih edilmiştir.

34 Zira, LAC'yi elde etmek için gerekli tüm maliyet ve çıktı verisi genişleme yolu üzerinde mevcuttur.

$$\overbrace{\text{Üretim ölçeğindeki oransal değişim} \Rightarrow \text{Çıktıdaki (çıktı ölçeğindeki) oransal değişim}}^{\text{RTS}} \Rightarrow \text{Maliyetteki oransal değişim}$$

$$\underbrace{\text{Çıktıdaki (çıktı ölçeğindeki) oransal değişim} \Rightarrow \text{Maliyetteki oransal değişim}}_{\text{EOS}}$$

Genişleme yolunun doğrusal olması, homojen ve homotetik üretim fonksiyonlarına özgüdür. Genel anlamda klasik üretim fonksiyonları homojen olamazlar ama homotetik olabilirler, ayrıca homotetik olmayan klasik üretim fonksiyonları da vardır. Dolayısıyla, genişleme yolu doğrusal olan klasik üretim fonksiyonu olarak elimizde sadece homotetik klasik üretim fonksiyonu kalır. Homotetik klasik üretim fonksiyonları için, bir eş ürün eğrisi ile çakışan TOC, TOS'u temsil eder ve RTS bölgelerinin birbirinden net olarak ayrılmasını sağlar. Passus katsayısının $[\varepsilon(\mathbf{x})]$, toplam maliyet esnekliğinin $[\kappa(Q)]$ çarpımsal tersine eşit olması da RTS'nin artan $[\varepsilon(\mathbf{x}) > 1]$, sabit $[\varepsilon(\mathbf{x}) = 1]$ ve azalan $[\varepsilon(\mathbf{x}) < 1]$ olduğu ölçeğe karşılık gelen çıktı bölgelerinde EOS'nin sırasıyla pozitif $[\kappa(Q) < 1]$, sabit $[\kappa(Q) = 1]$ ve negatif $[\kappa(Q) > 1]$ olması anlamına gelir. Homotetik klasik üretim fonksiyonu bağlamında RTS ve EOS'nin bu eşdeğerliği sadece aşağıdaki özel koşulların bir araya gelmesiyle olasıdır:

- RTS ve EOS yerel olarak (nokta bazlı) tanımlanmaktadır.
- Dışsal ekonomiler (reel ve parasal), içsel parasal ekonomiler ve öğrenme ekonomileri vs. gibi LAC'yi kaydıran etmenler yoktur.

İktisadi olarak, sabit girdi fiyatları durumunda, bir işletmenin homotetik klasik üretim fonksiyonuna sahip olması, ilgili işletmenin üretim sürecinin başlarında üretim ölçeği/çıktı ölçeği büyüdükçe, ölçeğe göre artan getiriler ile eş zamanlı olarak pozitif ölçek ekonomilerini, üretim ölçeği/çıktı ölçeği belirli bir seviyeye ulaştığında ölçeğe göre sabit getiriler ile eş zamanlı olarak sabit ölçek ekonomilerini ve üretim ölçeği/çıktı ölçeği daha da genişletilmeye devam edildikçe ölçeğe göre azalan getiriler ile eş zamanlı olarak negatif ölçek ekonomilerini tecrübe edeceğini ifade eder.

Klasik üretim fonksiyonu homotetik değilse, genişleme yolu bir ışınla çakışmayacağı, diğer bir deyişle genişleme yolu doğrusal olmayacağı için RTS ve EOS kavramlarını ilişkilendirmek mümkün değildir.

Sonuç olarak, klasik üretim fonksiyonlarında RTS-EOS eşdeğerliği, fonksiyonun aynı zamanda homotetik olması ve yukarıdaki koşulların sağlanması ile olasıdır. Bu da, RTS-EOS eşdeğerliğinin, klasik üretim fonksiyonlarında geneli değil, tersine oldukça dar kapsamlı ve istisnai bir durumu yansıttığını gösterir.

Kaynaklar

AYERS, R.M. and R.A. COLLINGE (2005), *Microeconomics,* Enhanced Edition, Pearson, New Jersey.

BASSETT, L. (1969), "Returns to Scale and Cost Curves", *Southern Economic Journal*, 36(2), 189-90.

BAUMOL, W.J. and A.S. BLINDER (1986), *Economics*, Third Edition, Harcourt Brace Jovanovich, Orlando.

BEGG, D., S. FISCHER and R. DORNBUSCH (1997), *Economics*, Fifth Edition, Alkım, İstanbul.

BELL, C.R. (1988), "Economies of, versus Returns to, Scale: A Clarification", *Journal of Economic Education,* 19(4), 331-35.

BELL, C.R. (1990), "Regions of the Production Function, Returns, and Economies of Scale: A Reply", *Journal of Economic Education,* 21(4), 420-21.

BULMUŞ, İ. (1998), *Mikroiktisat*, Dördüncü Baskı, Cantekin Matbaası, Ankara.

CARLSON, S. (1939), *A Study on the Pure Theory of Production,* P.S. King and Sons, London.

CASE, K.E. and R.C. FAIR (1994), *Principles of Microeconomics*, Third Edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

CHIANG, A.C. (1999), *Matematiksel İktisadın Temel Yöntemleri*, (Çev. O. Aydoğuş, M. Sarımeşeli), Dördüncü Baskı, Gazi, Ankara.

COLANDER, D.C. (2006), *Microeconomics*, Sixth Edition, McGraw-Hill Irwin, New York.

DONDURAN, M. (2013), *İleri Mikro İktisat*, Avcıol, İstanbul.

EATON, B.C. and D.F. EATON (1988), *Microeconomics,* W.H. Freeman, New York.

FERGUSON, C.E. (1969), *The Neoclassical Theory of Production and Distribution*, Cambridge University, Cambridge.

FORSUND, F.R. (1971), "Returns to Scale and the Average Cost Curve: Comment", *Swedish Journal of Economics,* 73(2), 259-60.

FRISCH, R. (1965), *Theory of Production*, D. Reidel, Dordrecht.

GELLES, G.M. and D.W. MITCHELL (1996), "Returns to Scale and Economies of Scale: Further Observations", *Journal of Economic Education*, 27(3), 259-61.

GOULD, J.P. and C.E. FERGUSON (1980), *Microeconomic Theory*, Fifth Edition, R.D. Irwin, Homewood.

HANOCH, G. (1975), "The Elasticity of Scale and the Shape of Average Costs", *American Economic Review*, 65(3), 492-97.

JEHLE, G.A. and P.J. RENY (2011), *Advanced Microeconomic Theory*, Third Edition, Pearson, Hampshire.

JOHNSON, W.E. (1913), "The Pure Theory of Utility Curves", *Economic Journal*, 23(92), 483-513.

KING, J.T. and M.A. YANOCHIK (2013), "The Equivalence of Economies and Returns to Scale Revisited: Nonlinear Expansion Paths and the Definition of Scale", *Journal of Economics and Finance Education,* 12(1), 74-80.

KRUGMAN, P. and R. WELLS (2012), *Mikro İktisat,* (Çev. Ed. S. Işık, M. Aslan, C. Dişbudak vd.), Palme, Ankara.

LANCASTER, K. (1974), *Introduction to Modern Microeconomics,* Second Edition, Rand McNally, Chicago.

LEVENSON, A.M. and B.S. SOLON (1971), *Essential Price Theory*, Second Edition, Holt, Rinehart, and Winston, New York.

McKENZIE, R.B. and D.R. LEE (2006), *Microeconomics for MBAs*, Cambridge University, Cambridge.

PRAGER, J. (1993), *Applied Microeconomics,* R.D. Irwin, Homewood.

SAMUELSON, P.A. and W.D. NORDHAUS (2010), *Microeconomics,* Nineteenth Edition, McGraw-Hill, New York.

SANDMO, A. (1970), "Returns to Scale and the Average Cost Curve", *Swedish Journal of Economics*, 72(2), 149-52.

SANDMO, A. (1971), "Returns to Scale and the Average Cost Curve: Reply", *Swedish Journal of Economics*, 73(2), 261-62.

SEYİDOĞLU, H. (2006), *İktisat Biliminin Temelleri*, Güzem Can, İstanbul.

SOLBERG, E.J. (1982), *Intermediate Microeconomics*, Business, Plano.

TONE, K. and B.K. SAHOO (2003), "Scale, Indivisibilities and Production Function in Data Envelopment Analysis", *International Journal of Production Economics,* 84(2), 165-92.

TRUETT, D.B. and B. ROBERTS (1973), "Classical Production Functions, Technical Optimality, and Scale Adjustments of the Firm", *American Economic Review*, 63(5), 975-82.

TRUETT, L.J. and D.B. TRUETT (1990), "Regions of the Production Function, Returns, and Economies of Scale: Further Considerations", *Journal of Economic Education,* 21(4), 411-19.

VARIAN, H.R. (1992), *Microeconomic Analysis*, Third Edition, W.W. Norton, New York.

Extended summary

The relationship between RTS and EOS in the context of the classical production function: a pure theoretical analysis

Abstract

The concepts of *returns to scale (RTS)* and *economies of scale (EOS)* are often confused with one another. These concepts are used in many sources *equivalently*, and even *synonymously*. It is clear that the terms RTS and EOS are not synonymous, but there is no clarity to the same degree regarding the equivalence of these concepts. Whether RTS and EOS are equivalent or not can be analysed only in the context of a production function. The relationship between RTS and EOS in many sources is often examined on the basis of homogeneous production functions. On the other hand, it is observed that the studies in the context of the classical production function, which is widely used in contemporary economics, are inadequate. This study arose from the lack of research in question in the literature. It has been proved the preposition that *the concepts of RTS and EOS are equivalent in the context of the homothetic classical production function* mathematically and analytically.

Key words: Scale, returns to scale, economies of scale, homogeneous, homothetic, classical production function.

The concept of RTS can be defined globally or locally. While the local definition (pointwise) assumes that the scale elasticity of output (the passus coefficient) is *variable* along a ray from the origin, it is considered as *fixed* in the global definition. In this study, the local definition is taken into account due to the fact that the relationship between RTS and EOS is examined in the context of the *classical* production function.

RTS occurs inside the company and refers to the *technical* relationship between physical inputs and output. EOS has got a monetary aspect but RTS has not. In that case, in order to investigate the relationship between RTS and EOS, first of all, by holding input prices constant, the influence of price changes on EOS has to be eliminated. There remains *internal real* EOS. RTS affects precisely this part of EOS.

However, this assumption is not sufficient to be able to relate RTS to EOS. RTS is defined along a ray from the origin while EOS is obtained from an expansion path. The expansion path passes through the origin, but it does not have to be linear. Nevertheless, to be able to relate RTS to EOS, it is necessary that the ray and the expansion path coincide with one another, that is to say, the expansion path has to be a ray from the origin. Both the homogeneous function and the homothetic function have got such a feature. But, the *classical* production function cannot be homogeneous. There remains the homothetic production function. The classical production function may or may not be homothetic.

The regular ultra passum law (RUPL) enabled Frisch (1965) to define *contour-lines*. For a classical production function, one contour-line is the *technically optimal contour* (TOC), and another is the *technically maximal contour* (TMC). If the classical production function is homothetic, then the TOC and the TMC for this function coincide with an isoquant curve, separately. In this case, the TOC and the TMC represent *the technically optimal scale* (TOS) and *the technically maximal scale* (TMS) for the production function, respectively. By using the TOS (the TMS), the technically pre-optimal and post-optimal (the technically pre-maximal and post-maximal) regions of production with respect to the scale can be clearly distinguished from one another. On the other hand, in the case of homothetic classical production function, the passus coefficient $[\varepsilon(\mathbf{x})]$ is equal to the reciprocal of the total cost elasticity of output $[\kappa(q)]$. This ensures that the regions of increasing, constant, and decreasing RTS correspond to the regions of positive, constant, and negative EOS, respectively. If the classical production function is not homothetic, owing to the fact that the ray and the expansion path will not coincide with one another, it is not possible to relate the concept of RTS to the concept of EOS.

In this article, under the conditions mentioned above and in the context of the homothetic classical production function, the equivalence of RTS and EOS has been shown mathematically and analytically.